6. BÖLÜM
KÖKLÜ İFADELER

KÖKLÜ İFADE KAVRAMI

6.1. Tanım: $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $x^n = a$ eşitliğini sağlayan x sayısına a'nın n. kuvvet kökü denir. $x = \sqrt[n]{a}$ şeklinde gösterilir ve n. kuvvetten kök a şeklinde okunur.

$n = 1$ için $\sqrt[1]{a} = a$ (birinci dereceden kök kendisidir)
$n = 2$ için $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ (karekök)
$n = 3$ için $\sqrt[3]{a}$ (küp kök)
$n = 4$ için $\sqrt[5]{a}$ (dördüncü kuvvetten kök)
şeklinde okunur.

Köklü ifade tanımından şu iki önemli sonuç elde edilir.

6.1. Sonuç: Reel sayının çift kuvveti negatif olmayacağından, negatif bir sayının çift kuvvetten kökü reel sayı değildir. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt[2n]{a}$ ifadesinin bir reel sayı olabilmesi için $a \geq 0$ dır. Örneğin,

$$x^2 = -3 \text{ ise } x \notin \mathbb{R} \text{ ve } \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}, \text{ fakat } x^3 = -8 \text{ ise } x = -2$$

dir.

Örnek: $\sqrt{x-2} + \sqrt[4]{2-x} + 3x$ ifadesinin kök kuvvetleri çift sayı olduğundan,

$$x - 2 \geq 0 \text{ ve } 2 - x \geq 0$$
$$x \geq 2 \text{ ve } 2 \geq x$$

ise $x = 2$ olmasıyla mümkündür. Buna göre,

$$\sqrt{2-2} + \sqrt[4]{2-2} + 3 \cdot 2 = 6$$

bulunur.

Örnek: $\frac{\sqrt{x-4}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x-3}}$ ün değerini bulunuz.

Çözüm: Köklü bir ifadenin içi tanımlı olması için pozitif olmalıdır. Buna göre,

$$4 - x \geq 0 \text{ ve } 4 - x \leq 0$$
$$4 \geq x \text{ ve } 4 \leq x$$

olması için $x = 4$ olmalıdır. O halde,

$$\frac{\sqrt{x-4}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{4-4}+\sqrt{4+5}}{\sqrt{4-4}+\sqrt{4-3}} = 3$$

dir.

6.2. Sonuç: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (Bu sonuç sayesinde köklü bir ifade üstlü bir ifadeye çevrilebilir veya tersi olabilir.) Örneğin, $\sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$ dur.

Örnek: $\sqrt[3]{5^{2x}} = \sqrt[6]{(0,2)^{2x+6}}$ ise x'in değeri nedir?

Çözüm: Bu köklü ifadeler üstlü ifadelere çevrilirse,

$$5^{\frac{2x}{3}} = (0,2)^{\frac{2(x+3)}{3}}$$
$$5^{\frac{2x}{3}} = \left(\frac{2}{10}\right)^{\frac{2(x+3)}{3}}$$
$$\frac{2x}{3} = \frac{2(x+3)}{3}$$
$$2x = -x - 3$$
$$3x = -3$$
$$x = -1$$

bulunur.

6.1. Teorem: Her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

i) m tek sayı ise $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

ii) m çift sayı ve $a > 0$ ise $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ ve $(\sqrt[n]{-a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

dir.

İspat: i) m tek sayı ise

$$(\sqrt[n]{a})^m = (a^{1/n})^m = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

olur.

ii) m çift sayı ve $a > 0$ ise

$$(\sqrt[n]{a})^m = (a^{1/n})^m = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

ve

$$(\sqrt[n]{-a})^m = ((-a)^{1/n})^m = (a^{1/n})^m = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

olur.

Örnek: $(\sqrt[4]{-2})^4 = \sqrt[4]{(-2)^4} = 2^{\frac{4}{4}} = 2$

Örnek: $(\sqrt[5]{-2})^5 = \sqrt[5]{(-2)^5} = (-2)^{\frac{3}{3}} = -2$

Örnek: $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{3^2}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $-3 < 0, 3 > 0$ ve 2 çift sayı olduğundan

$$\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{3^2} = 3 + 3 = 6$$

bulunur.

Örnek: $2 \cdot \sqrt{0{,}09} + \sqrt{0{,}25} + \sqrt[3]{0{,}001}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $2 \cdot \sqrt{0{,}09} + \sqrt{0{,}25} + \sqrt[3]{0{,}001}$

$$= 2 \cdot \sqrt{(0{,}3)^2} + \sqrt{(0{,}5)^2} + \sqrt[3]{(0{,}1)^3}$$
$$= 2 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}1$$
$$= 1{,}2$$

Örnek: $\sqrt[4]{(-3)^8} - \sqrt[5]{(-2)^5} + \sqrt[3]{-1}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\sqrt[4]{(-3)^8} - \sqrt[5]{(-2)^5} + \sqrt[3]{(-1)^3}$

$$= (-3)^{\frac{8}{4}} - (-2)^{\frac{5}{5}} + (-2)^{\frac{3}{3}}$$
$$= 9 - (-2) + (-1)$$
$$= 10$$

6.2. Teorem (Rasyonel üstün genişlemesi ve sadeleştirilmesi): Her $k, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

a) $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n\cdot k]{a^{n\cdot k}}$

b) $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n/k]{a^{n/k}}$

dir.

