9. BÖLÜM
REEL SAYILAR ve EŞİTSİZLİĞİ

Reel (gerçel) sayı kavramına geçmeden önce irrasyonel sayı kavramını bilinmesi gerekmektedir. Önce irrasyonel sayı hakkında bilgi verelim, akabinde reel sayı hakkında bilgiye geçilecektir.

İRRASYONEL SAYI KAVRAMI

Bir önceki bölümde rasyonel sayıları tanımlanmıştı. Ancak bazı işlemlerde rasyonel sayılar yeterli kalmamaktadır. Örneğin, $x^2 - 2 = 0$ denkleminin çözümü rasyonel sayılarda yoktur. Bunun için bu denklemleri çözmek için yeni bir sayı sistemine ihtiyaç vardır. Şimdi bu sayı sistemini tanımlayalım.

9.1. Tanım: Sayı doğrusu üzerinde rasyonel sayılar tarafından doldurulmayan noktalara karşılık gelen sayılara irrasyonel sayı denir. $\mathbb{I}$ ile gösterilir. Bu tanıma göre rasyonel sayılar kesirli şekilde yazılabilen sayılar olduğuna göre irrasyonel sayılar kesirli şekilde yazılamayan ondalıklı sayılardır.

Örnek:

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\cdots$

$\sqrt[3]{5} = 1{,}7099759466766969893531088725439\cdots$

$e = 2{,}7182818284590452353602874713527\cdots$

$\varphi = 1{,}6180339887498948482045868343656\cdots$

sayıları birer irrasyonel sayılardır. Ama

$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795\cdots$

sayısı rasyonel mi, irrasyonel mi olup olmadığı tam tespit edilememiştir. //

Şimdi $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispat edelim.

9.1. Teorem: $\sqrt{2}$ sayısı irrasyonel sayıdır.

İspat: Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ sayısı irrasyonel sayı olmasın. Bu takdirde rasyonel sayıdır. Eğer rasyonel ise kesirli şekilde yazılır. Buna göre

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad (1)$$

olacak şeklinde yazılabilen a ve b aralarında asal sayıları vardır. Bu (1) eşitliğin her iki tarafının karesini alırsak,

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$
$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$a^2 = 2b^2$$

elde edilir. Şu halde $a^2 = 2b^2$ olduğundan a^2 çift sayıdır. Öyleyse a da çift sayıdır. Buna göre, $a = 2k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu yüzden,

$$(2k)^2 = 2b^2$$
$$2k^2 = b^2$$

bulunur ki, bu durum b sayısının da çift sayı olduğunu gösterir. Buna göre (1) eşitliği, a ile b aralarında asal sayı olması gerekliliği ile çelişir. O halde $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel sayı değildir.

9.2. Teorem:

i) Herhangi bir p asal sayısı için $\sqrt{p}$ sayısı irrasyoneldir.

iii) $n \geq 2$ tamsayısı için $\sqrt[n]{n}$ irrasyoneldir.

İspat: i) $\sqrt{p}$ rasyonel olsun. $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, $\text{OBEB}(a;b) = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buna göre $pb^2 = a^2$, yani p, a^2 yi böler. Asal sayılar konusundaki 4.1. Sonuca göre p, a sayısını böler. O halde $a = pa_1$ olacak şekilde $a_1 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece $b^2 = pa_1^2$, yani p, b^2 yi böler. Böylece p, b'yi böldüğü elde edilir. Dolayısıyla p, OBEB(a; b) yi böldüğü ortaya çıkar. Bu ise kabule göre p'nin 1'i böldüğünü gösterir. Bu ise çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır, şu halde p irrasyonel sayı olmalıdır.

ii) (i) özelliğine benzer yöntemle yapılır.

REEL (GERÇEL) SAYI KAVRAMI

9.2. Tanım: Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimine reel (gerçel) sayılar kümesi denir, $\mathbb{R}$ ile gösterilir. O halde,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

şeklindedir. Buna göre reel sayıya kadar olan sayı sistemini şu şekilde sınıflandırabiliriz;

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

biçimindedir. Yani, her doğal, tam, rasyonel ve irrasyonel sayı aynı zamanda bir reel sayıdır.

DOĞRUSAL (LİNEER) NOKTA KÜMELERİ

9.3. Tanım: Bir reel sayı doğrusu üzerinde her bir noktanın oluşturduğu kümeye doğrusal (lineer) nokta kümeleri adı verilir.

9.4. Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. a ile b sayıları ile bunların arasındaki tüm reel sayılardan oluşan,

$$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$$

kümesine a ve b sayıları ile belirtilen kapalı aralık denir. $[a, b]$ ile gösterilir. Şekil olarak,

olarak gösterilir. Burada a ve b noktası dâhil olup bütün a ve b noktaları arasındaki reel sayılar bu kümenin elemanıdır.

Örnek: $\{x \in \mathbb{R}: 1 \leq x \leq 5\}$ kümesi 1 ve 5 sayıları dahil olup 1 ve 5 aralığındaki tüm reel sayılar bu kümesidir.

