11. BÖLÜM
DENKLEMLERİN EŞİTSİZLİĞİ

EŞİTSİZLİĞİ KAVRAMI

11.1. Tanım: $u(x)$ herhangi bir denklem olsun. Eğer

$$u(x) > 0, u(x) < 0, u(x) \geq 0 \text{ ve } u(x) \leq 0$$

biçimindeki yazılıyorsa, bu denklemlere eşitsizlik denir. Herhangi bir x değişkeninin alabileceği sayı değerlerinin kümesine x'in tanım aralığı veya çözüm kümesi denir.

BİRİNCİ DERECEDEN EŞİTSİZLİKLER

11.2. Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$$

denklemlerine birinci dereceden eşitsizlik denir. $ax + b = 0$ denkleminin kökü $x = -\frac{b}{a}$ dir.

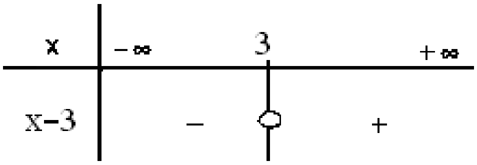
11.1. Aksiyom: Birinci dereceden bir değişkenli eşitsizliklerin işareti,

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	a'nın işaretinin tersi	0	a'nın işaretinin aynı

tablosu elde edilir.

Örnek: $2x - 6$ ifadesinin işaretini inceleyiniz.

Çözüm: $2x - 6 = 0$ ise $x = 3$



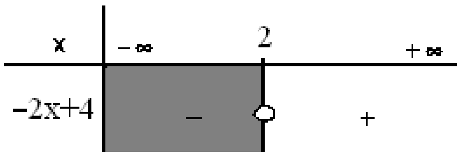
Bu şekil $-\infty < x < 3$ aralığında $2x - 6$ ifadesinin negatif değerler aldığı $3 < x < \infty$ aralığında pozitif değerler aldığı anlamına gelmektedir

11.1. Not: Birinci dereceden eşitliklerinden hangi birinin çözüm kümesini bulmak için $ax + b$ nin işaretini incelemek ve eşitsizliği sağlayan reel sayı aralığını belirtmek gerekir.

Örnek: $-2x + 4 \leq 0$ eşitsizliğinin işaretini inceleyiniz.

Çözüm: 1. yol: $-2x + 4 \leq 0$ ise $x \leq 2$ olduğu aşikârdır.

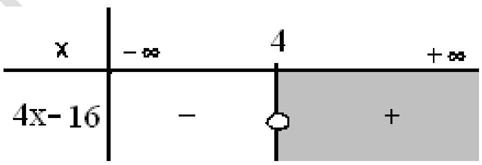
2. yol: $-2x + 4 = 0$ ise $x = 2$



$$Ç.K. = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x \leq -3\} = (-\infty; -3]$$

Örnek: $4x - 16 > 0$ eşitsizliğinin işaretini inceleyiniz.

Çözüm: $4x - 16 > 0$ ise $x > 4$



$$Ç.K. = \{x \in \mathbb{R}: 4 < x < \infty\} = (4; +\infty)$$

14.2. Not: "Eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir reel sayı ile çarpıldığında ya da bölündüğünde eşitsizlik yön değiştirir" kuralının uygulanışını unutmamak gerekir.

İKİNCİ DERECEDEN EŞİTSİZLİKLER

11.3. Tanım: $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere;

$$ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + bx + c \leq 0$$

denklemlerine ikinci dereceden eşitsizlik denir. İkinci dereceden eşitsizliğin kökleri köklerin bulunuşu ikinci dereceden denklemler konusunda görmüştük. Burada şu aksiyomu bilmek gerekir.

11.3. Aksiyom: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c$ denkleminde,

i) $\Delta > 0$ ise $ax^2 + bx + c$ denkleminin reel kökleri x_1, x_2 olsun. Bu takdirde,

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a'nın işaretinin aynı	0	a'nın işaretinin tersi	0	a'nın işaretinin aynı

tablosu elde edilir.

ii) $\Delta = 0$ ise $ax^2 + bx + c$ denkleminin reel kökleri $x_1, x_2 = -\frac{b}{2a}$ dir. Bu takdirde,

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a'nın işaretinin aynı	0	a'nın işaretinin aynı

tablosu elde edilir.

iii) $\Delta < 0$ ise $ax^2 + bx + c$ denkleminin reel kökleri yoktur. Kökler karmaşık sayıdır. Bu takdirde,

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a'nın işaretinin aynı

tablosu elde edilir.

Örnek: $x^2 - 2x - 3$ denkleminin işaretini inceleyiniz.

Çözüm: $x^2 - 2x - 3 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = -1$ ve $x_2 = 3$ olduğuna göre,

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

tablosu elde edilir.

Örnek: $9x^2 + 12x + 4$ denkleminin işaretini inceleyiniz.

