5. BÖLÜM
OBEB ve OKEK

Bu bölümde; OBEB ve OKEK denklemlerinde alınan sayıların en az biri sıfırdan farklıdır. Bu konu boyunca bütün kavramlarda en az birinin sıfırdan farklı olduğu tekrar edilmeyecektir.

ORTAK BÖLEN ve OBEB

5.1. Tanım: k sayısı A sayısını böler ise $k|A$ gösterimi ile gösterilmek üzere; $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k|A$ ve $k|B$ ise k'ya A ve B'nin ortak böleni denir. Ortak bölenlerin kümesi $OB(A;\ B)$ şeklinde gösterilir.

Örnek: 72 ve 48 sayılarının ortak bölenleri;
$$OB(72;\ 48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$
kümesidir.

Örnek: 27 ve 36 sayılarının ortak bölenleri;
$$OB(54; 36) = \{1, 2, 3, 6, 9\}$$
kümesidir.

5.2. Tanım: $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $OB(A;\ B)$ kümesinin en büyük elemanına ortak bölenlerin en büyüğü denir. $OBEB(A; B)$ şeklinde gösterilir.

5.1. Teorem: A ve B birer tamsayılar $a_1, a_2, a_3, \dots$ asal sayılar; $m_1, m_2, m_3, \dots$ ve $n_1, n_2, n_3, \dots$ doğal sayılar olmak üzere;
$$A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3} \cdots \text{ ve } B = a_1^{n_1}.a_2^{n_2}.a_3^{n_3} \cdots$$
asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılsın.
$$\min(m_1, n_1) = p_1, \min(m_2, n_2) = p_2, \min(m_3, n_3) = p_3, \cdots$$
iseler $OBEB(A; B) = a_1^{p_1}.a_2^{p_2}.a_3^{p_3} \cdots$ şeklindedir.

İspat: Buradaki

$$\min(m_1, n_1) = p_1, \min(m_2, n_2) = p_2, \min(m_3, n_3) = p_3, \cdots$$

olduğundan

$$a_1^{p_1}.a_2^{p_2}.a_3^{p_3}\cdots \leq A \text{ ve } a_1^{p_1}.a_2^{p_2}.a_3^{p_3}\cdots \leq B$$

olur ki, bu bize A ve B sayılarına ait ortak bölenlerin en büyüğünü verir.

Örnek: 72 ve 48 sayılarının ortak bölenleri;

Çözüm: $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ve $48 = 2^3 \cdot 3$
$\text{OBEB}(72;\ 48) = 2^3 \cdot 3 = 24$
olur.

Örnek: 54 ve 36 sayılarının ortak bölenleri;

Çözüm: $54 = 2^1 \cdot 3^3$ ve $36 = 2^2 \cdot 3^2$
$\text{OBEB}(54; 36) = 2^1 \cdot 3^2 = 18$
olur.

Örnek: Kenar uzunlukları 120 m ve 50 m olan dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin kenarlarına eşit en geniş uzunluklarda ağaçlar dikilecektir. Ağaçlar arasındaki uzunluklar ne olmalıdır.

Çözüm: Ağaçlar en geniş uzunluklarda olması için 120 ve 50 sayıların OBEB'lerini bulalım.
$120 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ve $50 = 2 \cdot 5^2$
$\text{OBEB}(120; 50) = 2 \cdot 5 = 10$ cm

Örnek: Kenarların uzunlukları 380 cm ve 560 cm olan dikdörtgen biçimindeki bir odaya eşit ve en büyük boyutlu karelere ayrılarak fayanslar döşenecektir. Bu odaya döşenecek fayans sayısı kaç tanedir?

Çözüm: $380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$ ve $560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$
$\text{OBEB}(380; 560) = 2^2 \cdot 5 = 20$
bulunur. Şu halde karelerin kenar uzunlukları 20 cm olmalıdır. Buna göre,

$$\text{Fayans Sayısı} = \frac{\text{Odanın Alanı}}{\text{Fayansın Alanı}} = \frac{380 \cdot 560}{20 \cdot 20} = 532$$

dir.

5.1. Sonuç: $A, B \in \mathbb{Z}$, bir pozitif C tam sayısı için $OBEB(A; B) = C$ olması ancak ve yalnız $C|A$ ve $C|B$ dir.

5.2. Sonuç: $A, B \in \mathbb{Z}$, $OBEB(A; B) = C$ ise $D|C$ olacak şekilde D tamsayısı vardır.

5.3. Sonuç: $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $OBEB(A; B) = A$ oluyorsa $A|B$ dir.

Örnek: $OBEB(18; 6)$ sayısında $18 = 2 \cdot 3^2$ ve $6 = 2 \cdot 3$ olduğundan $OBEB(18; 6) = 6$ olur.

Örnek: A, B, C pozitif tam sayılar olmak üzere;

$$OBEB(A; B) = 4 \text{ ve } OBEB(B; C) = 5$$

olduğuna göre, $A + B + C$ nin en küçük değerini bulalım.

Çözüm: OBEB'in tanım gereği;

$OBEB(A; B) = 4$ ise $A = 4x$ ve $B = 4y$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{N}$ vardır.
$OBEB(B; C) = 5$ ise $B = 5t$ ve $C = 5z$ olacak şekilde $t, z \in \mathbb{N}$ vardır.

Şu halde B sayısı hem 4'ün hem de 5'in katıdır. Öyleyse B en az 20 olmalıdır. 5.3. Sonuç gereği, A en az 4, C en az 5 seçilirse,

$$A + B + C = 4 + 20 + 5 = 29$$

bulunur.

Örnek: Toplamları 160 olan iki sayının OBEB'leri 40 ise bu iki doğal sayılardan büyük olanı küçük olanına bölündüğüne göre, büyük sayı nedir?

Çözüm: Bu iki sayı A ve B olsun. Eğer $OBEB(A; B) = 40$ ve $A = nB$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buna göre;

$$OBEB(nB; B) = 40$$

olacağından $B = 40$ dır. Şu halde, $A = 120$ dir.

Örnek: $m, n \in \mathbb{Z}$, $\text{OBEB}(A; B) = 1$ ise $\text{OBEB}(m - n; m + n)$ nin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $\text{OBEB}(m - n; m + n) = k$ olsun. Bu takdirde;

$$k | m - n; k | m + n$$
$$m - n = k\ell_1; m + n = k\ell_2, \ (\ell_1, \ell_1 \in \mathbb{Z})$$
$$2m = k(\ell_1 + \ell_2), 2n = k(\ell_2 + \ell_1)$$

$2 | k$ olduğundan $\text{OBEB}(m - n; m + n)$ ya 1'dir ya da 2'dir. //

Etienne Bezout
31 Mart 1730, Nemours, Fransa-27 Eylül 1783, Avon, Fransa

5.2. Teorem (Bezout Teoremi): $A, B \in \mathbb{Z}$, $\text{OBEB}(A; B) = Ax_0 + By_0$ olacak şekilde bir $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ vardır.

İspat: $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $Ax + By$ şeklindeki bütün pozitif tam sayıların kümesini S ile gösterelim. Bu durumda

$$S = \{Ax + By : Ax + By > 0, x, y \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

1. $S \neq \emptyset$ tur: Eğer $A \neq 0$ ise $|A| = Ax + B \cdot 0$, S'nin elemanıdır. Burada eğer $A < 0$ ise $x = -1$, $A > 0$ ise $x = 1$ alınabilir.

