

9. BÖLÜM

İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEMLER

İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEM KAVRAMI

9.1. Tanım: $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki denkleme ikinci dereceden denklem (üç terimli denklem) denir.

- Örnek:** i) $5x^2 + 4x - 10 = 0$
ii) $4k^2 - 9x - \sqrt{5} = 0$
iii) $m^2 - 10 = 0$
iv) $2t^2 + 11t = 0$

birer ikinci dereceden denklemlerdir.

Örnek: $(k - 2)x^4 + (m - 1)x^3 + x^{4n-14} + x - 1 = 0$ ikinci dereceden denklem ise k, m ve n 'nin değeri nedir?

Çözüm: Verilen denklem dördüncü derecen gözüküyor. İkinci dereceden denkleme çevirmek için $k - 2 = 0$ ve $m - 1 = 0$ olmalıdır. Buna göre, $k = 2, m = 1$ bulunur. Ayrıca $4n - 14 = 2$ olduğundan $n = 4$ bulunur.//

Denklemleri sağlayan değerlere kök denir. İkinci dereceden denklemleri sağlayan değerler iki tanedir. Bu kökleri bulmak için iki yöntem kullanılır. Bunlar çarpanlara ayırma yöntemi, diğeri diskriminant yöntemidir. Burada önce çarpanlara ayırma yönteminden sonra diskriminant yönteminden bahsedilecek.

İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEMLERİN ÇARPANLARMA AYIRMA YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

9.1. Teorem: $b, c \in \mathbb{R}, a = 1,$ olmak üzere $x^2 + bx + c = 0$ ikinci derece denkleminde $b = m + n$ ve $c = m \cdot n$ olacak şekilde seçilirse;

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) = 0$$

şekline döner. Burada, $x = -m$ ve $x = -n$ dir.

$$\text{İspat: } (x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn = x^2 + bx + c$$

Örnek: $x^2 + 5x + 6 = 0$ için $b = 3 + 2 = 5$ ve $c = 3 \cdot 2 = 6$ olacağından $x = -3$ ve $x = -2$ dir.

Örnek: $x^2 - 2x - 15 = 0$ için $b = -5 + 3 = -2$ ve $c = (-5) \cdot 3 = -15$ olacağından $x = 5$ ve $x = -3$ dir.

Örnek: $x^2 - 12x + 20 = 0$ denklemi için $b = -10 - 2 = -12$ ve $c = (-10)(-2) = 20$ olacağından $x = 10$ ve $x = 2$ dir.

9.2. Teorem: $a \neq 1$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci derece denkleminde, $a = m \cdot n$, $c = p \cdot q$ olacak şekilde seçildiğinde $b = m \cdot q + n \cdot p$ oluyorsa;

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q) = 0$$

şekline döner. Burada $x = -\frac{p}{m}$ ve $x = -\frac{q}{n}$ dir.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } (mx + p)(nx + q) &= mnx^2 + mpx + npq + pxq \\ &= mnx^2 + (mp + nq)x + pq \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Örnek: $2x^2 + 7x + 6 = 0$

$$\begin{array}{cc} 2x^2 + 7x + 6 = 0 \\ \begin{array}{cc} | & | \\ 2 & 3 \\ | & | \\ 1 & 2 \end{array} \end{array}$$

$$b = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$$

$$a = 2 \cdot 1, c = 3 \cdot 2 \text{ seçilirse } b = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$$

$$2x^2 + 7x + 6 = (2x + 3)(x + 2) = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}, x = -2$$

elde edilir.

Örnek: $20m^2 - 23m + 6 = 0$

$$20m^2 - 23m + 6 = 0$$

$$\begin{array}{cc} | & | \\ 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{array}$$

$$b = 4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) = -23$$

$$a = 4 \cdot 5, c = (-3)(-2) \text{ seçilirse } b = 4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) = -23$$

$$20m^2 - 23m + 6 = (4m - 3)(5m - 2) = 0$$

$$m = \frac{3}{4}, m = \frac{2}{5}$$

elde edilir.

İKİNCİ DERECEDE İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLERİN ÇARPANLARA AYRILMASI

İkinci dereceden denklemlerin diskriminant yöntemine geçmeden önce ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerim çarpanlara ayırma yöntemiyle çözülmesini inceleyeceğiz.

9.2. Tanım: a, b, c den en az ikisi sıfırdan farklı ve $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

şeklindeki denklemlere ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem denir.

Örnek: $3x^2 + 4y^2 = 16$

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$8x^2 - 3xy + cy^2 + 6x - 7y + 13 = 0$$

denklemleri ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerdir. //

Şimdi biz burada $ax^2 + bxy + cy^2$ biçimindeki denklemlerin çözümleri hakkında bilgi vereceğiz.

9.3. Teorem: $ax^2 + bxy + cy^2$ denkleminde $a = m \cdot n$, $c = p \cdot q$ olacak şekilde seçildiğinde $b = m \cdot q + n \cdot p$ oluyorsa;

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

şekline döner.

İspat 9.2. teorem benzer yöntemle yapıldığından okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $2x^2 + 13xy + 15y^2$ yi çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{array}{cc} \text{Çözüm: } 2x^2 + 13xy + 15y^2 \\ 2x & 3y \\ x & 5y \end{array}$$

seçilirse

$$2x \cdot 5y + x \cdot 3y = 13xy$$

olacağından

$$2x^2 + 13xy + 15y^2 = (2x + 3y)(x + 5y)$$

olur.

Örnek: $12x^2 + 22xy - 14y^2$ yi çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{array}{cc} \text{Çözüm: } 12x^2 + 22xy - 14y^2 \\ 4x & -2y \\ 3x & 7y \end{array}$$

seçilirse

$$4x \cdot 7y + 3x \cdot (-2)y = 22xy$$

olacağından

$$12x^2 + 22xy - 14y^2 = (4x - 2y)(3x + 7y)$$

olur.

İKİNCİ DERECE DENKLEMLERİN DİSKRİMİNANT YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

9.4. Teorem: $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesine denklemin diskriminantı denir.

1. $\Delta > 0$ ise denklemin reel iki kökü vardır. Bu iki kök $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ şeklindedir.

2. $\Delta = 0$ ise denklemin eşit (çakışık) iki kökü vardır. Kökler $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ şeklindedir.