Çözüm: $9x^2 + 12x + 4 = 0$ denkleminin kökleri, $x_1, x_2 = -\frac{2}{3}$ olduğuna göre,

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$9x^2 + 12x + 4$	$+$	0	$+$

tablosu elde edilir. Burada iki kökün aynı olması yani çakışık kök olmasına dikkat etmek gerekir. Burada $-\frac{2}{3}$ noktasının kendisinin negatif olduğuna dikkat etmek gerekir.

Örnek: $-2x^2 + 3x - 5$ denkleminin işaretini inceleyiniz.

Çözüm: $-2x^2 + 3x - 5 = 0$ denkleminde

$$\Delta = 3^2 - 4(-1)(-5) = -11 < 0$$

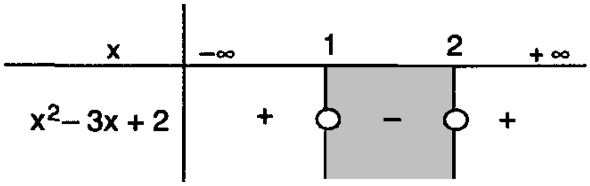
olacağından kökler reel sayı değildir. Buna göre,

x	$-\infty$	$+\infty$
$-2x^2 + x - 5$	$-$	

tablosu elde edilir.

Örnek: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $x^2 - 3x + 2 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = 1$ ve $x_2 = 2$ olduğuna göre,



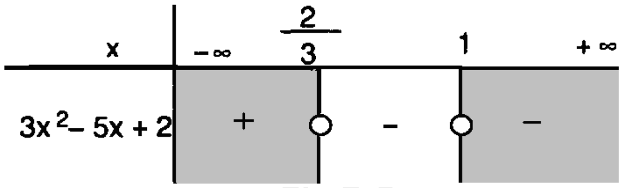
tablosu elde edilir. Çözüm kümesi

$$Ç.K. = \{x \in \mathbb{R}: 1 \leq x \leq 2\} = [1; 2]$$

şeklindedir.

Örnek: $3x^2 - 5x + 2 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $3x^2 - 5x + 2 > 0$ denkleminin kökleri $x_1 = \frac{2}{3}$ ve $x_2 = 1$ olduğuna göre,



tablosu elde edilir. Çözüm kümesi

$$Ç.K. = \left\{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < \frac{2}{3} \text{ ve } 1 < x < \infty\right\} = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; \infty)$$

şeklindedir.

ÇARPIM ve BÖLÜM BİÇİMİNDEKİ EŞİTSİZLİKLER

Bir denklem $u(x) = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{R(x)}$ çarpanlara ayrılmış biçiminde halinde yazılabilir. Bu denklemin işaretleri incelenirken, $R(x) \neq 0$ olmak üzere $P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ denklemleri ayrı ayrı işaretleri incelenir. İşaretlerin bütün çarpanları tespit edilerek tek işaret haline getirilir. Çözüm kümesi bulunmaya çalışılır. Bu durum şu aşamada gerçekleştirmek gerekir.

1. Eşitsizliği bulunan her çarpanın kökleri bulunur.

2. Bulunan kökler sayı düzlemi üzerinde küçükten büyüğe doğru sıralanır.

3. Pay'da köklere sıfır (0) işareti, payda da olan köklere sıfır (0) işareti konulmaz.

4. Eşitsizliğin işareti tespit edilir. Eşitsizliğin işareti; her çarpandaki en büyük dereceli değişkenin katsayılarının işaretlerinin çarpılması ile bulunur.

5. Eşitsizliğin işareti en büyük kökün sağından başlayarak yazılır ve sola doğru her köke geldikçe işaret değiştirilir.

6. Çift katlı köklerde işaret değiştirilmez.

7. $u(x) > 0$ ve $u(x) \geq 0$ ise eşitsizliğin pozitif olduğu bilgiler çözüm kümesi olarak alınır.

$u(x) < 0$ ve $u(x) \leq 0$ ise eşitsizliğin negatif olduğu bilgiler çözüm kümesi olarak alınır.

Örnek: $u(x) = (x+2)(x-5) < 0$ eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm: Önce her çarpanın köklerini bulalım: $x = -2$ ve $x = 5$ dir. $(x+2)$ çarpanın işareti + ve $(x-5)$ çarpanın işareti + dır. Buna göre $+ \cdot + = +$ olduğundan $(5, \infty)$ aralığı + olacaktır. Sondan başa doğru bir + bir – olarak yazarsak, şu tablo oluşur.

x	$-\infty$		-2		5		∞
u(x)		+	o	−	o	+	

$u(x) < 0$ olduğundan çözüm kümesi negatif bölgelerdir,

$Ç.K. = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 5\} = (-2; \infty)$

şeklindedir.

