4. BÖLÜM
ASAL SAYILAR

ASAL SAYILAR

4.1. Tanım: 1 ve kendinden başka tam böleni olmayan 1'den büyük doğal sayılara asal sayı denir. Buna göre asal olmayan sayılar, bileşik sayıdır. Bileşik sayı ile ilgili bilgi "Bölünebilme" konusunda anlatılmıştır. (Asal sayı ile aralarında asal kavramları karıştırılmaması gerekir.)

Örnek: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, \ldots\}$ asal sayılar kümesidir.

4.1. Not:
1. 2 en küçük asal sayıdır.
2. 2 tek çift asal sayıdır. Çünkü diğer çift sayılar 2 ile bölündüğünden asal sayı olmazlar.
3. Negatif tamsayılar asal sayı değildir. Mesela –2 asal sayı değildir.

Örnek: x bir asal sayı, y bir tamsayı olmak üzere,
$$x \cdot y - 3x = 11$$
denkleminde y'nin değeri nedir?

Çözüm: $x \cdot (y - 3) = 11$ olduğundan $x = 11$ olmak zorundadır. Çünkü x asal sayıdır.
$$y - 3 = 1 \text{ ise } y = 4$$

Örnek: a, b ve c asal pozitif tamsayılar olmak üzere,
$$ab = 21, ac = 15, cd = 40$$
ise $a + b + c + d$ toplamı kaçtır?

Çözüm: $ab = 21 = 3 \cdot 7$ ve $ac = 15 = 3 \cdot 5$ olduğundan $a = 3, b = 7, c = 5$ dir. c'yi yerine yazarsak $cd = 40$ ise $d = 8$ bulunur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Pierre de Fermat

17 Ağustos 1601, Beaumont, Fransa - 12 Ocak 1665, Castres, Fransa

4.2. Not: Asal bir sayının bulunması için çeşitli yöntemler ve metotlar geliştirilmiştir. Bunlardan bir tanesi Fermat'nın uyguladığı iki kare farkı yöntemidir.

Eğer n pozitif doğal sayısı $n = x^2 - y^2$ biçiminde yazılıyorsa, o zaman,

$$n = (x - y)(x + y)$$

eşitliği sağlanacağından, n sayısı asal sayı olmaz. Burada $\sqrt{n} < x$ dir. Bu yüzden x sayısını bulurken, $\sqrt{n}$ den yararlanılmalıdır.

Örnek: $n = 91$ in asal veya birleşik sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x > \sqrt{91}$ olması gerektiğinden, $x = 10$'dan başlamalıyız.
$x = 10$ alınırsa, $x^2 – n = 10^2 – 91 = 9 = 3^2$ dir ve $y = 3$ olabilir. Demek ki,

$$91 = n = 10^2 – 3^2 = (10 – 3)(10 + 3) = 7 \cdot 13$$

eşitliği geçerlidir. Şu halde 91 bileşik sayıdır.

4.1. Teorem: A bir pozitif tamsayı ve $k \leq \sqrt{A} < k + 1$ olacak şekilde bir k doğal sayısı olsun. k doğal sayısından önceki asal sayılar A sayısını bölmüyorsa, A bir asal sayıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı için 2 durum söz konusudur. Birincisi k'dan küçük asal sayıların A'yı bölüp bölmediği, ikincisi k'dan büyük asal sayıların A'yı bölüp bölmediğidir.

1) k'dan küçük asal sayılar A sayısı bölerlerse A sayısı zaten asal olmaz.

Öğr.Gör. Şaban YILMAZ

2) k'dan büyük asal sayılar A sayısını bölemez. Gerçekten; kabul edelim ki k'dan büyük m asal sayını A'nın böleni olmasın. Şu halde $k \leq A \leq k+1$ olduğundan $A \leq m^2$ olup A sayısının böleni olmaz. Öyleyse A sayısını bölen hiçbir sayı yoktur. Buna göre A asal sayıdır.

Örnek: 127 sayısı asal olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $12 \leq \sqrt{127} \leq 13$
12 den önceki asal sayılar $\{2, 3, 5, 7, 11\}$
127 sayısı bu asal sayılardan hiçbirine bölünmediğinden 127 asal sayıdır.

Örnek: 5 021 sayısının asal olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: $70 \leq \sqrt{5\,021} \leq 71$ dir. $p \leq 70$ şartını sağlayan asal sayılar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67 dir ve 5021 bu sayıların hiçbiri ile kalansız olarak 5 021 sayısını bölmez. O halde 5 021 sayısı asaldır.