3. $\Delta < 0$ ise denklemin reel kökü yoktur. Kökler karmaşık sayıdır. (Bkz. Karmaşık sayılar)

İspat: 1. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= 0 \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) &= 0 \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
 \end{aligned}$$

2. (1) de $\Delta = 0$ alınırsa köklerin $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ olduğu aşikârdır.

3. $\Delta < 0$ ise kara kökün içi negatif reel sayı olacağından denklemin çözümlü reel sayı değildir. Kökler karmaşık sayıdır, karmaşık sayılar konusunda incelenir.

Örnek: $x^2 - 3x - 2 = 0$ denkleminde $a = 1, b = -3, c = -2$ olacağından

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 + 8 = 17 \\
 x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{17}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\
 x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{17}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $2x^2 + 5x - 3 = 0$ denkleminde $a = 2, b = 5, c = -3$ olacağından,

$$\begin{aligned}\Delta &= 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 \\ x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 + 7}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 - 7}{2 \cdot 2} = -3\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $x^2 - 9x + 20 = 0$ denkleminde

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{9 + 1}{2} = 5 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek: $x^2 - 4x + 4 = 0$ denkleminde

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = 2 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = 2\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek: $x^2 + 2mx + m^2 - m + 4 = 0$ denkleminin eşit reel iki kökü varsa, m 'nin değeri nedir?

Çözüm: 2. derece denklemin eşit iki reel kökü varsa $\Delta = 0$ dir. Buna göre, $a = 1, b = 2m, c = m^2 - m + 4$ dir.

$$\begin{aligned}\Delta &= (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - m + 4) = 0 \\ 4m^2 - 4m^2 + 4m - 16 &= 0 \\ m &= 4\end{aligned}$$

Örnek: $mx^2 - 2(m - 1)x + (m - 8) = 0$ denkleminin birbirine eşit iki kökün olabilmesi için m 'nin değeri kaç olmalıdır?

Çözüm: Eşit iki kökü olması için $\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
 [-2(m-1)]^2 - 4 \cdot m \cdot (m-8) &= 0 \\
 4(m^2 - 2m + 1) - 4m^2 + 32m &= 0 \\
 m &= -\frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

Örnek: Bir okul öncesi sınıfına 72 çikolata hediye geliyor. Öğrencilerden 3'ü kendi paylarından vazgeçiyor ve çikolatalar diğer öğrenciler arasında eşit olarak paylaşılıyor. Bu durumda, çikolata alan çocuklar önceki duruma göre 2 çikolata daha fazla alıyorlar. Buna göre, çikolata alan öğrencilere kaç tane düşmüştür?

Çözüm: Bu sınıfta x tane öğrenci olsun.

$$\begin{aligned}
 \frac{72}{x} &= \frac{72}{x+3} + 2 \\
 \frac{72}{x} &= \frac{72}{x+3} + \frac{2x+6}{x+3} \\
 \frac{72}{x} &= \frac{72 + 2x + 6}{x+3} \\
 \frac{72}{x} &= \frac{2x + 78}{x+3} \\
 72x + 216 &= 2x^2 + 78x \\
 2x^2 + 6x - 216 &= 0 \\
 x^2 + 3x - 108 &= 0 \\
 (x + 12)(x - 9) &= 0 \\
 x &= 9
 \end{aligned}$$

bulunur.

İKİNCİ DERECEYE DÖNÜŞTÜRÜLEBİLEN DENKLEMLER

Bazı denklemler, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olmadığı halde, bazı düzenlemelerle ikinci dereceden denkleme dönüştürülebilir.

1. Çarpanlara Ayrılabilen Denklemler

İkinci dereceden fazla denklemler $P(x)$ ve $Q(x)$ iki fonksiyon çarpanlara ayırarak ikinci dereceye dönüştürülebilir.

$$P(x) \cdot Q(x) = 0 \text{ ise } P(x) = 0 \text{ ve } Q(x) = 0$$

Örnek: $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm: Mevcut 3. dereceden denklemdir. Bu 3. dereceden denklem 2. dereceden denkleme dönüştürülebilir. Şöyle ki,

$$\begin{aligned}x^3 - 5x^2 + 6x &= 0 \\x(x^2 - 5x + 6) &= 0 \\x(x - 2)(x - 3) &= 0 \\x = 0, x = 2 \text{ ve } x = 3\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $4(x - 4)^2 - 64 = 0$

Çözüm: $4(x - 4)^2 - 64 = 0$
 $4(x - 4)^2 = 64$
 $(x - 4)^2 = 16$
 $x - 4 = \pm 4$
 $x - 4 = 4 \text{ ve } x - 4 = -4$
 $x = 8 \text{ ve } x = 0$

2. Rasyonel İkinci Dereceden Denklemler

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki fonksiyon rasyonel tip denklem olarak bulunabilir. Bu tip denklemlerde payda eşitlenerek denklem çözülmeye çalışılır.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, P(x) = 0 \text{ ve } Q(x) \neq 0$$

Örnek: $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{8}{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{8}{3}$
 $\frac{(x-1)^2 - (x-2)^2}{(x-2)(x-1)} = \frac{8}{3}$
 $\frac{(x-1-x+2)(x-1+x-2)}{x^2-3x+2} = \frac{8}{3}$
 $\frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{8}{3}$
 $8x^2 - 24x + 16 = 6x - 9$
 $8x^2 - 30x + 25 = 0$

olarak ikinci dereceden denklemi bulunur. Burada $a = 8, b = -30, c = 25$ olduğundan,

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 25 = 900 - 800 = 100$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-30) + \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-30) - \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \frac{5}{4}$$

bulunur. Şu halde çözüm kümesi $\mathcal{C} = \left\{ \frac{5}{2}; \frac{5}{4} \right\}$ dir.

Örnek: $\frac{2x}{x+4} - \frac{6}{x-1} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm: } \frac{2x}{x+4} - \frac{6}{x-1} &= 1 \\ \frac{2x(x-1) - 6(x+4)}{(x+4)(x-1)} &= 1 \\ \frac{2x^2 - 8x - 24}{(x+4)(x-1)} &= 1 \\ \frac{2(x^2 - 4x - 12)}{(x+4)(x-1)} &= 1 \end{aligned}$$

ulunur. Şu halde çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{-2; 6\}$ ve çözüm olmaması $\{-4; 1\}$ dir.

3. Değişken Değiştirilebilen Denklemler

Kara köklü veya ikinci dereceden daha fazla denklemler ikinci dereceye dönüştürmek için bir değişken kullanılabilir.

