10. BÖLÜM
n. DERECEDEN DENKLEMLER

Bu bölümde önce 3. dereceden ve 4. dereceden denklemler incelenecek daha sonra da genelleme yapılarak n. dereceden denklemlerden bahsedilecektir.

ÜÇÜNCÜ DERECEDEN DENKLEM KAVRAMI

10.1. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}, a \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

denklemine üçüncü dereceden (kübik) denklem denir. Bu denklemin en az bir reel kökü vardır. (Karmaşık sayı kavramında karmaşık sayıların ikişer ikişer köklerden oluştuğu söylenecektir. Buna göre 3. derecede denklemde reel kök sayısı ya 1 tane ya da 3 tanedir.)

Örnek: $4x^3 + 2x^2 + 8x - 10 = 0$

$$t^3 + 5t^2 + 10 = 0$$

$$-m^3 + 2m^2 + 6m = 0$$

birer üçüncü dereceden denklemdir.

Örnek: $(m - 3)x^4 + x^3 + x^{n-1} + 6x + 9 = 0$ bir üçüncü dereceden denklem olduğuna göre m ve n'nin değeri nedir?

Çözüm: Denklem dördüncü dereceden olmayıp üçüncü dereceden olduğundan $m - 3 = 0$ olmalıdır. Şu halde $m = 3$ dür.

2. dereceden kısım olmadığından $n - 1 = 2$ olmalıdır. Şu halde $n = 3$ dür.

ÜÇÜNCÜ DERECEDEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Üçüncü dereceden denklemlerin ikinci dereceden denklem gibi bir diskiriminant yöntemi yoktur. Ama üçüncü dereceden denklemler birkaç türlü çözümlenir. Bunlar;

1. Ortak Paranteze Alma Yöntemi

Üçüncü dereceden denklemlerin bazılarında ortak paranteze alınarak çözüm kümesi elde edilebiliyor. Şimdi bu yönteme ait örnekler verelim.

Örnek: $3x^3 - 2x^2 + 12x + 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $3x^3 - 2x^2 + 12x + 8 = 0$
$$3x(x^2 - 4) - 2(x^2 - 4) = 0$$
$$(x^2 - 4)(3x - 2) = 0$$
$$(x - 2)(x + 2)(3x - 2) = 0$$
$$x = 2, x = -2 \text{ ve } x = \frac{2}{3}$$

Örnek: $x^3 + 5x^2 - 14x = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $x^3 + 5x^2 - 14x = 0$
$$x(x^2 + 5x - 14) = 0$$
$$x(x + 7)(x - 2) = 0$$
$$x = 0, x = -7 \text{ ve } x = 2$$

2. Denklemin Sabit Terimine Göre Denklem Çözme

Üçüncü dereceden bir denklemde öncelikle sabit teriminin bölenleri bulunur. Bu bölenlerden biri denklemi sağlaması mümkündür. Sağlayan denklem yardımıyla ikinci dereceden denkleme dönüştürülür.

10.1. Aksiyom: Aynı dereceli değişkenlerin katsayıları birbirine eşittir. Yani,
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$
$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \cdots, a_1 = b_1 \text{ ve } a_0 = b_0$$
şeklindedir.

Örnek: $x^3 - 7x - 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $x^3-7x-6=0$ denkleminde -6'nın bölenleri $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ dır. Bunları denklem de yerine yazarak bir kökü bulalım.

$x=1$ ise $1^3-7\cdot1-6=-12\neq0$ denklemi sağlamıyor.

$x=-1$ ise $(-1)^3-7\cdot(-1)-6=0$ denklemi sağlıyor.

O halde $x=-1$ denklemin bir köküdür. Bu durumda denklem $(x+1)$ ile tam bölünür. Bu $(x+1)$ ile bölme işlemi polinomların bölmesi veya Horner yöntemiyle yapılır. Ama bu iki yöntemde polinomlar konusunda izah edilecektir. Polinomlar konusu henüz anlatılmadığından, burada şu yöntemle çözeceğiz.

$$x^3-7x-6=(x+1)(x^2+bx+c)$$
$$x^3-7x-6=x^3+(b+1)x^2+(b+c)x+c$$

olur. 10.1. Aksiyoma göre,

$$b+1=0,\ b+c=-7 \text{ ve } c=-6$$
$$b=-1 \text{ ve } c=-6$$

bulunur. Buradan,

$$(x+1)(x^2-x-6)=0$$
$$(x+1)(x-3)(x+2)=0$$
$$x=-1, x=3, x=-2$$
$$Ç=\{-2,-1,3\}$$

elde edilir.

