1. BÖLÜM
MATEMATİĞE GİRİŞ

Bu bölümde matematiğin ilk konularında bazı işlemleri yapabilmek için temel teşkil edecek ayrıntılar işlenecektir. Ama bu giriş bölümünde bahsedilen kısımlar daha sonraki bölümlerde kapsamlı şekilde tekrar verilecektir. Ayrıca bu kısımlarda matematikte kullanılan tanım, tanımsız terim, teorem, aksiyom, lemma gibi kavramlar izah edilecektir.

MATEMATİĞE GİRİŞ

Matematik insanlığın yaratılışından beri, insanların ilgisini çeken ve insanların sürekli araştırdıkları çok önemli bir bilimdir. Günümüzde başta mühendislik ve teknoloji olmak üzere işletme, iktisat, siyaset, sağlık, spor, turizm gibi sektörlerde önemli bir yer işgal eder.

Önce matematiğin amacını anlamaya çalışalım:

Matematik;

1. Sayılar ve sayılar arasındaki ilişkileri inceleyen,
2. Cisimlerin şekillerini uzunluk, alan, hacim gibi kavramlarla araştıran,
3. Şekilleri bağıntı ve fonksiyon olarak ele alıp onları analiz eden,
4. İşletme ve ekonomi biliminin sayısal ihtiyacını karşılayan,
5. Bir takım sayısal verilerden yararlanarak daha anlamlı sonuçlar çıkarmak için İstatiksel sonuçlar bulan,
6. Mühendisliklerin sayısal ihtiyaçlarını karşılayan,
7. İnsanların ihtiyacına göre karar vermek için cisimlerin en verimli şekilde kullanma (yapay zeka) fonksiyonları oluşturan,
8. Allah'ın mühendislik bilimini inceleyen

bilimdir.

Matematikte temel teşkil edecek bazı kavramlar çok önemlidir. Şimdi bu kavramları tanımlayalım:

Tanım: Bir ifadeyi izah etmek için kullandığımız terimlerdir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Tanımsız Terimler: Tanıma ihtiyaç duyulmayacak kadar açık terimlere tanımsız terimler denir. Nokta, doğru, düzlem gibi bazı terimler tanımsız terimlerdir.

Teorem: Doğruluğu ispatlanmış hipotezlerin hükümlerine teorem denir. Teoremlerin doğruluğunu ispatlamak için;

1. Doğrudan ispat yöntemi
2. Olmayana ergi (karşıt–ters) ispat yöntemi
3. Çelişki yoluyla ispat yöntemi
4. Matematiksel tümevarım yöntemi gibi yöntemler kullanılır. Bu yöntemler, bölümün sonunda bahsedilecektir.

Aksiyom: İspata gerek görülmeyecek kadar açık teoremlere aksiyom denir. Aksiyomlar ispatları açık olan temel hükümlerdir. Bu hükümler;

1. Basit ve iyi anlaşılır,
2. Olabildiğince az sayıda,
3. Birbirinden bağımsız ve birbirinden elde edilemeyen,
4. Birbirlerini tamamlayıcı,
5. Sonuçları birbirleriyle çelişkisizdirler.

Lemma: Bir teoremin ihtiyacını gideren yardımcı teoremlere lemma denir.

1. Not: Biz bu çalışmada toplama, çıkarma, çarpma, bölme, büyüklük–küçüklük gibi işlemleri biliyor kabul edip derslere o şekilde başlayacağız.

2. Not: Bu giriş bölümde vereceğimiz tanım ve teoremler ileride tekrar inceleneceğinden bu kısımdaki teoremlerin ispatları yapılmayacaktır. İleride tekrar incelenirken yapılacaktır.

KÜME KAVRAMI

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Kümeler ayrı bölüm olarak ele alınacaktır. Ama sayı kavramları birer küme oluşturduğundan, sayı kavramına geçmeden önce, kümeler üzerinde bazı kavramlar verilecektir.

Tanım: Varlıkların iyi tanımlanış bir grubuna (listesine) küme adı verilir. İyi tanımlamadan kast, herkesin aynı şekilde algılayabileceği şekilde tanımlamasıdır. Kümeyi oluşturan varlıkların her birine kümenin elemanı denir. A, B, C, ... gibi sembollerle gösterilir.

Örnek: Haftanın günleri bir küme oluşturur. Bunu,

A = {Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe, Cuma, Cumartesi, Pazar}

şeklinde gösterilir.

Tanım: İki kümenin elemanlarının bir araya getirilmesine bu iki kümenin birleşimi denir. A ve B'nin birleşimi A ∪ B şeklinde gösterilir.

Örnek: A kümesi ilkbahar aylarının kümesi, B kümesi yaz aylarının kümesi ise;
A = {Mart, Nisan, Mayıs}
B = {Haziran, Temmuz, Ağustos}
A ∪ B = {Mart, Nisan, Mayıs, Haziran, Temmuz, Ağustos}
kümesidir.

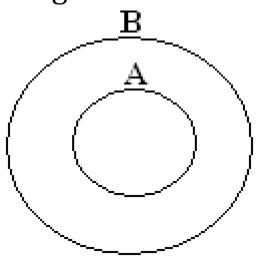
Tanım: İki kümenin elemanlarının ortak olanlarının oluşturduğu kümeye bu iki kümenin kesişimi denir. A ve B'nin birleşimi A ∩ B şeklinde gösterilir.

Örnek: A kümesi Müslüman ülkelerin kümesi, B kümesi Türk devletlerinin kümesi ise;
A ∩ B = {Türkiye, KKTC, Azerbaycan, Kazakistan, Özbekistan, Türkmenistan, Kırgızistan}
kümesidir.

Tanım: Bir kümenin elemanı yoksa buna boş küme denir. { } veya ∅ sembollerinden biri ile gösterilir.

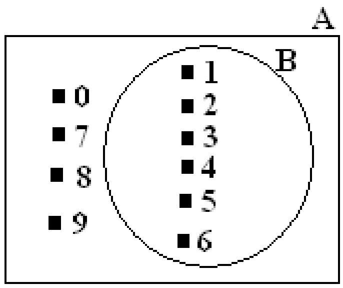
Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Tanım: Bir A kümesinin bütün elemanları bir B kümesinin de aynı zamanda elemanları ise A kümesine B kümesinin alt kümeleri denir. $A \subset B$ (A, B nin alt kümesi) veya $B \supset A$ (B kapsar A'yı) denir. Eğer A kümesi B kümesinin alt kümesi değilse $A \not\subset B$ şeklinde gösterilir. Bu kavram Venn şemasında,



gibi şekillerde gösterilir.

Örnek: $A = \{x : x \text{ bir rakam}\}$, $B = \{x : x < 7,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümelerinin Venn şeması



biçimindedir. Buna göre $B \subset A$ veya $A \supset B$ dir.