İspat:

a) $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^{\frac{n\cdot k}{n\cdot k}} = \sqrt[n\cdot k]{a^{n\cdot k}}$

b) $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^{\frac{n/k}{n/k}} = \sqrt[n/k]{a^{n/k}}$

Örnek: $\sqrt[6]{(-2)^{12}} = \sqrt[6/6]{(-2)^{12/6}} = (-2)^2 = 4$

Örnek: $\sqrt[6]{27} = \sqrt[2\cdot 3]{3^{1\cdot 2}} = \sqrt{3}$

6.3. Teorem: n. Kuvvetten bir kökün dışındaki ifadenin kök içine alınması için, n. kuvveti alınarak kök içine yazılabilir. Yani, her $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

dir.

İspat: $a \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{n}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a^n \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$

Örnek: $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$

Örnek: $2\sqrt{10} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = \sqrt{40}$

Örnek: $2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot \frac{1}{8}} = \sqrt[4]{16 \cdot \frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2}$

Örnek: $x > 0, y > 0$ ise $\frac{x}{y} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^3 \cdot \frac{y^2}{x^2}}$ dir.

Çözüm: $\frac{x}{y} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^3 \cdot \frac{y^2}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3} \cdot \frac{y^2}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$

6.1. Not: Köklü ifade asal çarpanlarla da dışarı çıkarılabilir. Bunu örnekle anlayalım. Örnekte asal çarpanlara ayırdıktan sonra her derece sayısı kadar aynı sayı bir tek sayı olarak çıkar.

Örnek: $\sqrt{20}$ yı kök dışına çıkaralım.

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Örnek: $\sqrt[3]{54}$ yı kök dışına çıkaralım.

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right) 3$$

$\sqrt[3]{54} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$

6.2. Not: Aynı dereceden köklü birkaç tane ifadenin ortak paranteze alınabilir. Mesela, her $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$a \cdot \sqrt[n]{x} + b \cdot \sqrt[n]{x} - c \cdot \sqrt[n]{x} = (a + b - c) \cdot \sqrt[n]{x}$$

gibi…

Örnek: $3 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} = (3 + 5 - 1) \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

Örnek: $\sqrt{32} + \sqrt{128} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{64 \cdot 2} = 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Örnek: $\dfrac{\sqrt{14,4}+\sqrt{0,9}}{\sqrt{0,1}+\sqrt{3,6}} = \dfrac{\sqrt{\frac{144}{10}}+\sqrt{\frac{9}{10}}}{\sqrt{\frac{1}{10}}+\sqrt{\frac{36}{10}}} = \dfrac{\frac{12}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{6}{\sqrt{10}}} = \dfrac{\frac{15}{\sqrt{10}}}{\frac{7}{\sqrt{10}}} = \dfrac{15}{7}$

6.3. Not: $\sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{x} \neq \sqrt[n]{x \pm y}$

6.4. Teorem: Her $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere;

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad (b \neq 0)$

dir.

İspat: Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere;

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad (b \neq 0)$

dir.

Örnek: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$

Örnek: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \sqrt{8} = \sqrt{\dfrac{3 \cdot 8}{6}} = \sqrt{4} = 2$

Örnek: $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{4 \cdot 250} = \sqrt[3]{1\,000} = 10$

Örnek:
$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+1) &= \sqrt{12}-\sqrt{18}+\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Örnek: $\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\cdot\ \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$ işleminin en sade hali nedir?

Çözüm: $\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\cdot\ \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{9}-1}$$
$$= \sqrt[3]{3-1}$$
$$= \sqrt[3]{2}$$

Örnek: $\sqrt[5]{a\cdot b^3} : \sqrt[3]{a^2\cdot b^3}$ işleminin en sade biçimi nedir?

Çözüm: $\sqrt[5]{a\cdot b^3} : \sqrt[3]{a^2\cdot b^3} = \sqrt[15]{(a\cdot b^3)^3} : \sqrt[15]{(a^2\cdot b^3)^5}$

$$= \frac{\sqrt[15]{a^3b^9}}{\sqrt[15]{a^{10}b^{15}}}$$
$$= \sqrt[15]{\frac{a^3b^9}{a^{10}b^{15}}}$$
$$= \sqrt[15]{\frac{1}{a^7b^6}}$$

6.4. Not: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $m \neq n$ ise $\sqrt[n]{a}\cdot\ \sqrt[m]{b}$ veya $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, $(b \neq 0)$ işlemleri yapılırken OKEK(n; m) alınır ve köklerin dereceleri bu sayıda genişletilir.

Örnek: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\ \sqrt[6]{5}$ çarpımı tek bir kök içinde yazınız.

Çözüm: OKEK(2; 3; 6) = 6 olduğundan

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\ \sqrt[6]{5} = \sqrt[2\cdot3]{2^3}\cdot\ \sqrt[3\cdot2]{3^2}\cdot\ \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{2^3\cdot 3^2\cdot 5} = \sqrt[6]{8\cdot 9\cdot 5} = \sqrt[6]{360}$$

Örnek: $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{4}}$ işleminin tek bir kök içinde yazınız.

