2. BÖLÜM
DOĞAL ve TAMSAYILARA GİRİŞ

Bir önceki bölümde tanımı verilen doğal ve tamsayı kavramı bu bölümde tekrar verilecek ve ayrıntıya girilecektir. Doğal ve tamsayılar çok geniş bir konu olduğundan bu bölümde, doğal ve tamsayıların tanımı, tek ve çift sayılar, sayı basamakları, ardışık sayılar ve faktöriyel kavramlarından bahsedilecektir. Diğer bölümlerde doğal ve tamsayılar diğer ayrıntıları incelenecektir. Küme ve rakam kavramları Matematiğe giriş konusunda tanımlandığından burada tekrar tanımlanmayacaktır.

DOĞAL SAYI ve TAMSAYI KAVRAMI

2.1. Tanım: Bütün kümelerin nesnelerinin eleman sayılarına doğal sayı denir. Bir kümede nesne yoksa bu küme sıfır (0) elemanlı, eğer tek nesne varsa 1 elemanlı, eğer yanında bir nesne daha varsa 2 elemanlı, yanında bir nesne daha varsa 3 elemanlı küme gibi isimlendirilir. Doğal sayılar $\mathbb{N}$ ile gösterilip,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, (n+1), (n+2), \dots\}$$

şeklindeki kümedir. Bu kümede 0 (sıfır)'ın olmadığı kümeye sayma sayılar veya pozitif doğal sayısılar da adı verilir, $\mathbb{N}^+$ ile gösterilir.

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

kümesidir.

Doğal sayılar yalın halde bulunur, bölünemez ve küsuratlı yazılamazlar.

Örnek: m ve n doğal sayılardır.
$m \cdot n = 16$
olduğuna göre $m + n$ 'nin en büyük değeri nedir?

Çözüm: $m \cdot n = 16$ ise $1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$ çarpımlarından $m + n$ 'nin en büyük değeri $1 + 16 = 17$ dir. //

Doğal sayılar bazı işlemlerde yeterli kalmamaktadır. Örneğin, $a + 1 = 0$ denkleminin çözümü doğal sayılarda yoktur. Bunun için bu denklemleri çözmek için yeni bir sayı sistemine ihtiyaç vardır. Şimdi bu sayı sistemini tanımlayalım.

2.2. Tanım: $a \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $a + b = 0$ denkleminde;

$a = 1$ için $b = -1$
$a = 2$ için $b = -2$
$a = 3$ için $b = -3$
…
$a = n$ için $b = -n$
…

olacak biçimde b'lerin oluşturduğu

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1\}$$

kümeyisini yazalım. Ayrıca $\mathbb{N}^+ = \mathbb{Z}^+$ olarak alalım;

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

biçiminde ki kümeye, tamsayılar kümesi denir. Şu halde tam sayılar,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

şeklindeki kümedir. Tam sayılar kümesi

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1\}, \{0\}, \ \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

olmak üzere inceleyebiliriz. Buradaki $\mathbb{Z}^-$ kümesine negatif tamsayılar kümesi, $\mathbb{Z}^+$ kümesine pozitif tam sayılar kümesi adı verilir.

Örnek: $\frac{12}{a}$ işleminin sonucu bir tamsayı ise a'nın alabileceği kaç değer vardır?

Çözüm: $a \in \{-12, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 12\}$

Örnek: $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\frac{a}{4} + b = 10$ olduğuna göre, a'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm: b en küçük 1 seçilebilir. Bu takdirde $\frac{a}{4} + 1 = 10$ olacağından $a = 36$ olarak bulunur.

Örnek: $x, y \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$5x + 3y = 45$$

olduğuna göre, x'in en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: Denklemin çözülebilmesi için y en büyük seçilmelidir. $y = 10$ seçilirse $x = 3$ bulunur.

Örnek: a pozitif, b negatif tamsayıdır. Aşağıdakilerden hangisi kesinlikle pozitiftir.

A) $a \cdot b$ B) $a + b$ C) $a - b$ D) $b - a$ E) $\frac{b}{a}$

Çözüm: a pozitif, b negatif tam sayı ise $a - b$ her zaman pozitif olur. Çünkü $-b > 0$ dır.

2.1. Not: Pozitif ve negatif sayılarla ilgili analiz, reel sayılar kısmında tekrar incelenecektir.

DOĞAL SAYILARIN ve TAMSAYILARIN ÖZELLİKLERİ

2.1. Aksiyom: $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere toplamada;

i) $a + b \in \mathbb{N}$ (kapalılık özelliği)

ii) $a + b = b + a$ (değişme özelliği)

iii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (birleşme özelliği)

iv) $a + 0 = 0 + a = a$ (birim (etkisiz) eleman özelliği)

vardır.

2.2. Aksiyom: $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere çarpmada;

i) $a \cdot b \in \mathbb{N}$ (kapalılık özelliği)

ii) $a \cdot b = b \cdot a$ (değişme özelliği)
iii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (birleşme özelliği)
iv) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (birim (etkisiz) eleman özelliği)
iv) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (0 yutan eleman özelliği)
vi) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$(toplamanın çarpma üzerine dağılma özelliği) vardır.

2.3. Aksiyom: $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere toplamada;
i) $a + b \in \mathbb{Z}$ (kapalılık özelliği)
ii) $a + b = b + a$ (değişme özelliği)
iii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (birleşme özelliği)
iv) $a + 0 = 0 + a = a$ (birim eleman özelliği)
v) $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (ters eleman özelliği)
vardır.

2.4. Aksiyom: $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere çarpmada;
i) $a.b \in \mathbb{Z}$ (kapalılık özelliği)
ii) $a.b = b.a$ (değişme özelliği)
iii) $a.(b.c) = (a.b).c$ (birleşme özelliği)
iv) $a.1 = 1.a = a$ (birim (etkisiz) eleman özelliği)
iv) $a.0 = 0.a = 0$ (0 yutan eleman özelliği)
vi) $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$(toplamanın çarpma üzerine dağılma özelliği) vardır.

TEK ve ÇİFT SAYILAR

2.3. Tanım: 2 ile bölünen sayılara çift tamsayılar, 2 ile bölünmeyen sayılara tek tamsayılar denir. Buna göre;

$$\mathbb{Z}_{Ç} = \{\dots, -2n, \dots, -6, -4, -2, 0, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

kümesi çift tamsayılar kümesidir.

$$\mathbb{Z}_{T} = \{\dots, -(2n-1), \dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots, (2n-1), \dots\}$$

kümesi tek tamsayılar kümesidir.

0'ın bir çift sayı olduğunu unutmamak gerekir.

2.1.Teorem: Tek sayıları T, çift sayıları Ç ile gösterirsek,

1. İki tek tamsayının toplamı ve farkı çift tamsayıdır. $(T + T = Ç, T - T = Ç)$
2. İki tek tamsayının çarpımı tek tamsayıdır. $(T \cdot T = T)$
3. Biri tek ve diğeri çift olan iki tam sayının toplamı ve farkı tek tamsayıdır. $(T + Ç = T, T - Ç = T, Ç - T = T)$
4. Biri tek diğeri çift olan iki tamsayının çarpımı çift tamsayıdır. $(T \cdot Ç = Ç)$
5. İki çift tamsayının toplamı, farkı çift bir tamsayıdır. $(Ç + Ç = Ç, Ç - Ç = Ç)$
6. İki çift tamsayının toplamı, farkı ve çarpımı yine çift bir tamsayıdır. $(Ç.Ç = Ç)$

İspat: $m, n, p, r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = 2m - 1$, $y = 2n - 1$, $z = 2p, t = 2r$ tamsayılarını alalım.

1. $x + y = (2m - 1) + (2n - 1) = 2(m + n - 1)$
dir. $m + n - 1 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x + y = 2(m + n - 1)$ çift tamsayıdır. Yine,
$x - y = (2m - 1) - (2n - 1) = 2(m - n)$
dir. $m - n \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x - y = 2(m - n)$ çift tamsayıdır.