Örnek: $A = \{a, \{1,2\}, b, \{3,4,5\}, \{c,d\}\}$ kümesi verilsin. Bu küme üzerinde,

a) $b \in A$
b) $s(A) = 8$
c) $\{c,d\} \in A$
d) $\{1,2\} \subset A$

ifadelerinden hangileri doğrudur.

Çözüm: a) b elemanı A kümesinin elemanı olup doğrudur.

b) 1. eleman a, 2. eleman $\{1,2\}$, 3. eleman b, 4. Eleman $\{3,4,5\}$, 5. eleman $\{c,d\}$ dir. Öyleyse $s(A) = 5$ olduğundan yanlıştır.

Öğr. Gör. YILMAZ

c) $\{c, d\}$ elemanı A kümesinin elemanı olup doğrudur.

d) $\{1, 2\} \in A$ olduğundan $\{1, 2\} \subset A$ değildir.

DOĞAL SAYI ve TAMSAYI KAVRAMI

Tüm sayı kavramları bir takım şekillerle gösterilir. Bu şekillere rakam denir. Rakamlar $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şeklindeki sembollerdir.

Tanım: Sayıları ifade etmede kullanılan, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} sembollerinden oluşan kümeye rakam denir.

Tanım: Rakamların tek başına ya da birlikte çokluk ifade edebilecek biçimde kullanılmasına sayı denir. Bu tanıma göre her rakam bir sayıdır, ama her sayı bir veya birden fazla rakamdan oluşur. Örneğin, 6 hem sayıdır hem de rakamdır. Ama 38 sayıdır, iki rakamdan oluşur.

Doğal sayılar ve tamsayılar kavramı bundan sonraki bölümlerde ayrıntısıyla izah edilecek, ama burada ihtiyaca binaen kısaca şu şekilde izah edeceğiz.

Tanım: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ şeklindeki kümeye doğal sayılar kümesi denir. Bu kümede 0 (sıfır)'ın olmadığı kümeye sayma sayılar veya pozitif doğal sayılar adı verilir.

Örnek: m ve n doğal sayılardır.

$$m \cdot n = 12$$

olduğuna göre $m + n$'nin en büyük değeri nedir?

Çözüm: $m \cdot n = 12$ ise $1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ çarpımlarından $m + n$'in en büyük değeri $1 + 12 = 13$ dür.

Örnek: İki doğal sayının toplamı 12 ise çarpımlarının en büyüğünü bulunuz.

Çözüm: $a + b = 12$ ise $a = b = 6$ seçilirse, $a.b = 36$ en fazla olarak bulunur. //

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Doğal sayılar bazı işlemlerde yeterli kalmamaktadır. Örneğin, $n + 1 = 0$ denkleminin çözümü doğal sayılarda yoktur. Bunun için bu denklemleri çözmek için yeni bir sayı sistemine ihtiyaç vardır. Şimdi bu sayı sistemini tanımlayalım.

Tanım: $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ biçimindeki kümeye tam sayılar kümesi denir, $\mathbb{Z}$ ile gösterilir. Tam sayılar kümesi

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1\}, \{0\}, \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

olmak üzere üçe ayırabiliriz. Buradaki $\mathbb{Z}^-$ kümesine negatif negatif tamsayılar kümesi, $\mathbb{Z}^+$ kümesine pozitif tam sayılar kümesi adı verilir.

Örnek: $\frac{6}{a}$ işleminin sonucu bir tamsayı ise a'nın alabileceği kaç değer vardır?

Çözüm: $a \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$ olup 8 tanedir.

Örnek: $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\frac{a}{4} + b = 8$$

olduğuna göre, a'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm: a en büyük değeri bulabilmek için b en küçük değeri bulunmalıdır. b en küçük 1 seçilebilir. Bu takdirde $\frac{a}{4} + 1 = 8$ olacağından a = 28 olarak bulunur.

BÖLME İŞLEMLERİ

Bölme işlemleri ilkokul ve ortaokullarda uzun uzun anlatılır. Bölme işleminde bir ayrıntıyı unutmamak için şunu hatırlatmalıyız.

Bölünen x, bölen y, bölüm z ve kalan k olsun. Bu yazım,

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \cline{2-2} - & z \\ \hline k & \end{array}$$

$x = yz + k$
biçiminde olur.

Örnek: Bir bölme işleminde bölünen x, bölen y, bölüm $y + 3$ ve kalan 6 ise bölünen en az kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \cline{2-2} - & y+3 \\ \hline 6 & \end{array}$$

$6 < y$ olacağından en az $y = 7$ alınır. Şu halde;

$$x = y \cdot (y + 3) + 6 = 7 \cdot (7 + 3) + 6 = 76$$

olur.

Örnek:

$$\begin{array}{r|l} a & b+1 \\ \cline{2-2} - & 4 \\ \hline 2-a & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemine göre, a'nın b türünden ifadesi nedir?

Çözüm: $a = (b + 1).4 + (2 - a)$

$$a = 4b + 4 + 2 - a$$

$$2a = 4b + 6$$

$$a = \frac{4b+6}{2}$$

$$a = \frac{4b}{2} + \frac{6}{2}$$

Öğr. Şaban YILMAZ

$$a = 2b + 3$$

YÜKSEK BASAMAKTAN SAYILAR

Bir	1 – 3 basamaklı sayı
Bin	4 – 6 basamaklı sayı
Milyon	7 – 9 basamaklı sayı
Milyar	10 – 12 basamaklı sayı
Trilyon	13 – 15 basamaklı sayı
Katrilyon	16 – 18 basamaklı sayı
Kentilyon	19 – 21 basamaklı sayı
Seksilyon	22 – 24 basamaklı sayı
Septilyon	25 – 27 basamaklı sayı
Oktilyon	28 – 30 basamaklı sayı
Nonilyon	31 – 33 basamaklı sayı
Desilyon	34 – 36 basamaklı sayı
Undesilyon	37 – 39 basamaklı sayı
Dodesilyon	40 – 42 basamaklı sayı
Tredesilyon	43 – 45 basamaklı sayı
Kotordesilyon	46 – 48 basamaklı sayı
Kendesilyon	49 – 51 basamaklı sayı
Seksdesilyon	52 – 54 basamaklı sayı
Septendesilyon	55 – 57 basamaklı sayı
Oktodesilyon	58 – 60 basamaklı sayı
Novemdesilyo	61 – 63 basamaklı sayı
Vigintilyon	64 – 66 basamaklı sayı
Anvigintilyon	67 – 69 basamaklı sayı
Dovigintilyon	70 – 72 basamaklı sayı
Trevigintilyon	73 – 75 basamaklı sayı
Katorvigintilyon	76 – 78 basamaklı sayı
Kenkavigintilyon	79 – 81 basamaklı sayı
Sesvigintilyon	82 – 84 basamaklı sayı
Septemvigintilyon	85 – 87 basamaklı sayı
Oktovigintilyon	88 – 90 basamaklı sayı
Novemvigintilyon	91 – 93 basamaklı sayı
Trigintilyon	94 – 96 basamaklı sayı
Antrigintilyon	97 – 99 basamaklı sayı
Dotrigintilyon	100 – 102 basamaklı sayı
Tresgintilyon	103 – 105 basamaklı sayı

Öğr. Şaban YILMAZ

Katortrigintilyon 106 – 108 basamaklı sayı
Kenkatrigintilyon 109 – 111 basamaklı sayı
Sestrigintilyon 112 – 114 basamaklı sayı
Septentrigintilyon 115 – 117 basamaklı sayı
Oktotrigintilyon 118 – 120 basamaklı sayı
Noventrigintilyon 121 – 123 basamaklı sayı
Katragintilyon 124 – 126 basamaklı sayı
...

