3. BÖLÜM
BÖLÜNEBİLME

BÖLÜNEBİLME KAVRAMI

3.1. Tanım: Herhangi iki $a \neq 0$, b tam sayıları için $b = ac$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ varsa a, b'yi böler denir ve $a|b$ şeklinde gösterilir. Aksi halde a, b'yi bölmez denir ve bu takdirde $a \nmid b$ şeklinde gösterilir.

Eğer a, b'nin bir böleni ise b aynı zamanda $-a$ ile de bölünür. Bu nedenle bir tamsayının bütün bölenlerini bulmak yerine sadece pozitif bölenlerini bulmak yeterlidir.

3.1. Aksiyom: a, b, c tam sayıları için aşağıdakiler geçerlidir.
i) $a|0$, $1|a$ ve $a|a$
ii) $a|1$ olması ancak ve yalnız $a = \mp 1$ olması ile mümkündür.
ii) Eğer $a|b$ ve $c|d$ ise $ac|bd$ dir.
iv) Eğer $ca|cb$ ve $c \neq 0$ ise $a|b$ dir.
v) Eğer $a|b$ ve $b|c$ ise $a|c$ dir.
vi) $a|b$ ve $b|a$ olması ancak ve yalnız $a = \mp b$ olması ile mümkündür.
vii) Eğer $a|b$ ve $b \neq 0$ ise $|a| \leq |b|$ dir.

Örnek: Her $n \in \mathbb{Z}$ için $2|n^2 + n$ olup olmadığını araştınız.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{Z}$ için $n^2 + n = n(n + 1)$ dir. Eğer $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ alınırsa $n + 1 = 2k + 1$ olur ki, bu bize n veya $n + 1$ in birinin çift sayı olduğunu gösterir. Şu halde $2|n^2 + n$ olur.

Örnek: Her $n \in \mathbb{Z}$, n tek sayı olmak üzere $n^2 + n + 6$ sayısının 4 ile bölünüp bölünmediğini gösteriniz.

Çözüm: n tek sayı ise $n = 2k + 1$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$
\begin{aligned}
n^2 + n + 6 &= (2k + 1)^2 + (2k + 1) + 6 \\
&= 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 + 6 \\
&= 4(k^2 + k + 2)
\end{aligned}
$$

Şu halde $4|n^2 + n + 6$ olur.

Örnek: Her $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $3 | a+2$ ve $3 | b+2$ ise $3 | a^2 - b^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $3 | a+2$ ve $3 | b+2$

$$a = 3k-2, b = 3\ell - 2, (k, \ell \in \mathbb{Z})$$
$$a^2 - b^2 = (3k-2)^2 - (3\ell-2)^2$$
$$= (9k^2 - 12k + 4) - (9\ell^2 - 12\ell + 4)$$
$$= 3[\underbrace{3(k^2 - \ell^2) - 4(k - \ell)}_{\in \mathbb{Z}}]$$

Buna göre $3 | a^2 - b^2$ olur.

BÖLÜNEBİLME KURALLARI

2 İle Bölünebilme

3.1. Teorem: Çift sayılar 2 ile tam bölünür, tek sayılar 2 ile bölümünden kalan 1'dir.

Bu teoremin ispatı açık olduğundan ispatına gerek yoktur.

Örnek: 25m üç basamaklı sayısı 2 ile tam bölünüyor ise m'nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Çözüm: 25m sayısı 2 ile tam bölüneceğinden m çift sayı olmalıdır. Buna göre,

$$0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

olarak bulunur.

3 İle Bölünebilme

3.2. Teorem: Bir A sayının rakamlarının sayı değerinin toplamı 3'ün katı ise A sayısı 3 ile tam bölünür. Yani, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ birer rakam ve $A = (a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)$ sayısı n basamaklı bir sayı olsun.

$$a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$$

sayısı 3'nin tam katı ise A sayısı 3 ile tam bölünür.

İspat: $A = (a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)$ bir sayı olsun. Bu sayının basamak çözümlemesini yaparsak,

$$\begin{aligned} A &= (a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) \\ &= a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \dots + 1\underbrace{00\dots0}_{n-1 \text{ tane}} a_{n-1} \end{aligned}$$

bulunur. Beri taraftan

$$\begin{array}{ll} 1 = 1 & a_0 = a_0 \\ 10 = 9 + 1 & 10a_1 = 9a_1 + a_1 \\ 100 = 99 + 1 & 10^2 a_2 = 99a_2 + a_2 \\ \dots & \\ 1\underbrace{00\dots0}_{n-1 \text{ tane}} = \underbrace{99\dots9}_{n-1 \text{ tane}} + 1 & 1\underbrace{00\dots0}_{n-1 \text{ tane}} = \underbrace{99\dots9}_{n-1 \text{ tane}} a_{n-1} + a_{n-1} \end{array}$$

dir. İkinci tarafı, taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} (a_{n-1} \dots a_2, a_1, a_0) &= a_0 + 9a_1 + a_1 + 99a_2 + a_2 + \cdots + \underbrace{99\dots9}_{n-1 \text{ tane}} a_{n-1} + a_{n-1} \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + 9(a_1 + 11a_2 + \cdots + \underbrace{11\dots1}_{n-1 \text{ tane}} a_{n-1}) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $9(a_1 + 11a_2 + \cdots + \underbrace{11\dots1}_{n-1 \text{ tane}} a_{n-1})$ sayısı 3 ile bölündüğüne göre geriye sadece,

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

kalır. Buna göre $A = (a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_2, a_1, a_0)$ sayısı 3 ile bölünebilmesi için,

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

sayısı 3 ün tam katı olmalıdır.

Örnek: 34572 sayısı 3 ile tam bölünür. Çünkü

$$3 + 4 + 5 + 7 + 2 = 21$$

bulunur. 21 sayısı 3 ile tam bölündüğüne göre 34572 sayısı da 3 ile tam bölünür.

Örnek: 5a2 sayısı 3 ile tam bölündüğüne göre a'nın alabileceği değerler nedir?

Çözüm: $5 + a + 2 = 7 + a$ olduğundan a rakamı 2, 5 ve 8 den biridir. Çünkü,

$$7 + 2 = 9, 7 + 5 = 12 \text{ ve } 7 + 8 = 15$$

9, 12 ve 15 sayıları 3 ile tam bölündüğünden 2, 5 ve 8 ile tam bölünür.

3.1. Sonuç: Bir A sayının rakamlarının toplamının 3 ile bölümünden kalan k ise A sayının 3 ile bölümünden kalan da k'dır.

Örnek: 8713456 sayısı 3 ile bölündüğünde kalan nedir?

Çözüm:

$$8 + 7 + 1 + 3 + 4 + 5 + 6 = 34$$

bulunur. 34 sayısı 3 ile bölündüğünde 1 kanını verdiğinden 8713456 sayısı da 3 ile bölündüğünde 1 kalanını verir.

Örnek: $A = 4238^3$ sayısının 3 ile bölümünden kalan nedir?