2. $x.y = (2m - 1).(2n - 1) = 4nm - 2m - 2n + 1 = 2(2mn - m - n) + 1$
dir. $2mn - m - n \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x.y = 2(2mn - m - n)$ tek tamsayıdır.

3. $x + z = (2m - 1) + 2p = 2(m + p) - 1$
dir. $m + p \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x + z = 2(m + p) - 1$ tek tamsayıdır. Yine,

$x - z = (2m - 1) - 2p = 2(m - p) - 1$
dir. $m - p \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x - z = 2(m - p) - 1$ tek tamsayıdır. Yine,

$z - x = (2p) - (2m - 1) = 2(p - m) + 1$
dir. $p - m \in \mathbb{Z}$ olduğundan $z - x = 2(p - m) + 1$ tek tamsayıdır.

4. $x.z = (2m - 1)(2p) = 2(2mp - p)$
dir. $2mp - p \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x - z = 2(2mp - p)$ çift tamsayıdır.

5. $z + t = 2p + 2r = 2(p + r)$
dir. $p + r \in \mathbb{Z}$ olduğundan $z + t = 2(p + r)$ çift tamsayıdır. Yine,

$z - t = 2p - 2r = 2(p - r)$

dir. $p-r \in \mathbb{Z}$ olduğundan $z-t = 2(p-r)$ çift tamsayıdır.

6. $z.t = 2p.2r = 2(2pr)$
dir. $p \cdot r \in \mathbb{Z}$ olduğundan $z \cdot t = 2(p \cdot r)$ çift tamsayıdır.

Örnek: m, n, p birer tamsayı ve $m \cdot n = 2p - 1$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) m ve n çift sayılardır. B) m ve n tek sayılardır.
C) m çift, n tek sayıdır. D) $m \cdot n$ çift sayıdır.
E) m ve n hakkında bir şey denilmez.

Çözüm: $2p - 1$ tek sayıyı temsil ettiğinden iki tek sayının çarpımı tek olduğundan B şıkkı doğrudur.

Örnek: a doğal sayısı 8 ile bölünebildiğine göre aşağıdakilerden hangisi tek sayı olabilir?

A) 2a B) $\frac{a}{8}$ C) $\frac{a}{4}$ D) $\frac{a}{2}$ E) a^2

Çözüm: Bir sayı 8 ile bölündüğüne göre tek ve çift sayı olabilecek durum söz konusudur. Tek cevap b şıkkıdır. Diğer şıklar a bir çift sayı seçilirse sonuçları da çift sayı olarak çıkar.

Örnek: a, b, c, d çift sayılar olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi her zaman çift sayıdır?

A) $\frac{a+b+c+d}{2}$ B) $a+\frac{b-c-d}{2}$ C) $\frac{a.b.c.d}{8}$
D) $a-\frac{b+c+d}{2}$ E) $\frac{a+b}{2}-c-d$

Çözüm: $a = 2m,\ b = 2n,\ c = 2p,\ d = 2q$ seçelim.

A) $\frac{a+b+c+d}{2} = \frac{2m+2n+2p+2q}{2} = n + m + p + q$ olup teklik çiftlik konusunda bir şey denilemez.

B) $a+\frac{b-c-d}{2}=2m+\frac{2n-2p-2q}{2}=2m+m-p-q$ olup teklik çiftlik konusunda bir şey denilemez.

C) $\frac{a.b.c.d}{8}=\frac{2m.2n.2p.2q}{8}=2mnpq$ olup kesinlikle çift sayıdır.

D) $a-\frac{b+c+d}{2}=2m-\frac{2m+2p+2q}{2}=2m-n-p-q$ olup teklik çiftlik konusunda bir şey denilemez.

E) $\frac{a+b}{2}-c-d=\frac{2m+2n}{2}-2p-2q=m+n-2p-2q$ olup teklik çiftlik konusunda bir şey denilemez.

2.2. Teorem: Tek sayıları T, çift sayıları Ç ile göstermek üzere $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere,

1. Tek tamsayının doğal sayı kuvveti tek tamsayıdır $(T^n=T)$
2. Çift tamsayının doğal sayı kuvveti çift tamsayıdır. $(Ç^n=Ç)$

İspat: $m,n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $x=2m-1$, $y=2n$ tamsayılarını alalım.

1. $x^n=(2m-1).(2m-1)=2(2m^2-2m)+1$
dir. $2m^2-2m\in\mathbb{Z}$ olduğundan $x^n=2(2m^2-2m)+1$ tek tamsayıdır. Bu işleme genelleme yapılınca, x^n bir tek tamsayıdır.

2. $y^2=(2m).(2m)=2(2m^2)$
dir. $2m^2\in\mathbb{Z}$ olduğundan $y^2=2(2m^2)$ çift tamsayıdır. Bu işleme genelleme yapılınca, x^n bir çift tamsayıdır.

Örnek: a bir tamsayı olduğuna göre, a^2+a hakkında ne denebilir?

Çözüm:
a bir çift sayı ise $a^2+a=Ç^2+Ç=Ç$
a bir tek sayı ise $a^2+a=T^2+T=Ç$
olduğundan a^2+a her zaman çift sayıdır.

2.3. Teorem: İki veya daha fazla sayının çarpımı tek sayı ise bütün çarpanları tek sayıdır, bu çarpımın çift sayı ise çarpanlardan en az biri çifttir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

2.4. Teorem: Bir tek sayının bütün doğal kuvvetleri tek, bir çift sayının bütün doğal kuvvetleri çift sayıdır.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

SAYI BASAMAKLARI ÇÖZÜMLEME

2.4. Tanım: Bir doğal sayının rakamlarının her birinin bulunduğu yere basamak, basamaklara göre aldıkları değerlere basamak değeri denir. Rakamların her birinin kaç bir'likten meydana geldiğini gösteren değere ise sayı değeri denir.

$A = (a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} \dots a_2a_1a_0)$ sayısı n basamaklı doğal sayı olsun.

a_0'in bulunduğu sayıya $10^0 = 1$ ler basamağı
a_1'in bulunduğu rakama$10^1 = 10$ lar basamağı
a_2'in bulunduğu rakama$10^2 = 100$ ler basamağı
a_3'in bulunduğu rakama$10^3 = 1000$ ler basamağı
a_4'in bulunduğu rakama$10^4 = 10000$ ler basamağı
…

Örnek: 3472 sayısı,
2'nin bulunduğu basamağa 1'ler basamağı
7'nin bulunduğu basamağa 10'ler basamağı
4'nin bulunduğu basamağa 100'ler basamağı
3'nin bulunduğu basamağa 1000'ler basamağı

2.5. Tanım: Bir sayının, rakamlarının basamak değerlerinin toplamı şeklinde yazılmasına bu sayınına bu sayının çözümlenmesi denir.

$A = (a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} \dots a_2a_1a_0)$ sayısı n basamaklı doğal sayı ise

$$A = a_{n-1}.10^{n-1} + a_{n-2}.10^{n-2} + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$$

biçiminde sayı çözümlemesi yapılır.

Örnek: 4569 sayısının çözümlenmesi,

9'un bulunduğu basamak 1'ler basamağı olduğundan $9 \cdot 1 = 9 \cdot 10^0$
6'un bulunduğu basamak 10'ler basamağı olduğundan $6 \cdot 10 = 6 \cdot 10^1$
5'un bulunduğu basamak 100'ler basamağı oldu. $5 \cdot 100 = 5 \cdot 10^2$
4'un bulunduğu basamak 1000'ler basamağı oldu. $4 \cdot 1000 = 4 \cdot 10^3$
şeklindedir.

$A = (a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} \dots a_2a_1a_0)$ sayısı n basamaklı doğal sayı olsun.

$$A = a_{n-1}.10^{n-1} + a_{n-2}.10^{n-2} + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$$

Örnek: Üç basamaklı a0b sayısının birler ve yüzler basamağındaki rakamlarının yerleri değişince 198 azalıyor. $a - b$ nin değeri nedir?

