8. BÖLÜM
RASYONEL SAYILAR

Bu bölümde doğal ve tamsayıların cevap veremediği denklemlere cevap veren rasyonel sayılar incelemeye çalışacaktır. Rasyonel (akılcı, gerçek) sayıların bir başka türü olan, ondalıklı sayılar ile devirli ondalıklı sayılar üzerinde kısımda yürütülecektir.

RASYONEL SAYILAR KAVRAMI

Daha önce tanımlanan tamsayılar da bazı işlemlerde yeterli kalmamaktadır. Örneğin, $2x = 1$ denkleminin çözümü tamsayılarda yoktur. Bunun için bu denklemleri çözmek için yeni bir sayı sistemine ihtiyaç vardır. Şimdi bu sayı sistemini tanımlayalım.

8.1. Tanım: $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ kesri şeklinde ifade edilen sayılara rasyonel (kesirli) sayılar denir. Bu küme,

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

şeklindedir. Burada a'ya pay b'ye payda adı verilir.

Örnek: $\frac{3}{5}, -\frac{11}{6}, \ \frac{8}{3}$ birer rasyonel sayılardır.

8.1. Not:

1. Her a tamsayısı $\frac{a}{1} = a$ kesir şeklinde yazılabileceğinden tamsayılarda bir rasyonel sayılardır. Buna göre $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ yazılabilir.

2. $a \neq 0$ olmak üzere $\frac{0}{a} = 0$ dır.

3. $\frac{a}{0}$ ifadesi belirsizdir. (Bu belirsizlik ifadesi ileride limit konusunda detayıyla incelenecektir.)

Örnek: $\frac{4-x}{x+6} = 0$ denkleminde x'in değeri nedir?

Çözüm: Kesrin değeri sıfır olması için $4-x=0$ ve $x+6 \neq 0$ olmalıdır. Öyleyse,

$$4-x=0(x+6) \text{ ise } x=4 \text{ ve } x \neq 6$$

bulunur.

Örnek: $\frac{7}{x-8}$ kesri belirsizlik olması için x'in değeri ne olmalıdır.

Çözüm: Kesrin değeri $x-8=0$ ise belirsizlik meydana getirir. O halde $x=8$ olmalıdır.

RASYONEL SAYI (KESİR) ÇEŞİTLERİ

8.2. Tanım: İşaretlere bakmaksızın payı paydasından küçük olan kesirlere basit kesir denir, payı paydasından büyük veya eşit olan kesirlere bileşik kesir denir.

Örnek: $\frac{1}{3}, -\frac{4}{7}, \frac{5}{18}$ birer basit kesirlerdir.

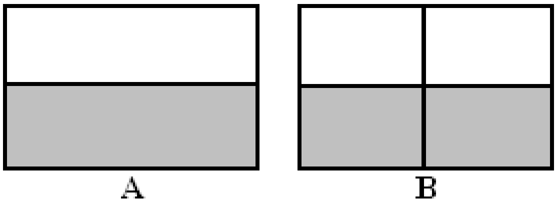
Örnek: $\frac{4}{3}, -\frac{12}{7}, \frac{35}{8}, \frac{16}{16}$ birer bileşik kesirlerdir.

8.2. Not: $-1 < x < 1$ aralığındaki her $x \in \mathbb{Q}$ sayısı basit kesirdir. $x \leq -1$ ve $x \geq 1$ aralığında her $x \in \mathbb{Q}$ sayısı bileşik kesirdir.

DENK RASYONEL SAYILAR

8.3. Tanım: Bir bütünün aynı büyüklükteki gösteren rasyonel sayılara (kesirlere) denk rasyonel sayılar denir.

Örnek:



Verilere göre A dikdörtgenini taralı bölgesi $\frac{1}{2}$ ve B dikdörtgenini taralı bölgesi $\frac{2}{4}$ tür. Ama iki dikdörtgende de taralı bölgelerin alanları aynıdır. Buna göre $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ dür. //

Herhangi bir rasyonel (kesirli) sayının pay ve paydasını sıfırdan farklı aynı sayı ile çarpıldığında veya bölündüğünde bu sayının değeri (temsil ettiği büyüklük) değişmez. Yani,

$$k \neq 0 \text{ ise, } \frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} = \frac{a:k}{b:k}$$

dır.

8.4. Tanım: Herhangi bir rasyonel (kesirli) sayının pay ve paydasının; sıfırdan farklı bir pozitif tamsayı ile çarpılmasına kesrin genişlemesi ve bölünmesine kesrin sadeleştirilmesi denir.

Örnek: $\frac{3}{4}$ sayısının $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$ genişlemesidir. Yine $\frac{16}{6}$ sayısının $\frac{16}{6} = \frac{16:2}{6:2} = \frac{8}{3}$ sadeleştirilmesidir.

8.3. Not:

1. Bir kesrin genişlemesi veya sadeleştirilmesi ile elde edilen bütün kesirler birbirine denktir.

2. Bir rasyonel sayının pay ve paydasının aralarında asal olması için o rasyonel sayı en sade şekilde olmalıdır.

Örnek: $\frac{9}{12}$ rasyonel sayında pay ve payda aralarında asal değillerdir. Çünkü $\mathrm{OBEB}(9;12)=4$ dür. Ama pay ve payda 3 ile bölünürse $\frac{3}{4}$ rasyonel sayısı elde edilir. Bu rasyonel sayıda $\mathrm{OBEB}(3;4)=1$ dir.

İKİ RASYONEL KESRİN EŞİTLİĞİ

8.4. Tanım: $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ birer rasyonel sayılar olsun. $ad=bc$ oluyorsa bu kesirler eşittir denir.

Örnek: $\frac{a}{4}$ ve $\frac{6}{8}$ rasyonel sayıları eşit iki sayı ise a'nın değeri nedir?

Çözüm: $\frac{a}{4}=\frac{6}{8}$

$a\cdot 8=4\cdot 6$

$a=3$

olarak bulunur.

Örnek: $\frac{2}{x+1}$ ve $\frac{3}{2x-1}$ rasyonel sayıları eşit iki sayı ise x'in değeri nedir?

Çözüm: $\frac{2}{x+1}=\frac{3}{2x-1}$

$2(2x-1)=3(x+1)$

$4x-2=3x+3$

$4x-3x=2+3$

$x=5$

RASYONEL SAYILARDA TOPLAMA ve ÇIKARMA İŞLEMLERİ

Rasyonel sayılarda toplama ve çıkarma yapabilmek için;

1. Kesirlerin paydaları eşit olmalıdır.

2. Paydaları eşit olmayan kesirler arasında toplama ve çıkarma yapabilmek için önce kesirlerin paydaları, paydaların OKEK'ine eşit olacak şekilde, kesirler genişletilir veya sadeleştirilir.

3. Paydaları eşit kesirler toplanırken (veya çıkarılırken) paylar toplamı (veya farkı) bulunup paya, ortak olan payda da paydaya yazılır. Yani,

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

biçimindedir.

Örnek: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{22}{15}$

Örnek: $\left(\frac{5}{3} + \frac{15}{7}\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{7}\right) = \frac{5}{3} + \frac{15}{7} - \frac{2}{3} - \frac{8}{7} = \frac{3}{3} + \frac{7}{7} = 2$

RASYONEL SAYILARDA ÇARPMA İŞLEMİ

Rasyonel sayıların çarpımında kesirlerinin paydalarının kesimi ve payların çarpımı ile yapılır. Yani,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

biçimindedir.