Çözüm: $4 + 2 + 3 + 8 = 17$ olduğundan 4238 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2'dir. Buna göre;

$$2^3 = 8$$

ve 8'in 3'ile bölümünden kalan 2 olduğundan $A = 4238^3$ sayısının 3 ile bölümünden kalan 2'dir.

4 İle Bölünebilme

3.3. Teorem: Bir sayının 4 ile bölünebilmesi için son iki rakamı 00 veya 4 ile bölünmesi yeterlidir.

Bu teoremin ispatı açık olduğundan ispatına gerek yoktur.

Örnek: 345684 sayısında 84 sayısı 4 ile bölündüğünden 345684 sayısı da 4 ile bölünür.

Örnek: 9a6 sayısının 4 ile bölünebilmesi için a sayısı 1, 3, 5, 7 rakamlarından biri olmalıdır.

5 İle Bölünebilme

3.4. Teorem: Bir sayının son rakamı 0 ve 5 ise bu sayı 5 ile bölünür.

Bu teoremin ispatı açık olduğundan ispatına gerek yoktur.

Örnek: 4xy üç basamaklı sayı 5 ve 3 ile tam bölünüyor ise x'in yerine kaç farklı rakam yazılabilir?

Çözüm: Bir sayı 5 ile tam kalansız bölünüyorsa son rakamı ya 0 ya da 5 tir.

$y = 0$ ise $4 + x + 0 = 4 + x$ ifadesi 3 ile bölüneceğinden $x = \{2, 5, 8\}$ rakamları bulunabilir.

$y = 5$ ise $4 + x + 5 = 9 + x$ ifadesi 3 ile bölüneceğinden $x = \{0, 3, 6\}$ rakamları bulunabilir.

6 İle Bölünebilme

3.5. Teorem: Bir sayının 6 ile tam bölünebilmesi için 2 ve 3 ile tam bölünmelidir.

Bu teoremin ispatı açık olduğundan ispatına gerek yoktur.

Örnek: 72a üç basamaklı sayısı 6 ya tam bölünüyorsa a'nın yerine yazılabilecek rakamlar nelerdir?

Çözüm: 72a sayısının 6 ile bölünmesi için hem 2 hem 3 ile kalansız bölünmelidir. 2 ile kalansız bölünmesi için a sayısı çift olmalıdır. Yani a sayısı 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarından biri olmalıdır. Ayrıca,

$$7 + 2 + a$$

toplamı 3 ile kalansız bölünmelidir. Şu halde a rakamı 0, 3, 6, 9 rakamlarından biri olur. Buna göre a yerine gelebilecek rakamlar 0 ve 6 dır.

7 İle Bölünebilme

3.6. Teorem: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ birer rakam ve $A = (a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)$ sayısı n basamaklı bir sayı olsun. Bu sayının 7 ile bölünebilmesi için,

$$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \cdots$$

sayısı 7'nin tam katı ise A sayısı 7 ile tam bölünür.

İspat: $A = (a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)$ sayısının basamak çözümlemesini yaparsak,

$$(a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1\,000a_3 + 10\,000a_4 + 100\,000a_5 + \cdots$$

bulunur. Beri taraftan

$1 = 1$	$a_0 = a_0$
$10 = 7 + 3$	$10a_1 = 7a_1 + 3a_1$
$100 = 98 + 2$	$10^2a_2 = 98a_2 + 2a_2$
$1\,000 = 1001 - 1$	$10^3a_3 = 1001a_3 - a_3$
$10\,000 = 10\,003 - 3$	$10^4a_4 = 10\,003a_4 - 3a_4$
$100\,000 = 10\,002 - 2$	$10^5a_5 = 100\,002a_5 - 2a_5$
...	

dir. İkinci tarafı, taraf tarafa toplarsak,

$$A = (a_{n-1} \dots a_2a_1a_0)$$
$$= a_0 + 7a_1 + 3a_1 + 98a_2 + 2a_2 + 1\,001a_3 - a_3 + 10\,003a_4 - 3a_4 + \\ + 100\,002a_5 - 2a_5 + \cdots$$
$$= (a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \cdots + 7(a_1 + 14a_2 + 143a_3 + \\ + 1429a_4 + 1\,4286a_5) + \cdots$$

bulunur. Burada $7(a_1 + 14a_2 + 143a_3 + 1429a_4 + 14286a_5 + \cdots)$ sayısı 7 ile bölündüğüne göre geriye sadece,

$$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \cdots$$

kalır. Buna göre n basamaklı

$$A = (a_{n-1} \dots a_2a_1a_0)$$

sayısının 7 ile bölünebilmesi için,

$$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \cdots$$

sayısı 7'nin tam katı olmalıdır.

Örnek: 126329 sayısının 7 ile bölünüp bölünmediğini inceleyiniz.

Çözüm: $a_0 = 9,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 6,\ a_4 = 2,\ a_5 = 1$ olacağından,

$$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5)$$
$$= (9 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3) - (6 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1)$$
$$= 7$$

Şu halde bu sayı 7 ile kalansız bölünür.

Örnek: Dört basamaklı 2m73 sayısı 7 ile tam bölünüyor ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: $a_0 = 3,\ a_1 = 7,\ a_2 = m,\ a_3 = 2$ olacağından

$$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3)$$
$$= (3 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot m) - (2)$$
$$= 11 + 2m$$

Burada $11 + 2m$, 7'nin katı olması için $m = 5$ olmalıdır.

8 İle Bölünebilme

3.7. Teorem: Bir sayı 8 ile bölünebilmesi için son üç rakamı 000 veya 8 ile bölünmesi yeterlidir.

Bu teoremin ispatı açık olduğundan ispatına gerek yoktur.

Örnek: 95672 sayısında 672 sayısı 8 ile bölündüğünden 95672 sayısı da 8 ile bölünür.

9 İle Bölünebilme

3.8. Teorem: Bir A sayının rakamlarının sayı değerinin toplamı 9 ün katı ise A sayısı 9 ile tam bölünür. Yani, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ birer rakam ve $A = (a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)$ sayısı n basamaklı bir sayı olsun.

$$a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

sayısı 9 nin tam katı ise verilen sayı 9 ile tam bölünür.

Bu teoremin ispatı 3.2. teoremine benzer yolla yapılır.

Örnek: 18 basamaklı 444444444444444444 sayısının 9 ile tam bölünüp bölünmediğini gösteriniz.

Çözüm: 18 tane 4'ün toplamı olan sayı

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + +4 + 4 + 4 + 4 + 4 + +4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 72$$

şeklindedir. 72 sayısı 9 un katı olduğundan 18 basamaklı

444444444444444444

sayısı 9 ile tam bölünür.

Örnek: 32a56 beş basamaklı sayısı 9 ile tam bölündüğüne göre, a'nın yerine yazılacak rakamı bulunuz.

Çözüm: Rakamların toplamı,

$$3 + 2 + a + 5 + 6 = 16 + a$$

dır. Bu sayının 9 ile tam bölünebilmesi için a = 2 olmalıdır.