Çözüm: $a0b - b0a = 198$
$(100a + b) - (100b + a) = 198$
$99a - 99b = 198$
$a - b = 2$

Örnek: ab ve ba iki basamaklı sayılardır. $ab + ba = 77$ ise $a \cdot b$'nin en küçük değeri kaçtır.

Çözüm: $ab + ba = 77$
$10a + b + 10b + a = 77$
$11a + 11b = 77$
$a + b = 7$
$a = 1,\ b = 6$ veya $a = 6,\ b = 1$ olma durumunda en küçük $a \cdot b = 6$ olur.

Örnek: Üç basamaklı mnp sayısı iki basamaklı mn sayısından 335 fazladır. Buna göre, m, n ve p sayılarını bulunuz.

Çözüm: $mnp - mn = 335$
$(100m + 10n + p) - (10m + n) = 335$
$90m + 9n + p = 335$
m, n, p birer rakam olduğundan $m = 3,\ n = 7,\ p = 2$ olması ile mümkündür.

2.5. Teorem: Bir A doğal sayısının x'ler basamağı k kadar artar veya azalır ise A sayısı kx kadar artar veya azalır.

İspat: $A = (a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} \dots a_2a_1a_0)$ sayısı n basamaklı doğal sayı olsun. Sayı çözümlemesi yapılırsa,

$$A = a_{n-1}.10^{n-1} + a_{n-2}.10^{n-2} + \dots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$$

biçimindedir. Burada x'ler basamağındaki sayı a_p ve sayı k kadar artmış veya azalmış ise, $(x = 10^p)$

$$\begin{aligned} A \pm xk &= a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \dots + (a_p \pm k)10^p + \dots + a_1 10 + a_0 \\ &= (a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \dots + a_p 10^p + \dots + a_1 10 + a_0) \pm k10^p \\ &= A \pm k10^p \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise A doğal sayısının x'ler basamağı k kadar artar veya azalır ise A sayısı kx kadar arttığını veya azaldığını gösterir.

Örnek: A sayısının birler basamağı 6 artarsa A sayısı $6 \cdot 1 = 6$ artar.
A sayısının onlar basamağı 4 azalırsa A sayısı $4 \cdot 10 = 40$ azalır.
A sayısının yüzler basamağı 2 artarsa A sayısı $2 \cdot 100 = 200$ artar gibi.

Örnek: x = a5bc2, y = a2bc8
Yukarıda verilen x ve y sayıları, birer ve binler basamağı yer değiştirmiş olan 5 basamaklı iki sayıdır. Buna göre, $x - y$ farkı kaçtır?

Çözüm: y sayısı x sayısına göre,

Birler basamağı 6 azaldığından $6 \cdot 1 = 6$
Binler basamağı 3 arttığından $3 \cdot 1\,000 = 3\,000$

$x - y = 3000 - 6 = 2994$

ARDIŞIK SAYILAR

2.5. Tanım: $n, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n, n + k, n + 2k, n + 3k, \dots$ sayılarına ardışık sayılar denir.

Örnek: $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \dots\}$ bir ardışık sayı kümesidir.

Örnek: $\{\ldots -19, -13, -7, -1, 5, 11, 17, 23, \ldots\}$ bir ardışık sayı kümesidir.

Örnek: Bir ardışık üç tek sayının toplamı, bu sayılardan en küçüğünün 4 katının 9 eksiğine eşit olduğuna göre, en küçük ardışık sayı nedir?

Çözüm: En küçük sayıya a denilirse, ortadaki sayı $a+2$, son sayı $a+4$ olacağından

$$a+(a+2)+(a+4)=4a-9$$
$$3a+6=4a-9$$
$$a=15$$

dir.

Örnek: Ardışık iki çift sayının kareleri farkı 60'dır. Bu sayılardan küçük olanı kaçtır?

Çözüm: En küçük sayıya a denilirse, bir sonraki sayı $a+2$ olacağından,

$$(a+2)^2-a^2=60$$
$$(a+2-a)(a+2+a)=60$$
$$2(2a+2)=60$$
$$2a+2=30$$
$$2a=28$$
$$a=14$$

olur.

Örnek: Gülelif bir kitabı her gün bir önceki günden 8 sayfa fazla okuyarak 6 günde bitiriyor. Gülelif 3. günün sonunda kitabın $\frac{1}{3}$ ünü okuduğuna göre, ilk gün kaç sayfa okumuştur?

Çözüm: Kitabın başlanıldığı gün okuma sayfayı x olsun. Sonraki günler,

$$(x+8),(x+16),(x+24),(x+32),(x+40)$$

şeklindedir. 3. gün $(x+16)$ olduğundan,

$$3[x+(x+8)+(x+16)]$$
$$=x+(x+8)+(x+16)+(x+24)+(x+32)+(x+40)$$
$$3(3x+24)=6x+120$$
$$9x+72=6x+120$$
$$9x-6x=120-72$$
$$3x=48$$
$$x=16$$

dır.

Örnek: a, b, c ardışık sayılar olmak üzere $a < b < c$ dir. Buna göre $4a + 2b + 3c$ nin a türünden değeri nedir?

Çözüm: $a < b < c$ ise $b = a + 1$, $c = a + 2$ olacağından,
$4a + 2b + 3c = 4a + 2(a + 1) + 3(a + 2) = 9a + 8$
dir.

2.6. Teorem: 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamı $\frac{n.(n+1)}{2}$ şeklindedir.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

İspat:
1'den n'ye kadar olan sayıların toplamı $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n$
n'den 1'ye kadar olan sayıların toplamı $n + (n - 1) + \cdots + 3 + 2 + 1$
şeklinde yazılabilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$\underbrace{(n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1)}_{\text{n tane}} = n(n + 1)$$

dir. Toplanan denklemler 2 tane olduğuna göre;

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

olarak bulunur.

Örnek: $1 + 2 + 3 + \cdots + 40 = \frac{40.41}{2} = 820$

Örnek: $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100.101}{2} = 5050$

2.7. Teorem: 2'den (2n)'ye kadar olan çift sayıların toplamı $n(n + 1)$ şeklindedir.

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n(n + 1)$$

İspat: Bu teoremin ispatı 2.6. teoremin ispatı gibidir.

Örnek: $2+4+6+\cdots+30=15.16=240$

2.8. Teorem: 1'den (2n–1)'ye kadar olan tek sayıların toplamı n^2 şeklindedir.

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

İspat: Bu teoremin ispatı 2.6. teoremin ispatı gibidir.

Örnek: $1+3+5+\cdots+39=20^2=400$

2.9. Teorem: Herhangi bir sayıdan bir başka sayıya kadar belirli artma miktarı ile artan sayıların toplamı

$$\frac{(\text{Son Sayı}+\text{İlk Sayı})(\text{Sayı Adeti})}{2},\ \text{Sayı Adeti}=\frac{\text{Son Sayı}-\text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}}+1$$

şeklindedir. Bu takdirde $m,n,r\in\mathbb{N}$ olmak üzere m'den n'ye kadar her sayı arasında r sayı artarak giden bir ardışık sayıların toplamı,

$$\left(\frac{n+m}{2}\right)\left(\frac{n-m}{r}+1\right)$$

biçimindedir. (Burada sayı adeti $\frac{n-m}{r}$ +1 dir.)

İspat: $m,n,r\in\mathbb{N}$ olmak üzere m'den n'ye kadar her sayı arasında r sayı artarak giden bir ardışık sayı olsun.