Çözüm: OKEK(2; 3; 6) = 6 ve

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[2\cdot3]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3\cdot2]{4^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3\cdot 2}{4^2}} = \sqrt[6]{1} = 1$$

KÖKLÜ İFADENİN EŞLENİĞİ

Paydasında köklü ifade bulunan bir kesrin paydası kökten kurtarılarak kesrin paydası rasyonel yapılır. Bunun için şu durumlar söz konusudur:

1. $b \neq 0$ olmak üzere, $\sqrt{b}$ ifadesinin eşleniği $\sqrt{b}$ dir. Yani, $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ dir.

Örnek: $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

Örnek: $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$

2. $n > m$ ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{b^m}$ ifadesinin eşleniği $\sqrt[n]{b^{n-m}}$ dir. Yani,

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

dir.

Örnek: $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2^{3-1}}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^{3-1}}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$

Örnek: $\frac{15}{\sqrt[3]{3}} = \frac{15 \cdot \sqrt[3]{3^{3-1}}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^{3-1}}} = \frac{15 \cdot \sqrt[3]{9}}{3} = 5\sqrt[3]{9}$

3. $a > b$ ve $a, b \neq 0$ olmak üzere, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ nin eşleniği $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ dir. Yani,

$$\frac{1}{\underset{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \text{ veya } \frac{1}{\underset{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

dir.

Örnek: $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{2\sqrt{2}}{2}$$
$$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{3}$$

Örnek: $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$

$(2+\sqrt{3})$

Örnek: $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$

$(\sqrt{3}+1)$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}-\frac{3\sqrt{3}}{3}$$
$$=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}$$
$$=1$$

4. Rasyonel ifadelerin paydasındaki kök 3. dereceden fazla ise çarpanlara ayırma mantığı kullanılır. Bu konuda çarpanlara ayırma konusunda gösterilecektir.

KÖK İÇİNDE KÖKLER

6.5. Teorem: Her $a \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere,

a) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

b) $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n\cdot m]{a^m b}$

dir.

İspat: a) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

b) $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{ab^{\frac{1}{m}}} = (a^{\frac{m}{m}}b^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = (a^m b)^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[n\cdot m]{a^m b}$

Örnek: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{256}}} = \sqrt[3\cdot 4\cdot 2]{2^8} = \sqrt[24]{2^8} = \sqrt[3]{2}$

Örnek: : $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3\cdot 2]{5^2 5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$

Örnek: $\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\sqrt{2^2\,\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}}$

$$= \sqrt[4]{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$$
$$= \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3\,\frac{1}{2}}}$$
$$= \sqrt[12]{2^2}$$
$$= \sqrt[6]{2}$$

6.4. Sonuç: $\underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\cdots\sqrt{x}}}}}_{\text{n tane}} = \sqrt[2^n]{x^{2^n-1}}$

Örnek: $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{\sqrt{7}}}} = \sqrt[2^3]{7^{2^3-1}} = \sqrt[8]{7^7}$

6.5. Sonuç: $\sqrt[n]{x^{n-1}\sqrt[m]{x^{m-1}\sqrt[p]{x^{p-1}}}} = \sqrt[n\cdot m\cdot p]{x^{n\cdot m\cdot p-1}}$

Örnek: $\sqrt[5]{2^4\sqrt[4]{2^3\sqrt[3]{2^2}}} = \sqrt[5\cdot 4\cdot 3]{2^{5\cdot 4\cdot 3-1}} = \sqrt[30]{2^{29}}$

6.6. Teorem: $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

a) $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

b) $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

şeklindedir.

İspat:

a) $$a+\sqrt{b} = \frac{a+\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2-a^2+b}{4}}$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2-a^2+b}{4}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-b})}{2}\cdot\frac{(a-\sqrt{a^2-b})}{2}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-b})}{2}}\sqrt{\frac{(a-\sqrt{a^2-b})}{2}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-b})}{2}} + \sqrt{\frac{(a-\sqrt{a^2-b})}{2}}\right)^2$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının kara kökünü alırsak,

$$a + \sqrt{b} = \left(\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-b})}{2}} + \sqrt{\frac{(a-\sqrt{a^2-b})}{2}} \right)^2$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

elde edilir.

b) (a) şıkkına benzer yolla çözülür.

Örnek: $\sqrt{5 - \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5^2-24}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5^2-24}}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

6.7. Teorem: $x, y \in \mathbb{R}^+; x > y; a = x + y; b = x \cdot y$ olmak üzere,

a) $\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

b) $\sqrt{a - 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

dir.

Çözüm:

a) $a + 2\sqrt{b} = (x + y) + 2\sqrt{xy}$

$$= x + 2\sqrt{xy} + y$$

$$= (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafının kara kökünü alırsak,

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

elde edilir.

b) (a) şıkkına benzer yolla çözülür.

Örnek: $\sqrt{5 - \sqrt{24}}$ işlemini 6.7. teoreme uygulayınız.

Çözüm: $3 \cdot 2 = 6$ ve $3 + 5 = 5$

$$\sqrt{5 - \sqrt{24}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Örnek: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ işlemini 6.7. teoreme uygulayınız.

Çözüm: $2+1=3$ ve $2\cdot 1=2$

$$\sqrt{3+\ 2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{1}=\sqrt{2}+1$$

Örnek: $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ işlemini 6.7. teoreme uygulayınız.

