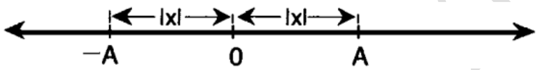
8. BÖLÜM
MUTLAK DEĞER

MUTLAK DEĞER KAVRAMI

8.1. Tanım: Sayı doğrusunda, bir sayının belirttiği noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığına bu sayının mutlak değeri denir. x sayısının mutlak değeri $|x|$ şeklinde gösterilir. Bu durum şu şekilde gösterilir. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde gösterilir.



Örnek: $|x| = 2, |-3| = -(-3) = 3, \left|-\frac{5}{2}\right| = -\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$

Örnek: $0 < x < y$ ise $|x - y| = -(x - y) = y - x$

Örnek: $|3x - 1| + |2x + 3| - x + 5$ eşitliğinde $x = -2$ için bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} |3x - 1| + |2x + 3| - x + 5 &= |3(-2) - 1| + |2(-2) + 3| - (-2) + 5 \\ &= |-7| + |-1| + 2 + 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Örnek: $a < b < 0$ olmak üzere, $|a - b| + |b - a| + |a + b|$ ifadesinin sonucu nedir?

Çözüm:

$a - b < 0$ iken $|a - b| = -(a - b) = b - a$

$b - a > 0$ iken $|b - a| = b - a$

$a + b < 0$ iken $|a + b| = -(a + b) = -a - b$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$|a-b|+|b-a|+|a+b|=b-a+b-a-a-b=b-3a$$

Örnek: $m, n, p \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $|m-1|+|2n-4|+|p+3|=0$ olduğuna göre, $2m+3n-p$ nin değeri nedir?

Çözüm: $|m-1|+|2n-4|+|p+3|=0$ olması için $|m-1| \geq 0$, $|2n-4| \geq 0$ ve $|p+3| \geq 0$ olmalıdır. Sonuç sıfır olduğundan bu ifadelerin sıfıra eşit olmalarıyla mümkündür. Buna göre,

$$|m-1|=0 \text{ ise } m=1$$
$$|2n-4|=0 \text{ ise } n=1$$
$$|p+3|=0 \text{ ise } p=-3$$

elde edilir. Şu halde,

$$2m+3n-p=2 \cdot 1+3 \cdot 2n-(-3)=11$$

olur.

Örnek: $x<0$ için $\big|x-|3x|\big|+|4-x|$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $x<0$ olduğundan $3x<0$ ve $4-x>0$

$$\begin{aligned}\big|x-|3x|\big|+|4-x| &= |x-(-3x)|+4-x \\ &= -4x+4-x \\ &= -5x+4\end{aligned}$$

Örnek: $x<0<y$ için $|x-y|+|x|-|y|$ işleminin eşiti nedir?

Çözüm: $x<0<y$ ise $x-y<0$ olacağından

$$|x-y|=-(x-y)=-x+y$$
$$|x-y|+|x|-|y|=-x+y+(-x)-y=-2x$$

bulunur.

Örnek: $|x|<0$ eşitsizliğinin reel (gerçel) sayılardaki çözüm kümesi nedir?

Çözüm: Her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq 0$ olduğundan $|x|<0$ eşitsizliğinin reel sayılardaki çözüm kümesi boş kümedir.

Örnek: $|x| \geq -2$ eşitsizliğinin reel sayılardaki çözüm kümesi nedir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: Her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq 0$ olduğundan $|x| \geq -2$ içinde geçerlidir. O halde eşitsizliğin çözüm kümesi tüm reel sayılardır.

Örnek: $A = \left|5 - \frac{3x}{2}\right| + 6$ ifadesi veriliyor.

a) A'nın en küçük değeri kaçtır?

b) A en küçük değerini hangi x sayısında alır?

Çözüm: a) $\left|5 - \frac{3x}{2}\right| = 0$ olduğunda A en küçük sayı olur.

$$A = \left|5 - \frac{3x}{2}\right| + 6 \geq 0 + 6 = 6$$

A'nın en küçük değeri 6'dır.

b) A en küçük değerini $\left|5 - \frac{3x}{2}\right| = 0$ ise $x = \frac{10}{3}$ olduğunda alır.

MUTLAK DEĞERİN ÖZELLİKLERİ

8.2. Tanım: $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \text{ tek sayı} \\ |x|, & n \text{ çift sayı} \end{cases}$$

şeklindedir. Bu durum ikinci dereceden olunca şu şekilde de ifade edilir;

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

biçimindedir.

Örnek:

1. $\sqrt[4]{3^4} = |3| = 3$

2. $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$

3. $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

4. $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -\frac{1}{2}$

Örnek: $\sqrt{(-6)^2} - \sqrt{6^2} - (-2)^3$ ifadesinin en sade hali nedir?