0'den m'ye kadar r sayı artarak giden sayıların toplamı;

$$\begin{aligned} r+2r+3r+\cdots+m &= r\left(1+2+3+\cdots+\frac{m}{r}\right)\\ &= r\,\frac{\frac{m}{r}\left(\frac{m}{r}+1\right)}{2}\\ &= \frac{m^2+mr}{2r}\end{aligned}$$

0'den n'ye kadar r sayı artarak giden sayıların toplamı

$$r + 2r + 3r + \cdots + n = \frac{n^2+nr}{2r}$$

m'den n'ye kadar olan sayıların toplamı

$$\frac{n^2+nr}{2r} - \frac{m^2+mr}{2r} + m = \frac{n^2-m^2+nr-mr+2mr}{2r}$$
$$= \frac{(n-m)(n+m)+r(n+m)}{2r}$$
$$= \frac{(n+m)(n-m+r)}{2r}$$
$$= \left(\frac{n+m}{2}\right)\left(\frac{n-m}{r} + 1\right)$$

olur.

Örnek: $20 + 25 + 30 + \cdots + 100$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: İlk sayı m = 20, son sayı n = 100, artış miktarı r = 5 olduğuna göre;

$$20 + 25 + 30 + \cdots + 100 = \left(\frac{100+20}{2}\right)\left(\frac{100-20}{5} + 1\right) = 1020$$

elde edilir.

Örnek: Bir şirket yönetici 10 bölgeye mesaj gönderiyor. Gönderdiği her bölge müdürü personellerine mesajı iletiyor. 1. bölge müdürünün 5, 2. bölge müdürünün 6, ..., 10. bölge müdürünün 14 personeli vardır. Buna göre toplam kaç mesaj gönderilmiştir.

Çözüm: $10 + (5 + 6 + \cdots + 14) = 10 + \left(\frac{14+5}{2}\right)\left(\frac{14-5}{1} + 1\right) = 105$

FAKTÖRİYEL

2.6. Tanım: 1'den n'ye kadar olan doğal sayıların çarpımına n faktöriyel denir ve n! ile gösterilir.

Örnek: $2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

...

2.2. Not: $1! = 1$ ve $0! = 1$ dir. $0! = 1$ olduğu çarpanlara ayırma konusunda gösterilecektir.

2.10. Teorem: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n! = n \cdot (n-1)!$

İspat: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$ ve $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)$

olduğundan $n! = n \cdot (n-1)!$ elde edilir.

Örnek: $\frac{8!-7!}{6!}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm: $\frac{8!-7!}{6!} = \frac{8 \cdot 7!-7!}{6!} = \frac{7!(8-1)}{6!} = \frac{7 \cdot 6! \cdot 7}{6!} = 49$

Örnek: $12! = n \cdot 8!$ ise n nedir?

Çözüm: $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!$ olduğundan

$$n = \frac{12!}{8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10890$$

elde edilir.

Örnek: $\frac{(n+2)!}{n!}$ işleminin en sade halini bulalım.

Çözüm: $(n+2)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!$ olduğundan

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

olur.

Örnek: $(13)^2 \cdot 11! = a$ olmak üzere

$$11! + 12! + 13!$$

toplamının a cinsinden değeri nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} 11! + 12! + 13! &= 11! + 12 \cdot 11! + 13 \cdot 12 \cdot 11! \\ &= 11!\,(1 + 12 + 13 \cdot 12) \\ &= 11!\,(13 + 13 \cdot 12) \\ &= 11!\,(13)^2 \\ &= a \end{aligned}$$

Örnek: $(n+3)! - (n+2)! = 42 \cdot (n+2)!$ olduğuna göre n'in değeri nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} (n+3)(n+2)! &= 42(n+2)! + (n+2)! \\ (n+3)(n+2)! &= 43(n+2)! \\ n+3 &= 43 \\ n &= 40 \end{aligned}$$

Örnek: $\frac{x!-y!}{y!} = 119$ ise y'nin alabileceği kaç değer vardır?

Çözüm:

$$\frac{x!-y!}{y!} = 119$$

$$\frac{x!}{y!} - \frac{y!}{y!} = 119$$

$$\frac{x!}{y!} - 1 = 119$$

$$\frac{x!}{y!} = 120$$

olduğundan;

1. $x = 5$ ve $y = 1$ alınırsa $\frac{5!}{1!} = 120$
2. $x = 5$ ve $y = 0$ alınırsa $\frac{5!}{0!} = 120$
3. $x = 120$ ve $y = 119$ alınırsa $\frac{120!}{119!} = \frac{120 \cdot 119!}{119!} = 120$
4. $x = 6$ ve $y = 3$ alınırsa $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5!}{3 \cdot 2} = 120$

olup 4 değer alır.

2.11. Teorem: $k \cdot k! = (k+1)! - k!\,,\ \ k \in \mathbb{N}$

İspat: $k \cdot k! = k \cdot k! + k! - k!$
$= k!\,(k+1) - k!$
$= (k+1)! - k!$

Örnek: $2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \ldots + 15 \cdot 15!$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$2 \cdot 2! = 3! - 2!$
$3 \cdot 3! = 4! - 3!$
$4 \cdot 4! = 5! - 4!$
...
$15 \cdot 15! = 16! - 15!$

taraf tarafa toplanırsa,

$$2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \ldots + 15 \cdot 15! = 16! - 2!$$

bulunur.

Örnek: $\frac{6}{7!} + \frac{7}{8!} + \frac{8}{9!} + \cdots + \frac{26}{27!}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\frac{6}{7!} + \frac{7}{8!} + \frac{8}{9!} + \cdots + \frac{26}{27!}$

$$= \frac{7-1}{7!} + \frac{8-1}{8!} + \frac{9-1}{9!} + \cdots + \frac{27-1}{27!}$$
$$= \frac{7}{7!} - \frac{1}{7!} + \frac{8}{8!} - \frac{1}{8!} + \frac{9}{9!} - \frac{1}{9!} + \cdots + \frac{27}{27!} - \frac{1}{27!}$$
$$= \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \cdots + \frac{1}{26!} - \frac{1}{27!}$$

$$= \frac{1}{6!} - \frac{1}{27!}$$

Örnek: A ve n birer doğal sayı ve $35! = A \cdot 3^n$ ise en büyük n doğal sayısı kaçtır?

Çözüm: 35! sayısının içinde
3 ile bölünen sayının adeti $35 = 3 \cdot 11 + 2$ olup 11 tanedir
$3^2 = 9$ ile bölünen sayının adeti $35 = 9 \cdot 3 + 8$ olup 3 tanedir
$3^3 = 27$ ile bölünen sayının adeti $35 = 27 \cdot 1 + 8$ olup 1 tanedir
Buna göre 35! sayısının içinde toplam $11 + 2 + 1 = 14$ tane 3 ile bölünen sayı vardır.

Örnek: 45! sayısının sondan kaç rakamı sıfırdır?

Çözüm: 45! sayısının sondan sıfır sayısı $45! = A \cdot 10^n$ olması ile mümkündür. Yalnız burada 10 sayısının bölenleri 2 ve 5 dir. Böylece,

$$45! = A \cdot 2^n 5^n$$

olduğundan, biz burada 5 ile bölünen sayılarına bakacağız. Çünkü 2 ile bölünen sayısı 5 ile bölünen sayıdan çok fazla çıkacaktır. Bu yüzden 5 ile bölünen sayılar alınacaktır. 2 sayısının 5 in bölenlerinden fazla olması kendi başına yeterli olmayacağından 5'in bölenleri sayısı bakmalıyız.
5 ile bölünen sayının adeti $45 = 5 \cdot 9 + 0$ olup 9 tanedir
$5^2 = 25$ ile bölünen sayının adeti $45 = 25 \cdot 1 + 20$ olup 1 tanedir
Buna göre 45! sayısının içinde toplam $9 + 1 = 10$ tane 5 ile bölünen sayı vardır.

$$45! = A \cdot 10^{10}$$

Şu halde 45! sayısının sondan sıfır sayısı 10 tanedir.

Örnek: $64! - 1$ sayısının sondan kaç rakamı dokuzdur?