Örnek: $x^3-3x^2-13x+15=0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $x^3-3x^2-13x+15=0$ denkleminde 15'in bölenleri $\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$ dir. Bunları denklem de yerine yazarak bir kökü bulalım.

$x=1$ ise $1^3-3\cdot1^2-13\cdot1+15=0$

olup denklemi sağlamaktadır. Şu halde bu denklem $(x+1)$ ile tam bölünür. Buna göre,

$$x^3-3x^2-13x+15=(x+1)(x^2+bx+c)$$
$$x^3-3x^2-13x+15=x^3+(b+1)x^2+(b+c)x+c$$

olur. 10.1. Aksiyoma göre,

$$b+1=-3,\ b+c=-13 \text{ ve } c=15$$
$$b=-2 \text{ ve } c=15$$

olur. Buna göre,

$$(x+1)(x^2-2x-15)=0$$
$$(x+1)(x-5)(x+3)=0$$
$$x=-1, x=5, x=-3$$

elde edilir.

3. $y^3+py+q=0$ Dönüştürülerek Çözme

3. dereceden denklemlerin bu şekilde çözümü İtalyan matematikçileri Girolamo Cardano tarafından 1525 dolaylarında ortaya atmış ama bir kısmı 1540 yılında Scipione Dal Ferro tarafından ve tam olarak Niccolo Fontana Tartaglia tarafından çözülmüştür.

Niccolò Tartaglia
(1499, Brescia, İtalya - 13 Aralık 1557, Venedik, İtalya)

10.1. Teorem: Her $n \in \mathbb{N}, a \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

denklemi $x = y - \frac{b}{3a}$ değişken değiştirmesi uygulanırsa $y^3 + py + q = 0$ şekline dönüşür.

İspat: Verilen denklemde $x = y - \frac{b}{3a}$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$
$$a\left(y^3 - 3y^2\frac{b}{3a} + 3y\frac{b^2}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(y^2 - 2y\frac{b}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$
$$ay^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y + \left(\frac{b^3}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0$$
$$y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \left(\frac{2b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0$$

yazılabilir. Burada $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$ ve $q = \frac{2b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d$ alınırsa,

$$y^3 + py + q = 0$$

elde edilir.

11.1. Not: $y^3 + py + q = 0$ denklemi,

$$y = u - v, p = 3uv, q = v^3 - u^3$$

alınırsa

$$(u - v)^3 + 3uvy + v^3 - u^3 = 0$$

şekline dönüşür.

Örnek: $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Bu denklemde $x = y - \frac{(-9)}{3 \cdot 1} = y + 3$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{(-9)^2}{3 \cdot 1^2} + \frac{26}{1} = -1$$

$$q = \frac{2b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = \frac{2(-9)^3}{9(-1)^2} - \frac{(-9) \cdot 26}{3 \cdot 1} + (-24) = 0$$

$$y^3 + py + q = 0$$

$$y^3 - y = 0$$

bulunur. Burada,

$$y = u - v, p = 3uv, q = v^3 - u^3$$

$$(u - v)^3 - 3uv(u - v) + v^3 - u^3 = 0$$

denklemlerinde yazmaya çalışırsak,

$$p = 3uv = -1, q = v^3 - u^3 = 0$$

denklemi çözülürse,

$$u = v = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

bulunur. Şu halde, $y = u - v = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$ dir. Buna göre,

$$x = y + 3 = 0 + 3 = 3$$

köklerden bir tanesidir. Ayrıca,

$$y^3 - y = 0$$

$$y(y^2 - 1) = 0$$

$$y(y - 1)(y + 1) = 0$$

denklemin kökleri –1, 0 ve 1 olduğuna göre, $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ denkleminin kökleri

$$-1 + 3 = 2\ ,0 + 3 = 0, 1 + 3 = 4$$

şeklindedir.