Örnek: $\frac{3}{7} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3 \cdot 12}{7 \cdot 5} = \frac{36}{35}$

Örnek: $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{20}\right)$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$$

RASYONEL SAYILARDA BÖLME İŞLEMİ

İki rasyonel sayı bölünürken, bölünen kesir, bölen kesrin çarpmaya göre tersi ile çarpılır. ($c \cdot d \neq 0$ olmak üzere, $\frac{c}{d}$ nin çarpmaya göre tersi $\frac{d}{c}$ dir.)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Örnek: $\frac{4}{3} : \frac{2}{5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{10}{3}$

Örnek:

$$\frac{\frac{8}{5}}{-\frac{10}{9}} = -\frac{8}{5} \cdot \frac{9}{10} = -\frac{8 \cdot 9}{5 \cdot 10} = -\frac{36}{25}$$

8.4. Not: İki veya daha çok işleminin bir arada olduğu durumlarda işlemler, işlem önceliğine göre sırasıyla yapılmalıdır.

İşlem önceliği şu şekildedir:

1. Parantez içindeki sayılar öncelikle hesaplanır. Ayrıca kesir çizgileri de parantezler gibi işlemin yönünü belirler.

2. Üstlü ifadeler varsa öncelikle onlar yapılır.

3. Varsa çarpma ve bölme işlemleri yapılır.

4. Son olarak toplama ve çıkarma işlemleri yapılır.

8.5. Not: Çarpma ve bölme işlemlerinden birinin diğerine veya toplama ve çıkarma işlemlerinden birinin diğerine işlem önceliği yoktur. Bunun için çarpma ve bölme işleminin veya toplama ve çıkarma işleminin artarda olduğu durumlarda işlem sırası parantezlerle belirlenir.

Örnek:

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} : \frac{8}{9} = \frac{6 \cdot 2}{7 \cdot 5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{8} = \frac{12}{35} + \frac{27}{40} = \frac{12 \cdot 8 + 27 \cdot 7}{5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{285}{280} = \frac{57}{56}$$

Örnek:

$$\frac{\frac{4}{3}}{2}+\frac{4}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{1}}+\frac{\frac{4}{1}}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot1}{3\cdot2}+\frac{4\cdot2}{1\cdot3}=\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$$

Örnek:

$$2^3-\left[(2:3):\frac{1}{3}\right]=8-\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}\right]=6$$

Örnek:

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{5}=-1$$

RASYONEL SAYILARIN ÖZELLİĞİ

8.2. Aksiyom: $a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere toplamada;
i) $a+b \in \mathbb{Q}$, (kapalılık özelliği)
ii) $a+b=b+a$, (değişme özelliği)
iii) $a+(b+c)=(a+b)+c$, (birleşme özelliği)
iv) $a+0=0+a=a$, (birim eleman özelliği)
v) $a+(-a)=(-a)+a=0$, (ters eleman özelliği)
vardır.

8.3. Aksiyom: $a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere çarpmada;
i) $a\cdot b \in \mathbb{Q}$, (kapalılık özelliği)
ii) $a\cdot b=b\cdot a$, (değişme özelliği)
iii) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, (birleşme özelliği)
iv) $a\cdot 1=1\cdot a=a$, (birim eleman özelliği)
v) $a\cdot 0=0\cdot a=0$, (yutan eleman özelliği)
vi) $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$, (dağılma özelliği)
vii) $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=0$, (ters eleman özelliği)
vardır.

MERDİVEN (ZİNCİR) KESİRLER

Merdiven kesirlerinde ilk önce ana kesir çizgisi tespit edilir. Daha sonra ana kesir çizgisinin payında yukarıdan (üst uçtan) paydasında ise aşağıdan (alt uçtan) ana kesir çizgisine doğru işlem yapılır.

Örnek:

$$1-\frac{2}{1+\frac{2}{1-\frac{2}{3}}}$$

işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$1-\frac{2}{1+\frac{2}{1-\frac{2}{3}}}=1-\frac{2}{1+\frac{2}{\frac{1}{3}}}=1-\frac{2}{1+\frac{2}{1}\frac{3}{1}}=1-\frac{2}{7}=\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

8.6. Not: Merdiven soruları çözümlerinde eşitliğin durumuna göre yorumlar yapılır.

Örnek:

$$1+\frac{1+\frac{1+\frac{x}{2}}{2}}{2}=2$$

işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\frac{1+\frac{1+\frac{x}{2}}{2}}{2}=2-1=1$$

$$1+\frac{1+\frac{x}{2}}{2}=2$$

$$\frac{1+\frac{x}{2}}{2}=2-1=1$$

$$1+\frac{x}{2}=2$$

$$\frac{x}{2}=2-1=1$$

$$x=2$$

Örnek:

$$\frac{\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}}$$

işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\frac{\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}}}{1+\dfrac{1}{\frac{2}{3}}}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$$

SONSUZ MERDİVENLİ KESİRLER

Bir sonsuz işleminde bir eleman eksildiğinde sonsuzluk aynen devam eder. Sonsuz merdiven işlemlerini yaparken işlemin bir akışına x ismi verilip geri kalandan bir eksilince yine x değeri alır. Buna göre çözüm yapılır.

Örnek:

$$2+\cfrac{2+\cfrac{2+\cfrac{\ddots}{3}}{3}}{3}$$

işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$2+\cfrac{2+\cfrac{2+\cfrac{\ddots}{3}}{3}}{3}=\mathrm{x}$$

seçilirse,

$$2+\frac{\mathrm{x}}{3}=\mathrm{x}$$

$$2=\mathrm{x}-\frac{\mathrm{x}}{3}$$

$$2=\frac{2\mathrm{x}}{3}$$

$$\mathrm{x}=3$$

olarak bulunur.

Örnek:

$$3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{\ddots}}}$$

işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{\ddots}}}=x$$

seçilirse,

$$3+\frac{4}{x}=x$$
$$3x+4=x^2$$
$$x^2-3x-4=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem 2. dereceden denklemdir. Burada çarpımlara ayırma yöntemi ile yapalım. x^2 nin katsayısı 1'dir. Toplamları -4, çarpımları -3 ü verecek iki sayı -4 ve 1 dir. Elde edilen bu değerlerin işaretlerinin tersi alınarak $x=4$ ve $x=-1$ bulunur. Ama cevap -1 olamaz. Çünkü 3 ve 4 gibi sayıların toplamında pozitif sayı elde edileceğinden -1 değeri elde edilemez, öyleyse bu işlemin sonucu 4 olduğunu gösterir.

RASYONEL SAYILAR ARASINDA YOĞUNLUK

8.1. Teorem: İki rasyonel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı vardır.

İspat: $a, b \in Q$ ve $a<b$ olsun.

$$a+a<a+b$$
$$2a<a+b$$
$$a<\frac{a+b}{2}$$

ve yine,

$$a+a<a+b$$
$$a+b<b+b$$
$$\frac{a+b}{2}$$

olduğuna göre $a < \frac{a+b}{2} < b$ olarak bulunur. Görüldüğü gibi iki rasyonel sayı arasında başka bir sayı yazılabilir. Bu işlem genel hale getirilirse iki rasyonel sayı arasına sonsuz sayı yazılabilir.

Örnek: $\frac{2}{3}$ ve $\frac{2}{5}$ sayıları arasında bir tane rasyonel sayı bulunuz.

Çözüm: $\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)\frac{1}{2} = \frac{8}{15}$

$$\frac{2}{3} < \frac{8}{15} < \frac{2}{5}$$

8.7. Not: İki rasyonel sayı arasında belli şartlarda sonlu (sınırlı) sayıda kesir yazmak için,

1. İki rasyonel sayının paydaları eşitlenir.
2. İstenen şartlar sağlanacak şekilde (gerekiyorsa) kesirler genişletilir veya sadeleştirilir.