Çözüm: $64! - 1$ sayısının sondan kaç rakamı dokuz sayısı ile 64! sayısının sondan sıfır sayısı aynıdır. Buna göre $64! = A \cdot 10^n$ olması ile mümkündür. Bir önceki örneğe göre aynı mantığı kullanacağımızdan 5'in bölenleri sayısı bakacağız.
5 ile bölünen sayının adeti $64 = 5 \cdot 12 + 4$ olup 12 tanedir
$5^2 = 25$ ile bölünen sayının adeti $64 = 25 \cdot 2 + 4$ olup 2 tanedir
Buna göre 64! sayısının içinde toplam $12 + 2 = 14$ tane 5 ile bölünen sayı vardır.

$$64! = A \cdot 10^{14}$$

Şu halde $64! - 1$ sayısının sondan dokuz sayısı 14 tanedir.

Örnek: $98! + 99!$ sayısının sondan kaç rakamı sıfırdır?

Çözüm: $98! + 99! = 98! + 99 \cdot 98!$
$= 98!\,(1 + 99)$
$= 98! \cdot 100$

98! sayısının sondan sıfır sayısının sondan sıfır sayısı,

5 ile bölünen sayının adeti $98 = 5 \cdot 19 + 3$ olup 19 tanedir

$5^2 = 25$ ile bölünen sayının adeti $98 = 25 \cdot 3 + 23$ olup 3 tanedir

Buna göre 98! sayısının içinde toplam $19 + 3 = 22$ tane 5 ile bölünen sayı vardır. 100 sayısının sonunda iki tane sıfır olduğundan $98! + 99!$ sayısının sondan sıfır sayısı $22 + 2 = 24$ tanedir.

ÖZEL TANIMLI SAYILAR

2.7. Tanım: Ardışık iki ya da üç pozitif tam sayının kareleri toplamına eşit olan sayılara kardışık sayılar denir.

Örnek: $13 = 2^2 + 3^2$
$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$
$29 = 2^2 + 5^2$
$35 = 1^2 + 3^2 + 5^2$
$41 = 4^2 + 5^2$
$61 = 5^2 + 6^2$

olduğundan 13, 14, 29, 35, 41 ve 61 birer kardışık sayıdır.

2.8. Tanım: Üç basamaklı bir ABC sayısı için;

$$\text{ABC} = \text{A}^3 + \text{B}^3 + \text{C}^3$$

oluyorsa bu sayıya bir Narsist (Armstrong) sayısı denir.

Örnek: $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$
$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$
$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$

olduğundan 153, 370 ve 371 birer Narsist (Armstrong) sayıdır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Sayı Kavramı ile Denklemlerin En Büyük ve En Küçük Olması

1. a ve b doğal sayıdır. Buna göre, aşağıdaki işlemlerden hangisinin sonucu daima doğal sayıdır?

i) $a - b$ ii) $b - a$ iii) $\frac{a}{b}$ iv) $a + b$ v) $a \cdot b$

Çözüm:
i) $a < b$ ise $a - b$ negatif tam sayı olur
ii) $a > b$ ise $b - a$ negatif tam sayı olur
iii) $\frac{a}{b}$ ise doğal sayı olmayabilir.
iv) $a + b$ daima doğal sayı olur
v) $a \cdot b$ daima doğal sayı olur

2. x, y ve z birer doğal sayı olmak üzere,

$$x + y + z = 10$$

olduğuna göre $x \cdot y \cdot z$ en çok kaçtır?

Çözüm: $x = 3, y = 3, z = 4$ alınırsa $x \cdot y \cdot z = 36$ olup en çok olur.

3. a ve b birer doğal sayı olmak üzere,

$$3a + 4b = 24$$

olduğuna göre, $a \cdot b$ en çok kaçtır? (Bu ve benzeri sorular türev yoluyla yapılabilir)

Çözüm: $a = 4, b = 3$ alınırsa $a \cdot b = 12$ olup en çok olur.

4. $x \in \mathbb{N}^+, y \in \mathbb{Z}^-$ olmak üzere,

$$x - y$$

ifadesi en az kaçtır?

Çözüm: $x = 1, y = -1$ alınırsa $x - y = 1 - (-1) = 2$ olup en az sayı olur.

5. x ve y birer tam sayı olmak üzere,

$$3 < x < 12\,,\quad 5 < y < 10$$

olduğuna göre, $x - y$ ifadesi en çok kaçtır?

Çözüm: $x = 11, y = 6$ alınırsa $x - y = 11 - 6 = 5$ olup en çok olur.

6. a ve b birer doğal sayı olmak üzere,

$$3 < a < 13\,,\quad 5 < b < 10$$

olduğuna göre, $\frac{a}{b}$ ifadesi en çok kaçtır?

Çözüm: $a = 12, b = 6$ alınırsa $\frac{a}{b} = \frac{12}{6} = 2$ olup en çok olur.

7. m ve n birer doğal sayı olmak üzere,

$$2 \leq m \leq 9\,,\quad 1 < n \leq 10$$

olduğuna göre, $\frac{m+n}{m \cdot n}$ ifadesi en çok kaçtır?

Çözüm: $\frac{m+n}{m \cdot n} = \frac{m}{m \cdot n} + \frac{n}{m \cdot n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ denkleminde $m = 2, n = 2$ alınırsa $\frac{m+n}{m \cdot n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ olur.

8. Her biri iki basamaklı olan, birbirinden farklı beş doğal sayının toplamı 90'dür. Buna göre, bu doğal sayıların en büyüğü en çok kaç olabilir?

Çözüm: En büyüğünü bulmak için diğerlerini en küçük seçmeliyiz.
$10 + 11 + 12 + 13 = 46$
$90 - 46 = 44$

9. İkişer basamaklı, birbirinden farklı üç doğal sayının toplamı 240'dır. Buna göre bu doğal sayıların en küçüğü en az kaç olabilir?

Çözüm: İki basamaklı en küçük sayıyı bulmak için diğer iki sayı mümkün olduğu kadar büyük seçilmelidir.

$99 + 98 = 197$

$240 - 97 = 43$

Doğal Sayı ve Tamsayı Denklemleri

10. a bir doğal sayı olmak üzere,

$$a^2 + a = 12$$

olduğuna göre, a'nın değeri nedir?

Çözüm: Bu denklemler 2. Dereceden denklem olarak çözülmelidir. Ama burada deneme yanılma yöntemi uygulanırsa,

$$3^2 + 3 = 12$$

$$a = 3$$

olur.

11. m ve n birer pozitif tam sayı olmak üzere,

$$3m + 4n = 77$$

olduğuna göre, m'nin değeri en çok kaç olur?

Çözüm: m'nin en büyük değeri için n en küçük seçilmelidir.

$n = 2$ alınırsa $m = 23$

12. a ve b birer tam sayı olmak üzere,

$$a \cdot b = 24$$

olduğuna göre, a'nın alacağı değerler toplamı nedir?

Çözüm: $1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$

$24 \cdot 1 = 12 \cdot 2 = 8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$

a'nın alacağı değerlerin toplamı

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 60$$

olur.

13. a, b ve c birer pozitif tam sayı olmak üzere,

$$a \cdot b = 24, \quad b \cdot c = 42$$

olduğuna göre, $a + b + c$'nin değeri en az kaçtır?

Çözüm: a, b ve c noktaları mümkün olduğu kadar büyük seçilirse istenen elde edilir.

$a = 4, b = 6, c = 7$

$a + b + c = 4 + 6 + 7 = 17$

Doğal ve Tam Sayılarda Pozitif ve Negatiflik

14. x, y ve z birer tamsayı olmak üzere, $x < y < 0 < z$ olduğuna göre, aşağıdaki işlemlerden hangisinin sonucu kesinlikle pozitiftir?

A) $(x + y).z$ B) $(x - y).z$ C) $\frac{x-y}{z}$ D) $\frac{y}{x-z}$ E) $\frac{y}{x+z}$

Çözüm: $-x = m, -y = n$ olsun.

$$\frac{y}{x-z} = \frac{-n}{-m-z} = \frac{n}{m+z} > 0$$

15. x pozitif bir sayı olduğuna göre, aşağıdakilerden hangi negatiftir?