9.5. Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. a ile b sayıları dahil olmayıp bunların arasındaki tüm reel sayılardan oluşan,

$$\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$$

kümesine a ve b sayıları ile belirtilen açık aralık denir. $(a; b)$ ile gösterilir. Şekil olarak

olarak gösterilir.

Örnek: $\{x \in \mathbb{R}: -3 < x < 4\}$ kümesi -3 ve 4 sayıları dahil olmayıp -3 ve 4 aralığındaki tüm reel sayılar bu kümesidir.

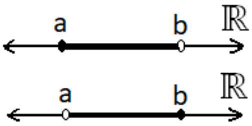
9.6. Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. a kümeye dahil olup b kümeye dahil olmayan tüm reel sayılardan oluşan,

$$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$$

kümesine veya a kümeye dahil olmayıp b kümeye dahil olan tüm reel sayılardan oluşan,

$$\{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$$

kümesine yarı açık aralık denir. $\{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ kümesi $[a; b)$ ile de, $\{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ kümesi $(a; b]$ ile de gösterilir. Şekil olarak sırasıyla;

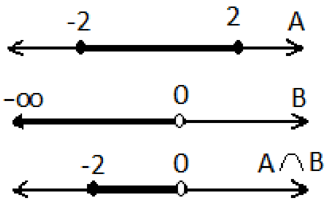


biçiminde gösterilir.

Örnek:
$A = \{x: 0 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{R}\} = [0,5]$ kümesi 0 ile 5 kapalı aralığı,
$B = \{x: 0 < x < 5, x \in \mathbb{R}\} = (0,5)$ kümesi 0 ile 5 açık aralığı,
$C = \{x: 0 < x \leq 5, x \in \mathbb{R}\} = (0,5]$ kümesi 0 ile 5 yarı açık aralığı,
$D = \{x: 0 \leq x < 5, x \in \mathbb{R}\} = [0,5)$ kümesi 0 ile 5 yarı açık aralığıdır.

Örnek: $A = \{x : -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$
$B = \{x : x < 0, x \in \mathbb{R}\}$
kümeleri verildiğine göre $A \cap B$ kümesini bulunuz.

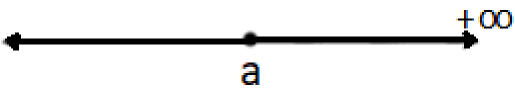
Çözüm: $A = [-2; 2], B = (-\infty, 0)$ olduğundan,



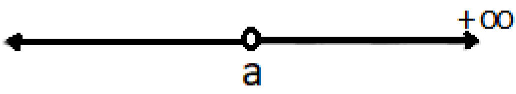
şekli çizilebilir. Şu halde, $A \cap B = [-2; 0)$ kümesi oluşur.

9.1. Not: Reel sayılar sonsuz elemanlı sayılar olduğuna göre, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

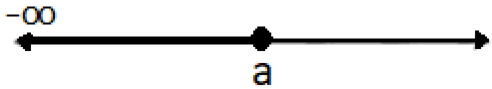
1. $[a; +\infty)$ aralığı,



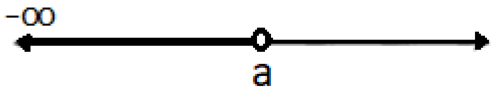
2. $(a; +\infty)$ aralığı,



3. $(-\infty; a]$ aralığı,



4. $(-\infty; a)$ aralığı,



5. $(-\infty; +\infty)$ aralığı,

şekilleri çizilir.

Örnek: $-2x + 22 \leq x + 4$ eşitsizliğini çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $-2x + 22 \leq x + 4$

$22 - 4 \leq x + 2x$

$18 \leq 3x$

$6 \leq x$

Örnek: $2x - 1 \leq 3x - 5 \leq 2x + 3$ eşitsizliğini çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $2x - 1 \leq 3x - 5$ ve $3x - 5 \leq 2x + 3$

$5 - 1 \leq 3x - 2x$ ve $3x - 2x \leq 5 + 3$

$4 \leq x$ ve $x \leq 8$

$4 \leq x \leq 8$

Örnek: $3x + y - 6 = 0$ ve $1 < x < 3$ ise y'nin bulunduğu aralığı bulunuz.

Çözüm: $3x + y - 6 = 0$ ise $x = \frac{y-6}{3}$ olduğundan eşitsizliğinde yerine yazalım.

$1 < x < 3$

$1 < \frac{y-6}{3} < 3$

$3 < y - 6 < 9$

$3 + 6 < y - 6 + 6 < 9 + 6$

$9 < y < 15$

9.7. Tanım: $[a; b]$ kapalı aralığı için $b - a$ sayısına aralığın ölçüsü (uzunluğu) denir.

Örnek: $[7; 22]$ kapalı aralığının uzunluğu $22 - 7 = 15$ dir.

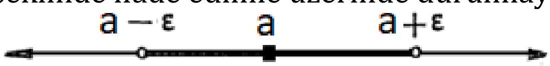
9.8. Tanım: $a \in \mathbb{R}$ sayısı verilmiş olsun, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısı ile belirlenen $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ açık aralığına, a reel (gerçel) sayısının ε komşuluğu denir ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısına komşuluğun yarıçapı denir. Bu durum,

$$N_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}: a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

veya

$$N_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < \varepsilon\}$$

biçiminde ifade edilir. (Mutlak değer kavramı henüz verilmediğinden mutlak değer şeklinde ifade edilme üzerinde durulmayacaktır.) Bu ifadenin şekli,



biçimindedir.