4.2. Teorem: Eğer $2^a - 1$ asal sayı ise a sayısı da asaldır. Ama bunun tersi doğru değildir.

İspat: Kabul edelim ki a asal bir sayı olmasın. a sayısı asal olmadığından $a = bn$ olacak şekilde $b, n \in \mathbb{N}$ vardır. Çarpanlara ayırma konusunda görülecek ki (bk. Çarpanlara ayırma); her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

olacaktır. Burada $x = 2^a$ ve $y = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}(2^a - 1) &= ((2^b)^n - 1)\\ &= (2^b - 1)((2^b)^n + (2^b)^{n-1} + \cdots + 2^b + 1)\end{aligned}$$

olacak şekilde iki sayının çarpımı biçiminde yazılabilir. Buna göre $2^a - 1$ asal sayı olmaz. Buna göre kabulümüz yanlıştır.

Şimdi de tersinin doğru olmadığını gösterelim. $a = 11$ asal sayısını alalım.

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

olur ki, bu sayı 23 ile 89 sayısının çarpımına eşittir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $2^5 - 1 = 31$ sayısı asal sayı olduğundan 5 sayısıda asaldır.

ERATOSTHENES (ERATOSTEN) KALBURU

Matematikçi Eratosthenes (Eratosten) asal sayıları bulmak için bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntem asal sayıları bir sınır olmadan bulabilmeyi sağlar.

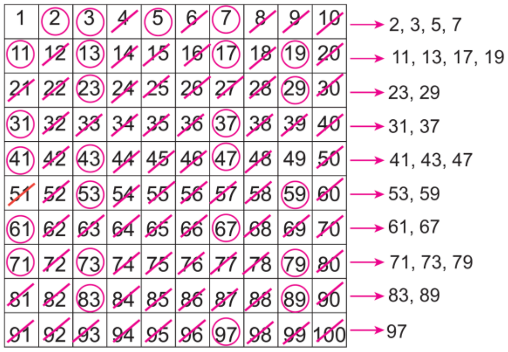
Eratosthenes (Eratosten)
(M.Ö. 276, Kirene, Libya- M.Ö. 194, İskenderiye, Mısır).

Eratosthenes (Eratosten) kalburu belirli bir tamsayıya kadar yer alan asal sayıların bulunması için kullanılan bir yöntemdir. Aşağıda birden yüze kadar olan asal sayıların Eratosten kalburu ile nasıl bulunacağı anlatılmıştır.

Birden yüze kadar sayıların yer aldığı yüzlük tablosu çizin

1. Adım 1'in üzerine çarpı atın.
2. Adım: 2'yi yuvarlak içine alın, 2'nin katlarının $(4, 6, 8, 10, 12, \cdots)$ üzerine çarpı atın.
3. Adım: 3'ü yuvarlak içine alın, 3'ün katlarının $(6, 9, 12, 15, \cdots)$ üzerine çarpı atın.
4. Adım: 5'i yuvarlak içine alın, 5'in katlarının $(10, 15, 20, 25, \cdots)$ üzerine çarpı atın.
5. Adım 7'yi yuvarlak içine alın, 7'nin katlarının $(7, 14, 21, 28, \cdots)$ üzerine çarpı atın.

Bu işlemler bittiği zaman çarpı atılmamış sayıları yuvarlak içine alın. Yuvarlak içine aldığınız sayılar asal sayılardır.



Yuvarlak içinde kalan sayılar: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79,83, 89, 97 olur.

ASAL SAYI TEOREMLERİ

4.3. Teorem: Eğer p bir asal sayı ve $p|ab$ ise $p|a$ veya $p|b$ dir.

İspat: $p \nmid a$ olsun. p'nin pozitif bölenleri sadece 1 ve kendisidir. $p \nmid a$ olduğundan $p|b$ olmak zorundadır.

Örnek: 5 bir asal sayı ve $5|30 = 3 \cdot 10$ ise $5 \nmid 3$ ve $5|10$ dir.

Örnek: p bir asal sayı ve $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. $p|a^2 + b^2$ ve $p|b^2 + c^2$ ise $p|(a + c)$ veya $p|(a - c)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $p|a^2 + b^2$ ve $p|b^2 + c^2$

$a^2 + b^2 = p\ell_1$ ve $b^2 + c^2 = p\ell_2$, $(\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z})$

$(a^2 + b^2) - (b^2 + c^2) = p\ell_1 - p\ell_2$

$a^2 - c^2 = p(\ell_1 - \ell_2)$

$p|a^2 - c^2$

$p|(a - c)(a + c)$

4.3. teorem gereği $p|(a + c)$ veya $p|(a - c)$ olduğunu gösterir.

4.1. Sonuç: Eğer p bir asal sayı ve $p|a_1 a_2 \cdots a_n$ ise bir $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ için $p|a_k$ dır.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $5|105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ olup $5|5$ dır.

4.4. Teorem: Eğer $p, q_1, q_2, \cdots, q_n$ hepsi asal sayılar ve $p|q_1q_2\cdots q_n$ ise $1 \leq k \leq n$ olan bir k için $p = q_k$ dır.

İspat: $p|q_1q_2\cdots q_n$ olduğundan 4.1. Sonuca göre, $1 \leq k \leq n$ olmak üzere bir k için $p|q_k$ dır. q_k sayısı asal olduğundan 1'den ve kendisinden başka böleni yoktur. Buna göre $p = q_k$ olmak zorundadır.