Çözüm: $4+3=7$ ve $4\cdot 3=12$

$$\sqrt{7-\ 4\sqrt{3}}=\sqrt{7-\ 2\sqrt{12}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$$

Örnek: $\sqrt{6+\ \sqrt{11}}$ işlemini 6.7. teoreme uygulayınız.

Çözüm: $\frac{11}{2}+\frac{1}{2}=6$ ve $\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{4}$

$$\sqrt{6+\sqrt{11}}=\sqrt{6+\ \sqrt{11\cdot\frac{4}{4}}}=\sqrt{6+\ 2\sqrt{\frac{11}{4}}}=\sqrt{\frac{11}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

SONSUZ KÖKLER

6.8. Teorem: Her $a\in\mathbb{R}^{+}, n\in\mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere,

$$\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a}}}=\ \sqrt[n-1]{a}$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\cdots}}}=\ x$ olsun. Her iki tarafının n. kuvvetini alırsak,

$$a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a}}=x^{n}$$
$$ax=x^{n}$$
$$axx^{-1}=x^{n}x^{-1}$$
$$a=x^{n-1}$$
$$a^{\frac{1}{n-1}}=x$$
$$\sqrt[n-1]{a}=x$$

bulunur.

Örnek: $\sqrt{12\sqrt{12\sqrt{12\cdots}}} = 12$

Örnek: $\sqrt[3]{25\sqrt[3]{25\sqrt[3]{25\cdots}}} = \sqrt{25} = 5$

Örnek: $\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt{3\cdots}}}} = \sqrt[6]{2^2 3\sqrt[6]{2^2 3\cdots}} = \sqrt[5]{12}$

6.9. Teorem: Her $a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\sqrt[n]{a:\sqrt[n]{a:\sqrt[n]{a:\cdots}}} = \sqrt[n+1]{a}$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $\sqrt[n]{a:\sqrt[n]{a:\sqrt[n]{a:\cdots}}} = x$ olsun. Her iki tarafının n. kuvvetini alırsak,

$$a:\sqrt[n]{a:\sqrt[n]{a:\cdots}} = x^n$$
$$a:x = x^n$$
$$a = x^n \cdot x$$
$$a = x^{n+1}$$
$$\sqrt[n+1]{a} = x$$

bulunur.

Örnek: $\sqrt{8:\sqrt{8:\sqrt{8:\cdots}}} = \sqrt[3]{8} = 2$

Örnek: $\sqrt[3]{a:\sqrt[3]{a:\sqrt[3]{a:\cdots}}} = 3$ ise a nın değeri nedir?

Çözüm: $\sqrt[3]{a:\sqrt[3]{a:\sqrt[3]{a:\cdots}}} = \sqrt[4]{a} = 3$

$$(\sqrt[4]{a})^4 = 3^4$$
$$a = 81$$

6.10. Teorem: Her $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

a) $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$

b) $\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\cdots}}} = \frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}$

dir.

İspat: a) Kabul edelim ki $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}} = x$ olsun. Her iki tarafının n. kuvvetini alırsak,

$$a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}} = x^2$$
$$a + x = x^2$$
$$x^2 - x - a = 0$$
$$x = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$$

bulunur.

b) (a) şıkkına benzer yolla çözülür.

Örnek: $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{4\cdot 12+1}}{2} = 4$

Örnek: $\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\cdots}}}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\cdots}}} = \frac{-1+\sqrt{4\cdot 30+1}}{2} = 5$

Örnek: $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}} = 6$ ise a'nın değeri nedir?

Çözüm: $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}} = 6$

$$\sqrt{a+6}=6$$
$$a+6=6^2$$
$$a=30$$

6.11. Teorem: Her $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

a) $\sqrt{a(a+1)+\sqrt{a(a+1)+\sqrt{a(a+1)+\cdots}}}=a+1$

b) $\sqrt{a(a+1)-\sqrt{a(a+1)-\sqrt{a(a+1)-\cdots}}}=a$

İspat: a) 6.10. Teoreminde a yerine a(a+1) alınırsa,

$$\sqrt{a(a+1)+\sqrt{a(a+1)+\sqrt{a(a+1)+\cdots}}}=\frac{1+\sqrt{4a(a+1)+1}}{2}$$
$$=\frac{1+\sqrt{4a^2+4a+1}}{2}$$
$$=\frac{1+\sqrt{(2a+1)^2}}{2}$$
$$=\frac{1+2a+1}{2}$$
$$=a+1$$

b) (a) şıkkına benzer şekilde yapılır.

Örnek: $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}}$ işleminin sonucunu bu teoremle bulunuz.

Çözüm: $12=3\cdot 4$ olarak alınırsa $a=3$ olacağından

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}}=4$$

dür.

Örnek: $\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\cdots}}}$ işleminin sonucu bu teoremle bulunuz.

Çözüm: $30=5\cdot 6$ olarak alınırsa $a=5$ olacağından
$$\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\cdots}}}=5$$
dür.

KÖKLÜ İFADELERDE SIRALAMA

Köklerinin dereceleri eşit olan sayılar köklerin içindeki sayılara göre sıralanır. Mesela,
$$a<b<c \text{ ise } \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}<\sqrt[n]{c}$$
biçimindedir.

Örnek: $a=\sqrt{2}, b=\sqrt[3]{5}, c=\sqrt[6]{15}$ sayılarını sıralayınız.