2. S kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemanı k ile gösterelim. Bu durumda $k \in S$ olduğundan $k = Ax_0 + By_0$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ vardır. Şimdi $\text{OBEB}(A; B) = k$ olduğunu gösterelim: A'ya bölme algoritmasını uygularsak

$$A = qk + r, 0 \leq r < k$$

olacak şekilde bir ve bir tek $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre

$$r = A - qk = A - q(Ax_0 + By_0) = A(1 - qx_0) + B(-qy_0)$$

dir. Eğer $r > 0$ ise $r \in S$ olur ki bu k'nin S'in en küçük elemanı olması ile çelişir. O halde $r = 0$ olduğunu gösterir. Böylece $A = qk$, $k \in \mathbb{Z}$ dir. Yani $k | A$, benzer şekilde $k | B$ elde edilir.

Buna göre k, A ile B'nin ortak bölenidir. Eğer C, A ile B'nin herhangi bir pozitif ortak böleni ise bölünebilme konusundaki 3.17. teoreme göre $C \mid (Ax_0 + By_0)$, yani $C \mid k$ dir, buradan da $C = |C| \leq |k| = k$ olur. O halde $\text{OBEB}(A; B) = k$ dir.

Örnek: $\text{OBEB}(60; 45) = 15 = 60x_0 + 45y_0$

$4x_0 + 3y_0 = 1$

$x_0 = 4, y_0 = -5$

5.3. Teorem: $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\text{OBEB}(A; B) = 1$ oluyorsa A ve B sayıları aralarında asaldır.

İspat: Aralarında asal sayı tanımı bölünebilme konusunda tanımlanmıştır. Bu tanıma göre A ve B'nin ortak bölenleri 1 olması ile gösterilmiştir. Şu halde $\text{OBEB}(A; B) = 1$ oluyorsa A ve B sayıları aralarında asaldır.

Örnek: 8 ve 9 aralarında asal sayılardır. 8 ve 9 asal sayı değillerdir, ama aralarında asaldırlar. Çünkü $\text{OBEB}(8; 9) = 1$ dir.

Örnek: 8 ve 10 sayısı aralarında asal değillerdir. Çünkü Yani $\text{OBEB}(8; 10) = 2$ dir.

5.4. Teorem: A ve B iki tamsayı ve OBEB(A, B) = k olsun. Bu takdirde;

$$\text{OEB}\left(\frac{A}{k}; \frac{B}{k}\right) = 1$$

şeklindedir.

İspat: $A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\cdots$ ve $B = a_1^{n_1}.a_2^{n_2}.a_3^{n_3}\cdots$ asal çarpanlara ayrılsın;

$$\min(m_1, n_1) = p_1, \min(m_2, n_2) = p_2, \min(m_3, n_3) = p_3, \cdots$$

olmak üzere;

$$\text{OBEB}(A; B) = a_1^{p_1}.a_2^{p_2}.a_3^{p_3}\cdots$$

şeklindedir. Buna göre;

$$\frac{A}{k} = \frac{a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\ldots}{a_1^{p_1}.a_2^{p_2}.a_3^{p_3}\ldots} = a_1^{m_1-p_1}.a_2^{m_2-p_2}.a_3^{m_2-p_3}\ldots$$

$$\frac{B}{k}=\frac{a_1^{n_1}.a_2^{n_2}.a_3^{n_3}\dots}{a_1^{p_1}.a_2^{p_2}.a_3^{p_3}\dots}=a_1^{n_1-p_1}.a_2^{n_2-p_2}.a_3^{n_3-p_3}\dots$$

bulunur. 5.1. Teorem gereği OBEB bulunabilmesi için minimum değerleri alınmalıdır. Öyleyse;

$$\min(m_1,n_1)=p_1 \text{ ise } \min(m_1-p_1,n_1-p_1)=0$$
$$\min(m_2,n_2)=p_2 \text{ ise } \min(m_2-p_2,n_2-p_2)=0$$
$$\min(m_3,n_3)=p_3 \text{ ise } \min(m_3-p_3,n_3-p_3)=0$$
...

dir. Şu halde;

$$\text{OEB}\left(\frac{A}{k};\frac{B}{k}\right)=a_1^0.a_2^0.a_3^0\cdots=1$$

biçimindedir.

5.4. Sonuç: $A,B\in\mathbb{Z}$ olsun. A ve B'nin aralarında asal olması ancak ve yalnız $Ax+By=1$, $x,y\in\mathbb{Z}$ dir.

5.5. Teorem: $\text{OBEB}(A;B)=1$ ve $\text{OBEB}(A;C)=1$ ise $\text{OBEB}(A;BC)=1$ dir.

İspat: $\text{OBEB}(A;B)=1$ olduğundan 5.4. sonuca göre $Ax+By=1$, $x,y\in\mathbb{Z}$ dir. Eşitliğin her iki tarafını C ile çarparsak $CAx+CBy=C$ elde edilir. $\text{OBEB}(A;BC)=D$ olsun. $D|A$, $D|BC$ ise $D|C$ ve böylece $D|\text{OBEB}(A;\ BC)$, yani $D|1$ bulunur. O halde $\text{OBEB}(A;BC)=1$ dir.

5.6. Teorem (Öklid Lemması): Eğer $A|BC$ ve $\text{OBEB}(A;B)=1$ ise $A|C$ dir.

İspat: $\text{OBEB}(A;B)=1$ olduğundan $Ax+By=1$ olacak şekilde $x,y\in\mathbb{Z}$ vardır. Buna göre $CAx+CBy=C$ şeklinde yazılabilir. $A|AC$ ve $A|BC$ olduğundan bölünebilme konusundaki 3.17. teoreme göre $A|(ACx+BCy)$ yani $A|C$ dir. //

Eğer $\text{OBEB}(A;B)=k>1$ ise $A|BC$ fakat $A|C$ olmayabilir. Örneğin $6|8\cdot 9$ fakat $6\nmid 8$ ve de $6\nmid 9$ dir.

Örnek: Her $n\in\mathbb{Z}$ için $2|n^2-n$ olup olmadığını araştınız.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{Z}$ için $n^2 - n = n(n-1)$ dir. n ve $n-1$ ardışık tamsayılar olduğundan n veya $n-1$ den biri daima çifttir. Öylece $2 | n^2 - n$ dir.

5.1. Lemma: Eğer $A = qB + r$ ise $\mathrm{OBEB}(A; B) = \mathrm{OBEB}(B; r)$ dir.

İspat: $\mathrm{OBEB}(A; B) = k$ diyelim $k|A$ ve $k|B$ den $k|(qB - A)$ yani $k|r$ elde edilir. O halde k, B ve r'nin bir ortak bölenidir. Öte yandan eğer C, B ve r'nin bir ortak böleni ise $C|(qB + r)$, yani $C|A$ dır. C, A ile B'nin bir ortak bölenidir. Bunun sonucu olarak $C \leq k$ ve en büyük ortak bölen tanımından $\mathrm{OBEB}(A; B) = k$ bulunur. //

A ve B gibi iki tam sayının en büyük ortak bölenini bulmak için kullanılan aşağıdaki metoda **Öklid Algoritması** denir.