A) $(-x)^2$ B) x^{-1} C) $-x^{-3}$ D) $-(-x)^3$ E) x^{-2}

Çözüm: $x > 0$ olduğundan $x = -x^{-3} = -\frac{1}{x^3} < 0$ olur.

16. a ve b birer tamsayı olmak üzere,

$$(a - 3)^2 + (b + 2)^2 = 0$$

olduğuna göre, a + b nin değeri nedir?

Çözüm: $(a - 3)^2 + (b + 2)^2 = 0$ olması için $0^2 + 0^2 = 0$ olmalıdır.

$a - 3 = 0$ ve $b + 2 = 0$

$a = 3$ ve $b = -2$

$a + b = 3 - 2 = 1$

17. m ve n birer reel sayı olmak üzere,

$$(mn + 8)^6 + (m - 4)^4 = 0$$

olduğuna göre, n'nin değeri nedir?

Çözüm: $(mn + 8)^6 + (m - 4)^4 = 0$ olması için $0^2 + 0^2 = 0$ olmalıdır.

$mn + 8 = 0$ ve $m - 4 = 0$
$mn = -8$ ve $m = 4$
$n = -2$

Tek ve Çifti Sayılar

18. Aşağıda verilen ifadelerden hangisi yanlıştır.

A) 0 bir çift tam sayıdır.
B) Ardışık iki doğal sayının biri tek diğeri çifttir.
C) Ardışık iki doğal sayının çarpımı çifttir.
D) Çift sayıların bütün kuvvetleri çifttir.
E) En küçük çift tam sayı 2'dir.

Çözüm: $\{\dots, -6, -4, -2, 0, \dots\}$ sayıları birer çift sayı olduğundan en küçük çift tam sayı 2 değildir.

19. x bir tam sayı olduğuna göre, aşağıdaki işlemlerden hangisinin sonucu daima çift sayıdır?

A) $4x + 2$ B) x^2 C) x^3 D) $x + 4$ E) $3x + 2$

Çözüm: $4x$ daima çift sayı olduğundan $4x + 2$ daima çift sayıdır.

20. x bir tam sayı, $3x + 4$ çift sayı ise, aşağıdakilerden hangisi daima tek sayıdır?

A) $4x$ B) x^2 C) x^3 D) $\frac{x}{2}$ E) $x + 3$

Çözüm: $3x + 4$ çift sayı ise $3x$ bir çift sayıdır, buna göre x çift olmalıdır. Şu halde $x + 3$ daima tek sayıdır.

21. x ve y birer tam sayı olmak üzere,

$$6x + 4 = 5y - 1$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) x tek sayıdır

B) y tek sayıdır
C) x çift sayıdır
D) y çift sayıdır
E) Herhangi bir şey söylenemez

Çözüm: $6x + 4$ çit sayı olacağından $5y - 1$ çift sayıdır. Şu halde 5y tek sayı olur. O halde y tek sayıdır.

22. x, y ve z birer tam sayı olmak üzere;

$$(x - 3)(y + 6)(x + z) = 513$$

olduğuna göre, x, y ve z sayılarının tek veya çift olduğunu gösteriniz.

Çözüm: 513 tek sayı olduğundan $x - 3$ tek, $y + 6$ tek ve $x + z$ tek olmalıdır. Şu halde x çift, y tek ve z tek sayı olur.

Ardışık Sayılar

23. Ardışık dört tek sayının toplamı 48 dir. Buna göre, bu sayıların en büyüğü nedir?

Çözüm: Bu sayıların en küçüğü n olsun.
$n + (n + 2) + (n + 4) + (n + 6) = 48$
$4n + 12 = 48$
$n = 9$
$n + 6 = 15$

24. Ardışık beş doğal sayıdan en küçük ikisinin çarpımı, bu sayıların en büyüğüne eşittir. Buna göre en büyük sayı nedir?

Çözüm: Bu sayıların en küçüğü n olsun.
$n \cdot (n + 1) = n + 4$
$n^2 + n = n + 4$
$n = 2$
En büyük sayı $n + 4 = 6$ dir.

25. a, b ve c ardışık üç pozitif tek tamsayı olmak üzere,
$a < b < c$

olduğuna göre $\frac{a+c}{b}$ nin değeri nedir?

Çözüm: Bu sayılar $a, b = a + 2, c = a + 4$ olur.

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a+a+4}{a+2} = \frac{2a+4}{a+2} = 2$$

26. a, b, c ardışık üç tam sayıdır.

$$a < b < c$$

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre a'nın değeri nedir?

Çözüm: Bu sayılar $a, b = a + 1, c = a + 2$ olur.

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{a+1-1}{a+1}\right)\left(\frac{a+2-1}{a+2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{a}{a+1}\right)\left(\frac{a+1}{a+2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a-1}{a+2} = \frac{2}{3}$$

$$3a - 3 = 2a + 4$$

$$a = 7$$

27. 138 ile 532 arasında, 8 ile tam bölünen kaç doğal sayı vardır?

Çözüm: 138 ile 532 arasında, 8 ile tam bölünen sayılar;

$$144, 152, 160, \dots, 528$$

dir. Buna göre

$$\text{Sayı Adeti} = \frac{\text{Son Sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{528-144}{8} + 1 = 49$$

tanedir.

28. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + 15 \cdot 16$

birinci çarpanı tek sayı, ikini çarpanı çift sayı olan bir sayı dizisi veriliyor. Bu sayı dizisinde ilk çarpan 1 artırıldığında toplamın değeri ne kadar artar?

Çözüm: $T = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + 15 \cdot 16$ alınırsa ilk çarpan 1 artırıldığında

$$U = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + \cdots + 16 \cdot 16$$

olur. Aralarındaki fark

$$\begin{aligned} U - T &= (2-1)\cdot 2 + (4-3)\cdot 4 + (6-5)\cdot 6 + \cdots + (16-15)\cdot 16 \\ &= 2+4+6+\cdots+16 \\ &= 2+4+6+\cdots+(2\cdot 8) \\ &= 8\cdot(8+1) \\ &= 72 \end{aligned}$$

olur.

29. $\frac{1}{17}, \frac{1}{20}, \frac{1}{23}, \dots, \frac{1}{41}$

kesirli sayı dizisinde kaç tane eleman vardır?

Çözüm:

$$\text{Sayı Adeti} = \frac{\text{Son Sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{41-17}{3} + 1 = 11$$

30. $\frac{5}{7}, \frac{8}{11}, \frac{11}{15}, \dots, \frac{26}{x}$

kesirlerinin payları 3'er 3'er, paydaları 4'er 4'er arttığına göre, x'in değeri nedir?

Çözüm: $n+1$ terim sayısını vermek üzere;

$$5 + 3n = 26$$

denkleminde $n = 7$ olur. Buna göre paydadaki durum

$$7 + 4n = 7 + 4\cdot 7 = 35$$

olur.

31. 1'den 2n'ye kadar olan çift doğal sayıların toplamı x, 9'dan 2n'e kadar olan çift doğal sayıların toplamı y olsun.

$$x + y = 160$$

olduğuna göre, n'nin değeri nedir?

Çözüm: $2+4+6+8+10+\cdots+2n = x$ ve $10+\cdots+2n = y$ denklemlerinde

$$x = y + 12$$

elde edilir. Buna göre;

$$\begin{aligned} &x + y = 160 \\ &y + 12 + y = 160 \\ &y = 74, x = 86 \\ &2n = 86 \end{aligned}$$

$n = 43$
olur.

32. Ardışık iki çift doğal sayının kareleri farkı 100 dir. Bu sayıların toplamı nedir?

Çözüm: Bu sayılar $2n$ ve $2n + 2$ olsun.
$(2n + 2)^2 - (2n)^2 = 100$
$4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 = 100$
$8n + 4 = 100$
$n = 12$
$2n + 2n + 2 = 50$

33. 6 tane ardışık çift tamsayıların toplamı en büyük elemanın 5 katına eşittir. Buna göre, en küçük sayı nedir?