Örnek: a ve b birer doğal sayı olmak üzere,

$$\frac{6}{5} < \frac{a}{b} < \frac{5}{4} \text{ ve } a < 100$$

olduğuna göre a'nın alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm: Öncelikle paydaların OKEK'leri alınarak paydalar eşitlersek,

$$\frac{6}{5} < \frac{a}{b} < \frac{5}{4} \text{ ise } \frac{24}{20} < \frac{a}{b} < \frac{25}{20}$$

bulunur. a < 100 olduğuna göre payın 100 olması için pay ve payda 4 ile genişletilirse,

$$\frac{96}{80} < \frac{a}{b} < \frac{100}{80}$$

elde edilir ki, a doğal sayısı {97, 98, 99} sayılarından biri olur.

RASYONEL SAYILARDA SIRALAMA

İki veya daha fazla rasyonel sayının büyüklük veya küçüklük sıralamaları yapılabilir. Ama rasyonel sayılar doğal ve tamsayılar gibi büyüklük ve küçüklük kavramları aşikâr değildir. Bu sayıların büyüklüğü veya küçüklüğü 5 ayrı yöntemle yapılmaktalar.

1. Paydaları eşit olan pozitif iki kesirden payı büyük olan daha büyüktür. Örneğin,

$$\frac{3}{8} < \frac{4}{8} < \frac{5}{8}$$

gibi. Verilen rasyonel sayıların paydaları eşitlemek için paydaların OKEK'leri alınır.

Örnek:

$$a = \frac{5}{12}, \qquad b = \frac{3}{8}, \qquad c = \frac{5}{6}$$

sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm: Her üç sayının paydalarını OKEK'lerini alarak eşitlersek,

$$\frac{10}{24}, \frac{9}{24}, \frac{20}{24}$$

$$\frac{9}{24} < \frac{10}{24} < \frac{20}{24}$$

$$b < a < c$$

elde edilir.

2. Payları eşit olan pozitif iki kesirden paydası küçük olan daha büyüktür. Örneğin,

$$\frac{12}{9} < \frac{12}{7} < \frac{12}{5}$$

gibi. Verilen rasyonel sayıların payları eşitlemek için paydaların OKEK'leri alınır.

Örnek:

$$a = \frac{5}{3}, b = \frac{10}{7}, c = \frac{15}{11}$$

sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm: Her üç sayının paylarını OKEK'lerini alarak eşitlersek,

$$\frac{15}{11}, \frac{10}{7}, \frac{5}{3}$$

$$\frac{30}{22} < \frac{30}{21} < \frac{30}{18}$$
$$c < b < a$$

elde edilir.

3. Pozitif iki kesir birbirlerinden çıkarıldığında çıkan 0'dan büyükse çıkarılan kesir, çıkan 1'dan küçükse çıkarılan kesir daha büyüktür. Çıkan sıfır ise bu iki kesir birbirine eşittir.

Örnek:

$$a = \frac{3}{5}, \qquad b = \frac{4}{7}, \qquad c = \frac{5}{9}$$

sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm:

a) $a - b = \frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{21}{35} - \frac{20}{35} = \frac{1}{35} > 0$ olduğundan $a > b$ dir.

b) $a - c = \frac{3}{5} - \frac{5}{9} = \frac{27}{45} - \frac{25}{45} = \frac{2}{45} > 0$ olduğundan $a > c$ dir.

c) $b - c = \frac{4}{7} - \frac{5}{9} = \frac{36}{63} - \frac{35}{63} = \frac{1}{63} > 0$ olduğundan $b > c$ dir.

Şu halde $c < b < a$ şeklindedir.

4. Pozitif iki kesir birbirine bölündüğünde bölüm 1'den büyükse bölünen kesir, bölüm 1'den küçükse bölen kesir daha büyüktür. Bölüm aynı ise bu iki kesir birbirine eşittir.

Örnek:

$$a = \frac{2}{3}, \qquad b = \frac{4}{5}, \qquad c = \frac{5}{8}$$

sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm:

a) $\frac{a}{b} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6} < 1$ olduğundan $a < b$ dir.

b) $\frac{a}{c} = \frac{2}{3} : \frac{5}{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{15} > 1$ olduğundan $a > c$ dir.

c) $\frac{b}{c} = \frac{4}{5} : \frac{5}{8} = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{5} = \frac{32}{25} > 1$ olduğundan $b > c$ dir.

Şu halde $c < a < b$ şeklindedir.

5. Ondalıklı sayılardan sonra verilecektir.

ONDALIKLI SAYILAR

8.6. Tanım: Paydası 10'un kuvveti şeklinde olan veya paydayı 10'un kuvvet şekline getirilebilen rasyonel sayılara ondalıklı sayılar denir.

Örnek:

$$\frac{3}{10} = 0{,}3, \quad \frac{25}{10^2} = 0{,}25, \quad \frac{75}{10^3} = 0{,}075$$

sayıları birer ondalıklı sayılardır.

8.8. Not:

1. Bir ondalıklı sayının virgülden önceki kısmına tam kısım, virgülden sonraki kısmına ondalıklı (veya kesir) kısım denir.

2. Bir ondalıklı sayının ondalık kısmının sağına yazılan sıfırlar sayının değerini değiştirmez.

Örnek: **1.** 4,35 = 4,350 = 4,3500
2. 15,72 = 15,720 = 15,7200

ONDALIKLI SAYILARDA TOPLAMA ve ÇIKARMA

Ondalıklı sayılar toplanırken veya çıkarılırken virgüller veya aynı isimli basamaklar alt alta gelecek şekilde yazılır. Doğal sayılarda olduğu gibi virgül düşünülmeden işlem yapıldıktan sonra bulunan sonuç virgüller hizasından virgüle ayrılır.

Örnek: 15,03; 24,428 ve 8,56 sayılarını toplayınız.

$$\begin{array}{r} 15{,}030 \\ 24{,}428 \\ +\quad 8{,}560 \\ \hline 48{,}018 \end{array}$$

Örnek: 25,6 den 14,78 sayısını çıkarınız.

$$\begin{array}{r} 25{,}60 \\ -\ 14{,}78 \\ \hline 10{,}82 \end{array}$$

ONDALIKLI SAYILARDA ÇARPMA

İki ondalıklı sayıyı çarpmak için, çarpanlar virgülü yokmuş gibi düşünülerek çarpma işlemi yapılır. Bulunan çarpmada, çarpanların kesir kısımlarının basamak sayılarının toplamı kadar sağdan itibaren basamak virgülle ayrılır. Eksik basamaklar varsa yerine sıfır yazılır.

Örnek:

$$\begin{array}{r} 34{,}8 \\ \times \quad 8{,}4 \\ \hline 1392 \\ +\ 2784 \\ \hline 292{,}32 \end{array}$$

8.9. Not: Bir ondalıklı sayıyı 10 un kuvvetleri ile kolayca çarpmak için, ondalıklı kesrin virgülü, 10 un kuvveti olan sayıdaki sıfırlar kadar basamak sağa taşınır. Eksik basamaklar varsa yerine sıfır yazılır.

Örnek: **1.** $2{,}6 \cdot 10 = 26$
2. $3{,}42 \cdot 10 = 34{,}2$
3. $0{,}263 \cdot 100 = 26{,}3$

ONDALIKLI SAYILARDA BÖLME

Bir ondalıklı sayıyı bu kesirden küçük ondalıklı sayıya bölmek için, virgülü yokmuş gibi düşünülerek bölme işlemi yapılır. Fakat işlem yapılırken sıra ondalık kesir basamağına (yani virgüle) geldiği zaman bölüme virgül konularak bölme işlemine devam edilir.

Eğer bölen sayı bölünen sayıdan büyükse bölüme önce sıfır atılır ve virgül konularak bölünene de sıfır atılır. Eğer bölünen bölümden yine küçükse bölünene ve bölüme bir kez daha sıfır atılır. Bu işlem bölüm yapılana kadar devam eder.