Çözüm: $\text{OKEK}(2;\ 3;\ 6)=6$
$$a=\sqrt{2}=\sqrt[2\cdot 3]{2^3}=\sqrt[6]{8}$$
$$b=\sqrt[3]{5}=\sqrt[3\cdot 2]{5^2}=\sqrt[6]{25}$$
$$c=\sqrt[6]{15}$$
olacağından $a<c<b$ bulunur.

Örnek: $a=2^{-\frac{1}{3}}, b=3^{-\frac{1}{5}}, c=10^{-\frac{1}{15}}$ sayılarını sıralayınız.

Çözüm: $\text{OKEK}(3;\ 5;\ 15)=15$
$$a=2^{-\frac{1}{3}}=2^{-\frac{5}{15}}=\sqrt[15]{2^{-5}}=\sqrt[15]{\frac{1}{32}}$$
$$b=3^{-\frac{1}{5}}=3^{-\frac{3}{15}}=\sqrt[15]{3^{-3}}=\sqrt[15]{\frac{1}{27}}$$
$$c=10^{-\frac{1}{15}}=\sqrt[15]{10^{-1}}=\sqrt[15]{\frac{1}{10}}$$
olacağından $a<b<c$ bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. 0,0025'in karekökü nedir?

A) 0,005 B) 0,05 C) 0,5 D) 5 E) 25

Çözüm: $\sqrt{0{,}0025} = \sqrt{\frac{25}{10\,000}} = \frac{5}{100} = 0{,}05$

Cevap: B

2. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{125}\right)^{-1}}$ işleminin sonu nedir?

A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 125 D) 25 E) 5

Çözüm: $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5^3}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{(5^{-3})^{-1}} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

Cevap: E

3. $\sqrt{1{,}69} + \sqrt{1{,}21} - \sqrt{0{,}36}$ işleminin sonucu nedir?

A) 1,8 B) 1,9 C) 2,0 D) 2,1 E) 2,2

Çözüm: $\sqrt{1{,}69} + \sqrt{1{,}21} - \sqrt{0{,}36}$

$= \sqrt{\frac{169}{100}} + \sqrt{\frac{121}{100}} - \sqrt{\frac{36}{100}}$

$= \frac{13}{10} + \frac{11}{10} - \frac{6}{10}$

$= 1{,}8$

Cevap: A

4. $\sqrt{\frac{45}{4}} + \sqrt{\frac{27}{4}}$ işleminin sonucu nedir?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) 3

Çözüm: $\sqrt{\frac{45}{4}} + \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Cevap: D

5. $\dfrac{\sqrt{0{,}64}}{\sqrt{0{,}16}+\sqrt{0{,}36}}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 0,6 B) 0,7 C) 0,8 D) 0,9 E) 1

Çözüm: $\dfrac{\sqrt{0{,}64}}{\sqrt{0{,}16}+\sqrt{0{,}36}} = \dfrac{\sqrt{\frac{64}{100}}}{\sqrt{\frac{16}{100}}+\sqrt{\frac{36}{100}}} = \dfrac{\frac{8}{10}}{\frac{4}{10}+\frac{6}{10}} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

Cevap: C

6. $\dfrac{\sqrt{108}+\sqrt{27}}{\sqrt{12}+\sqrt{3}}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) $3\sqrt{5}$ E) $4\sqrt{5}$

Çözüm: $\dfrac{\sqrt{180}+\sqrt{45}}{\sqrt{20}+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{36\cdot 5}+\sqrt{9\cdot 5}}{\sqrt{4\cdot 5}+\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \dfrac{9\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 3$

Cevap: A

7. $\dfrac{\sqrt{8{,}1}+\sqrt{2{,}7}}{\sqrt{10}}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 1,1 B) 1,2 C) 1,3 D) 1,4 E) 1,5

Çözüm:

$\dfrac{\sqrt{8{,}1}+\sqrt{2{,}7}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{\frac{81}{10}}+\sqrt{\frac{27}{10}}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\frac{9}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\frac{12}{\sqrt{10}}}{\sqrt{10}} = \dfrac{12}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{12}{10} = 1{,}2$

Cevap: E

8. $\sqrt[3]{0{,}027}\cdot\sqrt[4]{(0{,}0016)^{-1}}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 4/3 B) 3/2 C) 2 D) 1 E) 1/3

Çözüm: $\sqrt[3]{0{,}027}\cdot\sqrt[4]{(0{,}0016)^{-1}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{16}{10000}\right)^{-1}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1000}{16}}$$
$$= \sqrt[3]{\left(\frac{3}{10}\right)^3} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{10}{2}\right)^4}$$
$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{2}$$
$$= \frac{3}{2}$$

Cevap: B

9. $\frac{\sqrt{9x}}{3} - \frac{\sqrt{4x}}{3} = 2$ olduğuna göre, x'in değeri nedir?

A) 30 B) 32 C) 36 D) 40 E) 48

Çözüm: $\frac{\sqrt{9x}}{3} - \frac{\sqrt{4x}}{3} = 2$

$$\frac{3\sqrt{x}}{3} - \frac{2\sqrt{x}}{3} = 2$$
$$\frac{\sqrt{x}}{3} = 2$$
$$\sqrt{x} = 6$$
$$x = 36$$

Cevap: C

10. $25^x = 4$ olduğuna göre 5^{5x} nin değeri nedir?