3.2. Sonuç: Bir A sayının rakamlarının toplamının 9 ile bölümünden kalan k ise A sayının 9 ile bölümünden kalan da k'dır.

10 İle Bölünebilme

3.9. Teorem: Bir sayının son rakamı 0 ise bu sayı 10 ile bölünür.

Bu teoremin ispatı açık olduğundan ispatına gerek yoktur.

11 İle Bölünebilme

3.10. Teorem: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ birer rakam ve $A = (a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)$ sayısı n basamaklı bir sayı olsun. Bu sayının 11 ile bölünebilmesi için,

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$$

sayısı 11 nin tam katı ise A sayısı 11 ile tam bölünür.

İspat: $A = (a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)$ sayının basamak çözümlemesini yaparsak,

$$(a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1\,000a_3 + 10\,000a_4 + 100\,000a_5 + \cdots$$

bulunur. Beri taraftan

$$\begin{array}{ll}
1 = 1 & a_0 = a_0 \\
10 = 11 - 1 & 10a_1 = 11a_1 - a_1 \\
100 = 99 + 1 & 10^2 a_2 = 99a_2 + a_2 \\
1\,000 = 1001 - 1 & 10^3 a_3 = 1001a_3 - a_3 \\
10\,000 = 9\,999 + 1 & 10^4 a_4 = 9\,999a_4 + a_4 \\
100\,000 = 10\,001 - 1 & 10^5 a_5 = 100\,001a_5 - a_5 \\
\dots &
\end{array}$$

dir. İkinci tarafı taraf tarafını toplarsak,

$$\begin{aligned}
&(a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) \\
&= a_0 + 11a_1 - a_1 + 99a_2 + a_2 + 1001a_3 - a_3 + 9\,999a_4 + a_4 + 100\,001a_5 \\
&\qquad - a_5 + \cdots \\
&= (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots) + 11(a_1 + 9a_2 + 91a_3 + 909a_4 \\
&\qquad + 9091a_5) + \cdots
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $11(a_1 + 9a_2 + 91a_3 + 909a_4 + 9091a_5)$ sayısı 11 ile bölündüğüne göre geriye sadece,

$$(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots)$$

kalır. Buna göre n basamaklı $A = (a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)$ sayısının 11 ile bölünebilmesi için,

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$$

sayısı 11 nin tam katı olmalıdır.

Örnek: 18573 sayısının 11 ile bölümünden kalan nedir?

Çözüm: $a_0 = 3,\ a_1 = 7,\ a_2 = 5,\ a_3 = 8, a_4 = 1$ olacağından

$$(a_0 + a_2 + a_4) - (a_1 + a_3) = 11 \cdot \text{kat} + x$$
$$(3 + 5 + 1) - (7 + 8) = 11 \cdot \text{kat} + x$$
$$9 - 15 = 11 \cdot \text{kat} + x$$
$$-6 = 11 \cdot \text{kat} + x$$
$$11 - 6 = x$$
$$5 = x$$

olmalıdır.

Örnek: 6 basamaklı 8456a9 sayısı 11 ile tam bölünmesi için a'nın değeri ne olmalıdır?

Çözüm: Bu sayıda, $a_0 = 9,\ a_1 = a,\ a_2 = 6,\ a_3 = 5,\ a_4 = 4,\ a_5 = 8$ olacağından

$$(a_0 + a_2 + a_4) - (a_1 + a_3 + a_5) = 11.\text{kat}$$
$$(9 + 6 + 4) - (a + 5 + 8) = 11 \cdot \text{kat}$$
$$6 - a = 11 \cdot \text{kat}$$
$$a = 6$$

olmalıdır.

ARALARINDA ASAL SAYILAR

Bu kısımda aralarında asal sayılar tanımlanacaktır. Ayrıca bir sonraki bölümde asal sayı kavramı da verilecektir. Ama aralarında asal sayı ile asal sayı kavramları farklı farklı tanımlardır. Birbirlerine karıştırılmaması gerekir.

3.2. Tanım: $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere A sayısı ile B sayısını ortak bölen (aynı anda bölen) sayı sadece 1 ise A ve B sayıları aralarında asaldır denir.

Örnek: 4 ve 9 aralarında asaldır. Çünkü 4 ve 9 sayısını 1'den başka ortak bölenler yoktur.

Örnek: 4 ve 10 sayısı aralarında asal değillerdir. Çünkü 4 ve 10 sayısını 2 sayısı böler.

3.11. Teorem: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ ve x ile y ve a ile b aralarında asal ise $x = a$ ve $y = b$ dir.

Bu teoremin ispatı aşikârdır.

Örnek: x ve y aralarında asal sayı ve $\frac{x}{y} = \frac{35}{15}$ ise $x + y$ nin değeri nedir?

Çözüm: Pay ve paydayı 5 ile bölersek, $\frac{x}{y} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$ bulunur. 7 ve 3 aralarında asal olduklarına göre, $x = 7$ ve $y = 3$ dir. $x + y = 10$ elde edilir.

Örnek: 1'den büyük $x - y$ ve $x + y$ sayıları aralarında asal iseler $x^2 - y^2 = 45$ olduğuna göre x ve y'nin değeri nedir?

Çözüm: $x^2 - y^2 = 45$

$$(x - y)(x + y) = 45$$

$45 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 9$ dir. Ama 15 ile 3 aralarında asal sayı değillerdir, çünkü 3 sayısı 15'i ve 3'ü böler. Fakat 5 ile 9 aralarında asal sayılardır, çünkü 5'i ve 9'u aynı anda bölen sadece 1'dir.

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x + y &= 9 \end{aligned}\right\} x = 7 \text{ ve } y = 2$$

olur.

3.3. Sonuç: Her $a \in \mathbb{Z}$ için a ile $a + 1$ sayıları daima aralarında asaldır.

BİLEŞİK SAYILARDA BÖLÜNEBİLME

3.3. Tanım: Bir tamsayı birden fazla sayının çarpımı şeklinde yazılıyorsa bu sayıya bileşik sayı denir.

Örnek: 15 sayısı 3 ile 5'in çarpımı şeklinde yazılabildiğinden 15 sayısı bileşik sayıdır.

3.13. Teorem: Bileşik bir A sayının aralarında asal olan çarpanları a ve b olsun. Bu takdirde A sayısının bölünebilmesi için a ve b ile bölünmelidir. Yani $a|A$ ve $b|A$ dir.

Bu teoremin ispatı aşikârdır.

Örnek:

a) Bir A sayının 12'ye tam bölünebilmesi için $12 = 3 \cdot 4$ olduğundan A sayısı hem 3'e hem de 4'e tam bölünebilmelidir. Çünkü 3 ve 4 aralarında asaldır.

b) Bir A sayının 14'e tam bölünebilmesi için $14 = 2 \cdot 7$ olduğundan A sayısı hem 2'e hem de 7'e tam bölünebilmelidir. Çünkü 2 ve 7 aralarında asaldır.

c) Bir A sayının 15'e tam bölünebilmesi için $15 = 3 \cdot 5$ olduğundan A sayısı hem 3'e hem de 5'e tam bölünebilmelidir. Çünkü 3 ve 5 aralarında asaldır.

d) Bir A sayının 36'ya tam bölünebilmesi için $36 = 4 \cdot 9$ olduğundan A sayısı hem 4'e hem de 9'a tam bölünebilmelidir. Çünkü 4 ve 9 aralarında asaldır.