4.5. Teorem: Her $n > 1$ tam sayısının p gibi bir asal böleni vardır.

İspat: n asal ise $n > 1$ alınır. Eğer n asal değilse, $1 < d < n$ olan d gibi en az bir böleni vardır. Bu şekildeki bütün d sayıları arasından en küçüğünü p ile gösterelim. Bu durumda p asal olmak zorundadır. Aksi halde p'nin, $1 < q < p$ olan q gibi bir böleni vardır. $q|p$, $p|n$ den $q|n$ elde edilir, bu ise p'nin, n'nin, $1 < d < n$ şeklide olan en küçük böleni olması ile çelişir.

4.6. Teorem: Asal sayılar sonsuz tanedir.

İspat:

<u>1. Öklid'in İspatı (M.Ö. 430-360):</u> $p_1, p_2, \cdots, p_n$ gibi sonlu sayıda asal sayının var olduğunu kabul edelim.

$$m = p_1p_2\cdots p_n + 1$$

olsun. Her $n > 1$ tamsayısının p gibi bir asal böleni olduğuna göre $m > 1$ için p gibi bir asal böleni vardır. Fakat bütün asal sayılar $p_1, p_2, \cdots, p_n$ den ibaret olduğundan p bu asal sayılardan biri olur. O halde $p|p_1p_2\cdots p_n$ dir. Öte yandan $p|m$ olduğundan $p|m - p_1p_2\cdots p_n$ yani $p|1$ bulunur.

Bu ise $p > 1$ olması ile çelişir. O halde sonsuz sayıda asal sayı vardır.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Dr. Thomas Joannes Stieltjes
29 Aralık 1856, Zwolle, Hollanda-31 Aralık 1894, Toulouse, Fransa

2. Stieltjes'in ispatı: Bir an için kabul edelim ki asal sayıların sayısı sonlu olsun. Bu taktirde bir en büyük p asal sayısı vardır, p'ye eşit veya p'den küçük asal sayıların çarpımı n ile gösterilirse,

$$n + 1 = (2.3.5.7\ldots p) + 1 > P$$

yazılabilir. En büyük asal sayı p olduğundan $n + 1$ asal olmaması gerek. Şayet $n + 1$ birleşik bir sayı ise $n + 1$ in bir asal çarpanı vardır, $n + 1$ in p'den daha büyük bir asal çarpanının olması gerekir. Çünkü yukarıdaki eşitlikten dolayı p'ye eşit veya p'den küçük asallarla $n + 1$ in bölümünde kalan 1'dir. Fakat en büyük asal p idi. O halde en büyük bir asal sayı yoktur, yani asal sayıların kümesi sonsuzdur. //

Bu teoremin 3. Bir ispatı Soyut Cebir dersi "İşlem ve Sayılar Teorisi" konusunda yapılacaktır.

ÖZEL TANIMLI ASAL SAYILAR

1. İkiz Asal Sayılar

4.2. Tanım: Aralarındaki fark 2 olan asal sayılara ikiz asal sayılar denir.

Örnek: 3 ile 5, 17 ile 19, 29 ile 31, 57 ile 59 sayıları ikiz asal sayılardır.

Örnek: Çevresi 72 cm olan bir dikdörtgenin uzun kenarı ile kısa kenarı uzunlukları ikiz asal sayı türündendir. Buna göre bu dikdörtgenin alanını bulunuz.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: Dikdörtgenin iki kenarlarının uzunlukları a ve b olsun.

$$\text{Çevre} = 2a + 2b = 72$$
$$a + b = 36$$

Ayrıca a ve b ikiz asal sayı olduklarından $a - b = 2$ dir. Bu iki denklem çözülürse,

$$a = 19 \text{ ve } b = 17$$
$$\text{Alan} = 19 \cdot 17 = 323 \text{ cm}^2$$

bulunur.

2. Simetrik Asal Sayılar

4.3. Tanım: İki basamaklı bir AB sayısı asal olduğunda BA sayısı da asalsa AB'ye simetrik asal denir.

Örnek: 17 ve 71 asal olduğuna göre, 17 ve 71 simetrik asaldır.
79 ve 97 asal olduğuna göre, 79 ve 97 simetrik asaldır.
37 ve 73 asal olduğuna göre, 37 ve 73 simetrik asaldır.

3. Fermat Asal Sayılar

4.4. Tanım: n doğal sayı olmak üzere, $2^{2^n} + 1$ biçiminde yazılabilen asal sayılara Fermat asal sayıları denir.

Örnek: $n = 3$ alınırsa $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ dir. 257 asal sayı olduğundan 257 Fermat asal sayısıdır.

Burada hemen belirtmek gerekir ki, her Fermat asal sayılar asal sayı değildir. Mesela $n = 5$ alınırsa $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ sayısı 641 ile bölünebilmektedir.