Örnek: 5 sayısının 2 komşuluğunu yazınız.

Çözüm : $N_2(5) = (5 - 2; 5 + 2) = (3; 7)$ dir.

Örnek: $(2; 12)$ aralığı hangi sayının hangi komşuluğudur?

Çözüm: $(2; 12)$ aralığı, a sayısının ε komşuluğu olsun, a'nın ε komşuluğu $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ olduğundan,

$$(2; 12) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$$
$$a - \varepsilon = 2 \text{ ve } a + \varepsilon = 12$$
$$a = 7 \text{ ve } \varepsilon = 5$$

olduğundan, $(2; 12)$ aralığı 7'nin 5 komşuluğudur.

9.2. Not: $(a; b)$ açık aralığı, $\frac{a+b}{2}$ sayısının $\frac{b-a}{2}$ komşuluğudur.

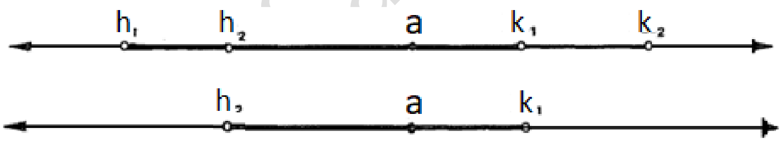
9.9. Tanım: a reel sayısının bir ε komşuluğunu içine alan her küme a'nın komşuluğudur.

Örnek: $(a-\varepsilon; a+\varepsilon) \subseteq (h; k)$ ya da $(a-\varepsilon; a+\varepsilon) \subseteq [h; k]$ olacak biçimde bir $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa, $(h;\ k)$ ve $[h;\ k]$ aralıkları, a'nın komşulukları olur. Öyleyse, a'yı bulunduran her açık aralık, a'nın bir komşuluğudur.

9.10. Tanım: $(h; k)$ açık aralığı a'nın bir komşuluğu olsun. $N = (h; k) - \{a\}$ kümesine, a'nın delinmiş komşuluğu denir.

a. $(h; k)$ açık aralığı a'nın bir komşuluğu olsun. $(h; k) \subseteq (m, n)$ ise $a \in (m; n)$ olduğundan, $(m;\ n)$ açık aralığı da a'nın bir komşuluğu olur.

b. $(h_1; k_1)$ ve $(h_2; k_2)$, a'nın farklı iki komşulukları olsunlar. $(h_1; k_1) \cap (h_2; k_2)$ arakesit kümesi, a'yı bulunduracağından bu da a'nın komşuluğu olur.



c. $a \in (h; k)$ olsun, a'nın en büyük ε komşuluk yarıçapı,

$$\varepsilon \le \min(a-h; k-a)$$

dir.

Örnek: $(2; 7)$ aralığına yerleştirilebilen 4'ün en büyük ε komşuluğu nedir?

Çözüm: $(h; k)$ aralığına yerleştirilebilen a'nın ε komşuluğu için,

$$\varepsilon \le \min(a-h; k-a)$$

eşitsizliği yazılabilir, $(h, k) = (2; 7)$ ve $a = 4$ olduğundan,

$$\varepsilon \le \min(4-2; 7-4) = \min(2; 3) = 2$$

dir. Buna göre, $\varepsilon = 2$ için, $(2; 7)$ aralığına yerleştirilebilen 4'ün en büyük ε komşuluğu,

$$(4-2;4+2)=(2;6)$$

aralığıdır.

Örnek: 3'ün 5 komşuluğu ile 5'in 6 komşuluğu karşılıklı olarak A ve B kümeleridir. A, B kümelerini aralık olarak yazınız ve $A \cap B$ ile $A \cup B$ kümelerini gösteriniz.

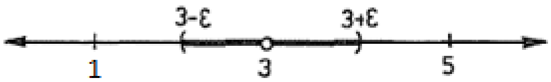
Çözüm: $A=(3-5;3+5)=(-2;8)$
$B=(5-6;5+6)=(-1;11)$
$A \cap B=(-2;8) \cap (-1;11)=(-1;8)$
$A \cup B=(-2;8) \cup (-1;11)=(-2;11)$

9.11. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ olacak biçimde, bir A kümesi ve $x \in A$ olsun. $(x-\varepsilon;x+\varepsilon) \subseteq A$ olacak biçimde bir $\varepsilon \in A$ sayısı varsa, x sayısına, A kümesinin iç noktası denir.

Örnek: 3 sayısı $A=(1;5)$ aralığının bir iç noktasıdır. Çünkü 3'ün 1 komşuluğu, $(3-1;3+1)=(2;4)$ aralığı, $(1;5)$ aralığı içindedir. Başka bir deyişle, $(2;4) \subset (1;5)$ dir.