Çözüm:

$$\sqrt{(-6)^2} - \sqrt{6^2} - (-2)^3 = |-6| - |6| - (-8) = 6 - 6 + 8 = 8$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $a < 0$ için $3\sqrt{a^2} + \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[4]{a^4}$ ifadesinin en sade biçimi nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{a^2} + \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[4]{a^4} &= 3|a| + a + |a| \\ &= -3a + a - a \\ &= -3a \end{aligned}$$

Örnek: $x < \frac{1}{2}$ ise $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 5$ in sonucu nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 5 &= \sqrt{(2x-1)^2} + 2x + 5 \\ &= |2x - 1| + 2x + 5 \\ &= -2x + 1 + 2x + 5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Örnek: $a < 0 < b$ olmak üzere,

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt[4]{a^4}$$

nin eşiti nedir?

Çözüm:

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt[4]{a^4} = |a| + |b| + |a| = -a + b - a = b - 2a$$

Örnek: $|x - 2| + (y + 3)^2 = 0$ ise $x - y$ kaçtır?

Çözüm: Mutlak değer ve bir sayının karesi negatif olmayacağından

$$|x - 2| = 0 \text{ ve } (y + 3)^2 = 0$$

olmalıdır.

$$x = 2 \text{ ve } y = -3$$

$$x - y = 2 - (-3) = 5$$

Örnek: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + |x - y + 2| = 0$ ise y kaçtır?

Çözüm: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + |x - y + 2| = 0$

$$\sqrt{(x-3)^2} + |x - y + 2| = 0$$

$$|x - 3| + |x - y + 2| = 0$$

$$|x - 3| = 0 \text{ ve } |x - y + 2| = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ ve } x - y + 2 = 0$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

olduğundan x = 3 ve y = 5 dir.

8.1. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

a) $|x| = |-x|$

b) $|x - y| = |y - x|$

dir.

İspat: a) x ve $-x$ sayılarının 0'dan uzaklıkları eşit olduğundan $|x| = |-x|$ olur.

b) (a) ya benzer şekilde yapılır.

Örnek: 1. $|-3| = |3| = 3$ $|-3|=|3|$

2. $|15 - 20| = |20 - 15| = 5$

Örnek: $\big||a-2| - |2-a| - 8\big|$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $|a - 2| = |2 - a|$ olduğundan

$$\big||a-2| - |2-a| - 8\big| = \big||a-2| - |a-2| - 8\big| = |-8| = -(-8) = 8$$

bulunur.//

8.2. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

a) $|xy| = |x||y|$

b) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, (y \neq 0)$

dir.

İspat: a) x ve y'nin dört durumu söz konusudur. Bunlar,

i) $x \geq 0, y \geq 0$ ise $xy \geq 0$ ve $|xy| = xy, |x| = x, |y| = y$ olduğundan,

$$|xy| = xy = |x||y|$$

olur.

ii) $x \geq 0, y \leq 0$ ise $xy \leq 0$ ve $|xy| = -xy, |x| = x, |y| = -y$ olduğundan,

$$|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$$

olur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

iii) $x \leq 0, y \geq 0$ ise $xy \leq 0$ ve $|xy| = -xy, |x| = -x, |y| = y$ olduğundan,

$$|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$$

olur.

iv) $x \leq 0, y \leq 0$ ise $xy \geq 0$ ve $|xy| = xy, |x| = -x, |y| = -y$ olduğundan,

$$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$$

olur.

b) x ve y'nin dört durumu söz konusudur. Bunlar,

i) $x \geq 0, y \geq 0$ ise $\frac{x}{y} \geq 0$ ve $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y}, |x| = x, |y| = y$ olduğundan,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|}$$

olur.

ii) $x \geq 0, y \leq 0$ ise $\frac{x}{y} \leq 0$ ve $\left|\frac{x}{y}\right| = -\frac{x}{y}, |x| = x, |y| = -y$ olduğundan,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = -\frac{x}{y} = \frac{x}{-y} = \frac{|x|}{|y|}$$

olur.

iii) $x \leq 0, y \geq 0$ ise $\frac{x}{y} \leq 0$ ve $\left|\frac{x}{y}\right| = -\frac{x}{y}, |x| = -x, |y| = y$ olduğun-
dan,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = -\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{|x|}{|y|}$$

olur.

iii) $x \leq 0, y \leq 0$ ise $\frac{x}{y} \geq 0$ ve $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y}, |x| = -x, |y| = -y$ olduğundan,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y} = \frac{-x}{-y} = \frac{|x|}{|y|}$$

olur.

Örnek: a veya b'den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$$A = \frac{|8a+8b|}{|a+b|}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

nin değerini bulunuz.

$$\text{Çözüm: } A = \frac{|8a+8b|}{|a+b|} = \frac{|8(a+b)|}{|a+b|} = \frac{8\,|a+b|}{|a+b|} = 8$$

8.3. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|x^n| = |x|^n$ dir.