$\mathrm{OBEB}(|A|; |B|) = \mathrm{OBEB}(A; B)$ olduğundan $A \geq B > 0$ olarak alabiliriz. İlk olarak A ve B çiftine bölme algoritması uygulayalım.

$$A = q_1B + r_1, 0 \leq r_1 < B$$

olacak şekilde bir ve bir tek $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ vardır.

Eğer $r_1 = 0$ ise $B|A$ ve böylece $\mathrm{OBEB}(A; B) = B$ bulunur. Eğer $r_1 \neq 0$ ise

$$B = q_2r_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$$

olacak şekilde bir ve bir tek $q_2, r_2 \in \mathbb{Z}$ vardır. Eğer $r_2 = 0$ ise işlem biter, aksi halde $r_2 \neq 0$ ise

$$r_1 = q_3r_2 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2$$

olacak şekilde bir ve bir tek $q_3, r_3 \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu işlemlerin sonucunda bir yerden sonra kalan terim sıfır olmak zorundadır. Çünkü $B > r_1 > r_2 > \cdots \geq 0$ olduğundan bu azalan dizi b'den fazla terim içeremez. $(n+1)$ inci adımda r_{n-1} in r_n ye kalansız olarak bölündüğünü varsayalım, yani r_{n+1} olsun. Bu işlemlerin sonucunda aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
&A = q_1B + r_1, 0 \leq r_1 < b \\
&B = q_2r_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1 \\
&r_1 = q_3r_2 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2 \\
&\ldots \\
&r_{n-2} = q_nr_{n-1} + r_n, 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
&r_{n-1} = q_{n+1}r_n + 0
\end{aligned}$$

Şimdi sıfırdan farklı en son kalan r_n nin $\mathrm{OBEB}(A; B)$ ye eşit olduğunu gösterelim: 2.1. Lemmaya göre

$$\mathrm{OBEB}(A; B) = \mathrm{OBEB}(B; r_1) = \cdots = \mathrm{OBEB}(r_{n-1}; r_n) = \mathrm{OBEB}(r_n; 0) = r_n$$

elde edilir.

Örnek: Öklid algoritmasını kullanarak 1454 ile 1444 ün en büyük ortak bölenini bulalım:

$$1454 = 1444 \cdot 1 + 10$$
$$1444 = 144 \cdot 10 + 4$$
$$10 = 2 \cdot 4 + 2$$
$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

ohalde $\text{OBEB}(1544; 1444) = 2$ dir.

Şimdi $2 = 1054 \cdot x + 1444 \cdot y$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ sayılarını bulalım: Bunun için sondan başa doğru hareket edilir, yani

$$2 = 10 \cdot 1 - 2 \cdot 4$$
$$2 = 10 \cdot 1 - 2 \cdot (1444 - 144 \cdot 10)$$
$$2 = 10 \cdot 289 - 2 \cdot 1444$$
$$2 = (1454 - 1444) \cdot 289 - 2 \cdot 1444$$
$$2 = 1454 \cdot 289 - 291 \cdot 1444$$

elde edilir. Buna göre $x = 289, y = -291$ alabiliriz. //

Öklid algoritması yerine bir toplama, çıkarma, sayıları birbirine yaklaştırma gibi yöntemler denenebilir.

5.7. Teorem: Eğer $k > 0$ ise $\text{OBEB}(k \cdot A; k \cdot B) = k \cdot \text{OBEB}(A; B)$ dir.

İspat: A ve B çiftine Öklid algoritması uygulandığı zaman elde edilen denklemler k ile çarpılırsa

$$Ak = q_1(bk) + r_1k, 0 \leq r_1k < bk$$
$$Bk = q_2(r_1k) + r_2k, 0 \leq r_2k < r_1k$$
$$r_1k = q_3(r_2k) + r_3k, 0 \leq r_3k < r_2k$$
$$\ldots$$
$$r_{n-2}k = q_n(r_{n-1}k) + r_nk, 0 \leq r_nk < r_{n-1}k$$
$$r_{n-1}k = q_{n+1}(r_nk) + 0$$

dan $\text{OBEB}(k \cdot A; k \cdot B) = r_nk = k \cdot \text{OBEB}(A; B)$ elde edilir.

5.5. Sonuç: Herhangi bir $k \neq 0$ ise $\text{OBEB}(k \cdot A; k \cdot B) = |k| \cdot \text{OBEB}(A; B)$ dir.

5.6. Sonuç: Herhangi bir $k \neq 0$ ise $\text{OBEB}\left(\frac{A}{k}; \frac{B}{k}\right) = \frac{1}{k} \cdot \text{OBEB}(A; B)$ dir.

5.8. Teorem: $A, B, C \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\text{OBEB}(A; B; C) = \text{OBEB}((A; B); C) = \text{OBEB}(A; (B; C)) = \text{OBEB}((A; C); B)$$

dir.

İspat: $\text{OBEB}(A; B; C) = \text{OBEB}((A; B); C)$ olduğunu gösterelim: $\text{OBEB}(A; B; C) = k_1, \text{OBEB}((A; B); C) = k_2$ olsun. $k_1|A$, $k_1|B$, $k_1|C$ olduğundan $k_1|\text{OBEB}(A, B)$, $k_1|C$ ve böylece k_1, OBEB(A, B) ile C'nin bir ortak bölenidir. Buna göre $k_1 \leq k_2$ dir.

Tersine $k_2|\text{OBEB}(A, B)$, $k_2|C$ ve böylece $k_2|A$, $k_2|B$, $k_2|C$ dolayısıyla k_2 sayısı A, B, C'nin bir ortak bölenidir ve bunun sonucu olarak $k_2 \leq k_1$ dir. O halde $k_1 = k_2$ dir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilir.

Örnek: OBEB(88; 55; 66) bulup, k sayısını bu üç sayının lineer toplamı şeklinde gösterelim: Bunun için önce 88 ile 43'ü bulalım.

$$88 = 1 \cdot 55 + 33$$
$$55 = 1 \cdot 33 + 22$$
$$33 = 1 \cdot 22 + 11$$
$$22 = 2 \cdot 11 + 0$$

$\text{OBEB}(88; 55) = 11$**,** öte yandan;

$$11 = 33 - 22$$
$$11 = 33 - (55 - 33)$$
$$11 = 2 \cdot 33 - 55$$
$$11 = 2 \cdot (88 - 55) - 55$$
$$11 = 2 \cdot 88 - 3 \cdot 55$$

Şimdi OBEB(88; 66) bulalım:

$$88 = 66 + 22$$
$$66 = 3 \cdot 22 + 0$$

$\text{OBEB}(88; 66) = 22$**,** öte yandan;

$$22 = 1 \cdot 88 - 1 \cdot 66$$

şeklinde yazılabilir. $11|22$ olduğundan

$$\text{OBEB}(88; 55; 66) = 11$$

olacağından (88 ve 66 sayısını 88 sayısına benzeterek)

$$11 = 2 \cdot 88 - 3 \cdot 55$$
$$11 = 2 \cdot (4 \cdot 88 - 4 \cdot 66) - 3 \cdot 55$$
$$11 = 8 \cdot 88 - 8 \cdot 66 - 3 \cdot 55$$

elde edilir. Buna göre $x = 8, y = -8, z = -55$ alabiliriz.