Örnek: $u(x) = (x^2-9)(4-2x) \geq 0$ eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm: Önce her çarpanın köklerini bulalım: $x = \pm 3$ ve $x = 2$ dir. (x^2-9) çarpanın işareti + dır, $(4-2x)$ çarpanın işareti – dir. Şimdi tabloyu oluşturalım.

x	$-\infty$		-3		2		3		∞
u(x)		+	o	−	o	+	o	−	

$u(x) \geq 0$ olduğundan çözüm kümesi pozitif bölgelerdir,

$Ç.K. = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x \leq -3 \text{ ve } 2 \leq x \leq 3\} = (-\infty; -3] \cup [2; 3]$

şeklindedir.

Örnek: $u(x) = (x^2 - 6x + 9)(2x - 8) \geq 0$ eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm: Önce her çarpanın köklerini bulalım. $x_{1,2} = 3$ ve $x = 4$ dir. Çarpanların işaretleri + olduğundan $+ \cdot += +$ dır. Şimdi tabloyu oluşturalım.

x	$-\infty$	3		4		∞
u(x)	$-$	○	$-$	○	$+$	

Bu tabloya göre çözüm kümesi pozitif bölgelerdir,

$\text{Ç.K.} = \{x \in \mathbb{R} : \{3\} \text{ ve } 4 \leq x < \infty\} = \{3\} \cup [4; +\infty)$

şeklindedir.

Örnek: $u(x) = \frac{x^2-9}{x^2-3x+2} > 0$ eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm: Önce her çarpanın köklerini bulalım.

$x = -3, x = 1, x = 2 \text{ ve } x = 3$

dir. Şimdi tabloyu oluşturalım. Ama bu örneğin önceki örneklerden farkı paydada köklerin olmasıdır. Bunlar $x = 1$ ve $x = 2$ olduğundan bu köklere sıfır işareti konulmaz. Çarpanların işaretleri + olduğundan $+ \cdot += +$ dır.

x	$-\infty$	-3		1		2		3		∞
u(x)	$+$	○	$-$		$+$		$-$	○	$+$	

Bu tabloya göre çözüm kümesi

$\text{Ç.K.} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -3, 1 < x < 2 \text{ ve } 3 < x < \infty\}$

$= (-\infty; -3) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$

şeklindedir.

Örnek: $u(x) = \frac{(4-2x)(3-x)}{2x(x^2+2)} \geq 0$ eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm: Önce her çarpanın köklerini bulalım. $x = 0, x = 2$ ve $x = 3$ dir. Çarpanların işaretleri paydakiler –, paydadakiler + dır. Sonuç $- \cdot - \cdot + \cdot += +$ dır. Şimdi tabloyu oluşturalım.

x	$-\infty$	0		2		3		∞
u(x)	$-$		$+$	○	$-$	○	$+$	

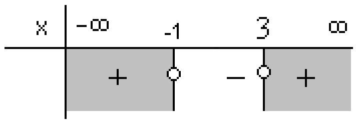
$\text{Ç. K.} = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 2 \text{ ve } 3 < x < \infty\} = (0; 2) \cup (3; +\infty)$ şeklindedir.

Örnek: $x^2 \leq 2x + 3$ eşitsizliğini gerçekleyen x değerlerini bulunuz.

Çözüm: $x^2 \leq 2x + 3$ eşitsizliğinde sıfır olmadığı için eşitsizliği sıfıra eşitlenmelidir.

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$
$$(x - 3)(x + 1) \leq 0$$

denkleminin kökleri $x = -1$ ve $x = 3$ dir. Çarpanların işaretleri $+ \cdot + = +$ olduğundan



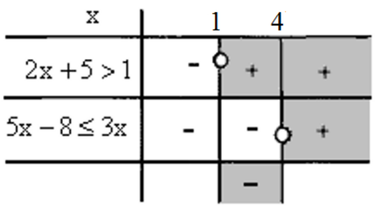
$\text{Ç. K.} = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x \leq -1 \text{ ve } 3 \leq x < \infty\} = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$ şeklindedir.

EŞİTSİZLİK SİSTEMİ

11.4. Tanım: İki veya daha çok eşitsizliğin oluşturduğu sisteme eşitsizlik sistemi denir. Sistemdeki tüm eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimine (ara kesitine), eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi denir.

Örnek: $\left.\begin{matrix} 5x - 8 \leq 3x \\ 2x + 5 > 1 \end{matrix}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $5x - 8 \leq 3x$ denkleminin kökü $x = 4$
$2x + 5 > 1$ denkleminin kökü $x = -2$
işaretleri ise birinci denklemin pozitif, ikinci denklemin negatiftir. $+ \cdot - = -$ olduğundan,



$\text{Ç. K.} = \{x \in \mathbb{R}: 1 < x \leq 4\} = (1; 4]$ şeklindedir.