4.3. Not: Burada şu bilgiyi de vermek gerek, Fermat'ın bu sayıları tanımlarken, Asal sayıları tespit etmek için vermiştir. Fermat, Mersenne'e yazdığı mektupta, bu sayıların her n için asal olduklarını iddia etmiş, fakat bu iddianın doğru olmadığını, 1732 yılında Euler'in $n = 5$ için göstermesiyle, Fermat'ın iddiası çürütülmüştür.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

4. Chen Asal Sayılar

4.5. Tanım: p bir asal sayı olmak üzere, $p + 2$ sayısı asal oluyorsa veya $p + 2$ sayısı iki asal sayının çarpımı biçiminde yazılabiliyorsa p'ye bir Chen asalı denir.

Örnek: 37 sayısı için $3 \cdot 13 = 39$ olup 3 ve 13 asal sayıdır. Buna göre 37 Chen asalıdır.

Örnek: 57 sayısı için 59 asal sayıdır. Bu yüzden 57 Chen asalıdır.

5. Kuvvetli Asal Sayılar

4.6. Tanım: n pozitif tamsayı olmak üzere, n'yi bölen her bir p asal sayısı için p^2 de n'yi bölüyorsa n'ye kuvvetli sayı denir. $(p = a^k$ ise $k \geq 2)$

Örnek: $32 = 2^5$ ise 2 ve 2^2 sayıları 32'yi böldüğünden 32 kuvvetli sayıdır.
$72 = 3^2 2^3$ ise 6 ve 6^2, 72 yi böldüğünden 72 kuvvetli sayıdır.
$108 = 3^3 2^2$ ise 6 ve 6^2, 108 i böldüğünden 108 kuvvetli sayıdır.
$99 = 3^2 11^1$ ise 11^1, $1 \leq 2$ olup kuvvetli sayı değildir.

6. Kuzen Asal Sayılar

4.7. Tanım: p ve q asal sayılarının arasındaki fark 4 ise $(p;q)$ ikilisine bir "kuzen asal çifti" denir.

Örnek: 7 ve 11 asal iki sayı olduğundan 7 ile 11 kuzen asal çiftidir.
19 ve 23 asal iki sayı olduğundan 19 ile 23 kuzen asal çiftidir. //

Askeri bilgiler, internet sayfaları gibi önemli şifrelemeler gerektiren verilerin korunması gibi güvenlik alanında daha çok kullanılan asal sayıların $2^n + 1, 2^n - 1, n^2 + 1$ şeklindeki asal sayıların sonsuz sayıda olup olmadıkları henüz ispatlanmış değildir. Asal sayıların dağılımı ile ilgili, yani hangi sıklıkta

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

görüldükleri hakkında, herhangi bir kural yoktur. Aşağıdaki teorem, verilen her pozitif n tam sayısına karşılık daima n tane ardışık bileşik sayıdan oluşan bir dizi bulunacağını gösterir. Bu da bize asal sayılar arasında keyfi uzunlukta boşlukların olduğunu gösterir.

4.7. Teorem: Verilen her $n \geq 1$ sayısına karşılık, birbirini izleyen ve $q - p \geq n$ olan p ve q gibi iki asal sayı vardır.

İspat: $2 \leq k \leq n$ ise $k \mid (n! + k)$ dır. O halde $n! + 2, n! + 3, n! + 3, \cdots, n! + n$ sayıları $n - 1$ tane ardışık bileşik sayılardır. p, $n! + 1$ den küçük veya eşit olan en büyük asal sayı, q ise $n! + (n + 1)$ den büyük veya eşit olan en küçük asal sayı olsun. Bu durumda p ve q birbirini izleyen ve $q - p \geq n$ olan iki asal sayıdır.

ASAL ÇARPANLARA AYIRMA ve POZİTİF–NEGATİF BÖLENLER

4.8. Tanım: A bir tamsayı $a_1, a_2, a_3, \ldots$ birer asal sayılar; A sayısının bölenleri $m_1, m_2, m_3, \ldots$ tamsayılar olmak üzere,

$$A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\ldots$$

yazılışına asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılışı denir. Eğer $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ şeklinde sıralama varsa, asal çarpanlara ayrılmanın kanonik şekli adı verilir.

Örnek: 36 sayısını asal çarpanlara ayırınız.

Çözüm: $36 = 2^2.3^2$

Örnek: 420 sayısını asal çarpanlara ayırınız.

Çözüm: $420 = 2^2.3.5.7$

Örnek: 36 sayısının pozitif bölenlerini bulunuz.

Çözüm: $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

4.8. Teorem: A bir pozitif tamsayı $a_1, a_2, a_3, \ldots$ asal sayılar; $m_1, m_2, m_3, \ldots$ doğal sayılar olmak üzere,

$$A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\ldots$$

asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılsın. Buna göre A sayının pozitif bölenleri sayısı

$$\tau = (m_1+1)(m_2+1)(m_3+1)\ldots$$

kadardır.