Örnek: $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Çözüm: $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$ denkleminde $\sqrt{x} = t$ dönüşümü yapılırsa

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = 3 \text{ ve } t = 1$$

bulunur. Bizden istenen t değil x 'dir. Şu halde x 'i bulalım.

$$\sqrt{x} = 3 \text{ ve } \sqrt{x} = 1$$

$$x = 9 \text{ ve } x = 1$$

elde edilir.

Örnek: $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Çözüm: $x^3 = t$ olsun $x^6 = (x^3)^2 = t^2$ olur.

$$\begin{aligned}
 t^2 - 26t - 27 &= 0 \\
 (t - 27)(t + 1) &= 0 \\
 t = 27 \text{ ve } t &= -1 \\
 x^3 = 27 \text{ ve } x^3 &= -1 \\
 x = 3 \text{ ve } x &= -1
 \end{aligned}$$

Örnek: $(x^2 - 3x)^2 - 22(x^2 - 3x) + 72 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Çözüm: $x^2 - 3x = t$ olsun $t^2 - 22t + 72 = 0$ olur.

$$\begin{aligned}
 (t - 4)(t - 18) &= 0 \\
 t - 4 = 0 \text{ ve } t - 18 &= 0 \\
 x^2 - 3x - 4 = 0 \text{ ve } x^2 - 3x - 18 &= 0 \\
 (x - 4)(x + 1) = 0 \text{ ve } (x - 6)(x + 3) &= 0 \\
 x = 4, x = -1, x = 6 \text{ ve } x = -3
 \end{aligned}$$

4. Üstlü İkinci Dereceden Denklemler

Verilen ikinci dereceden denklemler üstlü ifadeler halinde olabilir. Bu durumda üstlü ifadenin özellikleri kullanılacaktır.

Örnek: $4^{x^2+x-6} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $4^{x^2+x-6} = 1$

$$\begin{aligned}
 4^{x^2+x-6} &= 4^0 \\
 x^2 + x - 6 &= 0 \\
 (x + 3)(x - 2) &= 0
 \end{aligned}$$

Örnek: $2^{x^2-x} = 64$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $2^{x^2-x} = 64$

$$\begin{aligned}
 2^{x^2-x} &= 2^6 \\
 x^2 - x &= 6 \\
 x^2 - x - 6 &= 0 \\
 (x - 3)(x + 2) &= 0 \\
 x = 3 \text{ ve } x &= -2
 \end{aligned}$$

5. Köklü İkinci Dereceden Denklemler

$n \in \mathbb{Z}^+$ ve $P(x)$ bir fonksiyon olmak üzere,

1. $\sqrt[n+1]{P(x)}$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $P(x)$ tanımlıdır

2. $\sqrt[n]{P(x)}$ ise $P(x) \geq 0$ şartını sağlayan x 'ler için tanımlıdır.

Bu denklemlerin çözümü yukarıdaki denklem çözümlerinden biri veya denklemlerin her iki tarafının kuvvetini alma gibi bir metotla çözülür. Ama denklemin sonunda elde edilen x 'in değerlerini denklemlerde yerine yazmak gerekir. Çünkü elde edilen x değerlerin bazıları denklemi sağlamayabilir.

Örnek: $a - 2 = \sqrt{2a - 1}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Çözüm: Denklem her iki tarafının karesini alırsak,

$$(a - 2)^2 = (\sqrt{2a - 1})^2$$

$$a^2 - 4a + 4 = 2a - 1$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$(a - 5)(a - 1) = 0$$

$$a = 5 \text{ ve } a = 1$$

dir. Yalnız $a = 1$ denklemini yerine yazıldığından denklem sağlanamamaktadır. Ama $a = 5$ denklemini sağlamaktadır. Buna göre $a = 5$ denklemin çözümüdür.

Örnek: $\sqrt{x + \sqrt{x - 2}} = 2$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$$\text{Çözüm: } (\sqrt{x + \sqrt{x - 2}})^2 = 2^2$$

$$x + \sqrt{x - 2} = 4$$

$$\sqrt{x - 2} = 4 - x$$

(Eşitliğin sağlanması için $x - 2 \geq 0$ ve $4 - x \geq 0$ ise $2 \leq x \leq 4$ olmalıdır)

$$(\sqrt{x - 2})^2 = (4 - x)^2$$

$$x - 2 = 16 - 8x + x^2$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$x = 6 \text{ ve } x = 3$$

Ama 6 denkleminin çözümünü sağlamaz. 3 noktası denkleminin çözümünü sağlar.

Örnek: $\sqrt{4x + 1} - \sqrt{x - 1} = 2$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $4x + 1 \geq 0$ ve $x - 1 \geq 0$ ise $x \geq 1$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
(\sqrt{4x+1})^2 &= (2 + \sqrt{x-1})^2 \\
4x+1 &= 4 + 4\sqrt{x-1} + x - 1 \\
3x-2 &= 4\sqrt{x-1} \\
(3x-2)^2 &= (4\sqrt{x-1})^2 \\
9x^2 - 12x + 4 &= 16x - 16 \\
9x^2 - 28x + 20 &= 0 \\
(9x-10)(x-2) &= 0 \\
x &= \frac{10}{9} \text{ ve } x = 2
\end{aligned}$$

Her iki sayıda denklemi sağladığından $\mathcal{C} = \left\{\frac{10}{9}, 2\right\}$ dir.

6. Mutlak Değerli İkinci Dereceden Denklemler

Mutlak değerli ifade içeren bir denklemi çözmek için yapılacak ilk işlem, reel (gerçel) sayılarda mutlak değer tanımını kullanarak mutlak değer kaldırmaya çalışarak çözümlenmelidir.

Örnek: $x^2 - |x| - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: i) $x < 0$ ise $|x| = -x$

$$\begin{aligned}
x^2 - (-x) - 2 &= 0 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
(x+2)(x-1) &= 0 \\
x &= -2 \text{ ve } x = 1
\end{aligned}$$

olup 1 denklemi sağlamayıp -2 denklemi sağlar.

ii) $x \geq 0$ ise $|x| = x$

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 2 &= 0 \\
(x-2)(x+1) &= 0 \\
x &= 2 \text{ ve } x = -1
\end{aligned}$$

olup -1 denklemi sağlamayıp 2 denklemi sağlar. Buna göre çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{-2, 2\}$ dir.