Örnek: $\left.\begin{array}{r} x^2-x-6\leq 0 \\ x^2-5x+4>0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $x^2-x-6\leq 0$ denkleminin kökleri $x=4$ ve $x=3$
$x^2-5x+4>0$ denkleminin kökleri $x=1$ ve $x=4$
İşaretleri ise birinci denklemin negatif, ikinci denklemin pozitiftir. $+\cdot-=-$ olduğundan,

x	$-\infty$ … -2	-2 … 1	1 … 3	3 … 4	4 … $+\infty$
x^2-x-6	+	-	-	+	+
x^2-5x+4	+	+	-	-	+
		-			

$Ç.K.=\{x\in\mathbb{R}: -2\leq x<1\}=[-2;1)$
şeklindedir.

Örnek: $2\leq\frac{2x-1}{x+3}<3$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $2\leq\frac{2x-1}{x+3}$ ve $\frac{2x-1}{x+3}<3$
eşitsizlikleri düzenlenirse,

$$\frac{-7}{x+3}\geq 0 \text{ ve } \frac{-x-10}{x+3}<3$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buna göre denklemin birinci kökü $x=-3$, ikinci denklemin kökleri $x=-10$ ve $x=-3$ olduğundan,

x	$-\infty$ … -10	-10 … -3	-3 … ∞
$\frac{-7}{x+3}$	+	+	-
$\frac{-x-10}{x+3}$	-	+	-
	-		

$Ç.K.=\{x\in\mathbb{R}: -\infty<x<-10\}=(-\infty;-10)$
şeklindedir.

MUTLAK DEĞERLİ EŞİTSİZLİKLER

Mutlak değerli bir eşitsizliğin çözümünde mutlak değerli ifadelerin kuralları kullanılır.

Örnek: $|x-1| < x+2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: Mutlak değerli bir ifade de pozitif ve negatif iki durum söz konusu olduğundan,

i) $x \geq 1$ için $x-1 < x+2 \Leftrightarrow -1 < 2$ olduğundan $Ç_1 = [-1; +\infty)$

ii) $x < 1$ için $-x+1 < x+2 \Leftrightarrow -1 < 2x$ olduğundan $Ç_2 = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$

$Ç.K. = Ç_1 \cup Ç_2 = [-1; +\infty) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right) = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

bulunur.

Örnek: $x^2 + |x| - 2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $x \geq 0$ ise $x^2 + x - 2 \leq 0$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
x^2+x-2	$+$	o	$-$	o	$+$

$x \geq 0$ ve $-2 \leq x \leq 1$ olduğundan $Ç_1 = [0; 1]$

$x < 0$ ise $x^2 - x - 2 \leq 0$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
x^2+x-2	$+$	o	$-$	o	$+$

$x < 0$ ve $-1 \leq x \leq 2$ olduğundan $Ç_2 = [-1; 0]$

$Ç.K. = Ç_1 \cup Ç_2 = [0; 1] \cup [-1; 0] = [-1; 0]$

bulunur.

Örnek: $|x+1| + |x-2| \leq x+3$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

i) $x \leq 1$ için $-x-1-x+2 \leq x+3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x$ olduğundan $Ç_1 = \varnothing$

ii) $-1 < x < 2$ için $x+1-x+2 \leq x+3 \Leftrightarrow 0 \leq x$ olduğundan $Ç_2 = [0; 2)$

iii) $2 \leq x$ için $x+1+x-2 \leq x+3 \Leftrightarrow x \leq 4$ olduğundan $Ç_3 = [2; 4]$

$Ç.K. = Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 = \varnothing \cup [0; 2) \cup [2; 4] = [2; 4]$

bulunur.

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLERİN KÖKLERİNİN İŞARETLERİ

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve $x_1<x_2$ olmak üzere; $\Delta<0$ ise denklemin reel kökü olmadığından işaret inceleme söz konusu olamaz.

11.1. Teorem: $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere; $\Delta=0$ ise denklemin eşit (çakışık) iki kökü vardır. Kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$ olup kökler aynı işaretlidir. Bu durumda,

i) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$ ise $0<x_1=x_2$ dir. Eşit iki kökü pozitiftir.

ii) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0$ ise $x_1=x_2<0$ dir. Eşit iki kökü negatiftir.

iii) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=0$ ise $x_1=x_2=0$ dir. Eşit iki kökü sıfırdır.

İspat: $ax^2+bx+c=0$ denkleminde $\Delta<0$ ve kökler $x_1=x_2$ ise,

$$(x-x_1)(x-x_1)=0$$
$$x^2-2x_1x+x_1^2=0$$

dir.

i) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0 \Leftrightarrow -\frac{-2x_1}{x_1^2}>0 \Leftrightarrow 0<x_1=x_2$

ii) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0 \Leftrightarrow -\frac{-2x_1}{x_1^2}<0 \Leftrightarrow x_1=x_2<0$

iii) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=0 \Leftrightarrow -\frac{-2x_1}{x_1^2}=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=0$

11.2. Teorem: $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere; $\Delta>0$ ise denklemin farklı iki kökü vardır.

i) Kökler çarpımı $x_1x_2=\frac{c}{a}=0$ ise,

a) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$ küçük kök sıfırdır.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ büyük kök sıfırdır.