10.2. Not: Üçüncü dereceden (kübik) denklemlerin köklerinden bazen ikisi reel sayı çıkmayıp kompleks (karmaşık) çıkmaktadır. Bu sebepten bu denklemlerin çözümleri kompleks sayılar kavramında bir çözüm yönteminden bahsedilecektir. (Bk. Kompleks sayılar)

KÖKLERİ VERİLEN ÜÇÜNCÜ DERECEDEN DENKLEMLERİ YAZILMASI

10.2. Teorem: Kökleri x_1, x_2 ve x_3 x_1, x_2 ve x_3 olan üçüncü dereceden denklem şu şekilde yazılır:

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - (x_1x_2x_3) = 0$$

dir.

İspat: Kökleri x_1, x_2 ve x_3 olarak verilen üçüncü dereceden denklem yazıldıktan sonra dağılma özelliği uygulanırsa,

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$
$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - (x_1x_2x_3) = 0$$

olarak bulunur.

Örnek: Kökleri 2, 3 ve 4 olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm: $x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 3 + 4 = 9$
$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 26$
$x_1x_2x_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
olduğuna göre,

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - (x_1x_2x_3) = 0$$
$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

dir.

Örnek: Kökleri –3, 0, 2 olan üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem nedir?

Çözüm: Be denklem, $(x + 3)x(x - 2) = 0$ biçimindedir. Düzenlenirse,

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

olur.

ÜÇÜNCÜ DERECEDEN DENKLEMLERİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

10.3. Teorem: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denklemine kökler ile katsayıları arasında:

1. Kökler toplamı, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

2. Köklerin ikişerli çarpımlarının toplamı; $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$

3. Köklerin çarpımı; $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

İspat: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

olduğuna görürüz. Aynı zamanda bu yazım "Kökleri verilen üçüncü dereceden denklemlerin yazıldığında"

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - (x_1x_2x_3) = 0$$

olur ki istenen verilerdir.

Örnek: $x^3 - 2mx^2 - x + 6 = 0$ denkleminde $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$$2 = -\frac{-2m}{1}$$
$$m = 2$$

Örnek: $2x^3 - mx^2 + 5x + 1 = 0$ denkleminin köklerinin çarpımı, köklerin toplamından 2 fazla ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: $x_1x_2x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + 2$

$$-\frac{d}{a} = -\frac{b}{a} + 2$$
$$-\frac{1}{2} = -\frac{m}{2} + 2$$
$$m = 5$$

Örnek: $x^3 - 6x^2 + (m-1)x - m = 0$ denkleminde $x_1 + x_3 = 2x_2$ ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ ve $x_1 + x_3 = 2x_2$

$$2x_2 + x_2 = 6$$

$$x_2 = 2$$

dir. Bu da denklemi sağlayacağından,

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + (m-1)2 - m = 0$$
$$m = 18$$

olarak bulunur.

Örnek: $x^2 - 2x + m = 0$ denkleminin iki kökü de

$$x^3 - 2x^2 + nx + k - 4 = 0$$

denklemlerinin köklerini sağlıyor ise k'nın değeri nedir?

Çözüm: $x^2 - 2x + m = 0$ denkleminde $x_1 + x_2 = 2$

$x^3 - 2x^2 + nx + k - 4 = 0$ denkleminde $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

dir. Bu eşitlikten $2 + x_3 = 2$ ise $x_3 = 0$ bulunur. Bu denklemi sağladığından,

$$0^3 - 2 \cdot 0^2 + n \cdot 0 + k - 4 = 0$$
$$k = 4$$

olarak bulunur.

10.1. Sonuç: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denkleminin kökleri arasında;

1. Köklerin çarpma işlemine göre terslerinin toplamı;

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}$$

2. Köklerin karelerinin toplamı;

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

olur.

İspat:

1. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{c/a}{-d/a} = -\frac{c}{d}$

2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)$$
$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

Örnek: $x^3 - mx^2 + 8x + 2 = 0$ denkleminin köklerinin kareleri toplamı 9 ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$

$$\frac{b^2 - 2ac}{a^2} = 9$$

$$\frac{m^2 - 2 \cdot 1 \cdot 8}{1^2} = 9$$

$$m = \pm 5$$

Örnek: $2x^3 - 8x^2 + mx + 8 = 0$ denkleminde $x_1 = 1$ ise $x_2^2 + x_3^2$ toplamının değeri nedir?