İspat: A pozitif tamsayısının bölenlerinden biri $a_1^{m_1}$ olduğundan bu sayının katları;

$$\{1, a_1, a_1^2, a_1^3, \ldots, a_1^{m_1}\}$$

şeklinde olup bu sayıların hepsi A sayısını böler. Benzer şekilde $a_2^{m_2}, a_3^{m_3}, \ldots$ sayılarının katları;

$$\{1, a_2, a_2^2, a_2^3, \ldots, a_2^{m_2}\}$$
$$\{1, a_3, a_3^2, a_3^3, \ldots, a_3^{m_2}\}$$
$$\ldots$$

kümeleri de elde edilir. Bu kümelerin eleman sayıları

$$(m_1+1), (m_2+1), (m_3+1), \ldots$$

kadarlar. Bir sayının bölenleri asal bölenlerinin ve katlarının birbirleriyle çarpımları kadar olacağından A sayısının bütün pozitif bölenleri sayısı

$$\tau = (m_1+1)(m_2+1)(m_3+1)\ldots$$

şeklindedir.

Örnek: 36 sayısının pozitif bölenleri sayısını bulunuz.

Çözüm: $36 = 2^2 \cdot 3^2$ olduğundan $\tau = (2+1)(2+1) = 9$ tanedir.

Örnek: $n \in \mathbb{N}$, $A = 50 \cdot 6^n$ sayısının pozitif tamsayı olan bölenlerinin sayısı 120 ise n kaçtır?

Çözüm: $A = 50 \cdot 6^n = 2 \cdot 5^2 \cdot (2 \cdot 3)^n = 2^{n+1} \cdot 3^2 \cdot 5^2$ dir. Buna göre A sayısının pozitif bölenlerin sayısı

$$\tau = (n+1+1)(n+1)(2+1) = (n+2)(n+1)4 = 120$$
$$n = 4$$

tür.

4.2. Sonuç: Her tamsayı ya asal sayıdır ya da asal sayıların çarpımıdır. Bu çarpım tek türlüdür.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

4.3. Sonuç: A bir tamsayı $a_1, a_2, a_3, \ldots$ asal sayılar; $m_1, m_2, m_3, \ldots$ doğal sayılar olmak üzere,

$$A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\ldots$$

asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılsın. Buna göre A sayının tüm bölenleri sayısı (pozitif ve negatif)

$$2\tau = 2(m_1+1)(m_2+1)(m_3+1)\ldots$$

kadardır.

Örnek: 36 sayısının tüm bölenleri sayısını bulunuz.

Çözüm: $36 = 2^2 \cdot 3^2$ olduğundan $2\tau = 2(2+1)(2+1) = 18$ tanedir.

4.1. Lemma: $r, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r-1}$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatını tümevarım yöntemiyle yapalım.

P(1) için $\dfrac{r-1}{r-1} = 1$ olup doğrudur.

P(k) için $1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1} = \dfrac{r^k-1}{r-1}$ doğru olsun. $P(k+1)$ için doğru olup olduğuna bakalım.

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1} + r^k = \frac{r^k-1}{r-1} + r^k = \frac{r^k - 1 + r^{k+1} - r^k}{r-1} = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$$

olup doğrudur.

4.9. Teorem: A bir tamsayı $a_1, a_2, a_3, \ldots$ asal sayılar; $m_1, m_2, m_3, \ldots$ doğal sayılar olmak üzere,

$$A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\ldots$$

asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılsın. Buna göre A sayının pozitif bölenleri toplamı

$$\sigma = \frac{a_1^{m_1}-1}{a_1-1} \cdot \frac{a_2^{m_2}-1}{a_2-1} \cdot \frac{a_3^{m_3}-1}{a_3-1} \cdots$$

dır.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

İspat: A pozitif tamsayısının bölenlerinden biri a_1^m olduğundan bu sayının katlarının toplamı 4.1. Lemmadan dolayı

$$1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + \cdots + a_1^{m_1} = \frac{a_1^{m_1+1}-1}{m_1-1}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $a_2^{m_2}, a_3^{m_3}, \cdots$ sayılarının katlarının toplamı

$$1 + a_2 + a_2^2 + a_2^3 + \cdots + a_2^{m_2} = \frac{a_2^{m_2+1}-1}{m_2-1}$$

$$1 + a_3 + a_3^2 + a_3^3 + \cdots + a_3^{m_3} = \frac{a_3^{m_3+1}-1}{m_3-1}$$

...

dir. Her bir çarpanın toplamı bu şekilde bulunur. Şu halde A sayının pozitif bölenleri toplamı

$$\sigma = \frac{a_1^{m_1+1}-1}{a_1-1} \cdot \frac{a_2^{m_2+1}-1}{a_2-1} \cdot \frac{a_3^{m_3+1}-1}{a_3-1} \cdots$$

kadardır.