İspat: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|xy| = |x||y|$ olduğunu biliyoruz. Özel olarak $x = y$ alınırsa,

$$|x^2| = |x|^2$$

olur. Elde edilen bu eşitlikte her taraf $|x|$ ile çarpılırsa,

$$|x^2||x| = |x|^2|x|$$
$$|x^2x| = |x|^2|x|$$
$$|x^3| = |x|^3$$

elde edilir. Bu işlem n defa tekrar edilirse,

$$|x^n| = |x|^n$$

bulunur.

8.4. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|x| \leq a \text{ ise } -a \leq x \leq a$$

dir.

İspat: Eğer $x \geq 0$ ise $|x| = x$ olup $|x| \leq a$ ifadesi $x \leq a$ olur.
Eğer $x \leq 0$ ise $|x| = -x$ olup $|x| \leq a$ ifadesi $-x \leq a$ yani $-a \leq x$ olur.

Bu iki eşitsizliklerinden, $|x| \leq a$ ise $-a \leq x \leq a$ olduğu ortaya çıkar.

Örnek: $|x| \leq 4$ ise $-4 \leq x \leq 4$

8.5. Teorem (Üçgen Eşitsizliği): Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$
b) $|x - y| \leq |x| + |y|$

dir.

İspat: a) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$-|x| \leq x \leq |x| \text{ ve } -|y| \leq y \leq |y|$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa,

$$-|y| - |y| \leq y + y \leq |y| + |y|$$
$$|y + y| \leq |y| + |y|$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

bulunur.

b) Her $y \in \mathbb{R}$ için a şıkkında y yerine $-y$ yazılırsa,

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

elde edilir.

8.6. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$$

dir.

İspat: $x = (x + y) + (-y)$

$$|x| = |(x + y) + (-y)| \leq |x + y| + |-y|$$

$$|x| - |y| \leq |x + y| \qquad (1)$$

bulunur. Aynı yolu takip edersek,

$$y = (x + y) + (-x)$$

$$|y| = |(x + y) + (-x)| \leq |x + y| + |-x|$$

$$|y| - |x| \leq |x + y| \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) den,

$$-(|x| - |y|) \leq |x + y| \leq |x| - |y|$$

olarak bulunur.

Örnek: $|x| = 5$ ise $A = |x + 2|$ in alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

Çözüm: $A = |x + 2| \leq |x| + |2| = 5 + 2 = 7$ en büyük değerdir.

$$\big||x| - |2|\big| \leq |x + 2|$$

$$|5 - 2| = 3 \leq |x + 2| = A$$

o halde en küçük değer 3 ve en büyük değer 7 dir. //

Bu kısımdan sonraki yerlerde x değişkenine bağlı özdeşlikleri $u(x)$ sembolü ile göstereceğiz. Mesela,

$$u_1(x) = 3x + 1$$

$$u_2(x) = x^2 + 2x$$

$$u_3(x) = -x + 7x^3$$

gibi özdeşliklerdir.

8.7. Teorem: $a > 0$ olmak üzere,

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$|u(x)| = a \Leftrightarrow u(x) = a \text{ ve } u(x) = -a$$

dir.

İspat:
i) $u(x) \geq 0$ ise $|u(x)| = u(x) = a$

ii) $u(x) < 0$ ise $|u(x)| = -u(x) = -a$

Örnek: $|x - 3| = 5$ eşitliğinin çözümü nedir?

Çözüm: $x - 3 = 5$ ise $x = 8$ ve
$x - 3 = -5$ ise $x = -2$

Örnek: $|2x + 1| = 5$ eşitliğinin çözümü nedir?

Çözüm: $2x + 1 = 5$ ise $x = 2$ ve
$2x + 1 = -5$ ise $x = -3$

Örnek: $\big||1 - 2x| - 3\big| = 10$ eşitliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $|1 - 2x| - 3 = 10$ ve $|1 - 2x| - 3 = -10$
$|1 - 2x| = 13$ ve $|1 - 2x| = -7$
$1 - 2x = 13$ ve $1 - 2x = 13$ ve $Ç_3 = \varnothing$
$x = -6$ ve $x = 7$
$Ç = \{-6, 7\}$

Örnek: $\big||2x - 3| - 1\big| = 14$ eşitliği x'in değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\big||2x - 3| - 1\big| = 14$
$|2x - 3| - 1 = 14$ ve $|2x - 3| - 1 = -14$
$|2x - 3| = 15$ ve $|2x - 3| = -13$
$2x - 3 = 15$ ve $-(2x - 3) = -13$ ve $Ç_3 = \varnothing$
$x = 9$ ve $x = 8$
$-13 < |2x - 3| < 15$

8.8. Teorem: $a > 0$ olmak üzere

$$|u(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq u(x) \leq a$$

dir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

İspat: i) $u(x) \geq 0$ ise $|u(x)| = u(x)$

$$|u(x)| \geq a \Leftrightarrow u(x) \geq a \qquad (1)$$

ii) $u(x) < 0$ ise $|u(x)| = -u(x)$

$$|u(x)| \leq a \Leftrightarrow -u(x) \leq a \Leftrightarrow -a \leq u(x) \qquad (2)$$

(1) ve (2) eşitsizliklerinden, $|u(x)| \leq a$ ise $-a \leq u(x) \leq a$ olduğu ortaya çıkar.