ROMA RAKAMLARI

Tarihte pek çok rakam kullanılmıştır. Bunlardan bir tanesi de Roma rakamlarıdır. Matematikte işlem yapma açısında rahat olmayan Roma rakamları günümüzde yer yer kullanılmaktadır. Şimdi bu rakamları verelim.

1	I	30	XXX	400	CD
2	II	40	XL	500	D
3	III	50	L	600	DC
4	IV	60	LX	700	DCC
5	V	70	LXX	800	DCCC
6	VI	80	LXXX	900	CM
7	VII	90	XC	1 000	M
8	VIII	100	C	1 100	MC
9	IX	101	CI	1 200	MCC
10	X	102	CII	1 300	MCCC
11	XI	103	CIII	1 400	MCD
12	XII	104	CIV	1 500	MD
13	XIII	105	CV	1 600	MDC
14	XIV	110	CX	1 900	MCM
15	XV	120	CXX	2 000	MM
16	XVI	130	CXXX	3 000	MMM
17	XVII	140	CXL	50 000	$\overline{L}$
18	XVIII	150	CL	100 000	$\overline{C}$
19	XIX	200	CC	500 000	$\overline{D}$
20	XX	300	CCC	1 000 000	$\overline{M}$

Şimdi günümüzde ve tarihte kullanılan rakamların şekillerini verelim.

RASYONEL, İRRASYONEL ve REEL SAYI KAVRAMI

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Doğal ve tamsayı kavramı bazı işlemlerde yeterli kalmamaktadır. Örneğin, $2a = 1$ denkleminin çözümü tamsayılarda yoktur. Bunun için bu denklemleri çözmek için yeni bir sayı sistemine ihtiyaç vardır. Şimdi bu sayı sistemini tanımlayalım.

Tanım: $a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ kesri şeklinde ifade edilen sayılara rasyonel (kesirli) sayılar denir. Bu küme,

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

biçimindedir. Burada a'ya pay, b'ye payda adı verilir.

Örnek: $\frac{6}{7}, \quad \frac{18}{5}, -\frac{3}{8}$ birer rasyonel sayılardır.

Tanım: Paydası 10, 100, 1000 gibi 10'un kuvvetleri olan rasyonel sayılara ondalıklı sayılar denir.

Örnek:

$$\frac{7}{10}, \quad \frac{352}{100}, \quad \frac{4578}{1000}$$

sayıları

$$0{,}7, \quad 3{,}52, \quad 4{,}578$$

biçiminde gösterilir. Bu gösterime ondalıklı sayılar şeklinde gösterimi denir. //

Rasyonel sayılar bazı işlemlerde yeterli kalmamaktadır. Mesela, $x^2 - 2 = 0$ denkleminin çözümü rasyonel sayılarda yoktur. Bunun için bu denklemleri çözmek için yeni bir sayı sistemine ihtiyaç vardır. Şimdi bu sayı sistemini tanımlayalım.

Tanım: Sayı doğrusu üzerinde rasyonel sayılar tarafından doldurulmayan noktalara karşılık gelen sayılara irrasyonel sayı denir. $\mathbb{I}$ ile gösterilir. Bu tanıma göre rasyonel sayılar kesirli şekilde yazılabilen ondalıklı sayılar olduğuna göre irrasyonel sayılar kesirli şekilde yazılamayan ondalıklı sayılardır.

Örnek:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097 \cdots$$
$$\sqrt[3]{5} = 1{,}7099759466766969893531088725439 \cdots$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950\cdots$
$e = 2{,}71828182845904523536028747135270\cdots$
$\varphi = 1{,}61803398874989484820458683436560\cdots$

birer irrasyonel sayılardır. Bu sayıların virgülden sonraki rakamlar bir yerde bitmez. Virgülden sonraki rakamlar sonsuza kadar devam eder. İleride bu sayıların π sayısı hariç irrasyonel olduğu ispat edilecektir.

Tanım: Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimine reel (gerçel) sayılar kümesi denir ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir. O halde,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

şeklindedir.

Sayı sistemlerinden;

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

kümesi elde edilir. (İleri de komplesk (karmaşık) sayı tanımlanacak ve reel sayıları kapsadığı gösterilecektir.)

BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

Matematiğin temel kavramlarından biri de denklem çözmedir. Denklem, bilinmeyen veya değişken olarak yazılan ifadelerdir. Şey anlamına gelen x bilinmeyenini ilk defa Harezmi tarafından kullanılmıştır. Bu bilinmeyen veya değişken değerleri tespit etme işlemine denklem çözme denir. Denklem çözmenin çok ayrıntıları vardır. Biz bu ilk etapta birinci dereceden denklem çözme metodunu yapacağız.

Tanım: a ve b reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b = 0$ şeklindeki eşitliklere birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Denklemi sağlayan x reel sayısına da denklemin kökü denir. Denklemin köklerinin oluşturduğu kümeye de denklemin çözüm kümesi denir.

Örnek:

$$3x + 8 = 0\ ,\ \frac{x+6}{5}\ ,\ 10t - 2 = 0\ ,\ 3m - \frac{2}{5} = 0$$

birer birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir. Burada 1. ve 2. denklemler x'e bağlıdır. 3. t'ye 4. m'ye bağlı denklemlerdir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Teorem: $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = 0$ denkleminin kökü $x = -\frac{b}{a}$ ve çözüm kümesi $Ç.K. = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ dır. (Burada $a = 0$ ise birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olmaz.)

Örnek: $(a-3)x^2 + (b+2)x - 10 = 0$ denklemi x'e bağlı birinci dereceden denklem olabilmesi için a ve b için ne söylenebilir.

Çözüm: İleri de x^2 ifadesine ikinci dereceden denklem diyeceğiz. Yani denklem birinci dereceden bir bilinmeyenli olabilmesi için x^2 olmamalıdır. Buna göre

$$a - 3 = 0 \text{ ve } b + 2 \neq 0$$

olmalıdır.