Örnek: $x|x-5| = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: i) $x < 5$ ise $|x-5| = -(x-5) = 5-x$

$$\begin{aligned}
x(5-x) &= 6 \\
-x^2 + 5x + 6 &= 0 \\
(x-2)(x-3) &= 0
\end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ ve } x = 3$$

olup 2 ve 3 denklemini sağlar.

$$\text{ii) } x \geq 5 \text{ ise } |x - 5| = x - 5$$

$$x(x - 5) = 6$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x = 6 \text{ ve } x = -1$$

olup -1 denklemini sağlamayıp 6 denklemini sağlar. Buna göre çözüm kümesi $\mathbb{C} = \{2, 3, 6\}$ dir.

KÖKLERİ VERİLEN İKİNCİ DERECE DENKLEMİN YAZILMASI

9.5. Teorem: Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklem şu şekilde yazılır:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0$$

dir.

İspat: Kökleri x_1 ve x_2 olarak verilen ikinci dereceden denklem,

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0$$

olarak bulunur.

Örnek: Kökleri 2 ve 10 olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm: Kökler toplamı $x_1 + x_2 = 2 + 10 = 12$

$$\text{Kökler çarpımı } x_1x_2 = 2 \cdot 10 = 20$$

olacağından ikinci dereceden denklem

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

olarak bulunur.

Örnek: Kökleri $\frac{1}{2}$ ve -1 olan 2. derece denklemi bulunuz.

Çözüm: Kökler toplamı $x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}$

$$\text{Kökler çarpımı } x_1x_2 = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

olduğundan ikinci dereceden denklem,

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

olarak bulunur.

Örnek: Çözüm kümesi $\{3\}$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm: Çözüm kümesi bir elemanlı olması iki kökünde aynı olmasıdır, bu çakışık kök şeklinde ifade edilir. Bu iki denklemin kökler toplamı ve çarpımı,

$$x_1 + x_2 = 3 + 3 = 6$$

$$x_1 x_2 = 3 \cdot 3 = 9$$

şeklinde. Şu halde yeni denklem,

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

biçimindedir.

İKİNCİ DERECE DENKLEMLERİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

9.6. Teorem: $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri ile katsayıları arasında:

1. Kökler toplamı, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2. Kökler çarpımı, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

3. Kökler farkı, $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

ilişkiler bulunur.

İspat: $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki ikinci dereceden denklemin kökleri,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olduğuna göre,

$$i) x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$ii) x_1 x_2 = \frac{(-b + \sqrt{\Delta}) \cdot (-b - \sqrt{\Delta})}{2a \cdot 2a}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-b)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

ii) $|x_1 - x_2| = \left| \frac{(-b) + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$
şeklindedir.

Örnek: $x^2 - 5x + 6 = 0$ denkleminin köklerinin 2 şer fazlasını kök kabul eden ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm: $x^2 - 5x + 6 = 0$ denkleminin köklerinin kökleri

$$x_1 = 2 \text{ ve } x_2 = 3$$

olacağından, yeni denklem

$$x_1 + 2 = 4 \text{ ve } x_2 + 2 = 5$$

bulunur. Bu iki denklemin kökler toplamı ve çarpımından

$$(x_1 + 2) + (x_2 + 2) = 4 + 5 = 9$$

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 4 \cdot 5 = 20$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

bulunur.

Örnek: $x^2 - 2x + 8 = 0$ denkleminin kökleri a ve b 'dir. Kökleri $\frac{4}{a}$ ve $\frac{4}{a}$ olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

Çözüm: Kökler toplamı $x_1 + x_2 = a + b = 2$ ve kökler çarpımı $x_1 x_2 = ab = 8$ dir. Buna göre,

$$\frac{4}{a} + \frac{4}{b} = \frac{4(a+b)}{ab} = \frac{4 \cdot 2}{8} = 1 \text{ ve } \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{b} = \frac{16}{8} = 2$$

bulunur ki buna göre,

$$x^2 - x + 2 = 0$$

elde edilir.

Örnek: $x^2 - 10x + 12 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_2^2x_1$ ve $x_1^2x_2$ denkleminin sonucu nedir?

Çözüm: Verilen denklemin kökler toplamı 10, kökler çarpımı 12 olduğuna göre;

$x_2^2x_1 + x_1^2x_2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = 12 \cdot 10 = 120$ biçimindedir.

Örnek: Kökleri arasında $\frac{x_1}{2} = \frac{3}{x_2}$ ve $2x_1 + x_2 = x_1 + 5$ ifadeleri olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm: $\frac{x_1}{2} = \frac{3}{x_2}$ ise $x_1x_2 = 6$ kökler çarpımını verir
 $2x_1 + x_2 = x_1 + 5$ ise $x_1 + x_2 = 5$ kökler toplamını verir
 olacağından ikinci dereceden denklem
 $x^2 - 5x + 6 = 0$
 olarak bulunur.

Örnek: $2x^2 + 6x + a = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Bu denklemde $2x_1 - 3x_2 = 24$ olduğuna göre x_1 nin değeri nedir?

Çözüm: Kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$ dür. Burada
 $2x_1 - 3x_2 = 24$
 $x_1 + x_2 = -3$
 iki bilinmeyenli iki denklemi çözersek $x_1 = 3$ bulunur.

Örnek: $(m + 2)x^2 + (6 - m)x + (2m - 2) = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre, $x_1x_2 = 1$ ise m 'nin değeri nedir?

Çözüm: $a = m + 2$, $b = 6 - m$, $c = 2m - 2$ olacağından,
 $x_1x_2 = 1$
 $\frac{2m-2}{m+2} = 1$
 olacağından $m = 4$ bulunur.

Örnek: $x^2 - 5x + 8 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ yi bulunuz.

Çözüm: $x_1 + x_2 = 5$ ve $x_1x_2 = 8$ olacağından

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{5^2 - 2 \cdot 8}{8} = \frac{9}{8}$$

elde edilir.

Örnek: $(m - 1)x^2 - mx + m + 1 = 0$ denkleminde köklerin çarpımı $x_1x_2 = -2$ ise $x_1 + x_2$ köklerin toplamını bulunuz.

Çözüm: Denkleminde $a = m - 1$, $b = -m$, $c = m + 1$ dir.

$$x_1x_2 = -2 \text{ ise } \frac{m+1}{m-1} = -2 \text{ olup } m = \frac{1}{3}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-m}{m-1} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{2}$$

Örnek: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ve, $|x_1 - x_2| = 2x_1x_2$ ise m 'nin değerleri nelerdir?