Örnek:

$$
\begin{array}{r|l}
49{,}64 & 4 \\ \cline{2-2}
-4\phantom{9{,}64} & 12{,}41 \\ \cline{1-1}
09\phantom{{,}64} & \\
-8\phantom{{,}64} & \\ \cline{1-1}
16 & \\
-16 & \\ \cline{1-1}
004 & \\
-4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

8.10. Not: Bir ondalıklı sayıyı 10 un pozitif kuvvetleri ile kolayca bölmek için, ondalıklı kesrin virgülü, 10 un kuvveti olan sayıdaki sıfırlar kadar basamak sola kaydırılır. Gerekirse eksik basamaklar yerine sıfır yazılır.

Örnek: **1.** $2{,}6 : 10 = 0{,}26$
2. $3{,}42 : 10 = 0{,}342$
3. $26{,}3 : 100 = 0{,}263$

8.11. Not: Bir ondalıklı sayıyı bir başka ondalıklı sayıya bölmek için her iki tarafı 10 un kuvveti ile çarpma yaparak virgül kaydırılır. Gerekirse eksik basamaklar yerine sıfır yazılır.

Örnek: **1.** $\frac{3{,}15}{2{,}78} = \frac{31{,}5}{27{,}8} = \frac{315}{278}$
2. $\frac{6{,}018}{0{,}26} = \frac{60{,}18}{2{,}6} = \frac{601{,}8}{26} = \frac{6018}{260}$
3. $\frac{0{,}34}{4{,}193} = \frac{3{,}4}{41{,}93} = \frac{34}{419{,}3} = \frac{340}{4193}$

Örnek: $\frac{3}{0{,}5} - \frac{2}{0{,}25} + \frac{1}{0{,}125}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm: $\frac{3}{0{,}5} - \frac{2}{0{,}25} + \frac{1}{0{,}125} = \frac{30}{5} - \frac{200}{25} + \frac{1000}{125} = 6 - 8 + 8 = 6$

DEVİRLİ ONDALIKI SAYILAR

8.7. Tanım: Bir rasyonel sayı, ondalıklı sayı biçiminde yazıldığında sayının virgülden sonraki rakamları belirli bir rakamdan sonra tekrarlanıyorsa bu sayıya devirli ondalık sayılar denir.

Örnek: 1. $2{,}3333\cdots = 2{,}\overline{3}$
2. $0{,}4646\cdots = 0{,}\overline{46}$
3. $8{,}4555\cdots = 8{,}4\overline{5}$

8.12. Not: Bir devirli ondalıklı sayıyı rasyonel halde çevirmek için rasyonel sayı x olarak seçilip ilgili 10 un kuvveti ile çarparak gerekli düzenleme yapılır.

Örnek: $2{,}\overline{4}$ sayısını rasyonel sayı haline çeviriniz.

Çözüm: $x = 2{,}\overline{4}$ olsun. Her iki tarafı 10 ile çarpılırsa,
$$10x = 24{,}\overline{4}$$
bulunur. Bu iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa,
$$10x - x = 24{,}\overline{4} - 2{,}\overline{4}$$
$$9x = 22$$
$$x = \frac{22}{9}$$
elde edilir.

Örnek: $5{,}\overline{12}$ sayısını rasyonel sayı haline çeviriniz.

Çözüm: $x = 5{,}\overline{12}$ olsun. Her iki tarafı 100 ile çarpılırsa,
$$100x = 512{,}\overline{12}$$
bulunur. Bu iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa,
$$100x - x = 512{,}\overline{12} - 5{,}\overline{12}$$
$$99x = 507$$
$$x = \frac{507}{99}$$
elde edilir.

8.2. Teorem: Ondalıklı bir sayı rasyonel halde çevirmek için,

$$x = \frac{\text{Virgülsüz olarak sayının tamamı} - \text{Devretmeyen kısım}}{\text{Devreden kadar 9 Virgünden sonra devretmeyen kadar 0}}$$

işlemleri yapılır.

İspat: Kabul eldim ki sayının tamamı x olsun. Bu x sayısının,
Virgülden önce basamak sayısı m tane,
Virgülden sonra devretmeyen basamak sayısı n tane,
Devreden basamak sayısı r tane
olsun. Bu takdirde,
x = m tane basamak, n tane basamak ve r tane basamak
olur. Bu x sayısını virgülden kurtarabilmek için önce 10^{n+r} , sonra 10^{n} ile çarparsak,

$$10^{n+r}x = \text{m basamak n basamak r basamak, r basamak}$$
$$10^{n}x = \text{m basamak n basamak, r basamak}$$

elde edilir. Bu iki denklemi taraf tarafa çıkarırsak,

$$10^{n}(10^{r} - 1)x = \text{m bas. n bas. r bas., r bas.} - \text{m bas. n bas., r bas.}$$
$$x = \frac{\text{m bas. n bas.r bas.,r bas.} - \text{m bas.n bas.,r bas.}}{10^{n}(10^{r} - 1)}$$

bulunur. Bu durum,
Sayının tamamı m basamak n basamak r basamak,
Devretmeyen kısım n basamak r basamak,
$10^{r} - 1$ devreden kadar 9,
10^{r} Virgülden sonra devreden kadar 0
anlamına gelir.

Örnek: $4,2\overline{5}$ devirli sayısını ispat metoduna ve formüle göre rasyonel hale çeviriniz.

Çözüm:
1. Yol: İspat metoduna göre çözersek,
$x = 4,2\overline{5}$ sayısını önce 100, sonra 10 ile çarpalım.

$$100x = 425,\overline{5}$$
$$10x = 4,2\overline{5}$$

bulunur. Her iki tarafı taraf tarafa çıkarırsak,

$$100x - 10 = 425,\overline{5} - 42,\overline{5}$$
$$x = \frac{383}{90}$$

2. Yol: Formüle göre çözersek,

$$4{,}2\overline{5}=\frac{425-42}{90}=\frac{383}{90}$$

bulunur.

Örnek: a) $0{,}5\overline{12}$, b) $15{,}00\overline{2}$ c) $8,\overline{38}$, d) $-1,\overline{8}$

Çözüm:

a) $0{,}5\overline{12}=\dfrac{512-5}{990}=\dfrac{507}{990}$

b) $15{,}00\overline{2}=\dfrac{15002-1500}{900}=\dfrac{13502}{900}$

c) $8,\overline{35}=\dfrac{835-8}{99}=\dfrac{827}{99}$

d) $-1,\overline{8}=-\dfrac{18-1}{9}=-\dfrac{17}{9}$

8.12. Not: Devirli bir sayıda 9 devrediyorsa devirli bir sayıdan önceki rakam bir üst rakama devreder.

Örnek: a) $2{,}3\overline{9}$, b) $67,\overline{9}$ c) $0{,}36\overline{9}$, d) $-1{,}8\overline{9}$

Çözüm:

a) $2{,}3\overline{9}=\dfrac{239-23}{90}=\dfrac{216}{90}=2{,}4$

b) $67,\overline{9}=\dfrac{679-67}{9}=\dfrac{612}{9}=68$

c) $0{,}36\overline{9}=\dfrac{369-36}{900}=\dfrac{333}{900}=0{,}37$

d) $-1{,}8\overline{9}=-\dfrac{189-18}{90}=-\dfrac{171}{90}=-1{,}9$

Örnek: $\dfrac{3{,}\overline{4}-1{,}\overline{3}}{2{,}\overline{2}}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$3,\overline{4}=\frac{34-3}{9}=\frac{31}{9}\,,\ 1,\overline{3}=\frac{13-1}{9}=\frac{12}{9}\,,\ 2,\overline{2}=\frac{22-2}{9}=\frac{20}{9}$$

değerleri bulunur. Buna göre,

$$\frac{3,\overline{4}-1,\overline{3}}{2,\overline{2}}=\frac{\frac{31}{9}-\frac{12}{9}}{\frac{20}{9}}=\frac{19}{20}$$

elde edilir.