Örnek: $|2x + 7| < 1$ eşitsizliğinin çözümü nedir?

Çözüm: $-1 < 2x + 7 < 1$

$$-1 - 7 < 2x + 7 - 7 < 1 - 7$$
$$-8 < 2x < -6$$
$$-4 < x < -3$$

Örnek: $\left|2 - \frac{x}{3}\right| \leq 1$ eşitliğinin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm: $\left|2 - \frac{x}{3}\right| \leq 1$

$$-1 \leq 2 - \frac{x}{3} \leq 1$$
$$-3 \leq 6 - x \leq 3$$
$$-3 - 6 \leq 6 - 6 - x \leq 3 - 6$$
$$-9 \leq -x \leq -3$$
$$9 \geq x \geq 3$$
$$3 \leq x \leq 9$$

Örnek: $\big||2x - 3| - 1\big| < 14$ eşitliği x'in çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm: $\big||2x - 3| - 1\big| < 14$

$$-14 < |2x - 3| - 1 < 14$$
$$-13 < |2x - 3| < 15$$

Her $x \in \mathbb{R}$ için $-13 < |2x - 3|$ olacağından $|2x - 3| < 15$ eşitsizliğini çözmeliyiz.

$$|2x - 3| < 15$$
$$-15 < 2x - 3 < 15$$
$$-12 < 2x < 18$$
$$-6 < x < 9$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

8.9. Teorem: $a \geq 0$ olmak üzere,

$$a \leq |u(x)| \Leftrightarrow a \leq u(x) \text{ ve } u(x) \leq -a$$

dir.

İspat: i) $u(x) \geq 0$ ise $|u(x)| = u(x)$

$$a \leq |u(x)| \Leftrightarrow a \leq u(x) \qquad (1)$$

ii) $u(x) < 0$ ise $|u(x)| = -u(x)$

$$a \leq |u(x)| \Leftrightarrow a \leq -u(x) \Leftrightarrow u(x) \leq -a \qquad (2)$$

(1) ve (2) eşitsizliklerinden, $|u(x)| \leq a$ ise $a \leq u(x)$ ve $u(x) \leq -a$ olduğu ortaya çıkar.

Örnek: $3 < |2x + 5|$ eşitsizliğinin çözümü nedir?

Çözüm: $3 < 2x + 5$ ise $-2 < 2x$ olup $-1 < x$

$2x + 5 < -3$ ise $2x < -8$ olup $x < -4$

Örnek: $|1 - 3x| > 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $|1 - 3x| > 7$

$1 - 3x > 7$ ve $1 - 3x < -7$

$x < -2$ ve $\frac{8}{3} < x$

$$Ç = \left\{x \in \mathbb{R}: x < -2 \text{ ve } \frac{8}{3} < x\right\}$$

Örnek: $x - 6 < |2x - 8|$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: i) $2x - 8 \geq 0$ ise $4 \leq x$ dür. Ayrıca,

$x - 6 < 2x - 8$ ise $2 < x$

olur.

ii) $2x - 8 < 0$ ise $x < x$ dür. Ayrıca,

$x - 6 < -(2x - 8)$ ise $x < \frac{14}{3}$

$$Ç = \left\{x \in \mathbb{R}: 4 \leq x < \frac{14}{3}\right\}$$

olur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $|x-2|+|x+7|<15$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: i) $x-2 \geq 0$ ve $x+7 \geq 0$ ise

$$|x-2|+|x+7|<15$$
$$x-2+x+7<15$$
$$x<5$$

ii) $x-2 \geq 0$ ve $x+7<0$ ise

$$|x-2|+|x+7|<15$$
$$x-2-(x+7)<15$$
$$-9<15$$

olup çözüm kümesi elde edilemez.

iii) $x-2<0$ ve $x+7 \geq 0$ ise

$$|x-2|+|x+7|<15$$
$$-(x-2)+(x+7)<15$$
$$9<-15$$

olup çözüm kümesi elde edilemez.

iv) $x-2<0$ ve $x+7<0$ ise

$$|x-2|+|x+7|<15$$
$$-(x-2)-(x+7)<15$$
$$-10<x$$

olacağından $Ç=\{x \in \mathbb{R}: -10<x<5\}$ bulunur.