Örnek: 300 sayısını bölen pozitif tamsayıların toplamı nedir?

Çözüm: $300 = 2^2.3^1.5^2$

$$\sigma = \frac{2^{2+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{1+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{2+1}-1}{5-1} = 868$$

4.4. Sonuç: A bir tamsayı $a_1, a_2, a_3, \ldots$ asal sayılar; $m_1, m_2, m_3, \ldots$ doğal sayılar olmak üzere,

$$A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\ldots$$

asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılsın. Buna göre A sayının tüm bölenlerin (pozitif ve negatif) toplamı 0'dır.

4.5. Sonuç: A bir tamsayı $a_1, a_2, a_3, \ldots$ asal sayılar; $m_1, m_2, m_3, \ldots$ doğal sayılar olmak üzere,

$$A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\ldots$$

asal çarpanlara göre asal tam bölenlerin toplamı,

$$\gamma = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

kadardır.

Örnek: 60 sayısının asal bölenleri toplamı nedir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ dir. Şu halde 60’ı bölen asal sayılar 2, 3 ve 5 olduğundan,

$$\gamma = 2 + 3 + 5 = 10$$

dır.

ASAL ÇARPANLARA AYRILABİLEN ÖZEL TANIMLI SAYILAR

1. Mükemmel Sayılar

4.9. Tanım: A bir pozitif tamsayı σ bu sayının pozitif bölenlerin toplamı olsun. Eğer $\sigma = 2A$ ise bu A sayısına yetkin (mükemmel) sayı denir.

Örnek: 28 sayısı bir yetkin (mükemmel) sayı mıdır?

Çözüm: $28 = 2^2 \cdot 7^1$

$$\sigma = \frac{2^{2+1}-1}{2-1} \cdot \frac{7^{1+1}-1}{7-1} = 56$$

bulunur. 56 sayısı 28 sayısının 2 katı olduğundan 28 sayısı yetkin bir sayıdır.

Örnek: 10 000 den küçük olan bütün yetkin sayılar, 6, 28, 496, 8128 dir.

2. Zengin Sayılar

4.10. Tanım: A bir pozitif tamsayı σ bu sayının pozitif bölenlerin toplamı olsun. Eğer $\sigma > 2A$ ise bu A sayısına zengin sayılar denir.

Örnek: 20 sayısı bir zengin sayıdır. Çünkü $2A = 40$ ve $20 = 2^2 \cdot 5$ dir.

$$\sigma = \frac{2^{2+1}-1}{2-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} = 42$$

$42 > 40$ olduğundan zengin sayıdır.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: 10 sayısı bir zengin sayı mıdır?

Çözüm: $2A = 20$ ve $10 = 2 \cdot 5$

$$\sigma = \frac{2^{1+1}-1}{2-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} = 18$$

$18 < 20$ olduğundan zengin sayı değildir.

Arkadaş Sayılar

4.11. Tanım: Bir doğal sayının kendileri hariç o sayıyı tam bölen sayıların toplamı başka bir sayıyı, o başka sayının da tam bölen sayıların toplamı ilk önceki sayıyı veriyorsa bunlara arkadaş (kardeş) sayılar denir.

Örnek: 220 ile 284 arkadaş sayılardır.

220'yi bölen sayıların kümesi: $\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 55, 110\}$ dir. Bu sayıların toplamları:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 55 + 110 = 284$$

dür. Bu 284 sayısını tam bölen sayıların kümesi: $\{1, 2, 4, 71, 142\}$ dir. Bu sayıların toplamı

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

dir.

5. Smith Asal Sayılar

4.12. Tanım: 1'den büyük asal olmayan bir n tamsayının rakamlarının toplamı, n asal çarpanlara ayrılarak yazıldığında, bu yazılışta bulunan tüm asal sayıların rakamlarının toplamına eşit oluyorsa bu tür sayılara Smith sayısı denir.

Örnek: 728 sayısı asal çarpanlarına

$$728 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3$$

biçiminde ayrılır. $7 + 2 + 8 = 2 + 2 + 2 + 7 + 1 + 3$ olduğundan 728 bir Smith sayısıdır.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: Aşağıdaki sayılar Smith sayıdır.

$4 = 2 \cdot 2$ için $2 + 2 = 2 + 2$
$22 = 2 \cdot 11$ için $2 + 2 = 2 + 1 + 1$
$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ için $2 + 7 = 3 + 3 + 3$
$121 = 11 \cdot 11$ için $1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Asal Sayılar

1. 5 ile bölünen kaç tane asal sayı vardır?

Çözüm: 1 tanedir, o da sadece 5'dir. Çünkü 5'in her katı bileşik sayıdır.

2. $\frac{x+30}{x}$ kesrini asal sayı yapan, x tamsayıları nelerdir?

Çözüm: $\frac{x+30}{x} = 1 + \frac{30}{x}$ sayıları için 30'u bölen sayılar {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} kümesidir.