Örnek: Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

1. $2x - 8 = 12$
2. $3x + 4 = x + 16$
3. $3(2x-6) = (4x-5)+7$
4. $\frac{x-2}{3} = \frac{x+3}{2}$
5. $\frac{8x-3}{2} = 4x + 10$

Çözüm: Birinci dereceden denklemi çözebilmek için bilinenler bir tarafta bilinmeyenler bir tarafta toplanmalıdır.
Pozitif ifade eşitliğin karşı tarafa negatif
Negatif ifade eşitliğin karşı tarafa pozitif
Çarpım durumundaki ifade eşitliğin karşı tarafa bölüm
Bölüm durumundaki ifade eşitliğin karşı tarafa çarpım
olarak geçirerek birinci dereceden denklemler çözülür.

Ayrıca dağılma özelliği varsa veya parantez varsa onlara dikkat edilmelidir. Öncelik dağılma özelliğine ve parantezlere verilmelidir.

1. $2x - 8 = 12$
$2x = 12 + 8 = 20$, – 8 karşı tarafa +8 olarak geçer
$x = \frac{20}{2} = 10$, Her iki tarafı 2'ye bölünür

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

2. 3x + 4 = x + 16

3x – x = 16 – 4 , x karşı tarafa – x, 4 karşı tarafa – 4 olur

2x = 12

$x = \frac{12}{2} = 6$, Her iki tarafı 2'ye bölünür

3. 3(2x – 6) = (4x – 5)+7, 3'ün dağılma özelliği yapılır

6x – 18 = 4x + 2

6x – 4x = 2 + 18, 4x karşı tarafa –4x, –18 karşı tarafa 18

2x = 20

$x = \frac{20}{2} = 10$, Her iki tarafı 2'ye bölünür

4. $\frac{x-2}{3} = \frac{x+3}{2}$, İçler dışlar çarpımı yapılırsa,

2x – 4 = 3x + 9

– 9 – 4 = 3x – 2x, 9 karşı tarafa –9, 2x karşı tarafa –2x

x = –13

bulunur.

5. $\frac{8x-3}{2} = 4x + 10$, 2 karşı tarafa çarpım olarak geçer

8x – 3 = 8x + 20

8x – 8x = 20 + 3, 8x karşı tarafa –8x, –3 karşı tarafa 3 olarak

0 = 23

olur ki bu denklemin çözümsüz olduğunu gösterir.

Örnek: $4x + \frac{1}{2}(4x - 7) = \frac{5}{2}$ denkleminin kökünü bulunuz.

Çözüm: $2\left(4x + \frac{1}{2}(4x - 7)\right) = 2.\frac{5}{2}$

$8x + 4x - 7 = 5$

$12x = 7 + 5 = 12$

$x = \frac{12}{12} = 1$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $(3m-11)x = x+5-n$ denklemi birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olmayıp bir reel sayı olduğuna göre m ve n'nin değeri nedir?

Çözüm: $(3m-11)\,x = x+5-n$

$(3m-11)\,x - x = 5-n$

$(3m-12)\,x - (5-n) = 0$

bulunur. Burada bu denklemin reel sayı ifade ettiğine göre

$3m-12=0$ ve $n-5=0$

$3m=12$ ve $n=5$

olmalıdır. Öyleyse, $m=4$ ve $n=5$ dir.

Tanım: Bir denklemi çözen değere kök denir.

Örnek: $(-a+3)\,x+3a = x-5$ denklemini sağlayan çözüm kümesi $Ç.K.=\{2\}$ olduğuna göre a'nın değeri nedir?

Çözüm: Denklemin çözüm kümesi $Ç.K.=\{2\}$ olduğuna göre denklemi sağlayan değer $x=2$ dir. Şu halde x yerine 2 yazılmalıdır.

$(-a+3)\,x+3a = x-5$

$(-a+3).2+3a = 2-5$

$-2a+6+3a=-3$

$a=-3-6$

$a=-9$

Örnek: $x, y \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$5x+3y=45$

olduğuna göre, x in en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: Denklemin çözülebilmesi için $y=10$ seçilirse $x=3$ bulunur.

BİRİNCİ DERECEDEN EŞİTSİZLİKLER

Birinci dereceden bir veya birkaç bilinmeyenli denklemlerin eşitsizlik çözümleri eşitlik çözümlerine benzemektedir. Buradaki tek fark eksi (–) ile her iki taraf çarpıldığında eşitsizliğin yön değiştirmesidir.

Tanım: a sayısı b sayısından küçükse, $a<b$ şeklinde

a sayısı b sayısından büyükse, $a>b$ şeklinde

a sayısı b sayısından küçük ve eşitse, $a \leq b$ şeklinde

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

a sayısı b sayısından büyük ve eşitse, $a \geq b$ şeklinde sembolü ile gösterilir. Bu tanımda;

$a < b$ ve $a > b$ eşitsizliğinde a ile b sayıları asla eşit olmaz.

$a \leq b$ ve $a \geq b$ eşitsizliğinde a ile b sayılarının eşit olduğu durum vardır.

Örnek: $2x - 1 < 9$

$2x < 9 + 1$

$2x < 10$

$x < 5$

$Ç.K. = \{(-\infty; 5)\}$

Örnek: $8 - x < -4$

$8 - (-4) < x$

$12 < x$

$Ç.K. = \{(-\infty;\ 12)\}$

Örnek: $-2x + 1 < 7 + x$

$x - 2x < 7 - 1$

$-x < 6$

$x > -6$

$Ç.K. = \{(-6;\ +\infty)\}$

Örnek: $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} \leq -1$

Çözüm: $\frac{2x}{6} - \frac{3x}{6} \leq -1$

$-x \leq -6$

$x \leq 6$

$Ç.K. = \{[6;\ +\infty)\}$

BİR SAYININ KUVVETİ ve KÖKÜ

İleride üstlü ve köklü ifadeler ayrıca anlatılacaktır. Ama bizim ihtiyacımız doğrultusunda şimdilik bir sayının kuvveti tanımı ve bir teorem verilecektir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Tanım: a ve n birer doğal sayı ve $n \neq 0$ olmak üzere, n tane a'nın çarpımı olan a^n ye üstlü ifade denir. Bu durum,

$$a^n = \underbrace{a.a.a \ldots a}_{\text{n tane}}$$

şeklindedir. Burada a^n ifadesinde a'ya taban, n'ye de üst (kuvvet) denir. a^n de, "a'nın üssü n" ya da "a'nın n. kuvveti" diye okunur.

Örnek: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Tanım: x ve n birer reel sayı ve $n \neq 0$ olmak üzere,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek: $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{343}$

Teorem: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,
1. $a^m . a^n = a^{m+n}$
2. $a^n . b^n = (a.b)^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^0 = 1$

Not: 0^0 belirsizidir.