Örnek: 4x57y beş basamaklı sayısı 36 ile tam katı olduğuna göre x'in alabileceği değerler nelerdir?

Çözüm: Bir sayının 36 ile bölünebilmesi için $36 = 9 \cdot 4$ dan dolayı hem 9'a hem de 4'a kalansız bölünebilmelidir. Buna göre,

4 ile kalansız bölünebilmesi için son rakam $y = 2$ ve $y = 6$ olmalı,
9 ile kalansız bölünebilmek için $4 + x + 5 + 7 + y = 9$ kat
Eğer $y = 2$ ise $x + 18 = 9$ kat $\Leftrightarrow x = 0, x = 9$
Eğer $y = 6$ ise $x + 22 = 9$ kat $\Leftrightarrow x = 5$

olacağından x'in alabileceği değerler,
$0 + 9 + 5 = 14$
olur.

Örnek: 8m4n dört basamaklı sayısı 90 ile tam bölünebilmesi için $m + n$ toplamı ne olmalıdır?

Çözüm: Bir sayının 90 ile bölünebilmesi için o sayı $90 = 9.10$ dan dolayı hem 9'a hem de 10'a kalansız bölünebilmelidir. Buna göre,

10 ile kalansız bölünebilmesi için son rakam $n = 0$ olmalı,
9 ile kalansız bölünebilmek için $8 + m + 4 + 0 = 12 + m$ den $m = 6$ olmalı,
$m + n = 6 + 0 = 6$
olur.

PROF. DR. FAHRETTİN AKBULUT TEOREMİ

2 ve 5 çarpanını içermeyen her sayı $10m + 1$ veya $10m - 1$ biçimindedir. Çünkü son rakam 1, 3, 7 ve 9 olduğundan her sayı $10m + 1$ veya $10m - 1$ şeklindedir. Mesela,
Son rakamı 1 olan her a sayısı $10m + 1$
Son rakamı 9 olan her a sayısı $10m - 1$
Son rakamı 3 olan her a sayısının 3 katı $10m - 1$
Son rakamı 7 olan her a sayısının 3 katı $10m + 1$
biçimindedir.

3.14. Teorem: Son rakamı 2 ve 5 olmayan bir A sayısı ve A sayısını bölmeye çalışan bir a sayısını verilsin.

a) $A = 10x + y$ biçiminde yazıldığında $a = 10m + 1$ veya $3a = 10m + 1$ şeklinde yazılabilen bir a sayısı ile bölünmesi için gerek ve yeter şart a'nın $x - my$ ile bölünebilmesidir.

b) $A = 10x + y$ biçiminde yazıldığında $b = 10m - 1$ veya $3b = 10m - 1$ şeklinde yazılabilen bir b sayısı ile bölünmesi için gerek ve yeter şart b'nin $x + my$ ile bölünebilmesidir.

İspat: (Biz burada teoremin 1. kısmını ispat edeceğiz, 2. kısım 1. kısma benzer şekilde yapılır.)

Son rakamı 2 ve 5 olmayan bir A sayısı ve A sayısını bölmeye çalışan bir a sayısını verilsin. $A = 10x + y$ ve $a = 10m + 1$ şeklinde yazılabilsin. Bu takdirde, $x - my$ şeklinde bir sayı yazılabilir.

$$\begin{aligned} A &= 10x + y \\ &= 10x - 10my + 10my + y \\ &= 10(x - my) + y(10m + 1) \\ &= 10(x - my) + ya \end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitliğin 2. toplamı a ile bölünebildiğinden A'nın 1. toplamının a ile bölünüp bilinmediğine bakmalıyız.

a'nın son rakamı 2 ve 5 olmadığından a sayısı 10 ile bölünmez. Buna göre $x - my$ sayısı ile bölünür.

3.4. Sonuç: Bir A sayısı,

1. 11 ile bölünebilme $11 = 10 + 1$ şeklinde olup ve $m = 1$ olacağından $x - y$

2. 21 ile bölünebilme $21 = 2 \cdot 10 + 1$ şeklinde olup ve $m = 2$ olacağından $x - 2y$

3. 19 ile bölünebilme $19 = 2 \cdot 10 - 1$ şeklinde olup ve $m = 2$ olacağından $x + 2y$

4. 29 ile bölünebilme $29 = 3 \cdot 10 - 1$ şeklinde olup ve $m = 3$ olacağından $x + 2y$

5. 7 ile bölünebilme $21 = 2 \cdot 10 + 1$ şeklinde olup ve $m = 2$ olacağından $x - 2y$

6. 17 ile bölünebilme $51 = 5 \cdot 10 + 1$ şeklinde olup ve $m = 5$ olacağından $x - 5y$

7. 13 ile bölünebilme $39 = 4 \cdot 10 - 1$ şeklinde olup ve $m = 4$ olacağından $x + 4y$

8. 23 ile bölünebilme $69 = 7 \cdot 10 - 1$ şeklinde olup ve $m = 7$ olacağından $x + 7y$

...

Örnek: 2317 sayısının 7 ile bölündüğünü bulunuz.

Çözüm: $2317 = 10 \cdot 231 + 7;\ x = 231, y = 7$
$$x - 2y = 231 - 2 \cdot 7 = 217$$
217 sayısının 7 ile bölünüp bölünmediğini anlamak için bir kez daha uygulanırsa,
$$217 = 10 \cdot 21 + 7;\ x = 21, y = 7$$
$$x - 2y = 21 - 2 \cdot 7 = 7$$
bulunur ki bu bize 2317 sayısının 7 ile bölündüğünü gösterir.

Örnek: 3120 sayısının 13 ile bölündüğünü bulunuz.

Çözüm: $3120 = 10 \cdot 312 + 0;\ x = 312, y = 0$
$$x + 4y = 312 + 4 \cdot 0 = 312$$
312 sayısının 13 ile bölünüp bölünmediğini anlamak için bir kez daha uygulanırsa,
$$312 = 10 \cdot 31 + 2;\ x = 31, y = 2$$
$$x + 4y = 31 + 4 \cdot 2 = 39$$
bulunur ki bu bize 3120 sayısının 13 ile bölündüğünü gösterir.

Örnek: 2108 sayısının 17 ile bölündüğünü bulunuz.

Çözüm: $2108 = 10 \cdot 210 + 8;\ x = 210, y = 8$
$$x - 5y = 210 - 5 \cdot 8 = 170$$
bulunur ki bu bize 2108 sayısının 17 ile bölündüğünü gösterir.

BÖLME ALGORİTMASI

3.15. Teorem: $b > 0$ olmak üzere, verilen a ve b tamsayıları için
$$a = qb + r, 0 \leq r < b$$
olacak şekilde bir ve bir tek $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır.