9.12. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için x sayısının delinmiş komşuluğu, $N=(x-\varepsilon;x+\varepsilon)-\{x\}$ olsun. Eğer, x'in her N delinmiş komşuluğu için $N \cap A \neq \emptyset$ ise x sayısına A kümesinin limit noktası ya da yığılma noktası denir.

Örnek: $A=(1;5)$ aralığının iç noktası olan 3 sayısı, $A=(1;5)$ aralığının bir limit noktasıdır. Çünkü 3'ün her $N=(3-\varepsilon;3+\varepsilon)-\{3\}$ delinmiş komşuluğu ile $A=(1;5)$ aralığının arakesiti boş değildir. Bu durum



şeklinde gösterilir.

9.13. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ dir. N, x'in delinmiş ε komşuluğu olmak üzere, her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için $N \cap A \neq \emptyset$ ve $N \cap A^t \neq \emptyset$ ise x noktasına A kümesinin sınır noktası denir. (Burada $A^t=\mathbb{R}-A$ dir.)

Örnek: $A = (1;5)$ aralığının 1 ve 5 uç noktaları, $A = (1;5)$ aralığının sınır noktalarıdır. Çünkü 1'in her $N = (1-\varepsilon; 1+\varepsilon) - \{1\}$ delinmiş komşuluğu için $N \cap A \neq \emptyset$ ve $N \cap A^t \neq \emptyset$ dir. Yine, 5 sayısının her $N = (1-\varepsilon; 1+\varepsilon) - \{1\}$ delinmiş komşuluğu için $N \cap A \neq \emptyset$ ve $N \cap A^t \neq \emptyset$ dir. Bu durum

şeklinde gösterilebilir.

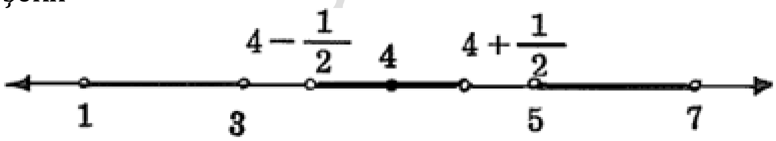
$B = [1;5]$ kapalı aralığının 1 ve 5 uç noktalan, $B = [1;5]$ kapalı aralığının sınır noktasıdır.

9.14. Tanım: $x \in A$ olduğu halde, $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \cap A = \{x\}$ olacak biçimde en az bir $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa, x sayısına, A kümesinin ayrık noktası denir.

Örnek: $A = (1;3) \cup \{4\} \cup (5;7)$ kümesini göz önüne alalım. 4'ün $\frac{1}{2}$ komşuluğu ile A kümesinin arakesiti yalnız 4'ü içine alan kümedir. Bu küme $\left(4-\frac{1}{2}; 4+\frac{1}{2}\right)$ dir. Şu halde,

$$A \cap \left(4-\frac{1}{2}; 4+\frac{1}{2}\right) = \{4\}$$

dir. Bunun şekli



biçimindedir. Yani 4 sayısı A kümesinin ayrık noktasıdır.

9.15. Tanım: A kümesinin her noktası iç nokta ise, A kümesine, açık küme denir.

Her $x \in \mathbb{R}$ için, $x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ olduğundan, her x noktası reel sayıların bir iç noktasıdır. Buna göre, reel sayılar kümesi bir açık kümedir.

$(a;b)$ aralığının her noktası, bir iç nokta olduğundan, $(a;b)$ aralığı bir açık kümedir.

$[a;b]$ kapalı aralığının a noktası, $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \not\subset [a;b]$ olduğundan, iç nokta değildir, öyleyse, $[a;b]$ kapalı aralığı açık küme değildir.

9.16. Tanım: A kümesi, bütün yığılma noktalarını içine alıyorsa, A'ya kapalı küme denir.

Örnek: $\mathbb{R}$ reel sayılar kapalı kümedir. $\mathbb{R}$ reel sayılar evrensel küme olduğundan, bütün yığılma noktalarını bulundurur. //

$[a,b]$ kapalı aralığı kapalı kümedir.

Açık kümenin tümleyeni kapalı, kapalı kümenin tümleyeni açık kümedir. Öyleyse, $\varnothing$ küme, hem açık küme hem de kapalı kümedir. $\mathbb{R}$ kümesi de hem açık hem de kapalı kümedir.

Her iç nokta ve her sınır noktası bir yığılma noktasıdır, öyleyse, kapalı kümeler, iç noktalarını ve sınır noktalarını içinde bulundurur.

9.17. Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < b - a$ olacak biçimde seçelim.

$$(a-\varepsilon_1; a+\varepsilon_2) \cap (b-\varepsilon_1; b+\varepsilon_2) = \varnothing$$

aralığı varsa bu iki aralığa ayrılabilme (Hausdorff) özeliği vardır denir.