Çözüm: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$$1 + x_2 + x_3 = -\frac{-8}{2}$$

$$x_2 + x_3 = 3$$

ve

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

$$1 \cdot x_2 x_3 = -\frac{8}{2}$$

$$x_2 x_3 = -4$$

olduğundan

$$x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 x_2) = 3^2 - 2 \cdot (-4) = 17$$

olur.

DÖRDÜNCÜ DERECEDEN DENKLEM KAVRAMI

10.2. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}, a \neq 0, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

üçüncü dereceden denklemine dördüncü dereceden denir. Bu denklemin ya sıfır ya iki ya da dört kökü reeldir, diğer kökler karmaşık sayıdır. Burada reel kökler ve dördüncü dereceden denklemin kökleri arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir. Reel sayı olmayıp karmaşık (kompleks) kökler kompleks analiz derslerinde incelenecektir.

Örnek: $2x^4 - 5x^3 + 10x^2 + 8x - 9 = 0$

$$t^4 + 5t^3 + 15 = 0$$

$$-m^4 + 2m^2 + 6 = 0$$
birer dördüncü dereceden denklemdir.

Örnek: Üç katlı kökü 2, bir kökü de 4 olan dördüncü dereceden denklem nedir?

Çözüm: $(x-2)(x-2)(x-2)(x+4) = 0$
$(x-2)^3(x+4) = 0$
denklemi elde edilir.

KÖKLERİ VERİLEN DÖRDÜNCÜ DERECEDEN DENKLEMLERİ YAZILMASI

10.4. Teorem: Kökleri x_1, x_2, x_3 ve x_4 olan dördüncü dereceden denklem şu şekilde yazılır:

$$x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)x^2 - \\ -(x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2)x + (x_1x_2x_3x_4) = 0$$
olur.

İspat: Kökleri x_1, x_2, x_3 ve x_4 olarak verilen dördüncü dereceden denklem yazıldıktan sonra dağılma özelliği uygulanırsa,

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$
$$x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)x^2 - \\ -(x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2)x + (x_1x_2x_3x_4) = 0$$
olarak bulunur.

Örnek: Kökleri 2, 3, 4 ve 5 olan dördüncü dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm: $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0$
$x^4 - 14x^3 + 48x^2 - 15x + 120 = 0$

DÖRDÜNCÜ DERECEDEN DENKLEMLERİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

10.5. Teorem: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ denklemine kökler ile katsayıları arasında:

1. Kökler toplamı, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$

2. Köklerin ikişerli çarpımlarının toplamı;

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = \frac{c}{a}$$

2. Köklerin üçerli çarpımlarının toplamı;

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 = -\frac{d}{a}$$

3. Köklerin çarpımı; $x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}$

İspat: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

olduğuna görürüz. Aynı zamanda bu yazım "Kökleri verilen dördüncü dereceden denklemlerin yazıldığında"

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)x^2 - \\ -(x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2)x + (x_1x_2x_3x_4) = 0$$

olur ki istenen verilerdir.

Örnek: Kökleri 2, 3, 4 ve 5 olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 48$

$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 =$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 3 = 154$$

$x_1x_2x_3x_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

olduğuna göre,

$$x^4 - 14x^3 + 48x^2 - 15x + 120 = 0$$

dir.

Örnek: $3x^4 - 5x^3 + (2m + 1)x^2 + 5 = 0$ denkleminin bir kökü 1 ise köklerin ikişerli çarpımlarının toplamı kaçtır?

Çözüm: $x_1 = 1$ ise $3 \cdot 1^4 - 5 \cdot 1^3 + (2m + 1) \cdot 1^2 + 5 = 0$ olup $m = -2$ dir. Buna göre,

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = \frac{c}{a} = \frac{2m+1}{3} = \frac{2(-2)+1}{3} = -1$$

n. DERECEDEN DENKLEM KAVRAMI

10.3. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

n. dereceden denklem denir. Bu denklemin bazı kökleri reel sayı, bazı kökleri karmaşık (kompleks) sayı olabilir. Kompleks sayı köklerinin bulunması Kompleks Analiz derslerinde izah edilecektir.

10.3. Not: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ biçimindeki denkleminin katsayılar toplamı sıfır ise yani $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 0$ ise verilen denklemin köklerinden birisi 1'dir.

Örnek: $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$ denkleminin köklerinden biri 1'dir. Çünkü;

$$1 - 3 + 6 - 4 = 0$$

dır.