Örnek: $1 \leq |5-x| \leq 9$ eşitsizliğinin reel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $1 \leq |5-x| \leq 9$ eşitsizliği $1 \leq |5-x|$ ve $|5-x| \leq 9$ eşitsizliğinin çözümü ile çözüm kümesi elde edilir.

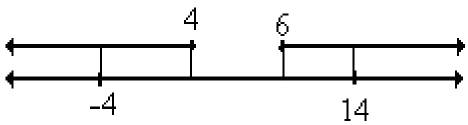
i) $1 \leq |5-x|$

$$1 \leq 5-x \text{ ve } 5-x \leq -1$$
$$x \leq 4 \text{ ve } 6 \leq x$$
$$Ç_1=\{x \in \mathbb{R}: x \leq 4 \text{ ve } 6 \leq x\}$$

ii) $|5-x| \leq 9$

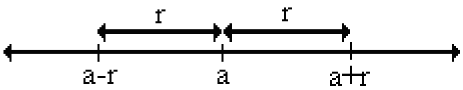
$$-9 \leq 5-x \leq 9$$
$$-14 \leq -x < 4$$
$$Ç_2=\{x \in \mathbb{R}: -4 \leq x < 14\}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

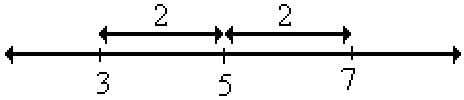


$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \{x \in \mathbb{R}: -14 \leq x < 4 \text{ ve } 6 \leq x \leq 14\}$

8.1. Not: $r \geq 0$ olmak üzere $|x - a| = r$ ifadesi x'in a'ya olan uzaklığı r birim demektir.

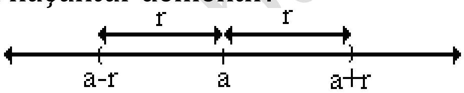


Örnek: $|x - 5| = 2$, x'in 5'e uzaklığı 2 birim demektir. Buna göre,

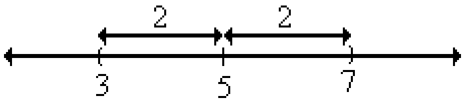


dir. O halde $x = 3$ veya $x = 7$ dir.

8.2. Not: $r \geq 0$ olmak üzere $|x - a| \leq r$ ifadesi x'in a'ya olan uzaklığı r birim ya da r birimden küçüktür demektir.

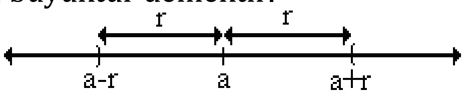


Örnek: $|x - 5| \leq 2$, x'in 5'e uzaklığı 2 birim ya da 2 birimden küçüktür demektir. Buna göre,



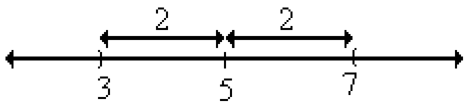
dir. O halde $3 \leq x \leq 7$ dir.

8.3. Not: $r \geq 0$ olmak üzere $|x - a| \geq r$ ifadesi x'in a'ya olan uzaklığı r birim ya da r birimden büyüktür demektir.



Örnek: $|x - 5| \geq 2$, x'in 5'e uzaklığı 2 birim ya da 2 birimden büyüktür demektir. Buna göre,

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ



dir. O halde $x \leq 3$ veya $7 \leq x$ dir. //

Reel sayılar konusunda maksimum ve minimum sayılar izah edilmişti. Ama mutlak değer konusu anlatılmadığı için şu teorem verilmemişti. Şimdi o teoremi verelim.

8.10. Teorem: $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

i) $\max(x; y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$

ii) $\min(x; y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

dir.

İspat:

i) $x > y$ ise $\frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right) = \frac{1}{2}\left(x + y + x - y\right) = x$

$x < y$ ise $\frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right) = \frac{1}{2}\left(x + y - x + y\right) = y$

ii) $x > y$ ise $\frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right) = \frac{1}{2}\left(x + y - x + y\right) = y$

$x < y$ ise $\frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right) = \frac{1}{2}\left(x + y + x - y\right) = x$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Mutlak Değer Kavramı

1. $|-30| - |-6| + |7| - |10|$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

Çözüm:

$|-30| - |-6| + |7| - |10| = -(-30) - \left(-(-6)\right) + 7 - 10 = 21$

Cevap: D

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

2. $x = y + 3$ ise $|x - y| + |y - x|$ nin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:
$|x - y| + |y - x| = |y + 3 - y| + |y - y - 3| = 6$

Cevap: E

3. $x \in \mathbb{R}$ sayı doğrusu üzerinde x'in 4 noktasına olan uzaklığı $x + 2$ birimdir. Buna göre, x kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Mutlak değerin tanımından,

$$|x - 4| = x + 2$$

yazılır. Buna göre,

$$x - 4 = x + 2 \text{ ve } -(x - 4) = x + 2$$

olacağından birinci eşitlikte çözüm kümesi yoktur, ama ikinci denklemde $x = 1$ dir.