Örnek: $5^{10}(5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4) = 5^{10} \cdot 5 \cdot 5^4 = 5^{15}$

Örnek: $8^4 \cdot 25^6$ işlemini 10'un kuvveti şeklinde elde ediniz.

Çözüm: $8^4 \cdot 25^6 = (2^3)^4(5^2)^6 = 2^{12} \cdot 5^{12} = (2 \cdot 5)^{12} = 10^{12}$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Tanım: $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $x^n = a$ eşitliğini sağlayan x sayısına a'nın n. kuvvet kökü denir. $x = \sqrt[n]{a}$ şeklinde gösterilir ve n. kuvvetten kök a şeklinde okunur.

n = 1 için $\sqrt[1]{a} = a$ (birinci dereceden kök kendisidir)
n = 2 için $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ (karekök)
n = 3 için $\sqrt[3]{a}$ (küp kök)
n = 4 için $\sqrt[4]{a}$ (dördüncü kuvvetten kök)

şeklinde okunur.

Örnek: $\sqrt{4} = \pm 2$, $\sqrt[3]{8} = 2$

ÖZDEŞLİKLER

Tanım: Bir birimde değişkenlerin bütün değerler için sağlanan (doğrulanan) eşitliklere özdeşlik denir.

Örnek:
1. $a^3 + bc$ ifadesi a, b ve c'ye bağlı özdeşliktir.

2. $3x + 5y$ ifadesi x ve y'ye bağlı özdeşliktir.

3. $10m^2 - 3n^4$ ifadesi m ve n'ye bağlı özdeşliktir.

ORTAK PARANTEZE ALMA

Bir özdeşliğin her teriminde ortak çarpan varsa, bu ifade çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliğinden yararlanarak ortak çarpan parantezine alınır. Terimlerin ortak çarpana bölünmesiyle elde edilen terimler parantezi içine alınır. Mesela,
$A(x) \cdot B(x) \pm A(x) \cdot C(x) = A(x) \cdot [B(x) \pm C(x)]$
gibi…

Örnek:
1. $5m + 7m = m(4 + 6) = 10m$

2. $10x^2 + 5x = 5(2x + 1)$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

3. $a^3.b^2 + a^2.b^4 + 4a.b = a.b\,(a^2.b + a.b^3 + 4)$

4. $12xy^2 - 9x^2y^2 + 3x^2y = 3xy(4y^2 - 3xy + x)$

İKİ KARE FARKI

Teorem: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Örnek:

1. $33^2 - 13^2 = (33 - 13)(33 + 13) = 20 \cdot 46 = 920$

2. $a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a - 2)(a + 2)$

3. $9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a - 4b)(3a + 4b)$

Örnek: $\frac{505^2-495^2}{11^2-9^2}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\frac{505^2 - 495^2}{11^2 - 9^2} = \frac{(505 - 495)(505 + 495)}{(11 - 9)(11 + 9)} = \frac{10.1000}{2.20} = 250$$

Örnek: $112^2 - 104^2 = 16n$ ise n'nin değeri nedir?

Çözüm: $(112 - 104)(112 + 104) = 16n$

$8 \cdot 216 = 16n$

$n = 108$

TAM KARE İFADELERİ

Teorem: a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek:

1. $(k+1)^2 = k^2 + 2.k.1 + 1^2 = k^2 + 2k + 1$

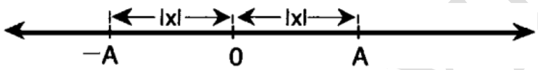
2. $(x-2)^2 = x^2 - 2.x.2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$

MUTLAK DEĞER KAVRAMI

Tanım: Sayı doğrusunda, bir sayının belirttiği noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığına bu sayının mutlak değeri denir. a sayısının mutlak değeri $|a|$ şeklinde gösterilir. Bu durum şu şekilde gösterilir. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$|a| = \begin{cases} a \ , & a \geq 0 \\ -a \ , & a < 0 \end{cases}$$

şeklinde gösterilir.



Örnek: $|2| = 2$

$|-3| = -(-3) = 3$

$\left|-\frac{5}{2}\right| = -\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$

Örnek: $0 < x < y$ ise $|x-y| = -(x-y) = y - x$

Örnek: $|3x-1| + |2x+3| - x + 5$ eşitliğinde $x = -2$ için bulalım.

Çözüm: $|3x-1| + |2x+3| - x + 5$

$= |3(-2) - 1| + |2.(-2) + 3| - (-2) + 5$

$= |-7| + |-1| + 2 + 5$

$= -(-7) - (-1) + 7$

$= 7 + 1 + 7$

$= 15$

Örnek: $m, n, p \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $|m-1| + |2n-4| + |p+3| = 0$ olduğuna göre, $2m + 3n - p$ nin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: $|m-1| + |2n-4| + |p+3| = 0$
olması için

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$|m-1| \geq 0\,, \quad |2n-4| \geq 0\,, \quad |p+3| \geq 0$$

olmalıdır. Sonuç sıfır olduğundan bu ifadelerin sıfıra eşit olmalarıyla mümkündür. Buna göre,

$$|m-1| = 0 \text{ ise } m=1$$
$$|2n-4| = 0 \text{ ise } n=2$$
$$|p+3| = 0 \text{ ise } p=-3$$

elde edilir. Şu halde,

$$2m+3n-p = 2\cdot 1\cdot +3\cdot 2-(-3) = 11$$

olur.

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEM KAVRAMI

Tanım: $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ şeklindeki ifadelere ikinci dereceden denklem denir.

Örnek: $3x^2+8x-12=0$

$$k^2-6k-\sqrt{5}=0$$
$$t^2+t=0$$
$$3x^2+8x-12=0$$

birer ikinci dereceden denklemlerdir.

2. dereceden denklemin çözüm kümesi olan kök olarak ifade edilir. Bu köklerin bulunması iki türlü yapılmaktadır. Bunlardan biri çarpanlara ayırma yöntemi, diğeri diskirimant yöntemidir. Öncelikle çarpımlara ayırma yöntemini örnekle gösterelim. Sonrada diskirimant yöntemini teoremle izah edelim. Daha sonra ilgili konularda detayıyla verilecektir. Ama burada ihtiyacımız olan ön bilgiler verilecektir.

Örnek: $x^2-3x-4=0$ denklemin köklerini bulunuz

Çözüm: x^2 nin katsayısı 1 oluyorsa şu metot tercih edilir. Toplamları sabit katsayı olan -4, çarpımları x'in katsayısı olan -3 ü verecek iki sayı -4 ve 1 dir. Elde edilen bu değerlerin işaretlerinin tersi alınarak $x=4$ ve $x=-1$ bulunur. Böylece çözüm kümesi $\{-1, 4\}$ olur.

Teorem: $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ şeklindeki ikinci dereceden denklemler de x'in değeri;

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ve

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olacak şekilde iki tanedir.