Örnek: x ve y birer rakam olmak üzere,

$$2,\overline{9}\cdot(0,\overline{xy}+0,\overline{yx})=1$$

olduğuna göre, $x+y$ toplamın değerini bulunuz.

Çözüm: $2,\overline{9}=3$ olduğuna göre,

$$2,\overline{9}\cdot(0,\overline{xy}+0,\overline{yx})=1$$
$$3\cdot\left(\frac{xy}{99}+\frac{yx}{99}\right)=1$$
$$xy+yx=33$$

olarak bulunur. Burada xy ve yx iki basamaklı 2 ayrı sayıdır. Bu sayılarda basamak çözümlemesi yapılırsa,

$$11(x+y)=33$$
$$x+y=3$$

bulunur.

Örnek: $9,\overline{1}+8,\overline{2}+7,\overline{3}+\cdots+1,\overline{9}$ toplamının sonucu nedir?

Çözüm: $9,\overline{1}+8,\overline{2}+7,\overline{3}+\cdots+1,\overline{9}$

$$=9+\frac{1}{9}+8+\frac{2}{9}+7+\frac{3}{9}+\cdots+1+\frac{9}{9}$$
$$=(9+8+7+\cdots+1)+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\cdots+\frac{9}{9}\right)$$
$$=(9+8+7+\cdots+1)+\frac{1}{9}(1+2+3+\cdots+9)$$
$$=\frac{9.10}{2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{9\cdot10}{2}$$
$$=50$$

RASYONEL SAYILARDA OBEB ve OKEK

8.3. Teorem: $A,B,C,D\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\frac{A}{B},\frac{C}{D}\in\mathbb{Q}$ için,

a) $\text{OKEK}\left(\frac{A}{B};\frac{C}{D}\right)=\frac{\text{OKEK}(A;C)}{\text{OBEB}(B;D)}$

b) $\text{OBEB}\left(\frac{A}{B};\frac{C}{D}\right)=\frac{\text{OBEB}(A\cdot D;B\cdot C)}{\text{OKEK}(B;D)}$

dir.

İspat: a) A, B, C ve D tamsayıları
$A = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\cdots, B = a_1^{n_1}.a_2^{n_2}.a_3^{n_3}\cdots, C = a_1^{p_1}.a_2^{p_2}.a_3^{p_3}\cdots$ ve $D = a_1^{r_1}.a_2^{r_2}\cdots$ asal çarpanlara ayrılmış şekilde yazılsınlar. OKEK'in tanımında verilen sayıların asal çarpanlarının değerleri maksimumu, OBEB'de mimimumları alındığını hatırlarsak,

$$\frac{A}{B} = \frac{a_1^{m_1}.a_2^{m_2}.a_3^{m_3}\ldots}{a_1^{n_1}.a_2^{n_2}.a_3^{n_3}\ldots} = a_1^{m_1-n_1}.a_2^{m_2-n_2}.a_3^{m_3-n_3}\ldots$$

$$\frac{C}{D} = \frac{a_1^{p_1}.a_2^{p_2}.a_3^{p_3}\ldots}{a_1^{r_1}.a_2^{r_2}.a_3^{r_3}\ldots} = a_1^{p_1-r_1}.a_2^{p_2-r_2}.a_3^{p_3-r_3}\ldots$$

Ayrıca,

$$\max(m_1-n_1;p_1-r_1) = \max(m_1;p_1) - \min(n_1;r_1)$$
$$\max(m_2-n_2;p_2-r_2) = \max(m_2;p_2) - \min(n_2;r_2)$$
$$\max(m_3-n_3;p_3-r_3) = \max(m_3;p_3) - \min(n_3;r_3)$$
$$\ldots$$

olacağından

$$\begin{aligned}\mathrm{OKEK}\left(\frac{A}{B};\frac{C}{D}\right) &= a_1^{\max(m_1-n_1;p_1-r_1)}.a_2^{\max(m_2-n_2;p_2-r_2)}.a_3^{\max(m_3-n_3;p_3-r_3)}\ldots \\ &= a_1^{\max(m_1;p_1)-\min(n_1;r_1)}.a_2^{\max(m_2;p_2)-\min(n_2;r_2)}.a_3^{\max(m_3;p_3)-\min(n_3;r_3)}\ldots \\ &= \frac{a_1^{\max(m_1;p_1)}.a_2^{\max(m_2;p_2)}.a_3^{\max(m_3;p_3)}\ldots}{a_1^{\min(n_1;r_1)}.a_2^{\min(n_2;r_2)}.a_3^{\min(n_3;r_3)}\ldots} \\ &= \frac{\mathrm{OKEK(A;C)}}{\mathrm{OBEB(B;D)}}\end{aligned}$$

b) (a) şıkkına benzer yolla yapılır.

Örnek: $\frac{6}{5}, \frac{8}{7} \in \mathbb{Q}$ sayılarının OKEK ini ve OBEB ini bulunuz.

Çözüm:

a) $\mathrm{OKEK}\left(\frac{6}{5};\frac{8}{7}\right) = \frac{\mathrm{OKEK}(6;8)}{\mathrm{OBEB}(5;7)} = \frac{24}{1} = 24$

b) $\mathrm{OBEB}\left(\frac{6}{5};\frac{8}{7}\right) = \frac{\mathrm{OBEB}(6\cdot7;8\cdot5)}{\mathrm{OKEK}(5;7)} = \frac{2}{35}$

Örnek: $\frac{4}{15}, \frac{6}{25}, \frac{8}{10} \in \mathbb{Q}$ sayılarının ortak katlarının en küçüğü nedir?

Çözüm:

$$\text{OKEK}\left(\frac{4}{15};\frac{6}{25};\frac{8}{10}\right)=\frac{\text{OKEK}(4;6;8)}{\text{OBEB}(15;25;10)}=\frac{24}{5}$$

TABAN ARİTMETİĞİNDE ONDALIKLI SAYILAR

8.8. Tanım: x tabanındaki bir sayıda

$$(a,bcd\cdots)_x$$

gibi virgünden sonraki sayıda,

b'nin bulunduğu rakam $\frac{1}{x}$ ler basamağı

c'nin bulunduğu rakam $\frac{1}{x^2}$ ler basamağı

d'nin bulunduğu rakam $\frac{1}{x^3}$ ler basamağı

...

dir. Buna göre, $(a,bcd\cdots)_x$ sayısı 10 tabanında

$$(a,bcd\cdots)_x = ax^2 + bc + c + \frac{d}{x} + \frac{e}{x^2} + \cdots$$

biçiminde yazılır.

Örnek: $(12,24)_5 = (x)_{10}$ olduğuna göre, x kaçtır?

Çözüm: $(12,24)_5 = 1\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0 + 2\cdot 5^{-1} + 4\cdot 5^{-2} = 7,56$

Örnek: $(23,46)_7$ sayısını 10 tabanında yazınız.

Çözüm: $(23,46)_7 = 2\cdot 7^1 + 3\cdot 7^0 + 4\cdot 7^{-1} + 6\cdot 7^{-2} = 17,694$

Örnek: $(34,12)_5 + (22,34)_5$ işlemini yapınız.

Çözüm: Ondalıklı sayılarda yapılan toplama işlemini taban aritmetiğinde yapılan toplama işlemine aktarılarak toplama yapılır.

$(34,12)_5 + (22,34)_5 = (112,01)_5$

TABAN ARİTMETİĞİNDE DEVİRLİ SAYILAR

8.4. Teorem: Taban aritmetiğinde devirli sayılar rasyonel hale şu şekilde çevrilir.

$$\frac{\text{Virgülsüz olarak sayının tamamı} - \text{Devretmeyen kısım}}{\text{Devreden kadar son rakam Virgünden sonra devretmeyen kadar 0}}$$

Bu teoremin ispatı Rasyonel sayılardaki teoreme benzer şekilde yapılacağından okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $(3{,}1\overline{4})_7$ sayısını rasyonel hale çeviriniz.