İspat: 1. Bölme algoritması uyan en az bir $q, r \in \mathbb{Z}$ var olduğunu gösterelim:
$$S = \{a - ub : u \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$
olsun. Özel olarak
$$u = \begin{cases} -1, a \geq 0 \\ a, \quad a < 0 \end{cases}$$

alınırsa $a-ub$ sayısı negatif değildir. Bu nedenle S kümesi negatif olmayan tamsayılar içerir. S'nin negatif olmayan elemanlardan oluşan alt kümesini göz önüne alalım. İyi sıralama prensibine göre bu kümenin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemanı r ile gösterelim ve q'da u'nun bu elemana karşılık aldığı değer olsun. Bu durumda

$$r = a - qb \geq 0, r - b = a - (q+1)b < 0$$

elde edilir. O halde bölme algoritmasına uyan en az bir $q, r \in \mathbb{Z}$ çifti vardır.

Bölme algoritması şartına uyan $q, r \in \mathbb{Z}$ çiftinin tek türlü belirli olduğunu gösterelim:

$$a = q_1 b + r_1, 0 \leq r_1 < b$$

olacak şekilde ikinci bir $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ çiftinin varlığını kabul edelim.

Eğer $q_1 < q$ ise: $r_1 = a - q_1 b \geq a - (q-1)b = r + b \geq b$ bu ise $r_1 < b$ olması ile çelişir.

Eğer $q_1 < q$ ise: $r_1 = a - q_1 b < a - (q+1)b = r - b < 0$ bu ise $r_1 \geq b$ olması ile çelişir.

O halde $q = q_1, r = r_1$ olmak zorundadır. //

Bu verilen bölme algoritmasının en genel şeklini verelim:

3.16. Teorem: $a, b \neq 0$ tamsayıları için

$$a = qb + r, 0 \leq r < |b|$$

olacak şekilde bir ve bir tek $q, r \in \mathbb{Z}$ çifti vardır.

İspat: İspatı b'nin bir negatif tamsayı olması halinde yapmak yeterlidir. $|b| > 0$ olduğundan 3.15. teoreme göre $a = q_1 b + r, 0 \leq r < |b|$ olacak şekilde bir ve bir tek $q_1, r \in \mathbb{Z}$ vardır. $|b| = -b$ olduğundan $q = -q_1$ almak yeterlidir.

Örnek: $a = -34, b = -5$ için $-34 = (-6)(-5) + 4$ den $q = -6, r = 4$ bulunur.

3.17. Teorem: Eğer $a|b$ ve $a|c$ ise her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $a|bx + cy$ dir.

İspat: $a|b$ ve $a|c$ ise $b = ax, b = ay$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$bx + cy = b(ax) + c(ay) = a(bx + cy)$$

olur ki, bu bize $a|bx + cy$ olduğunu gösterir. //

Bu ifadeyi aşağıdaki şekilde genelleştirebiliriz: Eğer $k = 1, 2, \cdots, n$ için $a | b_k$ ise her $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{Z}$ için $a | b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$ dir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

2 İle Bölünebilme

1. Aşağıda verilen ifadelerden hangisi 2 ile daima bölünmez.

A) $5!$ B) 3^7 C) $(-2)^5$ D) $1 + 2 + 3 + \cdots + 11$ E) $3! + 2$

Çözüm:
A) $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ in içinde 2 vardır.
B) $3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ olup 2 ile bölünmez.
C) $(-2)^5$ in içinde 2 vardır.
D) $1 + 2 + 3 + \cdots + 11 = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$ olup 2 ile bölünür.
E) $3! + 2 = 8$ olup ile bölünür.

2. Dört basamaklı xyzx doğal sayısı 2 ile tam bölünebilmektedir. Buna göre, x'in birbirinden aldığı değerler nelerdir?

Çözüm: xyzx dört basamaklı doğal sayısı 2 ile tam bölünebilmesi için $x \in \{2, 4, 6, 8\}$ olmalıdır. Ama $x \notin \{0\}$ olur. Çünkü $x = 0$ alınırsa üç basamaklı sayı elde edilir.

3. 3^8 ile $3^8 + 8$ arasında 2 ile tam bölünen doğal sayılar nelerdir?

Çözüm: 3^8 bir tek sayıdır. Buna göre $3^8 + 8$ de bir tek sayıdır. Şu halde bu iki sayı arasında
$3^8 + 1, 3^8 + 3, 3^8 + 5, 3^8 + 7$
sayıları 2 ile tam bölünür.

3 İle Bölünebilme

4. Aşağıdaki doğal sayılardan hangisi 3 ile tam bölünür.

A) 111 111 B) 2 222 C) 346 D) 424 E) 505

Çözüm:
A) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$ olup 3 ile tam bölünür.
B) $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ olup 3 ile tam bölünmez.
C) $3 + 4 + 6 = 13$ olup 3 ile tam bölünmez.
D) $4 + 2 + 4 = 10$ olup 3 ile tam bölünmez.
D) $5 + 0 + 5 = 10$ olup 3 ile tam bölünmez.

5. Aşağıdakilerden hangisi, 3 ile tam bölünen bir doğal sayının rakamları toplamı olabilir?

A) 224 B) 227 C) 229 D) 230 E) 231

Çözüm: 3 ile tam bölünenlerin toplamı da 3 ile tam bölünmelidir.
A) $2 + 2 + 4 = 8$ olup 3 ile tam bölünenlerin toplamı olamaz.
B) $2 + 2 + 7 = 11$ olup 3 ile tam bölünenlerin toplamı olamaz.
C) $2 + 2 + 9 = 13$ olup 3 ile tam bölünenlerin toplamı olamaz.
D) $2 + 3 + 0 = 5$ olup 3 ile tam bölünenlerin toplamı olamaz.
E) $2 + 3 + 1 = 6$ olup 3 ile tam bölünenlerin toplamı olur.

6. Üç basamaklı 55a sayısın 3 ile bölünebilmesi için a'nın alabileceği değerler toplamı ne olmalıdır?

Çözüm: 55a sayısı 3 ile bölünebilmesi için $5 + 5 + a = 10 + a$ denkleminde 2, 5 ve 8 rakamları yazılmalıdır.

7. Beş basamaklı ab764 doğal sayısı 3 ile tam bölündüğüne göre, $a + b$ en az kaçtır?

Çözüm: $a + b + 7 + 6 + 4 = a + b + 17$ denkleminde $a = 1, b = 0$ alınırsa istenen elde edilir. Şu halde $a + b = 1$ olmalıdır.

8. On basamaklı 7 777 777 777 sayısı 3 ile bölündüğünde kalan kaçtır?

Çözüm: $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 70$ sayısı 3 ile bölündüğünde 1 kalanını verir.

9. $A = 5237^3$ sayısının 3 ile bölümünden kalan nedir?