Cevap: B

4. Sayı düzleminde -2 noktasına olan uzaklığı, 5 noktasına olan uzaklığının yarısından küçük olan sayıların denklemi nasıldır?

A) $|x + 4| < |x - 5|$ B) $|2x - 4| < |x - 5|$ C) $|2x + 4| < |x - 5|$
D) $|x + 2| < |x - 5|$ E) $|x - 2| < |x - 5|$

Çözüm: $|x - (-2)| < \frac{|x-5|}{2}$

$$|2x + 4| < |x - 5|$$

Cevap: C

5. $x < 0$ olmak üzere, $\big||x - |x - 1|| - 1\big|$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-2x$ B) $3x$ C) 1 D) 0 E) x

Çözüm: $x < 0$ ise, $|x - 1| = -(x - 1)$ ve $|2x - 1| = -(2x - 1)$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\left||x-|x-1||-1\right| = ||x-(-(x-1))|-1|$$
$$= ||2x-1|-1|$$
$$= |-(2x-1)-1|$$
$$= |-2x|$$
$$= -2x$$

Cevap: A

6. $\left|\left||\sqrt{7}-5|-2\right|-3\right|$ işleminin sonucu nedir?

A) $\sqrt{7}$ B) 5 C) 3 D) 2 E) 0

Çözüm: $\sqrt{7}-5<0$ ve $3-\sqrt{7}>0$ olmak üzere,

$$\left|\left||\sqrt{7}-5|-2\right|-3\right| = \left||-(\sqrt{7}-5)-2|-3\right|$$
$$= \left||5-\sqrt{7}-2|-3\right|$$
$$= \left||3-\sqrt{7}|-3\right|$$
$$= |3-\sqrt{7}-3|$$
$$= \sqrt{7}$$

Cevap: A

7. $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ için $|x| < y, \frac{x}{y} < -1$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $y<0$ B) $x+y<0$ C) $xy>0$ D) $x-y<0$ E) $x>0$

Çözüm: $|x|>0$ olduğundan $|x|<y$ için $y>0$ dır.
$y>0$ ve $\frac{x}{y}<-1$ olduğundan $x<0$ dır.
$x<0<y$ olacağından $x-y<0$ olur.

Cevap: D

8. $3<x<4$ olduğuna göre,

$$\frac{|x-3|}{x-3} - \frac{|x-4|}{x-4}$$

ifadesinin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $|x-3| = x-3$ ve $|x-4| = -(x-4)$

$$\frac{|x-3|}{x-3} - \frac{|x-4|}{x-4} = \frac{x-3}{x-3} - \frac{-(x-4)}{x-4} = 2$$

Cevap: B

9. $x < y < 0 < z$ olduğuna göre,

$$\frac{|x+y-2z|}{|z-x|+|z-y|}$$

ifadesinin değeri nedir?

A) x B) y C) z D) −1 E) 1

Çözüm: $|x+y-2z| = x+y-2z$, $|z-x| = z-x$ ve $|z-y| = z-y$

$$\frac{|x+y-2z|}{|z-x|+|z-y|} = \frac{x+y-2z}{z-x+z-y} = 1$$

Cevap: E

10. $x < 0$ olduğuna göre, $|x-4| + |x| + 2x$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) x

Çözüm: $x < 0$ ise $|x-4| = -(x-4)$ ve $|x| = -x$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |x-1| + |x| + 2x &= -(x-4) + (-x) + 2x \\ &= -(x-4) + (-x) + 2x \\ &= 4 \end{aligned}$$

Cevap: D

Mutlak Değer İle Karekök Arasındaki İlişki

11. $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{5^2} - (-2)^3$ işleminin sonucu kaçtır?

A) −18 B) −8 C) 18 D) 0 E) 20

Çözüm: $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{5^2} - (-2)^3 = |-5| + |5| + 8 = 5 + 5 + 8 = 18$

Cevap: C

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

12. $\dfrac{\sqrt{(-12)^2}+\sqrt{3^2}-\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt{(-3)^2}}$ işleminin sonucu nedir?