Çözüm: 7 tabanının son rakamı 6 olduğuna göre,

$$(3{,}1\overline{4})_7 = \frac{(314)_7 - (31)_7}{(60)_7} = \frac{(253)_7}{(60)_7}$$

bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Rasyonel Sayı Tanımı

1. m ve n sıfırdan farklı üç tamsayı olmak üzere,

$$m \cdot x = n$$

denkleminin aşağıdaki sayı kümelerinden hangisinde daima çözüm vardır?

A) $\mathbb{N}$ B) $\mathbb{N}^+$ C) $\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{Q}$ E) $\mathbb{Z}^+$

Çözüm: $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

2. a bir tamsayı olmak üzere,

$$\frac{a}{a-2}$$

ifadesi rasyonel sayı olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $a - 2$ B) $a \neq 2$ C) $a > 2$ D) $a < 2$ E) $a \neq 0$

Çözüm: Bir rasyonel sayıda payda 0 olduğunda tanımsızlık meydana gelir. $a - 2 = 0$ olduğunda tanımsızlık vardır. Buna göre $a \neq 2$ dir.

3. x bir tamsayı olmak üzere,

$$\frac{3}{2 - \frac{x}{x-1}}$$

ifadesi tanımsız olduğuna göre, x'in alabileceği değerler nelerdir?

Çözüm: Paydanın 0 olmaması gerekir.
i) $x-1=0$ olduğunda tanımsızlık olacağından $x=1$ dir.
ii) $2-\frac{x}{x-1}=0$ olduğunda tanımsızlık olacağından $x=2$ dir.

Kesir ve Sayı Doğrusu Üzerinde İnceleme

4. $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ ifadesi basit kesir olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur.

A) $a>b$ B) $a \geq b$ C) $a<b$ D) $a \leq b$ E) $a=b$

Çözüm: Basit kesir tanımı gereği $a<b$ olmalıdır.

5. $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ ifadesi bileşik kesir olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur.

A) $a>b$ B) $a \geq b$ C) $a<b$ D) $a \leq b$ E) $a=b$

Çözüm: Bileşik kesir tanımı gereği $a \geq b$ olmalıdır.

6. $b \neq 0$ olmak üzere, $a\frac{c}{b}$ ifadesi bileşik kesri ise, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $\frac{a+c}{b}$ B) $\frac{ac}{b}$ C) $\frac{a-c}{b}$ D) $\frac{c}{ab}$ E) abc

Çözüm: Bileşik kesirde $a\frac{c}{b}$ gösterimi $\frac{a+c}{b}$ anlamına gelmektedir.

7. $-\frac{22}{5}$ ifadesi bileşik kesri ise, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $-\frac{2}{5}$ B) $-2\frac{2}{5}$ C) $-3\frac{2}{5}$ D) $-4\frac{2}{5}$ E) $-5\frac{2}{5}$

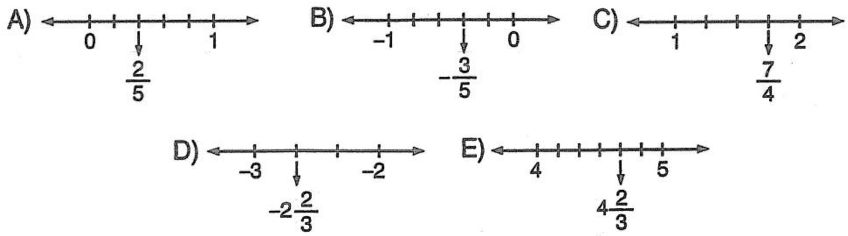
Çözüm: $-\frac{22}{5} = -\frac{20}{5} - \frac{2}{5} = -4 - \frac{2}{5} = -4\frac{2}{5}$

8. $\frac{3}{2}$ ve $\frac{9}{x}$ kesirleri birbirine denk olduğuna göre, x'in değeri nedir?

Çözüm: $\frac{3}{2} = \frac{9}{x}$

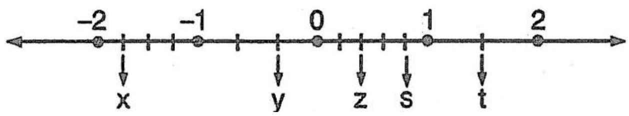
$3x = 2 \cdot 9$
$x = \frac{18}{3}$
$x = 6$

9. Aşağıdaki her seçenekte, ardışık iki tamsayı arası eş parçalara ayrılmıştır. Buna göre seçeneklerin hangisinde, gösterilen kesir yanlış gösterilmiştir.



Çözüm: B şıkkındaki değer $-\frac{2}{5}$ olmalıdır.

10. Aşağıdaki sayı doğrusunda, ardışık tam sayıların arası eş parçalara ayrılmıştır.



Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $x = -2\frac{3}{4}$ B) $y = -\frac{1}{3}$ C) $z = \frac{2}{5}$ D) $t = 1\frac{1}{2}$ E) $s = \frac{4}{5}$

Çözüm: A şıkkı $x = -1\frac{3}{4}$ olmalıdır.

11. Bir kesrin değeri $\frac{3}{5}$ dir. Bu kesrin pay ve paydasından 2 çıkarılırsa kesrin değeri $\frac{1}{3}$ oluyor. Bu kesrin pay ve paydası nedir?

Çözüm: Bu kesir $\frac{a}{b}$ olsun. $\frac{a-2}{b-2} = \frac{3}{5}$ için 3 ve 5 aralarında asal olduğundan

$a - 2 = 3$ ve $b - 2 = 5$

$a = 5$ ve $b = 7$

bulunur.

12. $\frac{11}{x} < 6\frac{1}{7}$ eşitliğini sağlayan x doğal sayının alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm: $\frac{11}{x} < 6\frac{1}{7}$

$\frac{11}{x} < \frac{43}{7}$

$\frac{77}{43} < x$

x doğal sayının alabileceği en küçük değer 2'dir.

13. $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesi ile pay ve paydaları bu sayılar olan birbirinden farklı kaç kesir yazılabilir?

Çözüm: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ olup 8 tanedir.

Rasyonel Sayılarda İşlemler

14. $\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{8} + \frac{2}{8}\right) : \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{8}\right) = \frac{5}{8} : \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{1} = 5$$

15. $\left(2-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)$ bölme işleminin sonucu nedir?

Çözüm:
$$\left(2-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{8}{4}-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{6}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}:\frac{5}{4}=\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}=1$$

16. $\left(\frac{x+6}{x-6}\right):\left(1+\frac{12}{x-6}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:
$$\begin{aligned}\left(\frac{x+6}{x-6}\right):\left(1+\frac{12}{x-6}\right)&=\left(\frac{x+6}{x-6}\right):\left(\frac{x-6}{x-6}+\frac{12}{x-6}\right)\\&=\left(\frac{x+6}{x-6}\right):\left(\frac{x+6}{x-6}\right)\\&=\left(\frac{x+6}{x-6}\right)\cdot\left(\frac{x-6}{x+6}\right)\\&=1\end{aligned}$$

17. $a+\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{8}=1$ işleminin sonucu kaç a'dır?