Çözüm: Denkleminde $a = 1$, $b = -2m$, $c = 2m - 1$ dir.

$$|x_1 - x_2| = 2x_1x_2$$

$$\frac{\Delta}{|a|} = 2 \cdot \frac{c}{a}$$

$$\frac{\sqrt{(-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m-1)}}{|1|} = 2 \cdot \frac{2m-1}{1}$$

$$2\sqrt{(m-1)^2} = 4m - 2$$

$$|m-1| = 2m - 1$$

$$m \geq 1 \text{ ise } |m-1| = m-1 \text{ olup } m-1 = 2m-1 \text{ ise } m = 0$$

$$m < 1 \text{ ise } |m-1| = -m+1 \text{ olup } -m+1 = 2m-1 \text{ ise } m = -\frac{2}{3}$$

9.1. Sonuç: $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise,

i) Köklerin karelerinin toplamı;

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

iii) Köklerin küplerinin toplamı

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) \\ &= \frac{3abc - b^3}{a^2} \end{aligned}$$

iii) Köklerin çarpmaya göre tersleri toplamı;

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

iv) Köklerin karelerinin çarpmaya göre tersleri toplamı;

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

v) Köklerin küplerinin çarpmaya göre tersleri toplamı;

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1x_2)^3} = \frac{\frac{3abc - b^3}{a^2}}{\left(\frac{c}{a}\right)^3} = \frac{3abc - b^3}{c^3}$$

Örnek: $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $x_1^2 + x_2^2 = 4$ ise m 'nin değerini bulunuz.

Çözüm: Denklemden $a = 2, b = -4, c = m - 3$ dür.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \\ 4 &= \frac{(-4)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (m - 3)}{2^2} \\ m &= 3 \end{aligned}$$

İKİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ

9.3. Tanım: 9.2. tanımda ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem verilmişti. İkinci dereceden iki bilinmeyenli en az iki denklemin meydana getirdiği sisteme ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi denir. Bu denklem sistemini sağlayan $(x; y)$ reel sayı ikililerinin kümesine de denklem sisteminin çözüm kümesi adı verilir.

Bu tür denklem sistemlerini çözerken, verilen denklemlerden faydalanılarak bir bilinmeyenli denklem elde edilerek çözüme gidilir.

Örnek: $3x^2 + 4y^2 = 16$
 $x^2 + y^2 = 5$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: İkinci denklemin her iki tarafını -4 ile çarpıp taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4y^2 &= 16 \\ -4x^2 - 4y^2 &= -20 \\ -x^2 &= -4 \\ x &= -2 \text{ ve } x = 2 \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerleri 2. denklemde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^2 + 4y^2 &= 16 \\ y^2 &= 1 \\ y &= 1 \text{ ve } y = -1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek: $xy = 64$
 $x + y = 20$

sisteminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $x + y = 20$ ise $y = 20 - x$

$$\begin{aligned} xy &= 64 \\ x(20 - x) &= 64 \\ x^2 - 20x + 64 &= 0 \\ x_1 &= 16 \text{ ve } x_2 = 4 \\ y_1 &= 20 - 16 = 4 \text{ ve } y_2 = 20 - 4 = 16 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $x + 2y = 8$
 $x^2 - 4y^2 = 32$

olduğuna göre x ve y 'in değerini bulunuz.

Çözüm: 2. denklemi çarpanlara ayırarak

$$(x - 2y)(x + 2y) = 32$$

$$(x - 2y)8 = 32$$

$$x - 2y = 4$$

bulunur. Buna göre,

$$x + 2y = 8$$

$$x - 2y = 4$$

denklemleri çözülürse $x = 6$ ve $y = 1$ bulunur.

PARAMETRELİ İKİNCİ DERECE DENKLEMLER

9.4. Tanım: İçerisinde x değişkeninden başka sabit ya da sabitler bulduran ikinci dereceden denklemlere ikinci dereceden parametrelilik denir.

Örneğin; $t \cdot x^2 - (t - 4)x + 8t = 0$ denklemindeki parametre t ;
 $3x^2 - (m - n)x - 9mn = 0$ denklemindeki parametreler m ve n 'dir.

Örnek: $(m - 3)x^2 - 2mx + 3(m - 1) = 0$ denkleminin köklerinden birisi (-1) ise m kaçtır?

Çözüm: $x = -1$ ise $(m - 3)(-1)^2 - 2m(-1) + 3(m - 1) = 0$
 $m - 3 + 2m + 3m - 3 = 0$
 $m = 1$

Örnek: $6x^2 + (m - 1)x - n + 7 = 0$
 $3x^2 - 2x + n + 1 = 0$

denklemlerinin çözüm kümesi eşit ise m ve n 'nin değerleri nedir?

Çözüm: Çözüm kümeleri eşit ise aynı dereceleri terimlerinin katsayıları orantılıdır.

$$\frac{6}{3} + \frac{m-1}{-2} = \frac{-n+7}{n+1}$$

$$m = -3 \text{ ve } n = 3$$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

İkinci Dereceden Denklemlerin Çarpanlara Ayrılması

$$1. \frac{2x^2+3x-5}{x^3-1} : \frac{2x^2+5x}{x^2+x+1}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) x B) 2x C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+3x-5}{x^3-1} : \frac{2x^2+5x}{x^2+x+1} &= \frac{2x^2+3x-5}{x^3-1} \cdot \frac{x^2+x+1}{2x^2+5x} \\ &= \frac{(2x+5)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{(x^2+x+1)}{x(2x+5)} \\ &= x \end{aligned}$$

Cevap: A

$$2. \left(\frac{2+x}{1-x} \right) \left(\frac{x^2-1}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} \right)$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) 2 C) $\frac{x+1}{x+3}$ D) $\frac{x-1}{x+3}$ E) $\frac{x+1}{x-3}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2+x}{1-x} \right) \left(\frac{x^2-1}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} \right) &= \left(\frac{2+x}{1-x} \right) \left(\frac{x^2-1}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} \right) \\ &= \left(\frac{2+x}{1-x} \right) \left(\frac{(x-1)(x+1)}{(2-x)(2+x)} \right) \cdot \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3} \right) \\ &= \left(-\frac{x+1}{2-x} \right) \cdot \left(\frac{(x-2)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \right) \\ &= \frac{x+1}{x+3} \end{aligned}$$