10.6. Teorem: Her $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ denklemin kökleri;

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

n. derece denkleminde a_0'ın bölenlerinden en az biri denklemin kökleridir.

Örnek: $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$ denkleminde $a_0 = 8$ dır. 8'in bölenleri $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ dir. Bunlardan 2 sayısı

$$2^3 - 4 \cdot 2^2 + 8 = 0$$

denklemin köklerini sağlar. Bu denklemi $x - 2$ ile polinom bölmesi yaparak (polinom bölmesi polinomlar konusunda görülecektir),

$$(x^2 - 2x - 4)(x - 2) = 0$$

elde edilir. $x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminin kökleri $x = 1 \pm \sqrt{5}$ dir. Şu halde bu denklemin üç kökü $x_1 = 2, x_2 = 1 + \sqrt{5}, x_3 = 1 - \sqrt{5}$ dir.

n. DERECEDEN DENKLEMLERİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

10.7. Teorem: Her $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ denklemin kökleri $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ olmak üzere;

1. Kökler toplamı, $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

2. n tek ise kökler çarpımı; $x_1x_2x_3 \cdots x_n = \frac{a_0}{a_n}$

3. n çift ise kökler çarpımı; $x_1x_2x_3 \cdots x_n = -\frac{a_0}{a_n}$

dir.

Bu teorem 10.3. teorem ve 10.5. teoremin genellemesi olduğundan ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Kökleri 0, 1 ve 2 olan üçüncü dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ B) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
C) $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ D) $x^3 - 3x + 2 = 0$
E) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

Çözüm: $(x - 0)(x - 1)(x - 2) = 0$

$x(x - 3x + 2) = 0$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

Cevap: B

2. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 12 = 0$ denkleminin kökler çarpımı, aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 12

Çözüm: 4. dereceden denklemin kökler çarpımı,

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} = \frac{12}{1} = 12$$

bulunur.

Cevap: E

3. $x^3 + 4x^2 + 5x + 10 = 0$ denkleminde kökler çarpımı ile aşağıdaki ifadelerden hangisi söylenebilir?

A) Köklerden ikisi pozitif, biri negatiftir.
B) Köklerden biri negatif, ikisi pozitiftir
C) Köklerin hepsi pozitiftir

D) Reel bir kök yoktur.
E) Köklerin biri pozitif, ikisi negatiftir.

Çözüm: Üçüncü derece denklemde kökler çarpımı,

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{10}{1} = -10$$

olup "Köklerden ikisi pozitif, biri negatiftir" olabilir.

Cevap: A

4. $x^3 + mx^2 + nx - 2p = 0$ ve $x^2 + qx + p = 0$ denklemlerinde kökler çarpımı "p" ise üçüncü derece denklemin bir kökü nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Kökler çarpımı aynı olduğundan

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{-2p}{1} = 2p \text{ ve } x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{p}{1} = p$$

$$px_3 = 2p$$

$$x_3 = 2$$

dır.

Cevap: C

5. $x^4 + bx^3 + cx^2 - 16 = 0$ biçimindeki denklem kökleri aynı sayı ise bu kökün pozitif değeri nedir?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm: Verilen 4. derece denklemde kökler aynı sayı ise

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = m$$

olsun. Buna göre,

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{-16}{1} = 16$$

$$m^4 = 2^4$$

$$m = 2$$

olur.

Cevap: B

6. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden biri değildir?

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $x^2 = t$ alalım.

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$
$$(t-4)(t-1) = 0$$
$$t = 4 \text{ ve } t = 1$$
$$x^2 = 4 \text{ ve } x^2 = 1$$
$$x = \pm 2 \text{ ve } x = \pm 1$$

Cevap: C

7. $x^3 - bx^2 + 4x + 6 = 0$ denkleminin kökleri ardışık tek sayı olduğuna göre en küçük kökün b türünden değeri nedir?

A) $\frac{b+6}{3}$ B) $\frac{b-6}{3}$ C) $\frac{b-6}{2}$ D) $\frac{b+6}{2}$ E) $\frac{b-6}{4}$

Çözüm: En küçük kök x_1 olsun.

$$x_1 + x_2 + x_3 = b$$
$$x_1 + (x_1 + 2) + (x_1 + 4) = b$$
$$3x_1 + 6 = b$$
$$x_1 = \frac{b-6}{3}$$

Cevap: B

8. $x^2 + 10x + m = 0$ denkleminin verilen iki kökü, aynı zamanda $x^3 - nx - 40 = 0$ denkleminin de kökleridir. Buna göre, $m \cdot n$'nin değeri kaçtır?