5.9. Teorem: $A, B \in \mathbb{N}$ ve $\text{OBEB}(A; B) = 1$ olsun. Eğer $C \in \mathbb{N}$, $C|AB$ şartını sağlayan bir sayı ise $\text{OBEB}(AB; C) = \text{OBEB}(A; C) \cdot \text{OBEB}(B; C)$ dir.

İspat: $OBEB(A;C) = D_1$ ve $OBEB(A;B) = D_2$ olsun. 5.4. sonuca göre

$D_1 = OBEB(A;C) = Ax_1 + Cy_1, D_2 = OBEB(B;C) = Bx_2 + Cy_2$

olacak şekilde $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre

$$D_1D_2 = (Ax_1 + Cy_1)(Bx_2 + Cy_2)$$
$$= ABx_1x_2 + C(Ax_1y_2 + By_1x_2 + Cy_1y_2)$$

bu nedenle

$$C \mid D_1D_2 \qquad (1)$$

olur.

Diğer taraftan $OBEB(A;B) = 1$ olmasından dolayı $Ax + By = 1$ ve böylece $CAx + CBy = C$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. $D_1 \mid A$ ve $D_2 \mid C$ buradan $D_1D_2 \mid CAx$ bulunur. Benzer şekilde $D_1D_2 \mid CBy$ bunun sonucu olarak

$$D_1D_2 \mid C \qquad (2)$$

$C, D_1, D_2, \in \mathbb{N}$ olduğundan (1) ve (2) den $C = D_1D_2$ elde edilir.

5.10. Teorem: $A, B \in \mathbb{N}$ ve $OBEB(A;B) = 1$ olsun. Eğer $C \in \mathbb{N}, C \mid AB$ şartını sağlayan bir sayı ise $D_1 \mid A$ ve $D_2 \mid B$ ve $D_1D_2 = C$ olacak şekilde tek türlü belirli $D_1, D_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: 5.9. teoreme göre $OBEB(C;A) = D_1$ ve $OBEB(C;B) = D_2$ nin yukarıdaki şartları sağlar.

Şimdi bu gösterilişin tek türlü olduğunu gösterelim. Bunun için $D'_1, D'_2 \in \mathbb{N}$

$D'_1 \mid A, D'_2 \mid B$ ve $D'_1D'_2 = C$

şartını sağlayan herhangi iki sayı ise $OBEB(C;A) = D'_1$ ve $OBEB(C;B) = D'_2$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$D'_1 \mid A, D'_2 \mid B$ den $D'_1 \mid OBEB(C, A)$ elde edilir. Benzer şekilde $D'_2 \mid OBEB(C, B)$ olduğu gösterilebilir.

Buna göre $D'_1 \leq OBEB(C, A)$ ve $D'_2 \leq OBEB(C, B)$ dir. Eğer $D'_1 \neq (C, A)$ olsaydı

$$C = D'_1D'_2 < OBEB(C;A)OBEB(C;B) = B$$

yani bu bizi $C < C$ çelişkisine götürür. Aynı çelişki $D'_2 \neq OBEB(C, A)$ olması halinde de doğar. O halde $D'_1 = D_1$ ve $D'_2 = D_2$ olmak zorundadır.

ORTAK KAT ve OKEK

5.3. Tanım: A sayısı k sayısını böler ise $A|k$ gösterimi yapılmak üzere; $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $A|k$ ve $B|k$ ise k'ya A ve B'nin ortak katı denir. Ortak katların kümesi $OK(A; B)$ şeklinde gösterilir.

Örnek: 12 ve 8 sayılarının ortak katları;

$$OB(12; 8) = \{24, 48, 72, 96, \dots\}$$

dir.

Örnek: 6 ve 9 sayılarının ortak bölenleri;

$$OB(6; 9) = \{18, 36, 54, 72, 90, \dots\}$$

dir.

5.11. Teorem: A ve B birer tamsayılar $a_1, a_2, a_3, \dots$ asal sayılar; $m_1, m_2, m_3, \dots$ ve $n_1, n_2, n_3, \dots$ doğal sayılar olmak üzere,

$$A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\cdots \text{ ve } B = a_1^{n_1}.a_2^{n_2}.a_3^{n_3}\cdots$$

asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılsın.

$$\max(m_1, n_1) = r_1, \max(m_2, n_2) = r_2, \max(m_3, n_3) = r_3, \cdots$$

iseler $OKEK(A; B) = a_1^{r_1}.a_2^{r_2}.a_3^{r_3}\cdots$ şeklindedir.

İspat: Buradaki;

$$\max(m_1, n_1) = r_1, \max(m_2, n_2) = r_2, \max(m_3, n_3) = r_3, \cdots$$

ler olduklarından

$$A \leq a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\cdots \text{ ve } B \leq a_1^{n_1}.a_2^{n_2}.a_3^{n_3}\cdots$$

olurlar ki, bu bize A ve B sayılarına ait ortak katların en küçüğünü verir.

Örnek: 12 ve 8 sayılarının ortak bölenleri;

Çözüm: $12 = 2^2 \cdot 3$ ve $8 = 2^2$

$$OKEK(12; 8) = 2^2 \cdot 3^1 = 24$$

olur.

Örnek: 6 ve 9 sayılarının ortak bölenleri;

Çözüm: $6 = 2^1 \cdot 3^1$ ve $9 = 3^2$

$$OKEK(6; 9) = 2^1 \cdot 3^2 = 18$$

olur.

Örnek: İki belediye otobüsünden biri 40 dakikada diğeri 50 dakikada bir başladıkları noktaya geliyorlar. Saat 07.00 da beraber göreve başlayan iki otobüs şoförleri en erken saat kaçta bir araya gelirler.

Çözüm: 40 ile 50'nin OKEK'lerini bulacağız.

$40 = 2^3 \cdot 5$ ve $50 = 2 \cdot 5^2$

$\text{OKEK}(40; 50) = 2^3 \cdot 5^2 = 200$ dakika

elde edilir. Görüldüğü gibi 200 dk = 3 sa. 20 dk. olacağından saat 07.00 de beraber olan sefere başlayan otobüsler, 10.20'de buluşurlar.

Örnek: İki hemşireden biri 6 günde diğeri 8 günde bir nöbet tutuyor. Bugün nöbet tutan iki hemşire beraber kaç gün sonra tutarlar.

Çözüm: 6 ile 8'in OKEK'lerini bulacağız.

$6 = 3^1 \cdot 2^1$ ve $8 = 2^3$

$\text{OKEK}(6; 8) = 3 \cdot 2^3 = 24$ gün

elde edilir.

Örnek: 5, 6 ve 8'e bölündüğünde 4 kalanını veren sayı nedir?

Çözüm: $\text{OKEK}\,(5; 6; 8) + 4 = \text{OKEK}\,(5; 2 \cdot 3; 2^3) + 4$

$= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 + 4 = 124$

$= 124$

Örnek: 5, 6 ve 8'e bölündüğünde sırasıyla 2, 3 ve 5 kalanını veren sayı nedir?