Çözüm: $5 + 2 + 3 + 7 = 17$ sayısı 3 ile böldüğünde 2 kalanını verir. Şu halde $2^3 = 8$ olup 8'in 2 ile bölünmesinden 2 kalanını verir. Buna göre $A = 5237^3$ sayısının 3 ile bölümünden kalan 2'dir.

4 İle Bölünebilme

10. Üç basamaklı birler basamağı onlar basamağından 1 fazla rakamdan oluşmaktadır. Dört ile bölünebilen kaç sayı yazılabilir.

Çözüm: Onlar basamağı birler basamağından 1 fazla rakam olan 32 ve 76 sayıları 4'e bölünür. Bu sayı 2 tanedir. Yüzler basamağında 9 tane rakam yazılabileceğinden 132, 176, 232, 276, …, 932, 976 olup 18 tanedir.

11. Dört basamaklı a3a0 doğal sayısı 4 ile tam bölündüğüne göre, a'nın birbirinden farklı kaç değeri vardır?

Çözüm: 20, 40, 60 ve 80 sayısı 4 ile bölündüğüne göre a3a0 sayısı 4 ile tam bölünmesi için a, 4 farklı değer alır.

12. Üç basamaklı aa6 doğal sayısı; 3 ve 4 ile tam bölündüğüne göre, a sayısı ne olur?

Çözüm: aa6 sayısı 4 ile tam bölünebilmesi için a sayısı 1, 3, 5, 7, 9 olmalıdır. 3 ile bölünebilmesi için $a + a + 6 = 2a + 6$ denkleminde a sayısı 3, 6, 9 olmalıdır. Şu halde 3 ve 4 ile tam bölünebilmesi için a sayısı 3 ve 9 olmalıdır.

13. Üç basamaklı ab0 doğal sayısı; 3 ve 4 ile tam bölünmektedir. Buna göre, b'nin en büyük değeri için, a'nın en az değeri nedir?

Çözüm: ab0 sayısı 4 ile tam bölünebilmesi için b'nin değeri 8 olmalıdır. a'nın değeri 1 olduğu takdirde istenen elde edilir.

$$b - a = 8 - 1 = 7$$

olur.

5 İle Bölünebilme

14. Üç basamaklı a7a doğal sayısı 5 ile tam bölündüğüne göre, bu sayı 3 ile bölündüğünde kalan ne olur?

Çözüm: a7a sayısı 5 ile bölünebilmesi için a rakamı 5 olmalıdır. 0 olamaz, çünkü o zaman iki basamaklı sayı olur.

$5 + 7 + 5 = 17$

olduğundan $a7a = 575$ sayısı 3 ile bölündüğünden kalan 2'dir.

15. $a + b = 5$ olmak üzere, üç basamaklı abb doğal sayısı 5'e tam bölündüğüne göre, a'nın değeri nedir?

Çözüm: abb sayısı 5'e bölünebilmesi için a00 veya a55 olmalıdır. $a + b = 5$ olduğuna göre $a = 5$ alınırsa bu sayı 500 olur. Başka bir durum alınamaz.

16. Üç basamaklı abb doğal sayısı 3 ve 5 ile tam bölündüğüne göre, abb sayısının en küçük ve en büyük değerinin farkı kaçtır?

Çözüm: abb sayısı 5'e bölünebilmesi için a00 veya a55 olmalıdır.

a00 sayısı 3 ile bölünebilmesi için 300, 600 ve 900 den biri olmalıdır.

a55 sayısı 3 ile bölünebilmesi için 255, 555 ve 855 den biri olmalıdır.

Buna göre en küçük ve en büyük sayılar arasındaki fark

$900 - 255 = 645$

dir.

17. ab iki basamaklı doğal sayısı, 5 ile bölündüğünde 2 kalmaktadır. $a > b$ olduğuna göre, ab sayısının birbirinden farklı kaç değeri vardır?

Çözüm: İki basamaklı bir sayı 5 ile bölündüğünde 2 kalanını vermesi için $b = 2$ veya $b = 7$ olmalıdır. $a > b$ olduğuna göre a rakamı 4, 5, 6, 7, 8, 9'dan biri olmalıdır. Yani, 42, 47, 52, 57, ..., 92, 97 olup 12 tanedir.

18. $A = 69^2 + 67^3$ sayısı 5 ile bölündüğünde kalan kaç olur?

Çözüm: 69 sayısının 5 ile bölümünden kalan 4'dür.

67 sayısının 5 ile bölümünden kalan 2'dür.

Buna göre $4^2 + 2^3 = 16 + 8 = 24$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 4'dür. Şu halde;

$A = 69^2 + 67^3$ sayısı 5 ile bölündüğünde kalan 4 olur.

6 İle Bölünebilme

19. Üç basamaklı 25a doğal sayısı 6 ile bölünmektedir. a'nın birbirinden farklı kaç değeri vardır?

Çözüm: 25a sayısı 2 ile bölünebilmesi için a'nın 0, 2, 4, 6 ve 8'den biri olmalıdır. Yine 25a sayısı 3 ile bölünebilmesi için $2 + 5 + a = 3$ kat denkleminde a sayısı 2, 5 ve 8'den biri olmalıdır. Buna göre 2 ile bölünebilmesi ve 3 ile bölünebilmesinin oluşturduğu kümenin arakesiti a'nın alabileceği değerleri verir, yani 2 ve 8 olmalıdır.

20. Dört basamaklı 3a4a doğal sayısı 6 ile tam bölünebilmektedir. Buna göre, 3a4a sayısı 5 ile bölündüğünde kalan kaç olur?

Çözüm: 3a4a sayısı 2 ile bölünebilmesi için a'nın 0, 2, 4, 6 ve 8'den biri olmalıdır. Yine 3a4a sayısı 3 ile bölünebilmesi için $3 + a + 4 + a = 3$ kat yani $7 + 2a = 3$ kat denkleminde a sayısı 1, 4 ve 7'den biri olmalıdır. Buna göre 2 ile bölünebilmesi ve 3 ile bölünebilmesinin oluşturduğu kümenin arakesiti a'nın alabileceği değerleri verir, yani 4 olmalıdır.

21- Dört basamaklı 854x doğal sayısı 6 ile bölündüğünde 5 kaldığına göre, x en çok değeri nedir?

Çözüm: 854x doğal sayısı 6 ile bölündüğünde 5 kalması için x sayısı tek sayı olmalıdır. Çünkü 854x sayısından 5 çıkarılınca çift sayı olur. 854x sayısı da 3 ile bölünmesi gerekmektedir.

$8 + 5 + 4 + x = 3k + 5$

$17 + x = 3k + 5$

$12 + x = 3k$

olacak şekilde k doğal sayısı vardır. Öyleyse $x = 9$ alınmalıdır.

7 İle Bölünebilme

22. 832 566 sayısı ile bölündüğünde kalan nedir?

Çözüm: 7 ile bölünebilme kuralı gereği,

$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \cdots$

$= (6 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5) - (2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 8) + \cdots$
$= 7$
olduğundan bu sayı 7 ile bölünür.