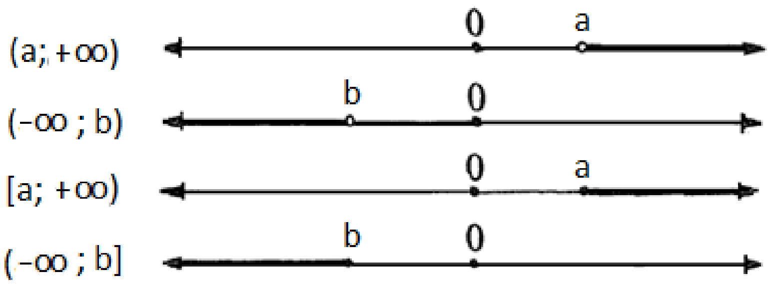
9.18. Tanım: $a \in \mathbb{R}^+$ olduğuna göre,

$$(a; +\infty) = \{x : a < x, x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine $+\infty$'un a komşuluğu denir, $a \in \mathbb{R}^-$ olduğuna göre,

$$(-\infty; b) = \{x : x < b, x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine $-\infty$'un b komşuluğu denir.



9.19. Tanım: A bir doğrusal (lineer) nokta kümesi olsun. Eğer A kümesinin her x elemanı için $a \leq x$ ifadesini sağlayan bir a sayısı varsa A kümesine alttan sınırlıdır denir, a sayısına da A kümesinin bir alt sınırı denir. Benzer olarak, eğer A kümesinin her x elemanı için $x \leq b$ ifadesini sağlayan bir b sayısı varsa A kümesine üstten sınırlıdır denir, b sayısına da A kümesinin bir üst sınırı denir. Alttan ve üstten sınırlı her kümelere kısaca sınırlı kümeler denir.

Örnek: $A = \{x \in \mathbb{R}: 1 < x < 2\}$ kümesi sonsuz elemanlı fakat sınırlı bir kümedir. Burada 1 veya 1'den küçük herhangi bir sayı bir alt sınır, 2 veya 2'den büyük herhangi bir sayı üst sınırdır.

Örnek: $B = \left\{x = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi sınırlı bir kümedir. Çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için B kümesinin elemanları 0 ile 1 arasındadır. Yani $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ dir. Buna göre 0 veya herhangi bir negatif sayı alt sınır, 1 ve 1'den büyük herhangi bir sayı üst sınırdır.

En küçük bir üst sınır ve en büyük bir alt sınırla ilgili olan aşağıdaki önermeyi aksiyom olarak veriyoruz.

9.1. Aksiyom: Üstten sınırlı bir kümenin üst sınırları içinde bir en küçüğü, alttan sınırlı bir kümenin alt sınırları içinde bir en büyüğü vardır.

9.20. Tanım: A, reel sayılar kümesinin üstten sınırlı bir alt kümesi olsun. A kümesinin üst sınırlarına en küçüğüne A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup A$ ile gösterilir. A kümesinin alt sınırlarına en büyüğüne A kümesinin en küçük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf A$ ile gösterilir.

Örnek: $A=\left\{x=\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesi $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ şeklinde yazılır. Buna göre $\sup A=1$ ve $\inf A=0$ dir.

Örnek: $B=\left\{x=\frac{1}{r}: r\in\mathbb{Q} \text{ ve } r<0\right\}$ kümesi için $\sup B=0$ olup $\inf A$ yoktur. Çünkü $r<0$ olduğundan $\frac{1}{r}$ sayısı $(-\infty;0)$ aralığındadır.

9.21. Tanım: Eğer bir A kümesinin en küçük bir üst sınırı bu kümenin bir elemanı ise bu elemana kümenin en büyük elemanı veya maksimum elemanı denir, $\max A$ ile gösterilir. Benzer olarak eğer kümesinin en büyük bir alt sınırı bu kümenin bir elemanı ise bu elemana kümenin en küçük elemanı veya minimum elemanı denir, $\min A$ ile gösterilir.

Örnek: $A=\left\{x=\frac{n-1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesi $A=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots\right\}$ şeklinde yazılır. Buna göre kümesi için $\min A=0$ ve $\max A$ bulunamamaktadır.

Örnek: $B=\left\{x=\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesi $B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ olup $\max B=1$ ve $\min A$ yoktur.

REEL SAYILARDAKİ EŞİTSİZLİKLERİN ÖZELLİKLERİ

Reel sayılar üzerindeki eşitsizliklerin (testlerden basit eşitsizlik olarak geçmektedir) bazı özelliklerini burada aksiyom olarak vereceğiz. Eşitsizlik kavramları üstlü ifadelerin eşitsizliği ve köklü ifadelerin eşitsizliği kısımları ayrıca üstlü ifadelerin eşitsizliği ve köklü ifadelerin eşitsizliği olarak verilecektir.

Aşağıdaki aksiyomlarda $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ olarak alınmıştır.

9.2. Aksiyom: $a<b$ ise $a+c<b+c$

9.3. Aksiyom: $a<b$ ve $c<d$ ise $a+c<b+d$

9.4. Aksiyom: Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayı ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirmez. Yani $a < b$ ve $c > 0$ ise

$$a \cdot c < b \cdot c$$

dir.

9.5. Aksiyom: Bir eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayı ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirir. Yani $a < b$ ve $c < 0$ ise,

$$a \cdot c > b \cdot c$$

dir.

9.6. Aksiyom: Her iki tarafı aynı işaretli olan bir eşitsizliğin her iki tarafının çarpmaya göre tersi alınırsa eşitsizlik yön değiştirir. Yani, a ve b aynı işaretli iki sayı ve $a < b$ ise,

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

dir.