A) 18 B) 20 C) 25 D) 32 E) 35

Çözüm: $25^x = 4$

$$5^{2x} = 4$$
$$\sqrt{5^{2x}} = \sqrt{4}$$
$$5^x = 2$$
$$5^{5x} = 2^5$$
$$5^{5x} = 32$$

Cevap: D

11. $\sqrt{ab^2} = \sqrt[6]{a^3b^5x}$ ise x'in değeri nedir?

A) b^4 B) b^5 C) b^6 D) b^7 E) b^8

Çözüm: $\sqrt{ab^2} = \sqrt[6]{a^3b^5x}$ denkleminin her iki tarafının 6'ıncı kuvvetini alalım.

$$(\sqrt{ab^2})^6 = (\sqrt[6]{a^3b^5x})^6$$
$$a^3b^{12} = a^3b^5x$$
$$x = b^7$$

Cevap: D

12. $\sqrt{0{,}25^{x-7}} = 2^{x+2}$ denkleminin köklerinden biri nedir?

A) –3 B) –2 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $\sqrt{0{,}25^{x-7}} = 2^{x+2}$

$$\sqrt{\left(\frac{25}{100}\right)^{x-7}} = 2^{x+2}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x-7}{2}} = 2^{x+2}$$
$$2^{-\frac{x-7}{2}} = 2^{x+2}$$
$$\frac{x-7}{-2} = x + 2$$
$$x - 7 = -2x - 4$$
$$x = 1$$

Cevap: C

13. $x \cdot \sqrt{\frac{1}{1{,}2}} = 1$ olduğuna göre, x'in değeri nedir?

A) $\sqrt{\frac{6}{5}}$ B) $\sqrt{\frac{5}{6}}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{5}$ E) 1

Çözüm: $x \cdot \sqrt{\frac{1}{1{,}2}} = 1$

$$x \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{12}{10}}} = 1$$

$$x \cdot \sqrt{\frac{10}{12}} = 1$$

$$x = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Cevap: A

14. $\sqrt{6+\sqrt{30}} + \sqrt{6-\sqrt{20}} - \sqrt{5}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:

$$\sqrt{6+\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{36-20}}{2}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{6-\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{6-\sqrt{36-20}}{2}} = \sqrt{\frac{6-4}{2}} = 1$$

$$\sqrt{6+\sqrt{30}} + \sqrt{6-\sqrt{20}} - \sqrt{5} = \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} = 1$$

Cevap: B

15. $\sqrt{x+\sqrt{5}} - \sqrt{x-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ olduğuna göre, x'in değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\sqrt{x+\sqrt{5}} - \sqrt{x-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{5}} - \sqrt{x-\sqrt{5}}\right)^2 = 2$$

$$x+\sqrt{5} - 2\sqrt{\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)} + x - \sqrt{5} = 2$$

$$2x - 2\sqrt{x^2-5} = 2$$

$$x - 1 = \sqrt{x^2-5}$$

$$(x-1)^2 = \left(\sqrt{x^2-5}\right)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5$$

$$x = 2$$

Cevap: B

16. $\sqrt{a} = 0,\overline{4}$ devirli sayısı için a sayısının değeri nedir?

A) $\frac{8}{81}$ B) $\frac{10}{81}$ C) $\frac{11}{81}$ D) $\frac{14}{81}$ E) $\frac{16}{81}$

Çözüm: $\sqrt{a} = 0,\overline{4} = \frac{4}{9}$ ise $a = \frac{16}{81}$ dir.

Cevap: E

17. $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{5}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 8 B) 10 C) $\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $\sqrt{3}$

Çözüm: $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{5}$

$= (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{5}$

$= 5 - 2\sqrt{5} + 3 + +2\sqrt{5}$

$= 8$

Cevap: A

18. $(\sqrt{48} + \sqrt{32})(\sqrt{12} - \sqrt{8})$ işleminin sonucu nedir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Bu sorunun cevabında iki kare farkını hatırlamak gerekir.

$(\sqrt{48} + \sqrt{32})(\sqrt{12} - \sqrt{8})$

$= (4\sqrt{3} + 4\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

$= 8(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$= 8\left((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\right)$

$= 8(3 - 2)$

$= 8$

Cevap: D

19. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2}$ olduğuna göre, $a \cdot b$ nin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2}$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a+b+2})^2$$
$$a+\sqrt{ab}+b = a+b+2$$
$$a \cdot b = 2$$

Cevap: B

20. x ve y birer reel sayı olmak üzere;

$$12^{x+y} = 3^x$$

olduğuna göre, 4^x in y türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3^{-y} B) 12^{2y} C) 12^{-y} D) 12^{-2y} E) 12^y

Çözüm: $12^{x+y} = 3^x$

$$(3 \cdot 4)^x 12^y = 3^x$$
$$3^x 4^x 12^y = 3^x$$
$$4^x 12^y = 1$$
$$4^x = 12^{-y}$$

Cevap: C

21. $\sqrt{4} < x < \sqrt{5}$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

Çözüm: Eşitsizliğin karesi alınırsa, $16 < x^2 < 25$ dir.

Cevap: E

22. $x \in \mathbb{R}$, $(\sqrt{12}-\sqrt{5})^x = 7$ olduğuna göre, $(\sqrt{12}+\sqrt{5})^x$ ifadesi a türünden değeri nedir?