Çözüm: $\frac{8a}{8}+\frac{4a}{8}+\frac{2a}{8}+\frac{a}{8}=1$

$$\frac{17a}{8}=1$$

$$a=\frac{8}{17}$$

18. $\left(1-\frac{3}{5}\right)\left(1-\frac{3}{8}\right)\left(1-\frac{5}{13}\right)\left(1-\frac{7}{20}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm: $\left(1-\frac{3}{5}\right)\left(1-\frac{3}{8}\right)\left(1-\frac{5}{13}\right)\left(1-\frac{7}{20}\right)$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{13}{20}$$
$$=\frac{1}{10}$$

19. $x=\frac{a}{b},\ y=\frac{b}{a}$ olduğuna göre, $\frac{1+x}{1+y}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: $\frac{1+x}{1+y}=\frac{1+\frac{a}{b}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{a}}=\frac{a+b}{b}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{a}{b}$

20. a, b, c sıfırdan farklı doğal sayılar ve $a+b=c$ olsun. Buna göre,

$$\frac{ab+b^2}{ab}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

Çözüm: $\frac{ab+b^2}{ab}=\frac{b(a+b)}{ab}=\frac{c}{a}$

21. $x=\frac{41}{23}+\frac{47}{17}$ olduğuna göre, $\frac{5}{23}+\frac{4}{17}$ ifadesinin x türünden eşiti nedir?

Çözüm: $x=\frac{41}{23}+\frac{47}{17}$

$x=2-\frac{5}{23}+3-\frac{4}{17}$

$x=5-\left(\frac{5}{23}+\frac{4}{17}\right)$

$\left(\frac{5}{23}+\frac{4}{17}\right)=5-x$

22. $\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{21}-\frac{7}{21}\right)\left(\frac{6}{30}-\frac{10}{30}+\frac{15}{30}\right)$$

$$=\left(-\frac{4}{21}\right)\cdot\frac{21}{30}$$

$$=-\frac{7}{15}$$

23. $\frac{1}{8}+a=\frac{3}{4}+b$ olduğuna göre, $a-b$ farkı kaçtır?

Çözüm: $\frac{1}{8}+a=\frac{3}{4}+b$

$$a-b=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

24. $\frac{3}{10}$ sayısı $\frac{9}{100}$ sayısının kaç katıdır?

Çözüm: $\frac{3}{10}\cdot\frac{9}{100}=\frac{3}{10}:\frac{100}{9}=\frac{10}{3}$

Merdiven ve Sonsuz Merdiven Kesirler

25. $\frac{5}{6}+\frac{5}{\frac{1}{5}+1}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\frac{5}{6}+\frac{5}{\frac{1}{5}+1}=\frac{5}{6}+\frac{5}{\frac{6}{5}}=\frac{5}{6}+\frac{5}{1}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}+\frac{25}{6}=\frac{30}{6}=5$

26.

$$\frac{\frac{2}{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{x}}=1$$

işlemine göre x'in değeri nedir?

Çözüm: $\frac{\frac{2}{\frac{3}{2}}}{\frac{x+1}{x}}=1\Leftrightarrow\frac{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{x+1}{x}}=1\Leftrightarrow\frac{\frac{4}{3}}{\frac{x+1}{x}}=1\Leftrightarrow\frac{4}{3}\cdot\frac{x}{x+1}=1\Leftrightarrow x=3$

27.

$$4+\frac{1+\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{5}{4}}}{\frac{1}{4}}=12$$

işlemine göre a'nın değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\frac{1+\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{5}{4}}}{\frac{1}{4}}=12-4$

$$1+\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{5}{4}}=12\cdot\frac{1}{4}$$

$$\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{5}{4}}=3-1$$

$$1+\frac{1}{a}=2\cdot\frac{5}{4}$$

$$1+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$$

28. $\frac{98\frac{13}{15}-97\frac{14}{15}}{\frac{14}{15}}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\frac{98\frac{13}{15}-97\frac{14}{15}}{\frac{14}{15}}=\frac{98+\frac{13}{15}-97-\frac{14}{15}}{\frac{14}{15}}=\frac{1-\frac{1}{15}}{\frac{14}{15}}=\frac{\frac{14}{15}}{\frac{14}{15}}=1$$

29. $\frac{2}{\frac{3}{4}}-\frac{\frac{2}{3}}{4}-\frac{1}{2}$ işleminin sonucu nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\frac{2}{\frac{3}{4}}-\frac{\frac{2}{3}}{4}-\frac{1}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$$

$$= \frac{16}{6} - \frac{1}{6} - \frac{3}{6}$$
$$= \frac{12}{6}$$
$$= 2$$

30. $2 + \frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{3}}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

Çözüm:

$$2 + \frac{2}{2+\frac{2}{\frac{8}{3}}} = 2 + \frac{2}{2+\frac{6}{8}} = 2 + \frac{2}{2+\frac{3}{4}} = 2 + \frac{2}{\frac{11}{4}} = 2 + \frac{8}{11} = \frac{30}{11}$$

31. $2 + \frac{2+\frac{2+\frac{\ddots}{5}}{5}}{5}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $2 + \frac{2+\frac{2+\frac{\ddots}{5}}{5}}{5} = x$ alınırsa $2 + \frac{x}{5} = x$ olur.

$$\frac{10+x}{5} = x$$
$$10 + x = 5x$$
$$10 = 4x$$
$$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

32. $3 - \frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{\ddots}}}$ şeklinde gösterilen sonsuz kesrinin değeri nedir?

Çözüm: $3 - \frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{\ddots}}} = x$ alınırsa $3 - \frac{2}{x} = x$ olur.

$$3x - 2 = x^2$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-2)(x-1) = 0$$
$$x = 2 \text{ ve } x = 1$$

Kesirli Sayılarda Sıralama

33. $a = \frac{99}{10}$, $b = \frac{909}{100}$, $c = \frac{9009}{1000}$ olduğuna göre a, b ve c'nin küçükten büyüğe doğru sıralaması nasıldır?

Çözüm: Bir rasyonel sayıda payı büyük olan daha büyüktür.
$a = \frac{9900}{1000}$, $b = \frac{9090}{1000}$, $c = \frac{9009}{1000}$

$c < b < a$

34. $k < 0$, $a = \frac{k}{88}$, $b = \frac{k}{89}$, $c = \frac{k}{90}$ olduğuna göre a, b ve c'nin küçükten büyüğe doğru sıralaması nasıldır?

Çözüm: Bir rasyonel sayıda paydası küçük olan daha büyüktür. Ama $k < 0$ olduğundan tersine dönecektir.
$k > 0$ ise $c < b < a$
$k < 0$ ise $a < b < b$

35. $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{5}$, $c = \frac{7}{8}$ sayılarının küçükten büyüğe doğru sıralanışı nasıl olur?

Çözüm:

$\frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6} < 1$ olduğundan $a < b$

$\frac{a}{c} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{8}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{7} = \frac{16}{21} < 1$ olduğundan $a < c$

$\frac{b}{c} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{32}{35} < 1$ olduğundan $b < c$

$a < b < c$

36. $\frac{2}{5} < x < \frac{5}{9}$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{11}{27}$ B) $\frac{57}{27}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{18}$ E) $\frac{11}{18}$

Çözüm: Payda eşitlersek aşağıdaki durum oluşur.

$$\frac{18}{45} < x < \frac{25}{45}$$
$$x = \frac{22{,}5}{45} = \frac{1}{2}$$

37. a, b birer pozitif tamsayı olmak üzere $\frac{1}{6}$ ile $\frac{1}{4}$ kesirlerinin ortasındaki kesir aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{5}{16}$ C) $\frac{7}{20}$ D) $\frac{5}{24}$ E) $\frac{6}{25}$

Çözüm: $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$

Bu sayının yarısı $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{24}$ istenen sonuçtur.

38. $\frac{1}{7} < a < b < c < \frac{2}{7}$ olduğuna göre a, b, c sayıları sırasıyla, aşağıdakilerden hangisindeki sayılar olabilir?