ii) Kökler çarpımı $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$ ise kökler aynı işaretli olup,

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise $0 < x_1 < x_2$ Pozitif iki kök vardır.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise $x_1 < x_2 < 0$ Negatif iki kök vardır.

iii) Kökler çarpımı $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ise $x_1 < 0 < x_2$ kökler ters işaretli olup,

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise $|x_1| < x_2$ Negatif kökün mutlak değeri pozitif kökten küçüktür.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise $|x_1| > x_2$ Negatif kökün mutlak değeri pozitif kökten büyüktür.

c) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0$ ise $|x_1| = x_2$ Negatif kökün mutlak değeri pozitif köke eşittir. Yani simetrik iki kök vardır.

İspatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $(m-1)x^2 - (2m+2)x + (m+3) = 0$ denkleminin birbirinden farklı pozitif iki reel kökünün olabilmesi için m'nin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: Bu soruda $\Delta > 0$, $\frac{c}{a} > 0, -\frac{b}{a} > 0$ olmalıdır.

$\Delta = [2(m+1)]^2 - 4(m-1)(m+3) = 4 > 0$

$\frac{c}{a} = \frac{m+3}{m-1}, -\frac{b}{a} = \frac{2m+2}{m-1}$

x	$-\infty$	-3		-1		3		∞
Δ	+		+		+		+	
c/a	+	o	−		−	o	+	
-b/a	+		+	o	−	o	+	

Ç.K. $= \{x \in \mathbb{R}: m < -3 \text{ ve } 1 < m\} = (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ şeklindedir.

Örnek: $(m-2)x^2-2mx+(m-3)=0$ denkleminin birbirinden farklı negatif iki reel kökünün olabilmesi için m'nin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: Bu soruda $\Delta>0,\ \frac{c}{a}>0, -\frac{b}{a}<0$ olmalıdır.

$\Delta=(2m)^2-4(m-2)(m-3)=4(5m-6)>0$
$\frac{c}{a}=\frac{m-3}{m-2}, -\frac{b}{a}=-\frac{2m}{m-2}$

x	$-\infty$ … 0	0 … 6/5	6/5 … 2	2 … 3	3 … ∞
Δ	−	−	+	+	+
c/a	+	+	+	−	+
-b/a	−	−	+	+	−

$Ç.K.=\{x\in\mathbb{R}: m>3\}=(3;\infty)$
şeklindedir.

Örnek: $(m-1)x^2-(m-5)x+(m-3)=0$ denkleminin x_1 ve x_2 dir.
$x_1<0<x_2$ ve $|x_1|>x_2$
ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: Bu soruda $\Delta>0,\ \frac{c}{a}<0, -\frac{b}{a}<0$ olmalıdır. Ancak $\frac{c}{a}<0$ iken daima $\Delta>0$ olacağından, burada Δ ya bakmak gerek yoktur.
$\frac{c}{a}=\frac{m-3}{m-1}, -\frac{b}{a}=-\frac{m-5}{m-1}$

x	$-\infty$ … 1	1 … 3	3 … 5	5 … ∞
c/a	+	−	+	+
-b/a	+	−	−	+

$Ç.K.=\{x\in\mathbb{R}: 1<m<3\}=(1;3)$
şeklindedir.

Not: İkinci dereceden denklemin reel kökleri ile bir m reel sayısının karşılaştırılması "2. Dereceden Fonksiyonlar" konusunda anlatılacaktır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Eşitsizlik Çözümü

1. $x^2 - 3x + 2 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

A) $-\infty < x < 1$ B) $2 < x < \infty 2$ C) $1 < x < 2$
D) $-\infty < x < 2$ E) $1 < x < \infty$

Çözüm: Denklemin kökleri 1 ve 2 dir. x^2 nin işareti pozitiftir. Buna göre denklemin çözüm tablosu,

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2 < 0$	+		-		+

olduğuna göre çözüm kümesi $1 < x < 2$ dir.

Cevap: C

2. $(x+1)^2 \leq 4$ eşitsizliğinin sağlayan en küçük tamsayı nedir?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

Çözüm: $(x+1)^2 \leq 4$
$x^2 + 2x - 3 \leq 0$
$x_1 = 1$ ve $x_2 = -3$
x^2 nin işareti pozitiftir.

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$(x+3)(x-1)$	+	0	−	0	+

Çözüm kümesi $-3 \leq x \leq 1$ olduğundan, denklemi sağlayan en küçük tamsayı –3 dür.

Cevap: A

3. $\dfrac{x-1}{x^2-4} < 0$ eşitsizliğinin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty;-4)\cup(1;2)$ B) $(-\infty;-2)\cup(1;2)$
C) $(-\infty;-2)\cup(1;4)$ D) $(-\infty;-2)$ E) $(1;2)$

Çözüm: Önce eşitsizliğin her çarpanın köklerini inceleyelim.