Çözüm: $5 - 2 = 6 - 3 = 8 - 5 = 3$

$\text{OKEK}(5; 6; 8) - 3 = 120 - 3 = 117$

Örnek: 8 ve 6 ile bölündüğünde her iki bölümde 2 kalanını veren en küçük tamsayı nedir?

Çözüm: Bu sayı ise A ise,

$A = 8x + 2 = 6y + 2$

olacak şekilde $x, y \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. Buna göre,

$A - 2 = 8x = 6y$

dir. Şu halde $A - 2$ sayısı hem 8 hem de 6 ile bölünebilir. O halde,

$$A - 2 = OKEK(8; 6) = 24$$
$$A = 26$$

dir.

Örnek: 37 kişilik bir sınıfta x kişi katılınca bu grup 6 veya 9'arlı gruplandırılıyor. Buna göre en küçük x sayısı nedir?

Çözüm: $37 + x$ sayısı 6 ve 9'un bir katıdır. O halde $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$37 + x = k \cdot OKEK(6; 9)$$

dir. Ayrıca

$$6 = 2 \cdot 3 \text{ ve } 9 = 3^2 \text{ ise } OKEK(6; 9) = 18$$
$$OK(6; 9) = \{18, 36, 54, 72, 90, \cdots\}$$
$$37 + x = 54$$
$$x = 17$$

bulunur.

Örnek: Bir sepetteki güller 5 er 5 er demetlenince 1 gül, 7 şer 7 şer demetlenince de 3 gül artmaktadır. Buna göre, sepette en az kaç gül vardır?

Çözüm: Gül sayısı G ile gösterelim.

$$G = 5k + 1 = 7m + 3$$

Eşitliğin her üç tarafına 18 eklenirse,

$$G + 4 = 5k + 1 + 4 = 7m + 3 + 4$$
$$G + 4 = 5k + 5 = 7m + 7$$
$$G + 4 = 5(k + 1) = 7(m + 1)$$

yani 5 ve 7 nin katları oluşur.

$$G + 4 = OKEK(5; 7)$$
$$G + 4 = 35$$
$$G = 31$$

gül vardır.

Örnek: Farkları 16 olan a ve b pozitif sayıların en küçük ortak katı 105'tir. Buna göre $a + b$ kaçtır?

Çözüm: $OKEK(a; b) = 105$ olduğuna göre a ve b sayıları 105'i tam olarak böler. 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105 sayıları 105'i tam olarak böler. Bu sayılar ve $a - b = 16$ ise $a = 21$ ve $b = 5$ alınmasıyla mümkün olabilir. Bu durumda,

$$a + b = 21 + 5 = 26$$

olur.

5.7. Sonuç: $A, B \in \mathbb{Z}$, bir pozitif C tam sayısı için $\text{OKEK}(A; B) = C$ olması ancak ve yalnız $A|C$ ve $B|C$ dir.

5.8. Sonuç: $A, B \in \mathbb{Z}$, $\text{OKEK}(A; B) = C$ ise $C|D$ olacak şekilde sonsuz sayıda D tamsayısı vardır.

5.9. Sonuç: $\text{OKEK}(A; B) = C$ ve $\text{OBEB}(A; B) = 1$ ise, $A|C$ ve $B|C$ ise $AB|C$ dir.

5.10. Sonuç: $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\text{OKEK}(A; B) = B$ oluyorsa $A|B$ dir.

5.11. Sonuç: İki veya fazla sayının OKEK'i en az bu sayıların büyüğüne eşittir.

Örnek: $\text{OKEK}(18; 6)$ sayısında $18 = 2 \cdot 3^2$ ve $6 = 2 \cdot 3$ olduğundan $\text{OKEK}(18; 6) = 18$ olur.

5.12. Sonuç: $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\text{OKEK}(A; B) \leq |AB|$ dir.

5.12. Teorem: $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $A \cdot B = \text{OBEB}(A; B) \cdot \text{OKEK}(A; B)$ dir.

İspat: A ve B birer tamsayılar $a_1, a_2, a_3, \ldots$ asal sayılar; $m_1, m_2, m_3, \ldots$ ve $n_1, n_2, n_3, \ldots$ doğal sayılar olmak üzere,

$$A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3} \cdots \text{ ve } B = a_1^{n_1}.a_2^{n_2}.a_3^{n_3} \cdots$$

asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılsın.

$$\min(m_1, n_1) = p_1, \min(m_2, n_2) = p_2, \min(m_3, n_3) = p_3, \cdots$$
$$\max(m_1, n_1) = r_1, \max(m_2, n_2) = r_2, \max(m_3, n_3) = r_3, \cdots$$

iseler $\text{OBEB}(A; B) = a_1^{p_1}.a_2^{p_2}.a_3^{p_3} \cdots$ ve $\text{OKEK}(A; B) = a_1^{r_1}.a_2^{r_2}.a_3^{r_3} \cdots$ şeklindedir.

$$\begin{aligned}\text{OBEB}(A; B) \cdot \text{OKEK}(A; B) &= a_1^{p_1}.a_2^{p_2}.a_3^{p_3} \cdots a_1^{r_1}.a_2^{r_2}.a_3^{r_3} \cdots \\ &= a_1^{p_1+r_1}.a_2^{p_2+r_2}.a_3^{p_3+r_2} \cdots \qquad (1)\end{aligned}$$

bulunur. Beri taraftan

$$m_1 + n_1 = \min(m_1, n_1) + \max(m_1, n_1)$$

$$m_2 + n_2 = \min(m_2, n_2) + \max(m_2, n_2)$$
$$m_3 + n_3 = \min(m_3, n_3) + \max(m_3, n_3)$$
...

dir. Şu halde (1) eşitliği,

$$\begin{aligned} OBEB(A;B)\cdot OKEK(A;B) &= a_1^{p_1+r_1}.a_2^{p_2+r_2}.a_3^{p_3+r_2}\cdots \\ &= a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\cdots a_1^{n_1}.a_2^{n_2}.a_3^{n_3}\cdots \\ &= A\cdot B \end{aligned}$$

olur.

Örnek: $OBEB(24;x) = 6, OKEK(24;x) = 84$ ise x kaçtır?

Çözüm: $24\cdot x = OBEB(24;\ x)\cdot OKEK(24;x)$
$24x = 6\cdot 84$
$x = 21$

Örnek: $m, n \in \mathbb{Z}$ sayıların ortak bölenlerin en büyüğü $OBEB(m;n) = 6$ ve ortak katların en küçüğü $OKEK(m;n) = 60$ tır. $m - n = 18$ olduğuna göre $m + n$ kaçtır?

Çözüm: $m\cdot n = OKEK(m;n)\cdot OBEB(m;n)$
$m\cdot n = 60\cdot 6 = 360$

$m - n = 18$ verildiğinden ve 360'ın çarpanları 30 ve 12 alınabilir. Buna göre,
$$m + n = 30 + 12 = 42$$
olur.

5.13. Sonuç: $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $OKEK(A;B) = AB$ olması için gerek ve yeter şart $OBEB(A;B) = 1$

5.14. Sonuç: $A, B \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
$$OKEK(kA;kB) = k\cdot OKEK(A;B)$$
dir.

5.13. Teorem: a, b ve c pozitif tam sayılar olmak üzere,
$$OKEK(A;B;C) = OKEK((A;B);C) = OKEK(A;(B;C)) = OKEK((A;C);B)$$
dir.