Çözüm: Bu sayılar $2n, 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6, 2n + 8$ ve $2n + 10$ olsun.
$2n + 2n + 2 + 2n + 4 + 2n + 6 + 2n + 8 + 2n + 10 = 5(2n + 10)$
$12n + 30 = 10n + 50$
$n = 10$
En küçük sayı $2n = 20$ olur.

34. $\frac{a}{15}, \frac{b}{3}$ ve $\frac{a}{10}$ küçükten büyüğe doğru sıralanmış ardışık üç tam sayıdır. Buna göre, b'nin değeri nedir?

Çözüm: Ardışık bu sayılar $n, n + 1, n + 2$ olsun.
$n = \frac{a}{15}, n + 1 = \frac{b}{3}, n + 2 = \frac{a}{10}$
$\frac{a}{15} + 2 = \frac{a}{10}$
$2a + 60 = 3a$
$a = 60$
$n = \frac{60}{15} = 4$
$4 + 1 = \frac{b}{3}$
$b = 15$

Basamak Sayısı

35. x ve y birer rakam olmak üzere,

$$x = y^2 - 58$$

olduğuna göre x'in değeri nedir?

Çözüm: x ve y birer rakam ise karesi 58'den büyük olan rakam 8 ve 9 dur. Ama $y = 9$ alınırsa $x = 9^2 - 58 = 23$ olup bir rakam oluşturmaz. Şu halde $y = 8$ alınırsa $x = 8^2 - 58 = 6$ olur.

36. a87b rakamları farklı dört basamaklı bir doğal sayıdır. Buna göre bu sayının en büyük değeri için $a - b$ değeri nedir?

Çözüm: $a87b = 9876$ olacağından $a - b = 9 - 6 = 3$ olur.

37. a, b, c, d ve e birbirinden farklı rakamlar, abc üç basamaklı, de iki basamaklı doğal sayıdır. Buna göre abc + de en az kaç olur?

Çözüm: $abc + de = 104 + 23 = 127$

38. abcde beş basamaklı rakamları birbirinden farklı en küçük değerli bir doğal sayıdır. Buna göre en küçük rakam hangisidir?

Çözüm: $abcde = 10234$ olduğundan en küçük rakam $b = 0$ dır.

39. $a < 8$, $b > 4$, $c < 7$ olmak üzere, abc doğal sayısında, yüzler basamağı 2 artırılır, onlar basamağı 5 azaltılır ve birler basamağı 3 artırılırsa, abc sayısındaki değişim neolur?

Çözüm: Bu tür sorularda nümerik değerler alınabilir. $a = 7, b = 5, c = 6$ alınırsa ve yüzler basamağı 2 artırılır, onlar basamağı 5 azaltılır, birler basamağı 3 artırılırsa 959 olur.

$$959 - 756 = 203$$

olur.

Basamak Çözümlemesi

40. Dört basamaklı xyxy sayısının basamak çözümlenmesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x + 2y$ B) $1000x + 100y$ C) $1001x + 110y$
D) $1001x + 101y$ E) $1010x + 101y$

Çözüm: $xyxy = 1000x + 100y + 10x + y = 1010x + 101y$

41. İki basamaklı bir doğal sayı, rakamları toplamının 4 fazlasına eşittir. Buna göre, sayının onlar basamağındaki rakamın alacağı rakamlar toplamı nedir?

Çözüm: İki basamaklı sayı ab olsun. Sayı çözümlemesi $ab = 10a + b$ olur.

$10a + b = 4(a + b)$

$2a = b$

a'nın alacağı değerler $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesidir.

42. Rakamları birbirinden farklı abc, bca, cab üçer basamaklı doğal sayı ve

$$abc + bca + cab = 2\,220$$

olduğuna göre, $a + b + c$ sayısı nedir?

Çözüm: Verilen sayısının sayı çözümlemesi yapılırsa

$100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 2\,220$

$111a + 111b + 111c = 2\,220$

$a + b + c = 20$

elde edilir.

43. İki basamaklı ab sayısından iki basamaklı ba sayısı çıkarıldığında $ba - 9$ sayısı elde ediliyor. ab sayısının değeri nedir?

Çözüm: Verilen sayısıların sayı çözümlemesi yapılırsa

$ab - ba = ba - 9$

$10a + b - 10b - a = 10b + a - 9$

$8a = 19b - 9$

$a = 6, b = 3$

$ab = 63$

44. ab3 üç basamaklı bir doğal sayı olmak üzere,

$x = ab3$

olduğuna göre, iki basamaklı ab sayısının x türünden eşiti nedir?

Çözüm: ab iki basamaklı sayı $y = ab$ ile gösterelim. Verilen sayısının sayı çözümlemesi yapılırsa

$x = 100a + 10b + 3$

$x = 10(10a + b) + 3$

$x = 10y + 3$

$y = \frac{x-3}{10}$

olur.

45. aab üç basamaklı, ab iki basamaklı doğal sayı ve

$aab = 9 \cdot ab$

olduğuna göre $a \cdot b$ nin değeri nedir?

Çözüm: $aab = 9 \cdot ab$ sayısının sayı çözümlemesi yapılırsa,

$100a + 10a + b = 9(10a + b)$

$110a + b = 90a + 9b$

$5a = 2b$

$a = 2, b = 5$

$a \cdot b = 2 \cdot 5 = 10$

bulunur.

46. ab sayısı ile iki basamaklı ba sayısının toplamının $a + b$ sayının x katına eşittir. Buna göre x'in değeri nedir?

Çözüm: $ab + ba = x(a + b)$ denkleminde sayı çözümlemesi yapılırsa,

$10a + b + 10b + a = x(a + b)$

$11(a + b) = x(a + b)$

$x = 11$

47. Dört basamaklı $x = 5ab3$, $y = 2ab8$ sayıları veriliyor, burada, $x - y$ farkı kaçtır?

Çözüm: Verilen sayıların sayı çözümlemesi yapılırsa

$x - y = (5\,000 + 100a + b + 3) - (2\,000 + 100a + b + 8) = 2\,995$

Faktöriyel

48. I. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
II. $0! = 1$
III. $10! = 10 \cdot 9!$
IV. $6! + 5! = 6 \cdot 5!$
V. $8! - 6! = 55 \cdot 6!$

Yukarıdakilerden kaçı doğrudur?

Çözüm: $6! + 5! = 6 \cdot 5! + 5! = 7 \cdot 5!$ Yanlış olup diğerleri doğrudur. Mesela $8! - 6! = 8 \cdot 7 \cdot 6! - 6 = 55 \cdot 6!$ olur. 4'ü doğrudur.

49. $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$ çarpımı aşağıdakilerden hangisi eşittir?

A) $\frac{13!}{7!}$ B) $\frac{13!}{6!}$ C) $\frac{12!}{7!}$ D) $\frac{12!}{6!}$ E) $\frac{12!}{5!}$

Çözüm: $\frac{12!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$

50. $8!$ sayısı,

$\{7, 35, 56, 60, 68\}$

kümesindeki elemanlardan hangilerine tam bölünür.

Çözüm: $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ olduğundan $8!$ İçinde 7 vardır, 5 ve 7 olduğundan 35'e, 7 ve 8 olduğundan 56'ya bölünür, ama 60 ile 68'e tam bölünmez.

51. x ve y pozitif doğal sayı olmak üzere,

$11! \cdot 12! = x^2 y$

olduğuna göre, y'nin en küçük değeri için x'in değeri nedir?