A) $\frac{9}{56}, \frac{11}{56}, \frac{13}{56}$ B) $\frac{7}{28}, \frac{8}{28}, \frac{9}{28}$ C) $\frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{6}{21}$
D) $\frac{5}{35}, \frac{6}{35}, \frac{8}{35}$ E) $\frac{2}{14}, \frac{3}{14}, \frac{5}{14}$

Çözüm: Payı ve paydayı 8 çarparsak

$$\frac{8}{56} < a < b < c < \frac{16}{56}$$
$$\frac{8}{56} < \frac{9}{56} < \frac{11}{56} < \frac{13}{56} < \frac{16}{56}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ondalık Sayılar

39. 0,075 sayısının en sade rasyonel hali nedir?

Çözüm: $0{,}075 = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40}$

40. $(1{,}583 + 1{,}417) \cdot (1{,}346 + 1{,}654)$ işlemin sonucu nedir?

Çözüm:
$(1{,}583 + 1{,}417) \cdot (1{,}346 + 1{,}654) = 3 \cdot 3 = 9$

41. x, pozitif bir ondalık sayıdır. $x - \frac{1}{25}$ bir tamsayı olduğuna göre, x in virgülden sonraki kısmı nedir?

Çözüm: x'in değeri 1 olsun.
$x - \frac{1}{25} = 1 - \frac{1}{25} = 1 - 0{,}04 = 0{,}096$

42. $(0{,}333 - 0{,}222) \cdot 1\,000$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:
$0{,}333 \cdot 1\,000 - 0{,}222 \cdot 1\,000 = 333 - 222 = 111$

43. $3{,}2 = x + \frac{2y}{5}$ eşitliğinde x ve y, 5'ten küçük birer doğal sayı ise y'nin değeri nedir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm: $\frac{32}{10} = x + \frac{2y}{5}$

$\frac{16}{5} = x + \frac{2y}{5}$

Bu denklem sağlanabilmesi için $x = 2, y = 3$ olur.

44. $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}$ kesrinin ondalık gösterimi nedir?

Çözüm: $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{40} = \frac{25}{1000} = 0{,}025$

45. $\dfrac{0,0084}{0,21}$ kesri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

Çözüm: $\dfrac{0,0084}{0,21} = \dfrac{84}{21 \cdot 100} = \dfrac{4}{100} = 0,04$

46. $\dfrac{0,2}{0,02} + \dfrac{0,08}{0,04} + \dfrac{5}{0,2}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\frac{0,2}{0,02} + \frac{0,08}{0,04} + \frac{5}{0,2} = \frac{20}{2} + \frac{8}{4} + \frac{50}{2} = 10 + 2 + 25 = 37$$

47. $\dfrac{1}{0,002}(0,024 + 0,016)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{1}{0,002}\left(0,024 + 0,016\right) = \frac{1}{0,002} \cdot 0,04 = \frac{0,04}{0,002} = \frac{40}{2} = 20$$

48. $\dfrac{0,72}{0,018} + \dfrac{0,18}{0,003} + \dfrac{10}{0,1}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{0,72}{0,018} + \frac{0,18}{0,003} + \frac{10}{0,1} = \frac{720}{18} + \frac{180}{3} + \frac{100}{1} = 40 + 60 + 100 = 200$$

49. $\dfrac{2,5}{0,25} + \dfrac{1,1}{0,11} + \dfrac{3}{0,15}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{2,5}{0,25} + \frac{1,1}{0,11} + \frac{3}{0,15} = \frac{250}{25} + \frac{110}{11} + \frac{300}{15} = 10 + 10 + 20 = 40$$

50. $\dfrac{1}{1,\overline{3}} + \dfrac{1}{1,\overline{6}}$ devirli (peryodik) rasyonel sayısı işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\frac{1}{1,\overline{3}}+\frac{1}{1,\overline{6}}=\frac{1}{\frac{13-1}{9}}+\frac{1}{\frac{16-1}{9}}=\frac{9}{12}+\frac{9}{15}=\frac{45}{60}+\frac{36}{60}=\frac{81}{60}=\frac{27}{20}$$

51. $\frac{7}{12}=0,xy\overline{z}$ olduğuna göre $x+y+z$ nin değeri nedir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm:

$$\frac{7}{12}=0,xy\overline{z}=\frac{xyz-xy}{900}$$

x, y ve z birer rakam olduğundan sayı çözümlemesi yapılırsa

$$(100x+10y+z)-(10x+y)=\frac{6300}{12}$$

$$90x+9y+z=525$$

bulunur. Burada $x=5, y=8, z=3$ alınarak denklem çözülür.

$$x+y+z=5+8+3=16$$

52. $a=3,\overline{751}$

$b=3,7\overline{51}$

$c=3,75\overline{1}$

kesrinin sıralanışı, aşağıdakilerden hangisinde verilmiştir?

A) $a<b<c$ B) $c<a<b$ C) $b<c<a$ D) $c<b<a$ E) $a<b<c$

Çözüm: $a=3,751751$

$b=3,751515$

$c=3,751111$

$c<b<a$

53. Bir sayıyı 5'e bölmek, o sayıyı kaçla çarpmaktır?

Çözüm: $\frac{1}{5}=0,2$ ile çarpmaktır.

Rasyonel Sayıların Değişken Olarak İşlem Yapılması

54. $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x}{x-2}-2$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2}-2=\frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{2(x^2-4)}{(x^2-4)}$$
$$=\frac{x^2-2x+x^2+2x+2x^2-8}{x^2-4}$$
$$=\frac{-8}{x^2-4}$$

55. $y=3x$ ise, $\dfrac{x^2-7xy}{x^2-2xy}$ nin değeri kaçtır?

Çözüm: $\dfrac{x^2-7xy}{x^2-2xy}=\dfrac{x^2-7x(3x)}{x^2-2x(3x)}=\dfrac{x^2-21x^2}{x^2-5x^2}=\dfrac{-20x^2}{-4x^2}=5$

56. $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a+b}{b}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a-b}{b}\right)$
ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi nedir?

Çözüm: $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a+b}{a}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}\right)$

$$=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{a^2-(a+b)(a-b)}{(a-b)a}\right):\left(\frac{a^2-(a+b)(a-b)}{(a+b)a}\right)$$
$$=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{a^2-(a+b)(a-b)}{(a-b)a}\right).\left(\frac{(a+b)a}{a^2-(a+b)(a-b)}\right)$$
$$=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$$
$$=1$$

57. $\dfrac{x-y}{x-y-1}+\dfrac{x-y-1}{x-y-2}=2$ olduğuna göre, $x-y$ farkı kaçtır?

Çözüm: $\dfrac{x-y}{x-y-1}+\dfrac{x-y-1}{x-y-2}=2$
ifadesinde $x-y=t$ alınırsa,

$$\frac{t}{t-1}+\frac{t-1}{t-2}=2$$
$$\frac{t(t-2)}{(t-1)(t-2)}+\frac{(t-1)(t-1)}{(t-2)(t-1)}=2$$
$$\frac{t(t-2)+(t-1)(t-1)}{(t-1)(t-2)}=2$$
$$t^2-2t+t^2-2t+1=2(t^2-3t+2)$$
$$2t=3$$
$$t=x-y=\frac{3}{2}$$

bulunur.

58. Üç zil sırasıyla $\frac{1}{5}$ saat, $\frac{3}{7}$ saat ve $\frac{8}{5}$ saatte bir çalmaktadır. Üçü saat birlikte çalarsa tekrar kaç sonra tekrar çalar.

Çözüm: $\text{OKEK}\left(\frac{1}{5},\frac{3}{7},\frac{8}{9}\right)=\frac{\text{OKEK}(1;3;8)}{\text{OBEB}(5;7;9)}=\frac{24}{1}=24$ sa.

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. M. Zeki DERMAN, Serdar GÜLMEZ, Ökkeş ÖZKÖSELER, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2002, Ankara.
4. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Matematik Cep Kitabı, Final Dergisi Yayınları, 1989, İstanbul.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.