A) 7^{x-3} B) 7^{x-2} C) 7^{x-1} D) 7^x E) 7^{x+1}

Çözüm: $(\sqrt{12}-\sqrt{5})^x = y$ olsun. Bu takdirde her iki denklemi taraf tarafa çarparsak,

$$(\sqrt{12}-\sqrt{5})^x(\sqrt{12}+\sqrt{5})^x = 7y$$
$$(\sqrt{12}-\sqrt{5})(\sqrt{12}+\sqrt{5})^x = 7y$$
$$((\sqrt{12})^2-(\sqrt{5})^2)^x = 7y$$
$$(12-5)^x = 7y$$
$$7^x = 7y$$

$y = 7^{x-1}$

olur.

Cevap C

23. $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $\dfrac{9y}{x+\frac{1}{y}} + \dfrac{4x}{y+\frac{1}{x}} = \dfrac{5x^2}{xy+1}$

olduğuna göre, $\dfrac{x}{y}$ bölümü nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\dfrac{9y}{x+\frac{1}{y}} + \dfrac{4x}{y+\frac{1}{x}} = \dfrac{5x^2}{xy+1}$

$\dfrac{9y^2}{xy+1} + \dfrac{4x^2}{xy+1} = \dfrac{5x^2}{xy+1}$

$9y^2 + 4x^2 = 5x^2$

$9y^2 = x^2$

$3y = x$

$\dfrac{x}{y} = 3$

Cevap: C

Köklü İfadenin Eşleniği

24. $\sqrt{18} + \dfrac{12}{\sqrt{2}}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $8\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{2}$ C) 8 D) 12 E) $6\sqrt{2}$

Çözüm: $\sqrt{2}$ nin eşleniği $\sqrt{2}$ dir.

$$\frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} + \frac{12}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

olur.

Cevap: B

25. $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\frac{6}{\sqrt{2}}$ işleminin en sade hali kaçtır?

A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 5 D) 3 E) 1

Çözüm: $\sqrt{2}$ nin eşleniği $\sqrt{2}$ dir.

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}-\frac{6}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

Cevap: A

26. $\frac{5}{3\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{8}$ E) $\frac{8}{3}$

Çözüm: $\sqrt{5}$ nin eşleniği $\sqrt{5}$ ve $\sqrt{8}-\sqrt{5}$ nin eşeleniği $\sqrt{8}+\sqrt{5}$ dir.

$$\frac{5}{3\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{5}}-\frac{(\sqrt{8}+\sqrt{5})}{(\sqrt{8}-\sqrt{5})(\sqrt{8}+\sqrt{5})}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{3}$$
$$=\frac{8}{3}$$

Cevap: E

27. $\frac{20}{5-\sqrt{5}}$ ifadesinin en sade hali nedir?

A) 4 B) $-\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) $5-\sqrt{5}$ E) 5

Çözüm: $5-\sqrt{5}$ nin eşleniği $5+\sqrt{5}$ dir.

$$\frac{20}{5-\sqrt{5}}=\frac{20(5-\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=\frac{20(5-\sqrt{5})}{5^2-(\sqrt{5})^2}=5-\sqrt{5}$$

Cevap: D

28. $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ sayısının çarpma işlemine göre ters elemanı nedir?

A) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ C) $-\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{6}\sqrt{5}$

Cevap: Bir a sayısının çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{a}$ dir. Yine $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ nin eşleniği $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ dir. Buna göre;

$$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$$

şeklindedir.

Cevap: A

29. $\frac{8}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}-1}-\frac{6}{\sqrt{2}+1}$ işleminin en sade hali kaçtır?

A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: $\sqrt{2}$ nin eşleniği $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}\pm 1$ nin eşeleniği $\sqrt{2}\mp 1$ dir.

$$\frac{8}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}-1}-\frac{6}{\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}+\frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}-\frac{6(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{8\sqrt{2}}{2}+\frac{2(\sqrt{2}+1)}{(2-1)}-\frac{6(\sqrt{2}-1)}{(2-1)}$$
$$=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2-6\sqrt{2}+6$$
$$=8$$

Cevap: D

Kök İçinde Kökler

30. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ işlemini kök içinde kök pozisyonundan çıkarılması nasıl bir sonuç çıkar?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{3}-1$ D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{3}+1$

Çözüm: Burada $3=3\cdot 1$ ve $4=3+1$ olduğundan,

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}=\sqrt{3}+1$$

bulunur.

Cevap: E

31. $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{3+\sqrt{8}}$ işleminin en sade hali nedir?

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{8}$ E) $\sqrt{10}$

Çözüm: $k=\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{3+\sqrt{8}}$ olsun. Her iki tarafın karesi alınırsa,

$$k^2=\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^2$$
$$k^2=3-\sqrt{8}+2\cdot\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)}+3+\sqrt{8}$$
$$k^2=6+2\cdot\sqrt{9-8}$$
$$k=\sqrt{8}$$

bulunur.