Örnek: a) $3 < 6$ ise $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$

b) $-8 < -2$ ise $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{8}$

9.7. Aksiyom: Pozitif basit kesirlerin (0 ile 1 arasındaki sayıların) doğal sayı kuvvetini aldıkça sayı küçülür. Yani, $\frac{a}{b}$ pozitif basit kesir ise,

$$\frac{a}{b} > \left(\frac{a}{b}\right)^2 > \left(\frac{a}{b}\right)^3 > \cdots$$

biçimindedir. Bu durum şu şekilde de izah edilir.

$n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$ ve $0 < a < 1$ olsun. $a^n < a^{n-1}$

dir.

Örnek: a) $\left(\frac{2}{7}\right)^2 < \frac{2}{7}$

b) $\frac{3}{5} > \left(\frac{3}{5}\right)^4$

9.8. Aksiyom: Pozitif bileşik kesirlerin (1'den büyük sayıların) doğal sayı kuvvetini aldıkça sayı büyür. Yani $\frac{a}{b}$ pozitif bileşik kesir ise,

$$\frac{a}{b} < \left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left(\frac{a}{b}\right)^3 < \cdots$$

biçimindedir. Bu durum şu şekilde de izah edilir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ ve $0 < a < b$ olsun. $a^n < b^n$

dir.

Örnek: $\frac{3}{2} < \frac{7}{4}$ ise $\left(\frac{3}{2}\right)^2 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ olup $\frac{9}{4} < \frac{49}{16}$

9.9. Aksiyom: $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$a < b < 0 \text{ için } \begin{cases} a^n < b^n, & \text{n tek sayı} \\ a^n > b^n, & \text{n çift sayı} \end{cases}$$

dir.

Örnek: $-\frac{7}{4} < -\frac{3}{2}$ ise

1. $\left(-\frac{7}{4}\right)^3 < \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ ise $-\frac{343}{64} < -\frac{27}{8}$

2. $\left(-\frac{7}{4}\right)^4 < \left(-\frac{3}{2}\right)^4$ ise $\frac{2041}{256} < \frac{81}{16}$

Örnek: $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$a^2 \cdot b < 0, \quad b \cdot c > 0, \quad a \cdot c < 0$$

ise a, b ve c'nin işaretlerini bulunuz.

Çözüm: $a^2 \cdot b < 0$ ise $a^2 > 0$ olduğundan $b < 0$ dır.
$b \cdot c > 0$ ve $b < 0$ olduğundan $c < 0$ dır.
$a \cdot c < 0$ ise $c < 0$ olduğundan $a > 0$ dır.

Örnek: $a > 0, 3a = 4b$ ve $b = 2c$ olduğuna göre a, b ve c reel sayılarını sıralayınız.

Çözüm: $a > 0$, $3a = 4b$ olduğundan $b < a$ dır.

$b = 2c$ olduğundan $c < b$ dır.
Buna göre $c < b < a$ elde edilir.

Örnek: x, y ve z reel sayıları için

$$x^2 < x, \quad y = 2x, \quad y < z$$

olduğuna göre x, y ve z reel sayılarını sıralayınız.

Çözüm: $x^2 < x$ olduğuna göre $0 < x < 1$ dir.
$y = 2x$ olduğuna göre $x < y$ dir.
$y < z$ olduğuna göre $x < y < z$ dir.

MAKSİMUM–MİNUMUM SAYILAR

9.22. Tanım: İki veya daha fazla sayının en büyük sayıyı seçmeye maksimum, en küçük sayıyı seçmeye minimum denir. Bu durum $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\max(x;y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases} \text{ ve } \min(x;y) = \begin{cases} x, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$$

biçiminde gösterilir. Bu gösterim maksimum ifadesinde $x \geq y$ ise x alınır, $x < y$ ise y alınacak demektir. Yine minimum ifadesinde $x \leq y$ ise x alınır, $x > y$ ise y alınacak demektir.

Örnek: $\max\left(4; \frac{3}{2}\right) = 4$, $\min\left(-2; \sqrt{3}\right) = -2$

9.3. Teorem: $p \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

a) $p + \max(x;y) = \max(p + x; p + y)$
b) $p + \min(x;y) = \min(p + x; p + y)$
c) $p - \max(x;y) = \min(p - x; p - y)$
d) $p - \min(x;y) = \max(p - x; p - y)$

biçimindedir.

İspat: Burada özel olarak $y \leq x$ alınırsa $\max(x;y) = x$ ve $\min(x;y) = y$ olur.

a) $p + \min(x;y) = p + x$ olur. Ayrıca

$$y \leq x \text{ ise } p + y \leq p + x$$

olduğundan $p + \max(x;y) = \max(p + x; p + y)$ dir.

b) a şıkkına benzer şekilde yapılır.

c) $y \le x$ ise $p - x \le p - y$ dir. Buna göre

$$\max(p - x; p - y) = p - y$$

dir. Öte yandan $p - \min(x; y) = p - x$ olduğundan,

$$p - \min(x; y) = \min(p - x; p - y)$$

olur.

d) c şıkkına benzer şekilde yapılır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

İrrasyonel Sayılar

1. Aşağıdakilerden hangisi bir irrasyonel sayıdır?

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\sqrt{4}$

Çözüm: Köklü bir ifade tamsayı olarak çıkmıyorsa, irrasyonel sayı olur. Doğru cevap C şıkkıdır.