Cevap: C

3. $(x-1)(x+1)(x+5) = (x-2)(x-2)(x+4)$
denkleminin sabit sayısı (x olmayan katsayı) aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2 B) 10 C) -10 D) -11 E) 11

$$\begin{aligned}\text{Çözüm: } (x-1)(x+1)(x+5) &= (x-2)(x-2)(x+4) \\ (x^2-1)(x+5) &= (x^2-4)(x+4) \\ x^3+5x^2-x-5 &= x^3+4x^2-4x-16 \\ x^2+3x-11 &= 0\end{aligned}$$

Cevap: D

4. $\frac{2x^2+3x-9}{2x-3} - x$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) x B) 1 C) x + 3 D) x - 3 E) 3

$$\text{Çözüm: } \frac{2x^2+3x-9}{2x-3} - x = \frac{(2x-3)(x+3)}{2x-3} - x = x+3 - x = 3$$

Cevap: E

5. $2^{2x} - 2^x - 12 = 0$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) -3 E) 4

$$\begin{aligned}\text{Çözüm: } 2^{2x} - 2^x - 12 &= 0 \\ (2^x - 4)(2^x + 3) &= 0 \\ 2^x - 4 = 0 \text{ ve } 2^x + 3 &= 0 \\ 2^x = 2^2 \text{ ve } 2^x &= -3 \\ x &= 2\end{aligned}$$

Cevap: B

6. $\frac{8x^3+32x^2}{4x^2+12x} : \frac{x^3-16x}{x^2-x-12}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) x D) 2x E) x^2

$$\text{Çözüm: } \frac{8x^3+32x^2}{4x^2+12x} : \frac{x^3-16x}{x^2-x-12} = \frac{8x^2(x+4)}{4x(x+3)} \cdot \frac{(x-4)(x+3)}{x(x-4)(x+4)} = 2$$

Cevap: B

7. $1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = 0$ denklemini sağlayan x 'in negatif değeri nedir?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

Çözüm: $1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = 0$

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x} - \frac{3}{x^2} = 0$$

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x = -3 \text{ ve } x = 1$$

Cevap: C

İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

8. $a^2 - 3ab - 4b^2$ olduğuna göre, a ' sayısı b sayısının katının büyük olanı nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0$

$$(a - 3b)(a + b) = 0$$

$$a - 3b = 0 \text{ ve } a + b = 0$$

$$a = 3b \text{ ve } a = -b$$

Cevap: C

9. $\frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+y} + 3^{2y}}{3^{2x} - 3^{x+y}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 - 3^{y-x}$ B) 1 C) 3^{y-x} D) $x - 3$ E) 3^{x-y}

Çözüm:

$$\frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+y} + 3^{2y}}{3^{2x} - 3^{x+y}} = \frac{(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x 3^y + (3^y)^2}{3^x(3^x - 3^y)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(3^x - 3^y)^2}{3^x(3^x - 3^y)} \\
&= \frac{3^x - 3^y}{3^x} \\
&= \frac{3^x}{3^x} - \frac{3^y}{3^x} \\
&= 1 - 3^{y-x}
\end{aligned}$$

Cevap: A

10. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, x^2 + y^2 = 35$ ise, xy 'nin pozitif değeri nedir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 14

Çözüm: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
 $\frac{x+y}{xy} = 1$

$$x + y = xy$$

Her iki tarafın karesini alırsak,

$$(x + y)^2 = (xy)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (xy)^2$$

$$35 + 2xy = (xy)^2$$

bulunur. Burada $xy = a$ alırsak,

$$a^2 - 2a - 35 = 0$$

$$(a - 7)(a + 5) = 0$$

$$a = 7 \text{ ve } a = -5$$

$$xy = 7 \text{ ve } xy = -5$$

olur.

Cevap: D

Diskriminant Yöntemi

11. Bir sayının karesi, aynı sayının -4 katı ve 2 sayısı toplandığında 0 olmaktadır. Bu denklemde oluşan sayının kökünün büyük olanı kaçtır?

A) $2 + \sqrt{2}$ B) $2 - \sqrt{2}$ C) -1 D) $\sqrt{2}$ E) 1

Çözüm: $x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+2\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-2\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = 2 - \sqrt{2}$$

Cevap: A

12. $\frac{1}{9x^2} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{6} = 0$ denkleminin köklerinden biridir?

A) $1 - \sqrt{2}$ B) $1 + \sqrt{2}$ C) -1 D) $\sqrt{2}$ E) 1

Çözüm: Verilen denklemde önce payda eşitleyeceğiz.

$$\frac{3}{18x^2} + \frac{6x}{18x^2} - \frac{3x^2}{18x^2} = 0$$

$$\frac{-3x^2+6x+3}{18x^2} = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+2\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-2\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = 1 - \sqrt{2}$$

bulunur.

Cevap: B

13. $m^2x^2 + (2m - 1)x + 1 = 0$ denkleminin köklerinin eşit olması halinde m , aşağıdaki hangi sayıya eşit olur?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) 2

Çözüm: Denklemnin köklerinin eşit olması için $\Delta = 0$ olmalıdır.

$$a = m^2, b = 2m - 1, c = 1$$

olduğuna göre,

$$\Delta = (2m - 1)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 1 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 = 0$$

$$m = \frac{1}{4}$$

Cevap: C

14. $ax^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin kökleri eşit (çakışık) ise, a 'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 b) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: 2. Derece denklemlerin eşit olması için $\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = 0$$

$$a = 4$$

Cevap: E

15. $a \neq -1/2$ olmak üzere

$$(2a + 1)x^2 - (a + 2)x + 1 = 0$$

denkleminin kökleri eşit olduğuna göre, a 'nın değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Denkleminin kökleri eşit ise $\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\Delta = (-(a + 2))^2 - 4 \cdot (2a + 1) \cdot 1 = 0$$

$$a^2 + 4a + 4 - 8a - 4 = 0$$

$$a^2 - 4a = 0$$

$$a(a - 4) = 0$$

$$a = 0 \text{ ve } a = 4$$

Cevap: D

16. $x^2 + 2kx + 1 = 0$ denkleminde köklerin reel sayı olması için k aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: İkinci derece denklemin kökleri reel sayı olmaması için $\Delta < 0$ olmalıdır.

$$\Delta = (2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$$

$$4k^2 < 4$$

$$k < 1$$

Cevap: E

17. $x^2 + 4x + k = 0$ denkleminde köklerin reel sayı olmaması için k aşağıdakilerden hangisi olur?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: İkinci derece denklemin kökleri reel sayı olmaması için $\Delta < 0$ olmalıdır.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0$$

$$16 < 4k$$

$$4 < k$$

Cevap: A

İkinci Dereceye Dönüştürülebilen Denklemler

18. $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$ denkleminin köklerinden biri de ğildir?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm: $x^2 - 3x = a$ olsun. Bu takdirde

$$t^2 - t - 8 = 0$$

$$(t - 4)(t + 2) = 0$$

$$t = 4 \text{ ve } t = -2$$

$$x^2 - 3x = 4 \text{ ve } x^2 - 3x = -2$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \text{ ve } x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0 \text{ ve } (x - 2)(x - 1) = 0$$

$$x = 4, x = -1, x = 2, x = 1$$

Cevap: B

19. $x = 3 + \sqrt{15 - x}$ denklemini sağlayan de ğerin çarpımı kaçtır?