Örnek: $x^2 - 3x + 2 = 0$ denkleminde $a = 1,\ b = -3,\ c = 2$ olacağından

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3+1}{2} = 2$$

ve

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3-1}{2} = 1$$

bulunur.

İSPAT YÖNTEMLERİ

Teoremler hipotez ve hüküm aşamalarından oluştuğunu teoremi tanımlarken vermiştik. p hipotez q hüküm olarak alırsak, bir teorem $p \Leftrightarrow q$ şeklinde gösterilir. Eğer bir teoremde hipotez verilip hüküm bulunmaya çalışılırsa $p \Rightarrow: q$ ve hüküm verilip hipotez ispatlanmaya çalışılırsa $q \Leftarrow: p$ şeklinde gösterilir.

Eğer bir teorem yanlış ise bu teoremin varlığını bir örnek vererek göstermek yeterlidir. Bazen de bir teorem için aksine örnek vermek kâfi gelecektir.

Şimdi burada teoremlerin ispat yöntemlerinden bahsedelim.

1. Doğrudan İspat Yöntemi:

Tanım: Bir teoremde hiçbir ayrıntı yapmadan, verilen tanımların ve önceki teoremlerin bilgilerini kullanarak elde edilen ispat yöntemidir.

Örnek Teorem: a ve b tek tamsayı ise, $a + b$ çift tamsayıdır.

İspat: a ve b tek tamsayı ise; $a = 2n + 1$, $b = 2m + 1$ olacak şekilde n ve m tamsayıları vardır.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$a + b = (2n + 1) + (2m + 1) = 2(n + m + 1)$$

bulunur. Burada $n + m + 1$ herhangi bir tamsayı olduğundan $a + b$ çift sayıdır.

2. Olmayana Ergi Yöntemi:

Tanım: Bir teoremde 1. kısım (hipotez) varken 2. kısım (hüküm) oluyorsa 2. kısmının (hükmün) olumsuzu varken 1. kısmının (hipotezin) da olumsuzu elde ediliyorsa buna "Olmayana ergi (saçmalamaya) yöntemi" denir. Bu durum p (hipotez) doğru, q (hüküm) yanlışken çelişkinin oluşmasıdır.

Örnek Teorem: "Bir ülkeyi yöneten en üst bir makam vardır" (p: Ülke, q: Yönetici bir makam)

İspat: Kabul edelim ki bir ülkeyi yöneten en üst bir makam olmasın. O zaman iki veya daha fazla ülkeyi yöneten makamlar olur. Bu ise iç çatışmalara ve çeşitli sıkıntıların olmasına vesile olur. Öyleyse bu ülke yönetilmez. O halde kabul yanlıştır.

3. Çelişki İspat Yöntemi:

Tanım: Bir teoremde 1. kısım (hipotez) varken 2. kısım (hüküm) oluyorsa 1. kısmının (hipotezin) olumsuzu alınıp 2. kısmının (hükmün) olumsuzu elde edilirse buna "Çelişki ispat yöntemi" denir. Önermeler konusunda $p \Leftrightarrow q \equiv q' \Leftrightarrow p'$ biçiminde ifade edilecek.

Örnek Teorem: Bir ülke varsa kanunları da vardır. (p: Ülke, q: Kanunlar)

İspat: Kabul edelim ki kanunların olmadığı bir topluluk olsun. Bu takdirde bu insanlar arasında düzensizlik, eğitimsizlik, kurum ve kuruluşsuzluk, anarşi ve terör gibi problemler oluşturur. Öyleyse kanunsuz biryerde ülke yoktur. //

Doğrudan ispat yöntemi, olmayana ergi yöntemi ve çelişki ispat yöntemi ile ispat yapma tümdengelim ispat yöntemlerindendir. Tümden gelim genelden özele geçmedir. Şimdi özelden genele geçme metodu olan tümevarım yöntemini vereceğiz. Tümevarım ve tümdengelim kavramları Felsefe derslerinde irdelenmektedir. Biz matematik olarak ihtiyacımız dairesinde bahsedilecektir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

4. Tümevarımla İspat Yöntemi: Tümevarımla ispat metoduna geçmeden önce şu açıklamayı bakmak gerekir.

D bir küme ve $D \subset \mathbb{N}$ olsun.

(i) $1 \in D$

(ii) $k \in D$ ise $(k+1) \in D$

şartlarını gerçeklerse $D = \mathbb{N}$ dir. Gerçekten,

Kabul edelim ki (ii) gerçekleşmesin, bu takdirde $D \neq \mathbb{N}$ dir. Bu durumda en az bir $(m+1) \notin D$ dir. Bu takdirde $m \notin D$ dir. $m \notin D$ ise $m-1 \notin D$ dir. Benzer şekilde $m-2, m-3, \ldots, 3, 2, 1$ sayıları da D'ye ait olmazlar. Halbuki (i) de $1 \in D$ olduğunu biliyoruz. Bu ise çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır, $D = \mathbb{N}$ olmalıdır.

Elde edilen bu önermenin sonucu olarak tümevarım ispat metodu dediğimiz şu şekilde ifade edilir:

Tanım: P(n) doğal sayılarla ilgili bir önerme ve D de bu önermenin doğruluk değerleri kümesi;

$D = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ ve } P(n) \text{ doğru}\}$

olsun. Eğer

(i) $1 \in D$

(ii) $k \in D$ ise $(k+1) \in D$

ise $D = \mathbb{N}$ dir. Yani $P(n)$ önermesi her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. Bu doğruluğu ispatlamaya tümevarımla ispat yöntemi denir.

Örnek Teorem: 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamı $\frac{n.(n+1)}{2}$ şeklindedir.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

İspat: P(1) için $n = 1$ olacağından $1 = \frac{1.(1+1)}{2}$ olup doğrudur.

P(k) için doğru olsun, yani $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k.(k+1)}{2}$ olsun. $P(k+1)$ için doğruluğuna bakacağız.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k.(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=\frac{k.(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

olduğundan $P(k+1)$ için de doğrudur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Toplama İşlemi

1.

$$\begin{array}{r} 6a \\ +\ 2b \\ \hline 92 \end{array}$$

İki basamaklı doğal sayılar arasında yapılan yukarıdaki toplama işlemine göre, $a+b$ nin değeri nedir?

Çözüm: $60+20=80$ olduğundan 92 olması için $a+b=12$ olmalıdır.

2.

$$\begin{array}{r} KL \\ +\ MN \\ \hline \circ 3 \circ \end{array}$$

İki basamaklı doğal sayılar arasında yapılan yukarıdaki toplama işleminde $L+N<10$ dir. Buna göre $K+M$ en çok kaçtır?

Çözüm: $L+N<10$ olduğundan elde sayısı olmaz. Şu halde $K+M$ en çok 13 olur.