$x-1=0$ in kökleri $x=1$ olup paydadır

$x^2-4=0$ in kökleri $x=-2, x=2$ olup paydadadır

Çarpanların işaretleri pozitiftir. Bu verilere göre denklemin çözüm tablosu

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$\frac{x-1}{x^2-4}$		$-$		$+$		$-$		$+$	

biçimindedir. Şu halde çözüm kümesi,

$$Ç.K. = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < -2 \text{ ve } 1 < x < 2\} = (-\infty;-2)\cup(1;2)$$

şeklindedir.

Cevap: B

4. $3x(2x-6) \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan en büyük x değerleri nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $3x(2x-6) \leq 0$ eşitsizliğinin kökleri, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 3$ dir. Çarpanların işaretleri pozitiftir. Şu halde çözüm tablosu,

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$3x(2x-6) \leq 0$		$+$		$-$		$+$	

biçimindedir. Çözüm kümesi, $0 \leq x \leq 3$ olduğundan eşitsizliğini sağlayan en büyük x değerleri 3'dür.

Cevap: D

5. $(x^2+x+2)(x^2-4)x < 0$ eşitsizliğini sağlayan x'in pozitif aralığı nedir?

A) $\{0\}\cup\{2\}$ B) $0 \leq x \leq 2$ C) $0 \leq x < 2$
D) $0 < x \leq 2$ E) $0 < x < 2$

Çözüm: $x^2+x+2=0$ denkleminde kökler reel sayı değildir. Verilen denklemin reel kökleri $x=-2, x=0, x=2$ dir. Çarpanların işaretleri pozitiftir. Bu denklemin çözüm tablosu,

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f(x)		-	ο	+	ο	-	ο	+	

Çözüm Kümesi $-\infty < x < -2, 0 < x < 2$ aralığıdır.

Cevap: E

6. $x^3 + 2 < x + 2$ eşitsizliğini sağlayan en büyük negatif tamsayı nedir?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

Çözüm: $x^3 + 2 < x + 2$

$x^3 - x < 0$

$x(x-1)(x+1) < 0$

eşitsizliğinin kökleri $x = 0, x = 1, x = -1$ ve çarpanların işaretleri + olduğundan çözüm tablosu,

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x^3 - x < 0$		−	ο	+	ο	−	ο	+	

ve çözüm kümesi $-\infty < x < -1$ ve $0 < x < 1$ biçimindedir. Buna göre en büyük negatif tamsayı -2'dir.

Cevap: B

7. $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ denklemin birbirinden farklı iki reel kökü var ise, m'nin çözüm kümesini nedir?

A) $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ B) $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$
C) $(-\infty; -2) \cup (1; 4)$ D) $(-\infty; -3)$ E) $(1; \infty)$

Çözüm: $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ denklemin birbirinden farklı iki reel kökü olduğuna göre diskriminant sıfırdan büyük olmalıdır.

$\Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = m^2 + 2m - 3 > 0$

$(m-1)(m+3) > 0$

$m_1 = 1, m_2 = -3$

Çarpanların işaretleri pozitiftir.

m	$-\infty$		-3		1		∞
(m+3)(m-1)		+	ο	-	ο	+	

Çözüm kümesi $-\infty < x < -3$ ve $1 < x < \infty$ biçimindedir.

Cevap: A

8. $\dfrac{(x+2)^2}{(x-1)(x-7)} \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan en büyük tamsayı nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

Çözüm: Denklemlerinin kökleri, $x = 1, x = 7, x = -2$ (çift kat kök) dir. Çarpanların işaretleri pozitiftir. Buna göre çözüm kümesi,

x	$-\infty$		-2		1		7		∞
$\dfrac{(x+2)^2}{(x-1)(x-7)} \leq 0$		+	0	+		-		+	

$\{-2\}$ ve $1 < x < 7$ bulunur. Bu aralıktaki tamsayıların en büyüğü 6 dır.

Cevap: E

9. $\dfrac{(2-x)}{(x+3)x} > 0$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif değer nedir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: Verilen eşitsizliğin kökleri 2 , -3 , 0'dır. Burada -3 ve 0 payda-nın köküdür. Ayrıca işaretleri $- \cdot + \cdot + = -$dir. Buna göre,

x		-3		0		2	
$\dfrac{(2-x)}{(x+3)x} > 0$	+		-		+	0	-

çizilir. Buna göre çözüm kümesi $-\infty < x < -3$ ve $0 < x < 2$ olarak bulunur.