Cevap: D

32. $\sqrt{7-2\sqrt{12}}$ ve $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$ sayısının aritmetik ortalaması kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm: Çarpımları 12'yi, toplamları 7'yi veren iki sayı 3 ve 4'dür.

$$\frac{\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\sqrt{7+2\sqrt{12}}}{2}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{3}}{2}=2$$

Cevap: B

33. $\sqrt[3]{x\sqrt[5]{5^3}}=\sqrt[3]{5}\sqrt[5]{3}\sqrt[3]{2\sqrt[5]{x}}=\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{3}$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\sqrt[3]{x\sqrt[5]{5^3}}=\sqrt[3]{5}\sqrt[5]{3}$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^5 5^3}}=\sqrt[15]{5^3}\sqrt[15]{3^5}$$
$$\sqrt[15]{x^5 5^3}=\sqrt[15]{5^3 3^5}$$
$$x^5 5^3=5^3 3^5$$
$$x^5=3^5$$
$$x=3$$

Cevap: C

34. $\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{32}}}$ ifadesi 2'nin kaçıncı kuvvetidir?

A) $\frac{15}{8}$ B) $\frac{15}{7}$ C) $\frac{13}{8}$ D) $\frac{13}{7}$ E) $\frac{17}{8}$

Çözüm: $\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{32}}} = \sqrt{2\sqrt{2^3\sqrt{2^5}}}$

$$= \sqrt{\sqrt{2^2 2^3\sqrt{2^5}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{10}2^5}}}$$

$$= \sqrt[8]{2^{15}}$$

$$= 2^{15/8}$$

Cevap: A

Sonsuz Kökler

35. $a \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{a^2\sqrt{a^2\sqrt{a^2\cdots}}}$ İşleminin sonucu nedir?

A) 1 B) a C) a^2 D) a^3 E) $\sqrt{a}$

Çözüm: $x = \sqrt{a^2\sqrt{a^2\sqrt{a^2\cdots}}}$ olsun. Buna göre, $x = \sqrt{a^2\underbrace{\sqrt{a^2\sqrt{a^2\cdots}}}_{x}}$ olacağından $x = \sqrt{a^2x}$ bulunur. Her iki tarafın karesini alırsak $x^2 = a^2x$ olup $x = a^2$ olur.

Cevap: C

36. $a \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\cdots}}} = 4$ ise a'nin değeri nedir?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 12 E) 16

Çözüm: $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\cdots}}} = 4$

$$\sqrt[3]{a4} = 4$$
$$4a = 4^3$$
$$a = 16$$

Cevap: E

37. $t + \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdots}} = 1 + \sqrt{2}$ ise t’nin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x = \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdots}}$ olsun.

$$x = \sqrt[3]{2x}$$
$$x^3 = 2x$$
$$x = \sqrt{2}$$

olacağından

$$t + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$$
$$t = 1$$

bulunur.

Cevap: E

38. $x = \sqrt[3]{0,\overline{4} \cdot \sqrt[3]{0,\overline{4} \cdots}}$ ise x’nin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: $x = \sqrt[3]{0,\overline{4} \cdot \sqrt[3]{0,\overline{4} \cdots}}$ olsun.

$$x = \sqrt[3]{0,\overline{4}x}$$
$$x^3 = 0,\overline{4}x$$
$$x^2 = 0,\overline{4} = \frac{4}{9}$$
$$x = \frac{2}{3}$$

bulunur.

Cevap: C

Köklü İfadelerde Sınırlama

39. $a = 3^{1/3}, b = 4^{1/4}, c = 5^{1/6}$ sayılarının büyüklük sırası nasıl olur?

A) $a < b < c$ B) $a < c < b$ C) $c < a < b$
D) $c < b < a$ E) $b < c < a$

Çözüm: $a = 3^{1/3}, b = 4^{1/4}, c = 5^{1/6}$

$$a = (3^{1/3})^{4/4}, b = (4^{1/4})^{3/3}, c = (5^{1/6})^{2/2}$$

$$a = 81^{1/12}, b = 64^{1/12}, c = 25^{1/12}$$

Sayıların üstleri aynı olduğunda, tabanı küçük olan daha küçüktür.

$$c < b < a$$

Cevap: D

40. $0 < x < 1$ olmak üzere, $a = x, b = \sqrt{x}, c = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ise a, b ve c'nin sıralamadan hangisi doğrudur?

A) $b < a < c$ B) $a < c < b$ C) $c < a < b$
D) $c < b < a$ E) $b < c < a$

Çözüm: $0 < x < 1$ için

i) $x^2 < x$ olduğundan $x < \sqrt{x}$

ii) $1 < \frac{1}{\sqrt{x}}$

oldukları bilinmektedir. Buna göre,

$$x < \sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$b < a < c$$

elde edilir.

Cevap: A

41. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{3}, c = \frac{\sqrt{5}}{4}$ sayıları için aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $b < a < c$ B) $a < b < a$ C) $c < a < b$
D) $a < c < b$ E) $b < c < a$

Çözüm: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{3}, c = \frac{\sqrt{5}}{4}$

$$a = \frac{6\sqrt{2}}{12}, b = \frac{4\sqrt{3}}{12}, c = \frac{3\sqrt{5}}{12}$$
$$a = \frac{\sqrt{72}}{12}, b = \frac{\sqrt{48}}{12}, c = \frac{\sqrt{45}}{12}$$
$$c < b < a$$

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. M. Zeki DERMAN, Serdar GÜLMEZ, Ökkeş ÖZKÖSELER, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2002, Ankara.
4. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Matematik Cep Kitabı, Final Dergisi Yayınları, 1989, İstanbul.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.