A) 860 B) 880 C) 900 D) 920 E) 960

Çözüm: İlk denklemin

$$x_1 + x_2 = -10 \text{ ve } x_1x_2 = m$$

dir. İkinci denklemin

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ ve } x_1x_2x_3 = 40$$

olduğundan

$$x_3 = 10 \text{ ve } mx_3 = 40$$
$$m = 4$$

olur. Bilinen $x_3 = 10$ eşitliği ikinci denklemde yerine yazarsak,

$$10^3 - n \cdot 10 - 40 = 0$$
$$n = 96$$
$$m \cdot n = 10 \cdot 96 = 960$$

bulunur.

Cevap: E

9. $(x^2 - 4x)^2 + 5x - 8 = 0$ denkleminin reel kökleri toplamı nedir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $(x^2 - 4x)^2 + 5x - 8 = 0$
$$x^4 - 8x^3 + x^2 + 5x - 8 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

Cevap: D

10. $a \neq 1$ olmak üzere, $x^3 - 1 = 0$ denkleminin köklerinden biri a ise $a^2 + a + 11$ toplamının değeri nedir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ için köklerden biri a ve $a \neq 1$ ise
$$a^2 + a + 1 = 0$$
olur. Buna göre,
$$a^2 + a + 11 = a^2 + a + 1 + 10 = 0 + 10 = 10$$
elde edilir.

Cevap: A

11. $x^3 + mx - 54 = 0$ denkleminin iki kökü aynı ise m'nin değeri nedir?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Çözüm: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ve $x_1x_2x_3 = -54$
dir. Burada $x_1 = x_2$ olsun.
$$2x_1 + x_3 = 0 \text{ ve } x_1^2x_3 = -54$$
$$2x_1 = -x_3 \text{ ve } -2x_1^3 = -54$$
$$x_1 = 3$$
bulunur. Bir kök 3 olduğundan,
$$3^3 + m \cdot 3 - 54 = 0$$
$$m = 9$$
elde edilir.

Cevap: B

12. $x^3-(a+1)x^2+3x+7=0$ denkleminin iki kökü ile, $x^2-ax=0$ denkleminin kökleri eşit olduğuna göre, a'nın değeri nedir?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

Çözüm: Birinci ve ikinci denklemlerde kökler toplamından,

$x_1+x_2+x_3=a+1$ ve $x_1+x_2=a$

yazılır. Buna göre $x_3=1$ dir. Şu halde,

$1^3-(a+1)\cdot 1^2+3\cdot 1+7=0$

$a=10$

olur.

Cevap: C

13. $x^3-3x^2-(2m-3)x+1-3m=0$ denklemin kökleri x_1,x_2,x_3 dür. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{1}{2}$ ise m'nin değeri nedir?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{c}{d}$

$-\frac{1}{2}=-\frac{-(2m-3)}{1-3m}$

$-1+3m=4m-3$

$m=2$

Cevap: D

14. $x^3-3x-2m+4=0$ denklemin kökleri x_1,x_2,x_3 dür. Ayrıca $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$ ise m'nin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x_1+x_2+x_3=0$

$x_1+x_2=-x_3$

$(x_1+x_2)^3=(-x_3)^3$

$x_1^3+x_2^3+3x_1^3x_2+3x_1x_2^3=-x_3^3$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2(x_1+x_2)=0$

$-6+3x_1x_2(-x_3)=0$

$-6-3x_1x_2x_3=0$

$-6 - 3[-(-2m + 4)] = 0$
$-6 - 6m + 12 = 0$
$m = 1$

Cevap: A

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. M. Zeki DERMAN, Serdar GÜLMEZ, Ökkeş ÖZKÖSELER, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2002, Ankara.
4. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Matematik Cep Kitabı, Final Dergisi Yayınları, 1989, İstanbul.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
8. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Fahriya ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, Ankara, 2006.
9. ÖSS Matematik Soru Bankası, Açı Yayınları, Ankara, 2006.