23. Dört basamaklı 4m63 sayısı 7 ile tam bölünüyor ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: 7 ile bölünebilme kuralı gereği,
$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \cdots$
$(3 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot m) - (4 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0) + \cdots$
$17 + 2m = 7$ kat
$m = 2$
olur.

24. Beş basamaklı 52 a83 sayısı 7 ile bölündüğünde 2 kalanını vermesi için a'nın değeri ne olmalıdır?

Çözüm: 7 ile bölünebilme kuralı gereği,
$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \cdots$
$(3 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot a) - (2 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0) + \cdots$
$10 + 2a = 7$ kat $+ 2$
$a = 7$ k2
olmalıdır.

8 İle Bölünebilme

25. Dört basamaklı abcd doğal sayısı 8'e tam bölünmektedir. Buna göre, $a + b + c + d$ en az değeri nedir?

Çözüm: Bir sayı 8 ile bölünebilmesi için son üç rakamı 000 veya 8 ile bölünmesi gerekir. Bu sayı 1 000 alınırsa 8 ile bölüneceğinden $a + b + c + d$ en az 1 olur.

26. 444 333 sayısının 8 ile bölümünden kalan kaç olur?

Çözüm: 333 sayısının 8 ile bölümünden 5 olacağından 444 333 sayısının 8 ile bölümünden 5 olur.

27. Dört basamaklı a12a doğal sayısı 8 ile bölündüğünde 5 kaldığına göre, a'nın değeri nedir?

Çözüm: 120 sayısı 8 ile bölünen bir sayıdır. 125 ise 8 ile bölündüğünde 5 kaldığını verir. Şu halde bu sayı 5125'dir.

9 İle Bölünebilme

28. 9 ile tam bölünen bir doğal sayının rakamları toplamı x tir. $17 < x < 37$ olduğuna göre, x'in birbirinden farklı kaç değeri vardır?

Çözüm: x rakamların toplamı olduğundan 9 ve 9'un katı olmalıdır. Şu halde 18, 27 ve 36 sayısından biridir. x'in birbirinden farklı 3 değeri vardır.

29. Dört basamaklı, rakamları farklı, 9 ile tam bölünen en küçük doğal sayı; 5 ile bölündüğünde kalan kaç olur?

Çözüm: Dört basamaklı, rakamları farklı, 9 ile tam bölünen en küçük doğal sayı 1026'dir. Bu sayının 5 ile bölündüğünde kalan 1'dir.

30. Dört basamaklı 47xy doğal sayısı 5 ve 9 ile tam bölünmektedir. Buna göre, x'in alabileceği değerler nelerdir?

Çözüm: 47xy sayısı 5 ile tam bölünüyorsa y'nin değeri ya 0 ya da 5'dir. 9 ile tam bölünebilmesi için

$4 + 7 + x + 0 = 9$ kat ise $x = 7$

$4 + 7 + x + 5 = 9$ kat ise $x = 2$

olmalıdır.

31. $452 \cdot 521 \cdot 813$ işleminin sonucunda elde edilen sayı 9 ile bölündüğünde kalan kaçtır?

Çözüm: Her bir sayının 9 ile bölündüğünde kalan sayıyı bulmalıyız.

$4 + 5 + 2 = 11$ olup 452 sayısından kalan 2'dir.

$5 + 2 + 1 = 8$ olup 521 sayısından kalan 8'dir.

$8 + 1 + 3 = 12$ olup 812 sayısından kalan 3'dür.

Kalanlar 2, 8 ve 3 olduğundan $2 \cdot 8 \cdot 3 = 48$ olup 48 sayısının 9 ile bölümünden kalan 3'dür.

10 İle Bölünebilme

32. Dört basamaklı 13ab doğal sayısı 9 ve 10 ile tam bölünmektedir. Buna göre a rakamının değeri nedir?

Çözüm: Bir sayının 10 ile tam bölünebilmesi için son rakamı $b = 0$ olmalıdır. 13a0 sayısı 9 ile bölünebilmesi için $1 + 3 + a + 0 = 9$ kat denkleminde $a = 5$ alınarak çözülür.

33. 5 ile bölündüğünde 2 kalanını veren bir doğal sayı, 10 ile bölündüğünde kalan en çok kaç olur?

Çözüm: 5 ile bölündüğünde 2 kalanını veren bir sayının son rakamı 2 ve 7'dir. 10 ile bölündüğünde kalan en çok 7 olur.

34. Üç basamaklı 75a doğal sayısı 9 ile bölündüğünden 2 kalıyor. Buna göre aynı sayı 10 ile bölündüğünde kalan kaç olur?

Çözüm: 75a sayısı 9 ile bölündüğünden 2 kalması için
$7 + 5 + a = 9\text{kat} + 2$
$a = 8$
olur. 758 sayısı 10 ile bölündüğünde 8 kalır.

11 İle Bölünebilme

35. Üç basamaklı doğal sayısı 11 ile tam bölündüğüne göre, $a + c - b$ nin kaç farklı değeri vardır?

Çözüm: $a + c - b$ sayısı 11 ile tam bölünebilmesi için $a + c - b = 0$, $a + c - b = 11$ olmasıyla mümkündür. Başka değer bulunamaz.

36. Dört basamaklı 21ab doğal sayısı 11 ile tam bölünmektedir. Buna göre $b - a$ nin değeri nedir?

Çözüm: $2 + a - 1 - b = 11$ kat
$1 + a - b = 11$ kat
$b - a = 1$

37. Üç basamaklı a56 doğal sayısı 11 ile bölündüğünde kalan 3 olduğuna göre a'nın değeri nedir?

Çözüm: $a + 6 - 5 = 11\ \text{kat} + 3$
$a = 2$
alınırsa 11'in 0 katı olur.

Bileşik Sayılarda Bölünebilme

38. Aşağıdaki sayılardan hangisi 12'ye bölünür?

A) 124 B) 244 C) 350 D) 464 E) 732

Çözüm: Bir sayı 12'ye bölünebilmesi için 3 ve 4 ile tam bölünmelidir. Çünkü 3 ile 4'ü aynı anda bölen sadece 1 doğal sayısıdır.
A) 124 sayısı $1 + 2 + 4 = 7$ olduğundan 3'e bölünemez.
B) 244 sayısı $2 + 4 + 4 = 10$ olduğundan 3'e bölünemez.
C) 350 sayısı $3 + 5 + 0 = 8$ olduğundan 3'e bölünemez.
D) 464 sayısı $4 + 6 + 4 = 14$ olduğundan 3'e bölünemez.
E) 732 sayısı $7 + 3 + 2 = 12$ olduğundan 3'e ve 32 sayısı 4'e bölündüğünden 732 sayısı 12 ile tam bölünür.