$x = 1$ için $1 + \frac{30}{1} = 31$ asaldır
$x = 2$ için $1 + \frac{30}{2} = 16$ bileşiktir
$x = 3$ için $1 + \frac{30}{3} = 11$ asaldır
$x = 5$ için $1 + \frac{30}{5} = 7$ asaldır
$x = 6$ için $1 + \frac{30}{6} = 6$ bileşendir
$x = 10$ için $1 + \frac{30}{10} = 4$ bileşendir
$x = 15$ için $1 + \frac{30}{15} = 3$ asaldır
$x = 30$ için $1 + \frac{30}{30} = 2$ asaldır

3. Aşağıdaki sayılardan hangisi asal sayıdır?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

A) 5^7 B) 5^7+1 C) 13^3 D) 13^3+1 E) $2^{16}+1$

Çözüm:
A) $5 \mid 5^7$
B) 5^7+1, 5 tek sayı olduğundan 5^7 tek sayıdır. 5^7+1 çift sayı olur.
C) $13 \mid 13^3$
D) 13^3+1, 13 tek sayı olduğundan 13^7 tek sayıdır. 13^7+1 çift sayı olur.
E) $2^{2^4}+1$ Fetmat asal sayısıdır. $n<5$ Fermat asal sayıları asal olduğu bilindiğinden $2^{16}+1$ asal sayıdır.

4. 203 asal sayısının asal olduğunu bulmak için kullanılan asal sayıların kümesinin en büyük değeri nedir?

Çözüm: $14<\sqrt{203}<15$ eşitsizliğinde 2, 3, 5, 7, 11 ve 13 asal sayılar 203'ü bölmediğinden 203 asal sayıdır. Bu sayıyı bulmak için kullanılan asal sayıların kümesinin en büyük değeri 13'dür.

5. İki asal sayının toplamı tek basamaklı sayı ise bu asal sayılardan en büyüğü nedir?

Çözüm: Tek basamaklı asal sayılar 2, 3, 5 ve 7 olduğuna göre bu asal sayılardan en büyüğü 7'dir.

6. y bir doğal sayı olmak üzere;

$$x=\frac{30}{y}+1$$

denkleminde, x'in kaç değeri asal sayıdır?

Çözüm: 30 sayısının bölenleri $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ kümesidir.
$y=1$ ise $x=31$ asal sayıdır.
$y=2$ ise $x=16$ bileşik sayıdır.
$y=5$ ise $x=7$ asal sayıdır.
$y=6$ ise $x=6$ bileşik sayıdır.
$y=10$ ise $x=4$ bileşik sayıdır.
$y=15$ ise $x=3$ asal sayıdır.
$y=30$ ise $x=2$ asal sayıdır.
Buna göre x, 4 tane asal değer alır.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

7. Her biri 5’ten büyük olan iki asal sayının toplamı, aşağıdakilerden hangisine eşit olamaz?

A) 18 B) 24 C) 30 D) 36 E) 43

Çözüm:
A) $18 = 13 + 5$ olup 13 ve 5 asal sayıdır.
B) $24 = 19 + 5$ olup 18 ve 5 asal sayıdır.
C) $30 = 13 + 17$ olup 13 ve 17 asal sayıdır.
D) $36 = 19 + 17$ olup 19 ve 17 asal sayıdır.
E) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 ve 39 asal sayılardan ikisinin toplamı 43 sayısını vermez.

8. a ve b birer pozitif tam sayı, $a^2 - b^2 = 17$ olduğuna göre, a ve b’nin değeri nedir?

Çözüm: 17 asal sayı olduğundan $(a - b)(a + b) = 1 \cdot 17$ eşitliğinde

$$a + b = 17 \text{ ve } a - b = 1$$

iki bilinmeyenli denklem olur. Bu denklem çözülürse $a = 9, b = 8$ olur.

9. a bir tamsayı, p bir asal sayı ve $p = a^2 + 3$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır.

A) a çift sayıdır
B) p’nin 2 ile bölümünden kalan 1’dir
C) a negatif bir sayı olabilir
D) a asal sayı olabilir
E) a sayısı 3 ile bölünür

Çözüm: $p = a^2 + 3$ olduğundan p, 3’den büyük asal sayıdır.
A) p asal sayı ise 3 eksiği çift bir sayıdır. Şu halde a bir çift sayıdır.
B) p tek sayı olduğundan kalan 1’dir.
C) a negatif bir sayı olabilir, çünkü a^2 pozitif bir sayıdır.
D) $a = 2$ alınırsa $p = 2^2 + 3 = 7$ olduğundan a asal sayı olabilir
E) Her a sayısı 3 ile bölünemez, $a = 2$ olduğu gibi.

10. 701 asal sayısı bulunurken, aşağıdaki sayılardan hangisine bakılmaz?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

A) 13 B) 17 C) 19 D) 23 E) 29

Çözüm: $26 \leq \sqrt{701} \leq 27$ olup 26 sayısından küçük asal sayılar incelenir. 29 asal sayısı incelenmez.