- A) -1 B) -2 C) -4 D) -6 E) -8

Çözüm: $x - 3 = \sqrt{15 - x}$

$$(x - 3)^2 = (\sqrt{15 - x})^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = 15 - x$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x = 6 \text{ ve } x = -1$$

Cevap: D

20. $(x - 5)^5 = (x - 5)^3$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm: $x - 5 = t$ olsun.

$$(x - 5)^5 = (x - 5)^3$$

$$t^5 = t^3$$

$$t^5 - t^3 = 0$$

$$t^3(t^2 - 1) = 0$$

$$t^3(t - 1)(t + 1) = 0$$

$$(x - 5)^3(x - 5 - 1)(x - 5 + 1) = 0$$

$$x = 5, x = 6, x = 4$$

Cevap: C

21. $|x - 3|^2 - 5|x - 3| = 6$ denklemini sağlayan x reel sayılarından biri değildir?

- A) -3 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

Çözüm:

i) $x \geq 3$ için $(x - 3)^2 - 5(x - 3) = 6$

$$x^2 - 6x + 9 - 5x + 15 - 6 = 0$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$(x - 2)(x - 9) = 0$$

$$x = 2 \text{ ve } x = 9$$

ii) $x < 3$ için $(x - 3)^2 + 5(x - 3) = 6$

$$x^2 - 6x + 9 + 5x - 15 - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x = 4 \text{ ve } x = -3$$

Cevap: C

22. $\left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x - \frac{6}{x}\right) + 35 = 0$ denklemini sağlayan x değerlerinden biri değildir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm: $x + \frac{6}{x} = t$ olsun.

$$\left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x + \frac{6}{x}\right) + 35 = 0$$

$$t^2 - 12t + 35 = 0$$

$$(t - 5)(t - 7) = 0$$

$$t = 5 \text{ ve } t = 7$$

$$x + \frac{6}{x} = 5 \text{ ve } x + \frac{6}{x} = 7$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ ve } x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0 \text{ ve } (x - 6)(x - 1) = 0$$

$$x = 3, x = 2, x = 6 \text{ ve } x = 1$$

Cevap: D

23. $5^{x^2-3x} = \frac{1}{25}$ denklemini sağlayan değerlerden biridir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: $5^{x^2-3x} = \frac{1}{25}$

$$5^{x^2-3x} = 5^{-2}$$

$$x^2 - 3x = -2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 1 \text{ ve } x = 2$$

Cevap: A

Köklerden Denklemın Yazılması

24. Kökleri $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ ve $x_2 = 3 + \sqrt{2}$ olan ikinci derece denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + 6x + 5 = 0$

B) $-x^2 + 6x + 5 = 0$

C) $x^2 - 6x - 5 = 0$

D) $-x^2 + 6x - 5 = 0$

E) $x^2 - 6x + 5 = 0$

Çözüm: Verilen ifadelere göre,

$$x_1 + x_2 = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

$$x_1 x_2 = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 5$$

dir. Kökler toplamı ve kökler çarpımı verilen 2. Dereceden denklem

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

şeklindedir.

Cevap: E

25. $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{10+x} - \frac{1}{x}$ denkleminin köklerinin çarpımı kaçtır?

- A) 26 B) 24 C) 10 D) -2 E) 0

Çözüm: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{10+x} - \frac{1}{x}$

$$\frac{10}{24} = \frac{x}{10x+x^2} - \frac{10}{10x+x^2}$$

$$\frac{12}{5x^2 + 50x} = \frac{-10}{10x+x^2}$$

$$5x^2 + 50x = -120$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$x_1x_2 = 24$$

Cevap: B

26. Kökleri $4x^2 - 8x + 5 = 0$ olan ikinci derece denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

I. $x_1 + x_2 = 2$

II. $x_1x_2 = \frac{5}{4}$

III. $\frac{x_1}{x_2} > 0$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I, II ve III

Çözüm: Kökler toplamı ve kökler çarpımından I ve II'nin doğru olduğu aşıkardır. Kökler çarpımı pozitif olduğundan kökler bölümünde pozitif olacaktır.

Cevap: E

27. $x^2 + x + p = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olsun. Kökleri $x_1 + 1, x_2 + 1$ olan denklem aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x^2 + 3x + p = 0$ B) $x^2 - 3x + p = 0$
 C) $x^2 + 2x + p = 0$ D) $x^2 - 2x + p = 0$
 E) $x^2 + 3x + p + 1 = 0$

Çözüm: Verilen denkleme göre $x_1 + x_2 = 1$ ve $x_1x_2 = p$ olduğuna göre yeni denklemin kökler toplamı

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + 2 = 3$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1x_2 + (x_1 + x_2) = p + 1$$

olacağından yeni denklem

$$x^2 + 3x + p + 1 = 0$$

biçimindedir.

Cevap: E

Kökler Arası İlişkiler

28. $(x + \frac{1}{x})^2 - 3(x - \frac{1}{x}) - 10 = 0$ denklemini sağlayan köklerin toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x + \frac{1}{x} = t$ olsun.

$$(x + \frac{1}{x})^2 - 3(x - \frac{1}{x}) - 10 = 0$$

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t - 5)(t + 2) = 0$$

$$t = 5 \text{ ve } t = -2$$

$$x + \frac{1}{x} = 5 \text{ ve } x + \frac{1}{x} = -2$$

$$x^2 - 5x + 1 = 0 \text{ ve } x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 5 \text{ ve } x_3 + x_4 = -2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 - 2 = 3$$

Cevap: C

29. $x^2 - 6(m + 1)x + 2(m - 2) = 0$ denkleminin kökler toplamı, kökler çarpımının 4 katı ise, m 'nin değeri nedir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $x_1 + x_2 = 6(m + 1)$ ve $x_1x_2 = 2(m - 2)$

$$\begin{aligned}
 6(m+1) &= 4 \cdot 2(m-2) \\
 6m+6 &= 8m-8 \\
 m &= 7
 \end{aligned}$$