Cevap: C

10. $\dfrac{x^2+5x}{x^2+3x} \leq \dfrac{5x+9}{x^2+3x}$ denklemini sağlayan en küçük tamsayı nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\dfrac{x^2+5x}{x^2+3x} \leq \dfrac{5x+9}{x^2+3x}$

$$\frac{x^2+5x}{x^2+3x} - \frac{5x+9}{x^2+3x} \leq 0$$

$$\frac{x^2+5x-5x-9}{x^2+3x} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)x} \leq 0$$

bu eşitsizliğin kökleri 3 , –3 , 0'dır. Burada –3 ve 0 paydanın köküdür. Ayrıca işaretlerin hepsi pozitiftir. Buna göre çözüm kümesi,

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
		$+$		$+$		$-$		$+$	

$0 < x \leq 3$

Cevap: B

11. $9^x - 28 \cdot 3^x + 27 < 0$ şartını sağlayan tamsayıların toplamı nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $3^x = t$ alınırsa verilen denklem

$t^2 - 28t + 27 < 0$

$(t - 27)(t - 1) < 0$

Çarpanlar pozitif olduğuna göre çözüm kümesi;

t	$-\infty$		1		27		$+\infty$
		$+$		$-$		$+$	

$1 < t < 27$

olur. Buna göre;

$1 < 3^x < 27$

$3^0 < 3^x < 3^3$

$0 < x < 3$

olacağından denklemi sağlayan tamsayılar 1 ve 2 olup toplamı 3'dür.

Cevap: D

12. $x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < x^2, y = 4x + 2$ olduğuna göre, y'nin alabileceği en büyük sayı değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < x^2, y = 4x + 2$ olduğuna göre,

$0 < x < x^2$

$x^2 - x > 0$

$x(x - 1) > 0$

		0		1	
$x(x-1)$	+		-		+
	↗		↘		↗

$x = 0$ noktasında yerel minimuma düşer.

$y = 4 \cdot 0 + 2 = 2$

b'nin alabileceği en büyük sayı 2'dir.

Cevap: A

13. $x^2 - 4mx + m - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve $x_2$dir.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 3$$

olduğuna göre, m'nin alabileceği değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty; +\infty)$ B) $(-\infty;12)$ C) $R-\{12\}$ D) $(-12; 3)$ E) $(0;12)$

Çözüm: Kökler toplamı $x_1 + x_2 = -(-4m) = 4m$

Kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2 = m - 4$

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2} - 3 > 0$$

$$\frac{4m-3(m-4)}{m-4} > 0$$

$$\frac{m+12}{m-4} > 0$$

$-\infty$		-12		4		$+\infty$
	+	0	−		+	

$-12 < m < 4$

Cevap: D

Eşitsizlik Sistemi

14. $x^2 + 2x + 1 > 0$ ve $x^2 - 4 < 0$ eşitsizlik sistemini sağlayan tamsayıların toplamı nedir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: 1. denkleme göre $(x+1)^2 > 0$ olduğundan –1 de çift kat kök vardır.

2. denklemin kökleri –2 ve 2'dir.

Tablodaki her iki denklemde işaret + ile başladığından x^2 nin katsayısı pozitiftir.

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
		+		+	0	+		+	
		+	0	–		–	0	+	
					Çözüm				

Bu denklemi sağlayan tam sayılar –1, 0 ve 1 olduğundan, bu sayıların toplamı 0'dır.

Cevap: C

15. $\frac{x+1}{x-1} \leq 0$ ve $\frac{1}{x-1} \leq 0$ denklemini sisteminin çözümü nedir?

A) $-1 \leq x$ B) $x < 1$ C) $-1 < x < 1$
D) $-1 \leq x \leq 1$ E) $-1 \leq x < 1$

Çözüm: $\frac{x+1}{x-1} \leq 0$ denkleminin kökleri $x = -1, x = 1$ dir.

$\frac{1}{x-1} \leq 0$ denkleminin kökü $x = 1$ dir.

Buna göre çözüm kümesi,

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{x+1}{x-1}$		+	0	–		+	
$\frac{1}{x-1}$		–		–		+	
			0				

biçimindedir. Şu halde çözüm kümesi, $-1 \leq x < 1$ şeklindedir.

Cevap: E

16. $(2x+1)(x-2) \leq 0$ ve $(3x - x^2) \geq 0$ eşitsizlik sisteminin çözümünü sağlayan en küçük tamsayı nedir?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: 1. denklemin kökleri $x = \frac{1}{2}, x = 2$olup işareti +
2. denklemin kökleri $x = 0, x = 2$ olup işareti –

		$-1/2$		0		2		3	
x.(3 - x)	−		−	0	+		+	0	−
(2x + 1).(x - 2)	+	0	−		−	0	+		+

olup çözüm kümesi $0 \le x \le 2$ dir. Şu halde denklemleri sağlayan en küçük tamsayı 0'dır.

Cevap: B

17. $(x-4)(x+1) \le 0$ ve $(x-2)(x+1) \le 0$ eşitsizlik sisteminin çözümünü sağlayan tamsayılar kaç tanedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Bu denklemleri sağlayan değerler;
$x = 4, x = -1, x = 2$ ve $x = -1$
olduğundan

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
(x-4)(x+1)		+	0	−		−	0	+	
(x-2)(x+1)		+	0	−	0	+		+	

olup çözüm kümesi $-1 \le x \le 2$ dir. Şu halde denklemleri sağlayan tamsayıların toplamı $x = -1 + 0 + 1 + 2 = 2$ dir.