A) −12 B) −4 C) −1 D) 1 E) 4

Çözüm: $\dfrac{\sqrt{(-12)^2}+\sqrt{3^2}-\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt{(-3)^2}} = \dfrac{|-12|+|3|-|-3|}{|-3|} = 4$

Cevap: E

13. $\sqrt{(-6)^2} - \sqrt{(-3)^2} + \sqrt[4]{(-5)^4}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) −10 B) −2 C) 10 D) 12 E) 14

Çözüm:
$\sqrt{(-6)^2} - \sqrt{(-3)^2} + \sqrt[4]{(-5)^4} = |-6| - |-3| + |-5| = 6 - 3 + 5 = 8$

Cevap: D

14. $x < 0$ olmak üzere, $\dfrac{\sqrt{x^2}+\sqrt[4]{x^4}}{x}$ işlemini sonucu nedir?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) x

Çözüm: $x < 0$ olduğundan
$\dfrac{\sqrt{x^2}+\sqrt[4]{x^4}}{x} = \dfrac{|x|+|x|}{x} = \dfrac{2|x|}{x} = \dfrac{2(-x)}{x} = -2$
bulunur.

Cevap: A

15. $y < 0 < x$ olmak üzere, $\sqrt{(y-2x)^2} - \sqrt{(x-y)^2}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) y B) x C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $y < 0 < x$ olduğundan $y - 2x < 0$ ve $x - y > 0$ dir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\begin{aligned}\sqrt{(y-2x)^2}-\sqrt{(x-y)^2} &= |y-2x|-|x-y| \\ &= -(y-2x)-(x-y) \\ &= -y+2x-x+y \\ &= x\end{aligned}$$

Cevap: E

16. $y < x < 0$ olmak üzere,

$$\sqrt{x^2-4xy+4y^2}-\frac{4\sqrt{x^2}}{x}=x$$

olduğuna göre, y kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $|x-2y| = x-2y > 0$

$$\sqrt{x^2-4xy+4y^2}-\frac{4\sqrt{x^2}}{x}=x$$
$$\sqrt{(x-2y)^2}-\frac{4|x|}{x}=x$$
$$|x-2y|-(-4)=x$$
$$x-2y+4=x$$
$$y=2$$

Cevap: C

Mutlak Değer Denklemlerinde Eşitlik

17. $|x-3|+|y+4|+|z-8|=0$ olduğuna göre, $x+y+z$ ifadesinin değeri nedir?

A) 2 B) 5 C) 7 D) 10 E) 12

Çözüm: $|x-3|+|y+4|+|z-8|=0$ olması için

$$|x-3|=0, |y+4|=0 \text{ ve } |z-8|=0$$

olmalıdır. Buna göre $x=3, y=-4$ ve $z=8$ dir.

$$x+y+z=3-4+8=7$$

Cevap: C

18. $x \in \mathbb{R}$, $|x|-1=|x-1|$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

A) $\mathbb{R} - \{1\}$ B) $\varnothing$ C) $\mathbb{R}$ D) $(1;\ +\infty)$ E) $[1;\ +\infty)$

Çözüm:
i) $x > 1$ için $x - 1 = x - 1$ olduğundan $Ç = (1;\ +\infty)$
ii) $0 \leq x \leq 1$ için $x - 1 = -x + 1$ olduğundan $Ç = \{1\}$
iii) $x < 0$ için $-x - 1 = -x + 1$ olduğundan $Ç = \varnothing$
Buna göre denklemin çözüm kümesi $Ç = [1;\ +\infty)$ dir.

Cevap: E

19. $x + 2|x| - 6 = 0$ denklemini sağlayan sayıların toplamı kaçtır?

A) -6 B) -3 C) 1 D) 0 E) 1

Çözüm:
i) $x > 0$ için $x + 2x - 6 = 0$ olduğundan $Ç = 3$
ii) $x < 0$ için $x + 2(-x) - 6 = 0$ olduğundan $Ç = -6$

Cevap: B

20. $|x - 8| + |x| = 12$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Bu denklem $x < 0, 0 \leq x \leq 8, x > 8$ aralıkları için çözüm yapılır.

i) $x < 0$ için $-(x - 8) + (-x) = 12$ olduğundan $Ç = -2$
ii) $0 \leq x \leq 8$ için $-(x - 8) + x = 12$ olduğundan $Ç = \varnothing$
iii) $x > 8$ için $x - 8 + x = 12$ olduğundan $Ç = 2$
Bu denklemi sağlayan x değerlerin toplamı $-2 + 2 = 0$ olur.

Cevap: C

21. $|x^2 - 16| = |x - 4|$ denkleminde, x'in alabileceği en büyük değer nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $|x^2 - 16| = |x - 4|$
$|(x - 4)(x + 4)| = |x - 4|$
$|x - 4||x - 4| = |x - 4|$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$|x-4| = 1$
$x - 4 = 1$ ve $x - 4 = -1$
$x = 5$ ve $x = 3$

Cevap: D

22. $y < 0 < x$ olmak üzere, $\frac{x^2+2|xy|+y^2}{|y-x|} + y$ ifadesinin sonucu nedir?

A) 1 B) x C) y D) xy E) −xy

Çözüm: $x < 0 < y$ olduğundan $|xy| = -xy$ ve $|y-x| = x - y$ dir.

$$\frac{x^2+2|xy|+y^2}{|y-x|} + y = \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} + y = \frac{(x-y)^2}{x-y} = x - y + y = x$$

Cevap: B

23. $x + |x-2| = 4$ denklemini sağlayan x'in değeri nedir?