Cevap: D

30. $(m-1)x^2 - x + m + 2 = 0$ denkleminde kökler çarpımının 4 olması için m 'nin değeri ne olmalıdır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

$$\begin{aligned}
 \text{Çözüm: } x_1 x_2 &= \frac{m+2}{m-1} \\
 4 &= \frac{m+2}{m-1} \\
 4m-4 &= m+2 \\
 m &= 2
 \end{aligned}$$

Cevap: B

31. $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x-2}{x-5} = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olduğuna göre, $x_1 x_2$ çarpımı nedir?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

$$\begin{aligned}
 \text{Çözüm: } \frac{x-2}{x-3} + \frac{x-2}{x-5} &= 0 \\
 \frac{(x-2)(x-5) + (x-2)(x-3)}{(x-3)(x-5)} &= 0 \\
 \frac{x-3}{(x-2)(x-5+x-3)} &= 0 \\
 \frac{x-3}{(x-3)(2x-8)} &= 0 \\
 x^2 - 7x + 12 &= 0 \\
 x_1 x_2 &= 12
 \end{aligned}$$

Cevap: B

32. $x^2 + (x_1 + 5)x + 7x_2 = 0$ denkleminin kökleri, sıfırdan farklı olan x_1 ve x_2 sayılarıdır. Buna göre, $x_1 + x_2$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

Çözüm:

Kökler toplamı $x_1 + x_2 = -(x_1 + 5) = -x_1 - 5$

Kökler çarpımı $x_1 x_2 = 7x_1$ olduğundan $x_2 = 7$

$$x_1 + 7 = -x_1 - 5$$

$$x_1 = -6$$

$$x_1 + x_2 = -6 + 7 = 1$$

Cevap: D

33. $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve $x_1^2 + x_1 x_2 = 12$ ise m 'nin değeri nedir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x_1 + x_2 = 4$ ve $x_1 x_2 = m - 2$

$$x_1^2 + x_1 x_2 = 12$$

$$x_1(x_1 + x_2) = 12$$

$$x_1 \cdot 4 = 12$$

$$x_1 = 3$$

olduğundan x yerine 3 yazılırsa

$$3^2 - 4 \cdot 3 + m - 2 = 0$$

$$m = 5$$

bulunur.

Cevap: E

34. $x^2 - 6x + m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ve $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$ olduğuna göre m 'nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

Çözüm: $x_1 + x_2 = 6$ ve $x_1 x_2 = m$ olduğuna göre,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 2$$

$$\frac{6}{m} = 2$$

$$m = 2$$

dir.

Cevap: A

35. $x^2 - 2x + m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1^2 + x_2^2 = 8$ eşitliği olması için m 'nin değeri nedir?

- A) 2 B) 1 C) -2 D) -1 E) 0

Çözüm: $x_1 + x_2 = 2$ ve $x_1x_2 = m$ olduğuna göre,

$$x_1^2 + x_2^2 = 8$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8$$

$$2^2 - 2m = 8$$

$$2^2 - 2m = 8$$

$$m = -2$$

dir.

Cevap: C

37. $x^2 - 5x + m^2 + n^2 = 0$ denkleminin, kökleri m ve n ise, $m^2 + n^2$ nin değeri nedir?

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: $m + n = 6$ ve $mn = m^2 + n^2$

$$(m + n)^2 = 6^2 \text{ ve } 2mn = 2(m^2 + n^2)$$

$$m^2 + 2mn + n^2 = 36 \text{ ve } 2mn = 2m^2 + 2n^2$$

$$m^2 + 2m^2 + 2n^2 + n^2 = 36$$

$$3m^2 + 3n^2 = 36$$

$$m^2 + n^2 = 12$$

Cevap: A

38. $x^2 + 2x + m = 0$ denkleminin bir kökü 3, ise diğer kökün değeri nedir?

- A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

Çözüm: Bu denklemin diğer kökü k olsun. Kökler toplamı gereği,

$$3 + k = -2$$

$$k = -5$$

olur.

Cevap: A

39. $x^2 - 5x - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre, $\frac{1}{x_1+2} + \frac{1}{x_2+2}$ toplamı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

$$\begin{aligned} \text{Çözüm: } x_1 + x_2 &= 5 \text{ ve } x_1x_2 = -3 \\ \frac{1}{x_1+2} + \frac{1}{x_2+2} &= \frac{(x_1+2)+(x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)} \\ &= \frac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} \\ &= \frac{5+4}{-3+2\cdot 5+4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cevap: B

İkinci Dereceden Denklem Sistemleri

39. $x^2 + 6x + k = 0$ ve $x^2 + mx - k = 0$ biçiminde iki denklem veriliyor. İkinci denklemin kökleri birinci denklemini köklerinden 4'er fazla olması için k 'nın değeri ne olmalıdır?

- A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Çözüm: 1. denklemin kökleri a ve b olsun. Bu takdirde $a + b = -6$ ve $ab = k$ dir. 2. denklemin kökleri $a + 4$ ve $b + 4$ dir. Kökler çarpımı,
 $(a + 4)(b + 4) = -k$
 $ab + 4(a + b) = -k$
 $k + 4 \cdot (-6) = -k$
 $k = 12$

bulunur.

Cevap: C

40. $x^2 - 2x - y - 4 = 0$ ve $2x^2 + y - 5x - 6 = 0$ denklemlerini sağlayan (x, y) ikililerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) -3

Çözüm: Verilen denklemleri taraf tarafa toplanırca,

$$3x^2 - 7x - 10 = 0$$

$$(x + 1)(3x - 10) = 0$$

$$x = -1 \text{ ve } x = 3/10$$

bulunur. Birinci denklemde $x = -1$ yazılırsa,

$$x^2 - 2x - y - 4 = 0$$

$$(-1)^2 - 2(-1) - y - 4 = 0$$

$$y = -1$$

bulunacağından $x + y = (-1) + (-1) = -2$ olur.

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. M. Zeki DERMAN, Serdar GÜLMEZ, Ökkeş ÖZKÖSELER, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2002, Ankara.
4. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Matematik Cep Kitabı, Final Dergisi Yayınları, 1989, İstanbul.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
8. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Fahriya ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, Ankara, 2006.
9. ÖSS Matematik Soru Bankası, Açık Yayınları, Ankara, 2006.