39. Aşağıdaki sayılardan hangisi 18'e tam bölünür?

A) 128 B) 284 C) 256 D) 362 E) 594

Çözüm: Bir sayı 18'ye bölünebilmesi için 2 ve 9 ile tam bölünmelidir. Çünkü 2 ile 9'ü aynı anda bölen sadece 1 doğal sayısıdır.
A) 128 sayısı $1 + 2 + 8 = 11$ olduğundan 9'e bölünemez.
B) 284 sayısı $2 + 8 + 4 = 14$ olduğundan 9'e bölünemez.
C) 256 sayısı $2 + 5 + 6 = 13$ olduğundan 9'e bölünemez.
D) 362 sayısı $3 + 6 + 2 = 11$ olduğundan 9'e bölünemez.
E) 534 sayısı $5 + 9 + 4 = 18$ olduğundan 9'e ve 594 sayısı çift bir sayı olduğundan 594 sayısı 18 ile tam bölünür.

40. Üç basamaklı x2x doğal sayısı 12 ile tam bölünebildiğine göre, x'in değeri nedir?

Çözüm: Bir sayı 12’ye bölünebilmesi için 3 ve 4 ile tam bölünmelidir. Çünkü 3 ile 4’ü aynı anda bölen sadece 1 doğal sayısıdır.

4 ile bölünebilmesi için x rakamı 4 ve 8 rakamlarından biri olmalıdır.

3 ile bölünebilmesi için $x + 2 + x = 3$ kat denkleminde 2, 5 ve 8 rakamlarından biri olmalıdır. Buna göre 4 ile bölünebilmesi ve 3 ile bölünebilmesinin oluşturduğu kümenin arakesiti x’nın alabileceği değerleri verir, yani 8 olmalıdır.

41. Dört basamaklı ab7b doğal sayısı 15 ile tam bölündüğüne göre, a’nın en az değeri nedir?

Çözüm: Bir sayı 15’ye bölünebilmesi için 3 ve 5 ile tam bölünmelidir. Çünkü 3 ile 5’i aynı anda bölen sadece 1 doğal sayısıdır.

5 ile bölünebilmesi için b rakamı ya 0 ya da 5 olmalıdır.

3 ile bölünebilmesi için

$b = 0$ ise $a + 0 + 7 + 0 = 3$ kat a rakamı 3, 6 ve 9’dan biridir.

$b = 5$ ise $a + 5 + 7 + 5 = 3$ kat a rakamı 1, 4 ve 7’dan biridir.

Buna göre a’nın en az değeri 1’dir.

42. 82 766 sayısı 45 ile bölündüğünde kalan kaç olur?

Çözüm: Bir sayı 45’ye bölünebilmesi için 9 ve 5 ile tam bölünmelidir. Çünkü 9 ile 5’i aynı anda bölen sadece 1 doğal sayısıdır.

82 766 sayısı 5 ile bölündüğünde 1 kalanını verir.

82 766 sayısı $8 + 2 + 7 + 6 + 6 = 29$ olup 9 ile bölündüğünde kalan 2’dir.

Ayrıca 56 sayısının 9 ile bölündüğünden kalan 2 ve 5 ile bölümünden kalan 1’dir. 56 sayısının 45 ile bölümünden kalan 11 olduğundan 82 766 sayısının 45 ile bölümünden kalan 11’dir.

ARALARINDA ASAL SAYILAR

43. $x > 1$ olmak üzere; x ile 18 arasında asal olan iki pozitif tam sayıdır. Buna göre, x sayısı en az kaçtır?

Çözüm: 5 ile 8’i aynı anda bölen doğal sayı sadece 1’dir. Şu halde x en az 5 olur.

44. Aşağıdakilerden hangisi daima aralarında asal değildir?

A) Ardışık iki pozitif tam sayı
B) Ardışık iki pozitif tek tam sayı
C) 1 ile herhangi bir pozitif tam sayı
D) Ardışık iki pozitif çift tam sayı
E) Birbirinden farklı iki sayı

Çözüm:
A) Ardışık iki pozitif tam sayıyı bölen ortak bir tam sayı olmadığından daima aralarında asaldır. 5 ve 6 gibi…
B) Ardışık iki pozitif tek tam sayıyı bölen ortak bir tam sayı olmadığından daima aralarında asaldır. 5 ve 7 gibi…
C) 1 ile herhangi bir pozitif tam sayıyı bölen ortak bir tam sayı olmadığından daima aralarında asaldır. 1 ile 5 gibi…
D) Birbirinden farklı iki sayı daima aralarında asal olanı olmayanı vardır. 5 ve 9 aralarında asal iken 5 ve 10 aralarında asal değildir.
E) Ardışık iki pozitif çift tam sayıyı daima 2 ile bölüneceğinden daima aralarında asal değildir.

45. x ve y aralarında asal iki doğal sayı olmak üzere,

$$\frac{x+3}{y-1} = \frac{8}{3}$$

olduğuna göre, $x \cdot y$ nin en küçük değeri nedir?

A) 15 B) 20 C) 22 D) 24 E) 25

46. $a + b$ ve $a - b$ sayıları aralarında asal olmak üzere,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{15}{7}$$

olduğuna göre a ve b'nin değeri nedir?

Çözüm: 15 ile 7 aralarında asal olduğundan
$a + b = 15$ ve $a - b = 7$
denklemi taraf tarafa toplanırsa $a = 11, b = 4$ olur.

47. Aralarında asal olan iki pozitif tam sayının çarpımı 120'dir. Buna göre, bu sayının toplamı en az kaçtır?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Çözüm: $120 = 5 \cdot 24 = 6 \cdot 20 = 8 \cdot 15 = 10 \cdot 12$ çarpanları vardır. Bu çarpanlardan 5 ile 24, 8 ile 15 aralarında asaldır. Bu sayılardan toplamı en az $8 + 15 = 23$ dür.

48. ab, ba, aa, bb ikişer basamaklı doğal sayı ve

$$\frac{aa-bb}{ab+ba} = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre, ab iki basamaklı sayısının değeri nedir?

Çözüm: Sayı çözümlemesi yapalım.

$$\frac{10a+a-10b-b}{10a+b+10b+a} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{11a-11b}{11a+11b} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{5}{7}$$

5 ve 7 aralarında asal olduğuna göre $a + b = 7$ ve $a - b = 5$ dir. Bu denklem çözülürse $a = 6, b = 1$ olup $ab = 61$ iki basamaklı sayısı elde edilir.

KAYNAKÇA

1. Doç. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, 1988.
2. Doç. Dr. Neşe YELKENKAYA, Sayılar Teorisi Ders Notları, İstanbul Kültür Üniversitesi, İnternet Ders Notları, 2020.
3. Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ, Yrd. Doç. Dr. Hacı AKTAŞ, Sayılar Teorisi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Yayınları, Tokat, 1998.
4. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik I – II – III, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Sait AKKAŞ, H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Zühtü ÖZEL, Arif SABUNCUOĞL U, Soyut Matematik, 4. Baskı, Aralık, 2010.
7. Seyfettin AYDIN, Hacettepe Üniversitesi, Cilt 1 – 2, Ankara, 1986.
8. Fahrettin AKBULUT, Ali ÇALIŞKAN, Matematik Analiz Alıştırma ve Problemler Derlemesi, İzmir, 1992.