3.

$$\begin{array}{r} 4a2 \\ 1b3 \\ +\ 1c5 \\ \hline 820 \end{array}$$

Üç basamaklı doğal sayılar arasında yapılan yukarıdaki toplama işlemine göre $a+b+c$ nin değeri nedir?

Öğr. Gr. Şaban YILMAZ

Çözüm: $2+3+5=10$ olduğundan elde 1 olur. $4+1+1$ in değeri 8 olması için elde 2 olmalıdır. Buna göre $a+b+c+1=22$ yani $a+b+c=21$ dir.

4. İki pozitif doğal sayı arasında yapılan bir toplama işleminde, toplam toplanan sayılardan küçük olanın 3 katına eşittir. Buna göre, toplam toplanan sayılardan büyük olanın kaç katına eşittir?

Çözüm: $a+b=c$ ve a sayısı b sayısından büyük olsun. Toplam c toplanan sayılardan küçük olanı b'nin 3 katına eşittir olduğundan $c=3b$ dir. Buna göre

$$a+b=3b$$
$$a=2b$$

dir. $b=\frac{c}{3}$ olduğundan $a=\frac{2}{3}c$ olup $c=\frac{3}{2}a$ olur.

5.

$$\begin{array}{r} abc \\ +\quad de \\ \hline \bullet 42 \end{array}$$

Biri üç, diğer iki basamaklı doğal sayılar arasında yapılan yukarıdaki işleme göre $b+d$ nin kaç farklı değeri vardır?

Çözüm:

$c+e=2$ ise $b+d=4$ veya $b+d=14$ olabilir

$c+e=12$ ise $b+d=3$ veya $b+d=13$ olabilir

Şu halde $b+d$ 4 farklı değer alabilir.

6. $b+d>10$ olmak üzere, aşağıda iki basamaklı doğal sayılar arasında yapılan iki tane toplama işlemi verilmiştir.

$$\begin{array}{r} ab \\ +\ cd \\ \hline 83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} ba \\ +\ dc \\ \hline x \end{array}$$

Buna göre x'in değeri nedir?

Çözüm: $b+d>10$ olduğundan $b+d=13$ olur. Buna göre $a+c+1=8$ yani $a+c=7$ dir. Şu halde $x=137$ elde edilir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

7. Rakamları birbirinden farklı üç basamaklı iki sayının toplamı en az kaçtır?

Çözüm: $104 + 235 = 339$

8. Yağmur iki sayıyı topluyor. Daha sonra sayılardan birini 5 artırıyor, diğerini 1 azaltıyor. Sonuçta ilk sayının 2 katı sayı elde ediyor. Yağmur ilk durumda hangi sonucu elde etmiştir?

Çözüm: Bu sayı a ve b olsun.
$2(a + b) = a + 5 + b - 1$
$2a + 2b = a + b + 4$
$a + b = 4$

9.

$$\begin{array}{r} ab \\ ba \\ aa \\ +\ bb \\ \hline 286 \end{array}$$

Yukarıdaki verilen ikişer basamaklı dört sayının toplamı 286 olduğuna göre ab sayısının en küçük değeri nedir?

Çözüm: Toplamanın birler basamağındaki değeri 6 olduğundan $2a + 2b = 26$ olmasıyla mümkün olur. Buna göre $a + b = 13$ olacağından ab iki basamaklı sayı 49 olur.

Çıkarma İşlemi

10. Aşağıda iki basamaklı doğal sayılar arasında yapılan bir çıkarma işlemi verilmiştir.

$$\begin{array}{r} 5a \\ -\ 2b \\ \hline 22 \end{array}$$

ise $a - b$'nin değeri nedir?

Çözüm: $a < b$ ve $(10 + a) - b = 2$ olması için $a - b = -8$ olmalıdır.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

11.

$$\begin{array}{r} a03 \\ -\ b25 \\ \hline cde \end{array}$$

Üç basamaklı doğal sayılar arasında yapılan yukarıdaki çıkarma işleminde $a - b - c$ nin değeri nedir?

Çözüm: $13 - 5 = 8 = e$
$9 - 2 = 7 = d$
$a - 1 - b = c$
$a - b - c = 1$

12. ab4, cde ve fgh üçer basamaklı doğal sayılar olmak üzere

$$\begin{array}{r} ab4 \\ -\ cde \\ \hline fgh \end{array}$$

işleminde $h > 4$ olduğuna göre e'nin alabileceği değerler toplamı nedir?

Çözüm: $h > 4$ olduğuna göre $14 - e = h$ olup $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 38$ olur.

13.

$$\begin{array}{r} abc \\ -\ 2ab \\ \hline 123 \end{array}$$

Üç basamaklı doğal sayılar arasında yapılan yukarıdaki çıkarma işleminde c'nin değeri nedir?

Çözüm: $c > b > a$ olacağından
$c - b = 3$
$b - a = 2$
$a - 2 = 1$
taraf tarafa toplanırsa $c - 2 = 6$ olup $c = 8$ dır.

14.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\begin{array}{r} 42a \\ -\ b3c \\ \hline de \end{array}$$

Üç basamaklı doğal sayılar arasında yapılan yukarıdaki çıkarma işleminde sonuç iki basamaklı bir doğal sayı olduğuna göre b'nin değeri nedir?

Çözüm: $12 - 3 = d$ olmak zorundadır. Şu halde yüzler basamağı 1 eksilmiştir.

$3 - b = 0$

$b = 3$

15.

$$\begin{array}{r} a \\ -\ b \\ \hline c \end{array} \qquad \begin{array}{r} b \\ -\ c \\ \hline d \end{array} \qquad \begin{array}{r} c \\ -\ d \\ \hline e \end{array} \qquad \begin{array}{r} d \\ -\ e \\ \hline a \end{array}$$

Bu işlemlere göre $c + d + 2e$ nin değeri nedir?

Çözüm: $a - b = c$

$b - c = d$

$c - d = e$

$d - e = a$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$a - e = a + c + d + e$

$c + d + 2e = 0$

olur.

16. A'dan B çıkarıldığında C elde edilmektedir. B'den C çıkarıldığında aşağıdakilerden hangisi elde edilir.

Çözüm: $A - B = C$

$B = A - C$

$B - C = A - 2C$

17. abc, def, dgh üç basamaklı birer doğal sayı ve $b < e$ olmak üzere;

$$\begin{array}{r} abc \\ -\ def \\ \hline dgh \end{array}$$

çıkarma işlemine göre a'nın birbirinden farklı alacağı değerler nelerdir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $b < e$ olduğundan $a - d = d$ ve $a = 2d$ olması için $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ olur. Buna göre $a \in \{3, 5, 7, 9\}$ olmalıdır.

Çarpma

18.