İspat: $OKEK(A; B; C) | D_1$ den $A | D_1$, $B | D_1$, $C | D_1$ dir, böylece D_1, $OKEK((A; B); C)$ ile C'nin bir pozitif ortak katıdır. O halde

$$D_2 \leq D_1 \qquad (1)$$

dir.

Diğer tarftan $OKEK((A; B); C) | D_2$, $C | D_2$ den $A | D_2$, $B | D_2$ bulunur. Yani D_2, A, B, C'nin bir pozitif ortak katıdır. Bunun sunucu olarak

$$D_1 \leq D_2 \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) den $D_1 = D_2$ elde edilir.

5.14. Teorem: a, b ve c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$OKEK(A; B; C) \cdot OBEB(AB, BC, CA) = ABC$$

dir.

Bu teorem 5.12. teoreme benzer yolla yapıldığından ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

DİOFANT DENKLEMİ

$ax + by + c = 0$ biçimindeki cebirsel denklemlerin çözümlerinin bulunması tarih boyunca araştırılmıştır. Burada tamsayı değerler için incelenecektir. Tam sayılı problemlerle çalışmayı başlatan Yunan asıllı İskenderiyeli matematikçi Diophantos'un onuruna bu denklemlere Diofant denklemleri denir.

İskenderiyeli Diophantus
M.S. 200–214–M.S. 284–298

5.4. Tanım: $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq 0, b \neq 0$ olmak üzere, tamsayılı çözümleri aranan $ax + by + c = 0$ şeklindeki bir denkleme **Diofant (Diophantus) denklemi** denir. (İleride bütün reel sayılar için incelenecektir, onlara 1. dereceden iki bilinmeyenli denklem adı verilecektir.)

Bir Diofant denkleminin birden fazla çözümü olabildiği gibi, $8x + 6y + 23 = 0$ denkleminde olduğu gibi tamsayılarda hiç çözümü olmayabilir. Çünkü $x, y \in \mathbb{Z}$ oldukça sol taraf daima çift sayı, sağ taraf ise bir tek sayıdır.

5.15. Teorem: Bir $ax + by = c$ Diofant denkleminin çözümlü olması için gerek ve yeter şart $\text{OBEB}(a; b) | c$ olmasıdır.

İspat: $ax + by = c$ Diofant denkleminin $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ gibi bir çözümü var olsun. $\text{OBEB}(a; b) = d$ dersek, $a = dr, b = ds$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{Z}$ vardır. Bunun sonucu olarak

$$c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0)$$

olur ki bu bize $d | c$ olduğunu gösterir.

Tersine $d | c$ olsun. $c = dt$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Öte yandan $\text{OBEB}(a; b) = d$ olduğundan $ax_0 + by_0 = d$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(tx_0) + b(ty_0)$$

elde edilir . Yani $tx_0, by_0, ax + by = c$ Diofant denkleminin bir özel çözümüdür.

Örnek: $4x + 3y = 36$ Diofant denkleminde $\text{OBEB}(4; 3) | 36$ olduğundan böyle $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. Bunlar $x = 6, y = 4$ veya $x = 3, y = 8$ sayıları olabilir.

5.16. Teorem: Bir $ax + by = c$ Diofant denklemi ve $\text{OBEB}(a; b) = d$ olmak üzere, eğer x_0, y_0 bu denklemin bir özel çözümü ise diğer çözümler,

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) t, y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) t, t \in \mathbb{Z}$$

şeklindedir.

İspat: Verilen denklemin $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ gibi bir çözümü var olsun. Eğer $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ ikinci bir çözüm ise

$$ax_0 + b\,y_0 = c = ax_1 + by_1$$

buradan $a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$ ve böylece

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y_1) \qquad (1)$$

dir. Böylece $\frac{a}{d} \Big| \frac{b}{d}(y_0 - y_1), \text{OBEB}(a; b) = d$

olduğundan OBEB$\left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right) = 1$ dir. OBEB-OKEK konusundaki Öklid Lemmasına göre $\frac{a}{d}\Big| (y_0 - y_1)$, yani $y_0 - y_1 = \left(\frac{a}{d}\right)t$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{Z}$ vardır. Bunu (1) eşitliğinde yerleştirecek olursak

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) = \frac{b}{d}\left(\frac{a}{d}\right)t$$

ve buradan da $x_1 - x_0 = \frac{b}{d}t$ elde edilir. Yani

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t, y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t$$

şeklindedir.//

Öte yandan bu şekildeki her $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ çifti $t \in \mathbb{Z}$ ne olursa olsun $ax + by = c$ denkleminin bir çözümüdür. Gerçekten

$$\begin{aligned} ax_1 + b\,y_1 &= a\left[x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t\right], + b\left[y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t\right] \\ &= ax_0 + b\,y_0 + \left(\frac{ab}{d} - \frac{ab}{d}\right)t \\ &= c \end{aligned}$$

ve $t \in \mathbb{Z}$ olduğundan verilen denklemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

Örnek: $1295x + 625y = 125$
Diofant denkleminin bütün çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $a = 1295, b = 625$ alınarak Öklid algoritması uygulanırsa;

$$1295 = 2 \cdot 625 + 45$$
$$625 = 13 \cdot 45 + 40$$
$$45 = 1 \cdot 40 + 5$$

OBEB$(1295; 625) = 5$ bulunur. $5|125$ olduğundan çözüm var.

$$5 = 1 \cdot 45 - 1 \cdot 40$$
$$5 = 1 \cdot 45 - (625 - 13 \cdot 45)$$
$$5 = 14 \cdot 45 - 1 \cdot 625$$
$$5 = 14 \cdot (1295 - 2 \cdot 625) - 1 \cdot 625$$
$$5 = 14 \cdot 1295 - 29 \cdot 625$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafını 25 ile çarparsak

$$125 = 350 \cdot 1295 - 725 \cdot 625$$

olarak elde edilir. Buna göre $x_0 = 350, y_0 = -725$tir. Diğer çözümler

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t, y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t$$

şeklinde olduğundan

$$x_0 = 350 + 125t, y = -725 - 259t$$

olarak elde edilir.

5.15. Sonuç: Eğer $\mathrm{OBEB}(a;b)=1$ ve eğer x_0, y_0 bu denklemin bir özel çözümü ise diğer çözümler

$$x=x_0+bt, y=y_0-at$$

şeklindedir.

Örnek: Yukarıdaki örnekteki $1295x+625y=125$ denklemi $259x+125y=252$ şekline indirgenerek çözülebilir. $\mathrm{OBEB}(259;125)=1$ ve $1=14\cdot 259+(-29)\cdot 125$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$25=350\cdot 259+(-725)\cdot 125$$

ve $x_0=350, y_0=-725$ olarak bulunur. Ohalde diğer çözümler

$$x_0=350+125t, y=-725-259t$$

tir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $x=2^4\cdot 3^2$ ve $y=2^3\cdot 3^3$ olduğuna göre $\mathrm{OBEB}(x;y)$ kaçtır?