2. Aşağıdakilerden hangisi bir irrasyonel sayı değildir?

A) $\sqrt[3]{3}$ B) $\sqrt[3]{2} - 1$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{4\sqrt{3}+4}{3\sqrt{3}+3}$

Çözüm: $\frac{4\sqrt{3}+4}{3\sqrt{3}+3} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{3(\sqrt{3}+1)} = \frac{4}{3}$ olup E şıkkı rasyonel sayıdır. Diğerleri irrasyoneldir.

3. Aşağıdaki irrasyonel sayılardan hangisinin yaklaşık değeri bilinirse, $\sqrt{720}$ değeri doğal sayı olarak sonuç verir?

A) 2 B) 3 C) $\sqrt{11}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{5}$

Çözüm: $720 = 2^4 3^2 5$ biçiminde çarpanlara ayrılır. $\sqrt{2^4} = 4, \sqrt{3^2} = 3$ dir. Ama $\sqrt{5}$ bir irrasyonel sayı olup kök dışına çıkması için $\sqrt{5}$'e ihtiyaç vardır.

Reel Sayı Kavramı

4. $A = \{x: \sqrt{2} \leq x \leq 6\}$ ve $B = \{x: 1 \leq x \leq \sqrt{10}\}$ olduğuna göre $A \cap B$ kümesi nedir?

Çözüm: A kümesi $\sqrt{2} = 1{,}4142\cdots$ den başlayıp 6'ya kadar devam etmektedir. B kümesi 1'den başlayıp $\sqrt{10} = 3{,}1622\cdots$ kadar devam eder. Bu iki kümenin ortak noktaları $\sqrt{2} = 1{,}4142\cdots$ den başlayıp $\sqrt{10} = 3{,}1622\cdots$ kadar devam eder. Yani;

$$A \cap B = \{x: \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{10}\}$$

olur.

5. $A = \left[-\frac{5}{2}; \sqrt{8}\right]$, $B = \left[\sqrt{3}; \frac{15}{2}\right]$ aralıkları için $A \cup B$ kümesinde bulunan tamsayıların eleman sayısını bulunuz?

Çözüm: $-\frac{5}{2} < \sqrt{3}$ ve $\sqrt{8} < \frac{15}{2}$ olduğundan,

$$A \cup B = \left[-\frac{5}{2}; \frac{15}{2}\right] = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

bulunur. Buna göre 10 tane tamsayı mevcuttur.

Temel Eşitsizlik

6. $0 \leq x \leq 3$ ve $2 \leq y \leq 5$ olduğuna göre, $4x - 2y$ ifadesinin en büyük değeri nedir?

Çözüm: $4x - 2y$ ifadesinin en büyük değeri olması için y en küçük x en büyük seçilmelidir.

$$y = 2, x = 3 \text{ seçilirse } 4x - 2y = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 8$$

olarak bulunur.

7. $x + 3y - 12 = 0$ ve $1 < y < 5$ ise, x'in çözüm aralığı nedir?

A) $3 < x < 6$ B) $4 < x < 10$ C) $4 < x < 12$
D) $2 < x < 8$ E) $0 < x < 10$

Çözüm: $y = 1$ alınırsa $x = 10$
$y = 5$ alınırsa $x = 0$
$4 < x < 10$

8. x, y ve z pozitif reel sayılar ve

$$xy = \frac{6}{25}, \quad yz = \frac{1}{5}, \quad zx = \frac{2}{15}$$

olduğuna göre x, y ve z'nin küçükten büyüğe doğru sıralaması nasıldır?

Çözüm: Her üç eşitlik çarpılırsa,

$$xy \cdot yz \cdot zx = \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{15}$$

$$(xyz)^2 = \left(\frac{2}{25}\right)^2$$

$$xyz = \frac{2}{25}$$

bulunursa,

$$xy = \frac{6}{25} \text{ ve } xyz = \frac{2}{25} \text{ için } z\frac{6}{25} = \frac{2}{25} \text{ olup } z = \frac{1}{3}$$

$$yz = \frac{1}{5} \text{ ve } xyz = \frac{2}{25} \text{ için } x\frac{1}{5} = \frac{2}{25} \text{ olup } x = \frac{2}{5}$$

$$zx = \frac{2}{15} \text{ ve } xyz = \frac{2}{25} \text{ için } y\frac{2}{15} = \frac{2}{25} \text{ olup } y = \frac{3}{5}$$

olduğundan

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5}$$

$$\frac{5}{15} < \frac{6}{15} < \frac{9}{15}$$

$$z < x < y$$

bulunur.

9. $-3 < x < 5$ olduğuna göre, $2 - x$ ifadesinin alabileceği en küçük tamsayı değeri kaçtır?