Çözüm: $x^2 y = 11! \cdot 12! = 11! \cdot 11! \cdot 2^2 \cdot 3 = (11! \cdot 2)^2 \cdot 12$
$y = 3$
$x = 11! \cdot 2$

52. $\frac{10!+9!}{8!+7!}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\frac{10!+9!}{8!+7!} = \frac{10 \cdot 9! + 9!}{8 \cdot 7! + 7!} = \frac{11 \cdot 9!}{9 \cdot 7!} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{9 \cdot 7!} = 88$

53. $A = 0! + 1! + 2! + 3! + \cdots + 20!$
olduğuna göre, A sayısının birler basamağı nedir?

Çözüm: $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720$
5! in içinde 2 ve 5 olduğundan son rakamı 0'dır.
5! ve sonraki faktöriyellerde 2 ve 5 olacağından son rakamı 0'olur.
$0! + 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1 + 2 + 6 + 24 = 34$
olur.

54. 18! sayısı çarpım biçiminde yazıldığında, içerisinde 2 çarpanı kaç tanedir?

Çözüm: 18! sayısının içinde
2 ile bölünen sayının adeti $18 = 2 \cdot 9 + 0$ olup 9 tanedir
$2^2 = 4$ ile bölünen sayının adeti $18 = 4 \cdot 4 + 2$ olup 4 tanedir
$2^3 = 8$ ile bölünen sayının adeti $18 = 8 \cdot 2 + 2$ olup 2 tanedir
$2^4 = 16$ ile bölünen sayının adeti $18 = 16 \cdot 1 + 2$ olup 1 tanedir
Buna göre 18! sayısının içinde toplam $9 + 4 + 2 + 1 = 16$ tane 2 ile bölünen sayı vardır.

55. $26! = A.3^n$ sayısında n'nin en büyük değeri nedir?

Çözüm: 26! sayısının içinde
3 ile bölünen sayının adeti $26 = 3 \cdot 8 + 2$ olup 8 tanedir
$3^2 = 9$ ile bölünen sayının adeti $26 = 9 \cdot 2 + 8$ olup 2 tanedir
Buna göre 26! sayısının içinde toplam $n = 8 + 2 = 10$ tane 3 ile bölünen sayı vardır.

56. 44! + 43! sayısının sondan kaç basamağı sıfırdır?

Çözüm:
$$\begin{aligned} 44! + 43! &= 44 \cdot 43! + 43! \\ &= 43!\,(1 + 44) \\ &= 43! \cdot 45 \end{aligned}$$
43! sayısının sondan sıfır sayısı $43! = A \cdot 10^n$ olması ile mümkündür. Yalnız burada 10 sayısının bölenleri 2 ve 5 dir. Böylece,
$$43! = A \cdot 2^n 5^n$$
olduğundan, biz burada 5 ile bölünen sayılarına bakacağız. Çünkü 2 ile bölünen sayısı 5 ile bölünen sayıdan çok fazla çıkacaktır. Bu yüzden 5 ile bölünen

sayılar alınacaktır. 2 sayısının 5 in bölenlerinden fazla olması kendi başına yeterli olmayacağından 5'in bölenleri sayısı bakmalıyız.

5 ile bölünen sayının adeti $43 = 5 \cdot 8 + 3$ olup 8 tanedir

$5^2 = 25$ ile bölünen sayının adeti $43 = 25 \cdot 1 + 18$ olup 1 tanedir

Buna göre 43! sayısının içinde toplam $8 + 1 = 9$ tane 5 ile bölünen sayı vardır.

$$43! = A \cdot 10^9$$

Şu halde $44! + 43!$ sayısının sondan sıfır sayısı 9 tanedir.

57. $A = 58! - 1$ sayısının sondan kaç basamağı 9'dur?

Çözüm: $58! - 1$ sayısının sondan kaç rakamı dokuz sayısı ile 58! sayısının sondan sıfır sayısı aynıdır. Buna göre $58! = A \cdot 10^n$ olması ile mümkündür. Bir önceki örneğe göre aynı mantığı kullanacağımızdan 5'in bölenleri sayısı bakacağız.

5 ile bölünen sayının adeti $58 = 5 \cdot 11 + 3$ olup 11 tanedir

$5^2 = 25$ ile bölünen sayının adeti $58 = 25 \cdot 2 + 8$ olup 2 tanedir

Buna göre 58! sayısının içinde toplam $11 + 2 = 13$ tane 5 ile bölünen sayı vardır.

$$58! = A \cdot 10^{14}$$

Şu halde $58! - 1$ sayısının sondan dokuz sayısı 13 tanedir.

58. $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$ denkleminin en sade hali nedir?

Çözüm: $\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = n + 2$

59. $8! \cdot n$ çarpımı bir pozitif tamsayının karesi olduğuna göre, n'nin değeri nedir?

Çözüm:
$$\begin{aligned} 8! \cdot n &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2^3 \\ &= 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 2^6 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 24^2 \cdot 70 \end{aligned}$$

olduğundan $n = 70$ olur.

60. a, b ve c doğal sayıları için

$$7! - 12 \cdot 5! = 2^a 3^b 5^c$$

olduğuna göre, $a \cdot b \cdot c$ toplamı kaçtır?

Çözüm: $7! - 12 \cdot 5! = 7 \cdot 6 \cdot 5! - 12 \cdot 5!$
$= 30 \cdot 5!$
$= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
$= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$a = 4, b = 2, c = 2$
$a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

61. $a = 7! \cdot 3!,\ b = 6! \cdot 4!,\ c = 5! \cdot 5!$ olduğuna göre, a, b ve c'nin sıralamalardan nasıl olur?

Çözüm: $x = 5! \cdot 3!$ olsun.
$a = 7! \cdot 3! = 7 \cdot 6 \cdot 5! \cdot 3! = 42x$
$b = 6! \cdot 4! = 6 \cdot 5! \cdot 3! \cdot 4 = 24x$
$c = 5! \cdot 5! = 5! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 5 = 20x$
olduğundan $c < b < a$ olur.

62. $\frac{(n-2)!(n+3)}{(n-1)(2-n)!}$ ifadesinin sonucu nedir?

Çözüm: Verilen ifadede $(2-n)!$ pozitif bir ifade olması için n'nin değeri 0, 1, ve 2'den biri olmalıdır. Ama 0 ve 1 seçildiğinde $(n-2)!$ tanımsız olacağından $n = 2$ olmalıdır.

$$\frac{(2-2)!(2+3)}{(2-1)(2-2)!} = \frac{0! \cdot 5}{1 \cdot 0!} = 5$$

Sonsuzla İlgili Problemler

Gerçekte sonsuz cisimler yoktur, ama biz bu sorularda sonsuz kavramını anlayabilmek için sonsuz cisimler ve sonsuz insanlar kabul edeceğiz.

64. Sonsuz odası olan bir otelde 1 müşteri daha gelirse, bu müşteri otele nasıl yerleştirilmelidir?

Çözüm: Bu odadaki 1 numaralı müşteri 2 numaralı odaya, 2 numaralı müşteri 3 numaralı odaya, 3 numaralı müşteri 4 numaralı diğer odaları da benzer şekilde aktarılarak 1 numaralı oda boşalmış olur. Bu odaya yeni gelen müşteri yerleştirilir.//

Bu sorudan $\infty \pm 1 = \infty$ tespiti yapılır.

65. Sonsuz odası olan bir otelde sonsuz koltuklu bir otobüsle sonsuz müşteri gelirse, bu müşteriler bu otele nasıl yerleştirilir?

Çözüm: Sonsuz odadaki müşteriler dışarı çıkarılıp bir eski müşterilerden bir yeni müşterilerden alınarak otel odalarına yerleştirilir.//

Bu sorudan $\infty + \infty = \infty$ ve $\infty \cdot \infty = \infty$ tespiti yapılır. Ama $\infty - \infty$ ve $\infty \div \infty = \infty$ limit konusunda anlatılacaktır.

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. M. Zeki DERMAN, Serdar GÜLMEZ, Ökkeş ÖZKÖSELER, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2002, Ankara.
4. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Matematik Cep Kitabı, Final Dergisi Yayınları, 1989, İstanbul.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.