I. İşlem	II. İşlem
$\begin{array}{r} 94 \\ \times\ 93 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 92 \\ \times\ 84 \\ \hline \end{array}$

Yukarıda verilen iki işlemden I ile II arasındaki fark nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} 94 \cdot 93 - 92 \cdot 84 &= 94 \cdot (92 + 1) - 92 \cdot 84 \\ &= 94 \cdot 92 + 94 - 92 \cdot 84 \\ &= (94 - 84) \cdot 92 + 94 \\ &= 10 \cdot 92 + 94 \\ &= 1014 \end{aligned}$$

19. abc üç basamaklı bir doğal sayı olmak üzere, aşağıda bir çarpma işlemi verilmiştir.

$$\begin{array}{r} abc \\ \times\ \ 33 \\ \hline \circ 2 \circ \\ +\ 8 \circ 8\ \ \\ \hline \end{array}$$

işlemde her nokta bir rakam olduğuna göre, işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $c \cdot 3 = 12$ olmasıyla mümkündür. Şu halde $c = 4$ dür.
$b \cdot 3 + 1 = 22$ olmasıyla mümkündür. Şu halde $b = 7$ dür.
$a \cdot 3 + 2 = 8$ olmasıyla mümkündür. Şu halde $b = 7$ dür.

$276 \cdot 33 = 9108$

20. $x \cdot y$ çarpımında her çarpanına 1 eklenirse çarpım ne kadar büyür?

Çözüm: $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1 = xy + (x + y + 1)$ yani $x + y + 1$ kadar büyür.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

21. xy iki basamaklı, xy1 üç basamaklı birer doğal sayı olmak üzere, aşağıda iki tane çarpma işlemi verilmiştir.

$$\begin{array}{r} xy \\ \times\ \ 24 \\ \hline 936 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} xy1 \\ \times\ \ 24 \\ \hline \end{array}$$

Buna göre ikinci çarpma işleminin sonucu nedir?

Çözüm: 936 sayısı 24'e bölündüğünde $xy = 39$
$xy1 = 391$ üç basamaklı sayısı
$391 \cdot 24 = 9\,384$
olur.

Bölme

22. 3 330 444 sayısı 333 sayısına bölünüyor. Bu işlem doğal sayılar kümesinde sonuçlandırıldığında, bölümde kaç tane sıfır rakamı olur?

Çözüm: Bölme işlemi yapılırken 333 sayısında 333 sayısı 1 defadır. 0 indirildiğinde 333'te olmadığından 444 indirilmesi için 3 defa 0 atılmalıdır.

23. x ve y birer rakam olmak üzere;

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \cline{2-2} - \ \ \vdots & \\ \hline 12-y & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işleminde kalan $12 - y$ dir. Buna göre y'nin en az değeri nedir?

Çözüm: Bölen kalandan daima büyük olduğundan
$y > 12 - y$
$2y > 12$
$y > 6$
y en az 7 değerini almalıdır.

24. abc üç basamaklı, ab iki basamaklı bir sayıdır.

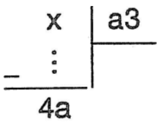
$$\begin{array}{r|l} abc & ab \\ \cline{2-2} - \qquad & \\ \hline \end{array}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Bu bölme işlemi doğal sayılarda sonuçlandırıldığında, bölüm ile kalanın toplamı en fazla kaçtır?

Çözüm: abc sayısı ab sayısına bölündüğünde ab’de ab, 1 defadır. Buna göre c indirildiğinde c bir tek basamaklı olup ab’de bulunmamaktadır. Buna göre bölümde bir 0 atmalıyız. Yani bölüm 10 olur. C en fazla 9 alınırsa kalan 9 dir. Şu halde bölüm ile kalanın toplamı 19 olur.

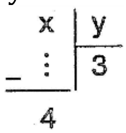
25. a3 ve 4a iki basamaklı birer doğal sayı olmak üzere,



verilen bölme işleminde kalan 4a olduğuna göre, a’nın alabileceği değerler nedir?

Çözüm: Bölen kalandan daima büyük olacağından a3 $>$ 4a olmalıdır. Burada $a \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ rakamlarından biri olur.

26. x ve y birer doğal sayı olmak üzere,

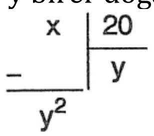


yukarıdaki bölme işleminde kalan 4’tür. Buna göre x’in değeri en az nedir?

Çözüm: $y > 4$ olacağından x’in en küçük değeri için y en küçük seçilmelidir.

$y = 5$ alınırsa $x = 5 \cdot 3 + 4 = 19$ olur.

27. x ve y birer doğal sayı olmak üzere,



yukarıdaki bölme işleminde bölüm y kalan y^2 dir. Buna göre x’in alabileceği değerler nelerdir?

Çözüm: $20 > y^2$ olacağından $y \in \{1, 2, 3, 4\}$ bulunur.

$x = 20y + y^2$ de x’in alacağı değerler $x \in \{21, 44, 69, 96\}$ olur.

28. x, y ve z birer doğal sayı olmak üzere,

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\begin{array}{r|l} x & 4 \\ \cline{2-2} - \vdots & y \\ \hline 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} y & 6 \\ \cline{2-2} - \vdots & z \\ \hline 5 & \end{array}$$

yukarıdaki doğal sayılarda verilen iki tane bölme işlemi verilmiştir. Buna göre x'in 24 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm: $x = 4y + 3$ ve $y = 6z + 5$
$x = 4(6z + 5) + 3$
olduğundan x'in 24'e bölümünden kalan 23 dür.

29. a69 üç basamaklı a4 iki basamaklı bir doğal sayıdır.

$$\begin{array}{r|l} a69 & a4 \\ \cline{2-2} - & x \\ \hline & \end{array}$$

Bölme işleminde bölüm x olduğuna göre olduğuna göre, x'in alabileceği değerler nelerdir?

Çözüm: $a = 1$ alınırsa $x = 12$
$a = 2$ alınırsa $x = 11$
$a \geq 3$ alınırsa $x = 10$

30. $x \neq 0$, x ve y birer sayı

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \cline{2-2} & 0{,}25x \end{array}$$

Yukarıdaki kalansız bölme işleminde bölüm, bölünenin 0,25 katına eşittir. Buna göre y'in değeri nedir?

Çözüm: $x = y \cdot 0{,}25x$
$1 = \frac{1}{4}y$
$y = 4$

31.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x & y \\ \cline{2-2} & x \\ - & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemine göre, $y + 2$ in türünden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $x^2 - 2x = yx + 1$

$$x^2 - 2x - 1 = yx$$

$$y = \frac{x^2-2x-1}{x}$$
$$y + 2 = \frac{x^2-2x-1}{x} + 2$$
$$y + 2 = \frac{x^2-1}{x}$$

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. M. Zeki DERMAN, Serdar GÜLMEZ, Ökkeş ÖZKÖSELER, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2002, Ankara.
4. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Matematik Cep Kitabı, Final Dergisi Yayınları, 1989, İstanbul.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