Çözüm: Eşitsizliğin her iki tarafını -1 ile çarparsak ve her tarafı 1 ile toplarsak,

$$-8 < x < 5$$

$$-5 < -x < 8$$

$$2 - 5 < 2 - x < 2 + 8$$

$$-3 < 2 - x < 10$$

bulunur. Buna göre x'in en küçük tamsayı değeri -2 dir.

10. $x < y, z > 0$ ise, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $x < \frac{x+y}{2} < y$ B) $x + y < 2y$ C) $xz > yz$
D) $x + z < y + z$ E) $2x < x + y$

Çözüm:
A) İki sayının aritmetik ortalaması daima bu iki sayı arasında olup doğrudur.
B) $x < y \Leftrightarrow x + y < y + y \Leftrightarrow x + y < 2y$ olup doğrudur.
C) $x < y, z > 0 \Leftrightarrow xz < yz$ olup verilen cevap yanlıştır.
D) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$ olup doğrudur.
E) $x < y \Leftrightarrow x + x < x + y \Leftrightarrow 2x < x + y$ olup doğrudur.
C şıkkı yanlıştır.

11. x, y ve z reel sayıları için
$$xy < 0 < x < yz$$
olduğuna göre, x, y ve z'nin küçükten büyüğe doğru sıralaması nasıldır?

Çözüm: $xy < 0 < x$ olduğundan $y < 0$
$x < yz$ ve $y < 0$ olduğundan $x < z$
Buna göre $y < x < z$ olarak bulunur.

12. $x > 0, x = 4y, z = 5y$ ise x, y ve z'nin küçükten büyüğe doğru sıralaması nasıldır?

Çözüm: $x > 0, x = 5y, z = 4y$ ise $4x = 20y = 5z$ dır.
$y < z < x$

13. x, y ve z birer reel sayı olmak üzere;
$$z < 0 < y < x$$
olduğuna göre, aşağıdaki işlemlerden hangisinin sonucu sıfır olabilir?

A) $x + y - z$ B) $x \cdot y \cdot z$ C) $x - y + z$
D) $x \cdot y - z$ E) $x - y \cdot z$

Çözüm: $z < 0 < y < x$ olduğundan;
A) $x + y - z > 0$ dir.
B) $x \cdot y \cdot z < 0$ dir.

C) $x - y + z = 0$ olabilir.
D) $x \cdot y - z > 0$ dir.
E) $x - y \cdot z > 0$ dir.

C şıkkı doğrudur.

Reel Sayılarda Pozitif ve Negatiflik

14. x, y ve z birer reel sayı olmak üzere;

$x^3 \cdot y^4 < 0$
$x^5 \cdot z^7 > 0$
$y < z$

olduğuna göre x, y ve z'nin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-,-,-$ B) $-,-,+$ C) $-,+,-$ D) $+,-,+$ E) $+,-,-$

Çözüm: $y^4 > 0$ olduğundan $x^3 < 0$ yani $x < 0$ dır.
$x < 0$ olduğundan $x^5 < 0$ olup $z^7 < 0$ yani $z < 0$ dır.
$y < z$ den $y < 0$ dır.

A şıkkı doğrudur.

15. a, b, ve c birer reel sayı olmak üzere;

$a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot c^{-4} < 0$
$a \cdot b \cdot c < 0$
$b + c < 0$

olduğuna göre a, b ve c'nin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-,-,-$ B) $-,-,+$ C) $-,+,-$ D) $-,+,+$ E) $+,-,-$

Çözüm: $c^{-4} > 0$ olduğundan $a \cdot b < 0$ dır. Buna göre $a \cdot b \cdot c < 0$ olmasından $c > 0$ olur. Şu halde $b + c < 0$ dan $b < 0$ olur.
$a \cdot b < 0$ den $a > 0$ dır.

D şıkkı doğrudur.

$0 < x < 1$ Aralığındaki Eşitsizlikler

16. $x^2 < x$, $xy < y$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $0 < x < y$ B) $0 < x < 1$ C) $x < y^2$ D) $y < 0$ E) $0 < y$

Çözüm: $x^2 < x$ ise $0 < x < 1$
$xy < y$ ise $y > 0$
D şıkkı doğrudur.

17. m ve n birer reel sayı ve
$m, n > 0$ ve $m < m^2$
olduğuna göre, m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $m < -1$ B) $0 < x < 1$ C) $-1 < m < 0$ D) $m = 0$ E) $m > 1$

Çözüm: $m, n > 0$ ve $m < m^2$ olduğundan $m > 1$ dir.
E şıkkı doğrudur.

18. x ve y birer reel sayı, $x > 1$ ve $y < y^2$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $x + y < 1$ B) $0 < x < 1$ C) $xy < 0$ D) $xy < x$ E) $y > 1$

Çözüm: $x > 1$ ve $y < y^2$ olduğunda $0 < y < 1$ aralığındadır. Buna göre $xy < x$ her zaman doğrudur.
D şıkkı doğrudur.

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. M. Zeki DERMAN, Serdar GÜLMEZ, Ökkeş ÖZKÖSELER, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2002, Ankara.
4. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Matematik Cep Kitabı, Final Dergisi Yayınları, 1989, İstanbul.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.