A) $\mathbb{R}$ B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: i) $x = 2$ için denklem sağlanmaz.

ii) $x > 2$ ise $x + (x-2) = 4$ olup $x = 3$

iii) $x < 2$ ise $-x + (x-2) = 4$ olup denklem sağlanmaz.

Cevap: E

24. $|x-3||x+8| = x - 3$
eşitliğini sağlayan x değeri sağlayan değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) –1 B) –2 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $|x-3| \geq 0$ ve $|x+8| \geq 0$ olacağından $x - 3 \geq 0$ olmalıdır. Buna göre $x \geq 3$ dir. O halde cevap 3 olur.

Cevap: E

Mutlak Değer Denklemlerde Eşitsizlikler

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

25. Bir kanda bulunması gereken kolesterol değeri 120 birim olması gerekirken bir hastada bir haftalık sürede 80 ile 140 birim arasında fazla değiştiği saptanmıştır. Bu hastalığın dağılımını gösteren denklem aşağıdakilerden hangisidir.

A) $|x-230|<30$ B) $|x-200|<30$ C) $|x-30|<200$
D) $|x-220|<40$ E) $|x-200|<60$

Çözüm: $120+80<x<120+140$
$200<x<260$
$200-230<x-230<260-230$
$-30<x-230<30$
$|x-230|<30$

Cevap: A

26. $|x-2|\leq 3$ eşitsizliğini sağlayan tamsayı sayısı kaç tanedir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm: $|x-2|\leq 3$
$-3\leq x-2\leq 3$
$-3+2\leq x-2+2\leq 3+2$
$-1\leq x\leq 5$
$Ç=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$

Cevap: A

27. $|x-2|\geq 3$ eşitsizliğini sağlayan değerden biri aşağıdakilerden hangisi değildir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

Çözüm: $|x-2|\geq 3$
$x-2\geq 3$ ve $x-2\leq 3$
$x\geq 5$ ve $x\leq 1$
elde edilir.

Cevap: E

28. $|x^2+1|\leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}-[0;\sqrt{3}]$ C) $[0;\sqrt{3}]$ D) $\mathbb{R}-[\sqrt{3};\sqrt{3}]$ E) $[\sqrt{3};\sqrt{3}]$

Çözüm: . $|x^2+1| \leq 4$
$-4 \leq x^2+1 \leq 4$
$-5 \leq x^2 \leq 3$
$0 \leq x \leq \sqrt{3}$

Cevap: C

29. $5 < |x+1| < 11$ eşitsizliğinin sağlayan tamsayıların sayısı kaç tanedir?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

Çözüm: $5 < |x+1| < 11$
$5 < |x+1|$ ve $|x+1| < 11$
$5 < x+1,\ x+1 < -5,\ x+1 < 11$ ve $-11 < x+1$
$4 < x,\ x < -6,\ x < 10$ ve $-12 < x$
$-12 < x < -6, 4 < x < 10$
$Ç = \{-11,-10,-9,-8,-7,5,6,7,8,9\}$

Cevap: D

30. $|y+1| < 4$ olmak üzere,
$x - y - 4 = 0$
denklemini sağlayan x tamsayıların toplamı kaçtır?

A) 18 B) 21 C) 24 D) 27 E) 30

Çözüm: $|y+1| < 4$
$-4 < y+1 < 4$
$-5 < y < 3$
$y = -5$ alınırsa $x = -1$
$y = 3$ alınırsa $x = 7$
$-1 < x < 7$
$Ç = \{0,1,2,3,4,5,6\}$
$0+1+2+3+4+5+6 = 21$

Cevap: B

31. $|x| \leq 4$ eşitsizliğini sağlayan negatif tamsayıların çarpımı nedir?

A) 24 B) 12 C) 8 D) 0 E) –12

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $|x| \leq 4$ ise $-4 \leq x \leq 4$
Denklemi sağlayan tamsayıların çarpımı;

$$(-4)(-3)(-2)(-1) = 24$$

olur.

Cevap: E

32. $x \in \mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{x} - 0{,}5\right| \leq 2$ denkleminde en büyük tamsayı değeri nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $\left|\sqrt{x} - 0{,}5\right| \leq 2$

$$-2 \leq \sqrt{x} - 0{,}5 \leq 2$$
$$-1{,}5 \leq \sqrt{x} \leq 2{,}5$$
$$0 \leq x \leq 6{,}25$$

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. M. Zeki DERMAN, Serdar GÜLMEZ, Ökkeş ÖZKÖSELER, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2002, Ankara.
4. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Matematik Cep Kitabı, Final Dergisi Yayınları, 1989, İstanbul.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