Çözüm: $\mathrm{OBEB}(x;y)=2^3\cdot 3^2=72$

2. $x=2^4\cdot 3^2$ ve $y=2^3\cdot 3^3$ olduğuna göre $\mathrm{OKEK}(x;y)$ kaçtır?

Çözüm: $\mathrm{OKEK}(x;y)=2^4\cdot 3^3=432$

3. a, b ve c birer asal sayı olmak üzere,

$$x=a^2\cdot b^3, y=a^3\cdot b^3\cdot c \text{ ve } z=a^2\cdot c^3$$

olduğuna göre $\dfrac{\mathrm{OKEK}(x;y;z)}{\mathrm{OBEB}(x;y;z)}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: $\dfrac{\mathrm{OKEK}(x;y;z)}{\mathrm{OBEB}(x;y;z)}=\dfrac{a^3b^3c^3}{a^2b^0c^0}=a\cdot b^3\cdot c^3$

4. $\mathrm{OKEK}(48;48)-\mathrm{OBEB}(30;30)$ toplamının değeri kaçtır?

Çözüm: $\mathrm{OKEK}(48;48)-\mathrm{OBEB}(30;30)=48-30=18$

5. k bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$x = 24k$ ve $x = 18k$

olduğuna göre, OBEB(x; y) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

Çözüm: $\text{OBEB}(x; y) = \text{OBEB}(2^3 \cdot 3 \cdot k; 3^2 \cdot 2 \cdot k) = 2 \cdot 3 \cdot k = 6k$

6. x bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$\text{OKEK}(48; x) = 144$

olduğuna göre, x'in birbirinden farklı kaç değeri vardır?

Çözüm: $\text{OKEK}(48; x) = 144$

$\text{OKEK}(2^4 \cdot 3; x) = 2^4 \cdot 3^2$

olduğundan x'in değerini sağlayan küme;

$\{3^2, 2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3^2\} = \{9, 18, 36, 72, 144\}$

olur.

7. $\text{OKEK}(x; y) = 40$ olan x ve y birbirinden farklı ise toplamı en çok kaçtır?

Çözüm: $x = 40, y = 20$ alınırsa $\text{OKEK}(x; y) = 40$ olacağından $x + y = 60$ olur.

8. OBEB'i 6 olan iki doğal sayının çarpımı 720'dir. Buna göre, bu iki doğal sayının OKEK'i nedir?

Çözüm: $\text{OBEB}(A; B) = 6$ ve $A \cdot B = 720$ olacak şekilde A ve B sayıları olsun.

$A \cdot B = \text{OBEB}(A; B) \cdot \text{OKEK}(A; B)$

$720 = 6 \cdot \text{OKEK}(A; B)$

$\text{OKEK}(A; B) = 120$

9. a ve b birer pozitif tamsayı olmak üzere,

$x = 12a, \; x = 8b$

olduğuna göre, x'in en küçük değeri nedir?

Çözüm:

$x = 12a, \; x = 8b$

$x = 2^2 \cdot 3 \cdot a, \; x = 2^3 \cdot b$

$a = 2, b = 3$
$x = 2^3 \cdot 3 = 24$

10. Eni 100 m, boyu 24 m olan dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin; kenarlarına ve köşelerine eşit aralıklarla ağaç dikilecektir. Bu işlem için en az kaç ağaç gereklidir?

Çözüm:
$\text{OBEB}(100; 24) = \text{OBEB}(2^2 \cdot 5^2;\ 2^3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 4 \text{ m}$
aralıklarla yapılmalıdır.

$$\text{Ağaç Sayısı} = \frac{\text{Bahçenin Alanı}}{\text{Ağaçlar Arası Alan}} = \frac{100 \cdot 24}{4 \cdot 4} = 150$$

ağaca ihtiyaç vardır.

11. Bir kenarı 15 cm, diğer kenarı 12 cm olan dikdörtgen biçimindeki bir taban parkesinin kare şeklinde bir döşeme yapılabilmesi için kaç parkeye ihtiyaç vardır?

Çözüm:
$\text{OKEK}(15; 12) = \text{OKEK}(3 \cdot 5;\ 2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ cm}$
kare kenarları olur.

$$\text{Parke Sayısı} = \frac{\text{Kare Biçimindeki Parkenin Alanı}}{\text{Bir Parkenin Alanı}} = \frac{60 \cdot 60}{15 \cdot 12} = 20$$

parkeye ihtiyaç vardır.

12. 60 kg elma, 54 kg armut, 48 kg ayva, birbirine karıştırılmadan, boş kasalara konacaktır. Her kasaya aynı kütlede meyve konacağına göre, en az kaç kasa gereklidir?

Çözüm:
$\text{OBEB}(60; 54; 48) = \text{OBEB}(2^2 \cdot 3 \cdot 5;\ 2 \cdot 3^3; 2^4 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ kg}$,
kapasiteli kasalar olmalıdır.

$$\text{Kasa Sayısı} = \frac{\text{Bütün Meyvelerin Kütlesi}}{\text{Kasanın Kapasitesi}} = \frac{60 \cdot 54 \cdot 48}{6 \cdot 6 \cdot 6}$$

$= 720$
kasaya ihtiyaç vardır.

13. Bir pistti, 24 dakikada ile 20 dakikada da bir tur atan iki kişi başlangıçtan kaç saat sonra tekrar başlangıç noktasında bir araya gelebilirler.

Çözüm:
$\text{OKEK}(24; 20) = \text{OKEK}(2^3 \cdot 3;\ 2^2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ dk
tekrar başlangıç noktasında bir araya gelebilirler. Bu ise 2 saattir.

14. Ayrıtları 8 cm, 6 cm ve 12 cm olan dikdörtgenler prizması biçimindeki tuğlanın en az kaçı, yan yana veya üst üste konularak bir küp elde edilebilir?

Çözüm: Küpün bir kenarı;
$\text{OKEK}(8; 6; 12) = \text{OKEK}(2^3; 2 \cdot 3;\ 2^2 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3 = 24$ cm
olur.

$$\text{Tuğla Sayısı} = \frac{\text{Küpün Hacmi}}{\text{Tuğlanın Hacmi}} = \frac{24 \cdot 24 \cdot 24}{8 \cdot 6 \cdot 12} = 24$$

tuğlaya ihtiyaç vardır.

15. a pozitif tam sayısı, b pozitif tam sayısının böleni olmak üzere,
$\text{OKEK}(a; b) - \text{OBEB}(a; b)$
farkı aşağıdakilerden hangisi olur?

A) 0 B) 1 C) a D) $a - b$ E) $b - a$

Çözüm: a pozitif tam sayısı, b pozitif tam sayısının böleni ise $a = bk$ olacak şekilde k pozitif tam sayısı vardır.
$\text{OKEK}(a; b) - \text{OBEB}(a; b) = bk - b = a - b$
olur.

16. k bir pozitif tamsayı olmak üzere,
$x = 15k,$
$y = 12k$
$\text{OKEK}(x; y) = \text{OBEB}(x; y) + 228$
olduğuna göre, $x - y$ kaçtır?