11. a, b, c birer doğal sayı, a asal sayı olsun.

$$a^2 = (b+1)(c+2)$$

ise a, b ve c'nin küçükten büyüğe doğru sıralaması nasıl olur?

Çözüm: $a^2 = (b+1)(c+2)$ olması için $b+1 = c+2 = a$ olmasıyla mümkündür. Buna göre $c < b < a$ olur.

Asal Çarpanlara Ayırma

12. x sayısı, aşağıdaki gibi asal çarpanlarına ayrılmıştır.

$$\begin{array}{c|c} x & 2 \\ \circ & 2 \\ a & 3 \\ \circ & 3 \\ b & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Buna göre $\frac{x}{ab}$ nin değeri nedir?

Çözüm: $x = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$

$a = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$

$b = 5$

$$\frac{x}{ab} = \frac{180}{45 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

13. a ve b birer pozitif tamsayı olmak üzere,

$$48 \cdot a = b^2$$

olduğuna göre, a en az kaçtır?

Çözüm: $48 = 2^4 \cdot 3$ olduğundan

$2^4 \cdot 3 \cdot a = b^2$

$a = 3$

olması ile mümkündür.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

14. 24 sayısı en küçük bir pozitif tam sayı ile çarpıldığında bir tam kare olduğuna göre bu tam kare sayısı nedir?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

Çözüm: İstenen sayı x olsun. $24 = 2^3 \cdot 3$ olduğundan

$$2^2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot x^2$$

$$x = 6$$

olması ile mümkündür.

15. $n \in \mathbb{N}, A = 45 \cdot 2^n$ sayısının pozitif tamsayı olan bölenlerinin sayısı 54 ise n kaçtır?

Çözüm: $A = 5 \cdot 3^2 \cdot 2^n$

$\tau = (1+1)(2+1)(n+1)$

$54 = 6(n+1)$

$n = 8$

16. $a < b$ olmak üzere, 200 sayısının asal çarpanlara ayrılmış biçimi $a^m b^n$ dir. Buna göre, $m + n$ nin değeri nedir?

Çözüm: $200 = 2^3 5^2$

$$m + n = 3 + 2 = 5$$

Pozitif ve Negatif Bölen Sayısı

17. Beş basamaklı en küçük doğal sayının kaç tane tam sayı böleni vardır?

Çözüm: Beş basamaklı en küçük doğal sayı 10 000 dır.

$10\,000 = 2^5 \cdot 5^5$

$2\tau = 2(5+1)(5+1) = 72$

18. $n \in \mathbb{N}, A = 12 \cdot 8^n$ sayısının pozitif bölenlerin sayısı 24 olduğuna göre n'nin değeri nedir?

Çözüm: $A = 12 \cdot 8^n = 3 \cdot 2^2 \cdot 2^{3n} = 3 \cdot 2^{3n+2}$

$\tau = (1+1)(3n+2+1)$

$24 = 2(3n+3)$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$n = 3$

19. $m \in \mathbb{N}, A = 2^m \cdot 3^{m-3}$ sayısının pozitif bölenlerin toplamı 819 olduğuna göre m'nin değeri nedir?

Çözüm:

$$\sigma = \frac{a_1^{m_1+1} - 1}{a_1 - 1} \cdot \frac{a_2^{m_2+1} - 1}{a_2 - 1}$$

$$819 = \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^{m-3+1} - 1}{3 - 1}$$

$$1638 = (2^{m+1} - 1)(3^{m-2} - 1)$$

$$31 \cdot 26 = (2^{m+1} - 1)(3^{m-2} - 1)$$

$$2^{m+1} - 1 = 31 \text{ ve } 3^{m-2} - 1 = 26$$

$$m = 5$$

20. $n = 1261$ alarak $\tau(n) = \tau(n + 1) = \tau(n + 2)$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $n = 1261 = 13 \cdot 97$ ise $\tau(n) = (1 + 1)(1 + 1) = 4$

$n + 1 = 1262 = 2 \cdot 631$ ise $\tau(n) = (1 + 1)(1 + 1) = 4$

$n + 2 = 1263 = 3 \cdot 421$ ise $\tau(n) = (1 + 1)(1 + 1) = 4$

KAYNAKÇA

1. Doç. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, 1988.
2. Doç. Dr. Neşe Yelkenkaya, Sayılar Teorisi Ders Notları, İstanbul Kültür Üniversitesi, İnternet Ders Notları, 2020.
3. Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ, Yrd. Doç. Dr. Hacı AKTAŞ, Sayılar Teorisi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Yayınları, Tokat, 1998.
4. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik I – II – III, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Sait AKKAŞ, H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Zühtü ÖZEL, Arif SABUNCUOĞL U, Soyut Matematik, 4. Baskı, Aralık, 2010.
7. Seyfettin AYDIN, Hacettepe Üniversitesi, Cilt 1 – 2, Ankara, 1986.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