Çözüm:
$OKEK(15k;12k) = OKEK(3\cdot5\cdot k;\ 2^2\cdot3\cdot k) = 2^2\cdot3\cdot5\cdot k = 60k$
$OBEB(15k;12k) = OBEK(3\cdot5\cdot k;\ 2^2\cdot3\cdot k) = 2^0\cdot3\cdot5^0\cdot k = 3k$
olduğundan
$OKEK(x;y) = OBEB(x;y) + 228$
$60k = 3k + 228$
$k = 4$
$x - y = 15k - 12k = 3k = 3\cdot4 = 12$
bulunur.

17. x bir doğal sayı olmak üzere,

$$OBEB\left(x\,;\frac{x}{2}\right) = 14$$

olduğuna göre, x'in değeri nedir?

Çözüm: $x = 2^2\cdot7 = 28$ alınmasıyla mümkün olur. Çünkü $\frac{x}{2} = 2\cdot7$ dir.

18. Bir miktar bilye 9'ar 9'ar sayıldığında ve 12'şer 12'şer sayıldığında 3 bilye artmaktadır. Bilye sayısı en az kaç tanedir?

Çözüm: $9k + 3 = 12m + 3$ olacak şekilde k ve m tam sayıları vardır.
$OKEK(9;12) + 3 = OKEK(3^2; 2^2\cdot3) + 3 = 3^2\cdot2^2 + 3 = 39$
bilye vardır.

19. Bir sepetteki karanfiller 5 er 5 er demetlenince 3 karanfil, 6 şar 6 şar demetlenince de 4 karanfil artmaktadır. Buna göre, sepette en az kaç karanfil vardır?

Çözüm: $5k + 3 = 6m + 4$ olacak şekilde k ve m tam sayıları vardır.
$OKEK(5;6) - 2 = OKEK(5;2\cdot3) - 2 = 2\cdot3\cdot5 - 2 = 28$
karanfil vardır.

20. Toplamları 23 olan a ve b doğal sayılarının en küçük ortak katı 102 tir. Buna göre, a ve b'nin değerleri nedir?

Çözüm: $a + b = 23$ ve $OKEK(a;b) = 102 = 2\cdot3\cdot17$ denklemlerinde $a = 17, b = 4$ alınırsa denklem çözülür.

21. 3, 4 ve 5 ile kalansız bölünebilen 200’den küçük sayıların en büyüğünün kaçtır?

$\mathrm{OKEK}(3;4;5) = 3 \cdot 2^2 \cdot 5 = 60$
60’ın katı olup 200’den küçük sayı 180’dir.

22. $a < c < b$ pozitif tam sayılar ve
$$\mathrm{OBEB}(a;b) = 5, \mathrm{OBEB}(b,c) = 4$$
olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm: $a = 5, b = 20, c = 8$ alınırsa
$$\mathrm{OBEB}(a;b) = 5, \mathrm{OBEB}(b,c) = 4$$
denklemi sağlanmış olur. Buna göre toplamının alabileceği en küçük değeri $a + b + c = 5 + 20 + 8 = 33$ olur.

23. $x > 36, \mathrm{OBEB}(36;x) = 12$ olduğuna göre x’in en küçük değeri nedir?

Çözüm: $\mathrm{OBEB}(36;x) = 12$
$$\mathrm{OBEB}(2^2 \cdot 3^2; x) = 2^2 \cdot 3$$
$$x = 2^3 \cdot 3 = 48$$
alınırsa
$$\mathrm{OBEB}(2^2 \cdot 3^2; 2^3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3$$
sağlanır.

24. $\mathrm{OBEB}(a;b) = 1$ olduğuna göre $\mathrm{OBEB}(a^2;ab;b^2)$ nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: $\mathrm{OBEB}(a^2;ab;b^2) = k$ olsun. Bu takdirde $k|a^2$, $k|ab$, $k|b^2$ olur. a ile b aralarında asal olduğundan $k = 1$ olması durumu dışında başka sonuç olamaz.

25. Herhangi bir pozitif n sayısı için,
$$\mathrm{OKEK}(n;n+1) = n^2 + n$$
ise $\mathrm{OBEB}(n;n+1)$ nin değeri nedir?

Çözüm: n ve $n + 1$ aralarında asal olduğundan $\mathrm{OBEB}(n;n+1) = 1$ olur.

Diofant Denklemleri

26. $\mathrm{OBEB}(325; 85)$ ise OBEB'in oluşturduğu $325\mathrm{x} + 85\mathrm{y} = \mathrm{k}$ denklemindeki $\mathrm{x} + \mathrm{y}$ tamsayısı kaçtır?

Çözüm:
$$325 = 3 \cdot 85 + 70$$
$$85 = 1 \cdot 70 + 15$$
$$70 = 4 \cdot 15 + 10$$
$$15 = 1 \cdot 10 + 5$$
$$10 = 1 \cdot 5 + 0$$
olduğundan $\mathrm{OBEB}(325; 85) = 5$ olur. Buna göre;
$$5 = 1 \cdot 15 - 1 \cdot 10$$
$$5 = 1 \cdot 15 - 1 \cdot (1 \cdot 70 - 4 \cdot 15) = 5 \cdot 15 - 1 \cdot 70$$
$$5 = 5 \cdot (85 - 1 \cdot 70) - 1 \cdot 70 = 5 \cdot 85 - 6 \cdot 70$$
$$5 = 5 \cdot 85 - 6 \cdot (325 - 3 \cdot 85) = 23 \cdot 85 - 6 \cdot 325$$
elde edilir. Buna göre $\mathrm{x} = 23, \mathrm{y} = -6$ yani $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 23 - 6 = 17$ bulunur.

27. $\mathrm{OBEB}(128; 34)$ ise OBEB'in oluşturduğu $128\mathrm{x} + 34\mathrm{y} = \mathrm{k}$ denklemindeki xy tamsayısı kaçtır?

Çözüm:
$$128 = 3 \cdot 34 + 26$$
$$34 = 1 \cdot 26 + 8$$
$$26 = 3 \cdot 8 + 2$$
$$8 = 4 \cdot 2 + 0$$
olduğundan $\mathrm{OBEB}(128; 34) = 2$ olur. Buna göre;
$$2 = 1 \cdot 26 - 3 \cdot 8$$
$$2 = 1 \cdot 26 - 3 \cdot (1 \cdot 34 - 1 \cdot 26) = 4 \cdot 26 - 3 \cdot 34$$
$$2 = 4 \cdot (128 - 3 \cdot 34) - 3 \cdot 34 = 4 \cdot 128 - 15 \cdot 34$$
elde edilir. Buna göre $\mathrm{x} = 4, \mathrm{y} = -15$ yani $\mathrm{xy} = 4(-15) = -60$ bulunur.

KAYNAKÇA

1. Doç. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, 1988.
2. Doç. Dr. Neşe Yelkenkaya, Sayılar Teorisi Ders Notları, İstanbul Kültür Üniversitesi, İnternet Ders Notları, 2020.
3. Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ, Yrd. Doç. Dr. Hacı AKTAŞ, Sayılar Teorisi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Yayınları, Tokat, 1998.
4. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik I – II – III, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.

5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Sait AKKAŞ, H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Zühtü ÖZEL, Arif SABUNCUOĞL U, Soyut Matematik, 4. Baskı, Aralık, 2010.
7. Seyfettin AYDIN, Hacettepe Üniversitesi, Cilt 1 – 2, Ankara, 1986.