Cevap: A

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

18. $\frac{|x-4|}{9-x^2} \ge 0$ denklemini sağlayan kaç adet tamsayı vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Her $x \in \mathbb{R}$ için $|x-4| \ge 0$ olduğundan eşitsizlik tablosunu almayabiliriz. Ancak $x = 4$ eşitsizliği sağlayacağı için çözüm kümesinde olmalıdır.

$9 - x^2 = 0$ için $x = \pm 3$
Ayrıca paydadaki en büyük derecenin işareti negatiftir.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
		$-$	o	$+$	o	$-$	

olup çözüm kümesi $-3 \le x \le 3$ ve $x = 4$ dür. Şu halde denklemleri sağlayan tamsayılar $-2, -1, 0, 1, 2, 4$ dir. Buna göre 6 tane tamsayı denklemi sağlar.

Cevap: E

19. $x^2 - 2x - 5 < |x - 1|$ eşitsizliğini sağlayan x tamsayıları kaç adettir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $x^2 - 2x - 5 < |x - 1|$
$x^2 - 2x - 5 < x - 1$ ve $x^2 - 2x - 5 < 1 - x$
$x^2 - 3x - 4 < 0$ ve $x^2 - x - 6 < 0$
$(x - 4)(x + 1) < 0$ ve $(x - 3)(x + 2) < 0$

		-1		4	
	$+$		$-$		$+$

		-2		3	
	$+$		$-$		$+$

$-1 < x < 4$ $\quad$ $-2 < x < 3$
$0, 1, 2, 3$ $\quad$ $-1, 0, 1, 2$
Bu denklemi sağlayan tamsayıların sayısı 7 tanedir.

Cevap: D

20. $x^2 + |x| - 2 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

A) $-1 \le x$ B) $x < 1$ C) $-1 < x < 1$
D) $-1 \le x \le 1$ E) $-1 \le x < 1$

Çözüm: $x \ge 0$ için $x^2 + x - 2 < 0$ ise $(x + 2)(x - 1) < 0$
$x < 0$ için $x^2 - x - 2 < 0$ ise $(x - 2)(x + 1) < 0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	o	$-$	o	$+$	

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	o	$-$	o	$+$	

$0 < x < 1$ $\quad$ $-1 < x < 0$
olduğundan denklemin çözüm kümesi,
$-1 < x < 1$

dir.

Cevap: C

21. $|x+1| > |2x-1|$ denklemini sağlayan tamsayı değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $|x+1|^2 > |2x-1|^2$

$x^2 + 2x + 1 > 4x^2 - 4x + 1$

$3x^2 - 6x < 0$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$3x^2-6x$	+	o	−	o	+

Cevap: A

İkinci Dereceden Denklemlerin Köklerinin İşaretleri ve Daima Pozitif-Negatif Olması

22. $m \in \mathbb{R}^-$ ise, $2x^2 - 2(m-1)x - m = 0$ denkleminin kökleri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $|x_1| < |x_2|$ B) $x_1 = x_2$ C) $x_1 < 0 < x_2$
D) $0 < x_1 < x_2$ E) $x_1 < x_2 < 0$

Çözüm: $a = 2, b = -(2m-2), c = -m$ ise

$\Delta = [-2(m-1)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m) = 4(m^2+1) > 0$

$x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{m}{2}$ ve $m \in \mathbb{R}^-$ olduğundan $x_1x_2 > 0$ olup kökler aynı işaretlidir.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m - 1 < 0$ olduğundan kökler negatiftir.

Cevap: E

23. $2x^2 - 4x + 5 = 0$ denklemine göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $x_1 < |x_2|$ B) $x_1 = x_2$ C) $x_1 < 0 < x_2$

D) $0 < x_1 < x_2$ E) $x_1 < x_2 < 0$

Çözüm: $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2} < 0$ ise $x_1 < 0 < x_2$

Cevap: C

24. $2x^2 - 4x + 5 = 0$ denklemine göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $x_1 = x_2$ B) $|x_1| < |x_2|$ C) $x_1 \cdot x_2 < 0$
D) $0 < x_1 < x_2$ E) $x_1 < x_2 < 0$

Çözüm: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2 > 0$ ise $|x_1| < |x_2|$

Cevap: B

25. $(m+1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ denkleminde x_1 ve x_2 dir. $x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| < |x_2|$ ise m ne olmalıdır?

A) $-1 \leq x$ B) $x < 1$ C) $-1 < x < 1$
D) $-1 < x < 0$ E) $-1 \leq x < 1$

Çözüm: $x_1 < 0 < x_2$ ise $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-3}{m+1} < 0$
$|x_1| < |x_2|$ ise $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2m}{m+1} < 0$
$m = 0, \; m = -1$

	$-\infty$ … -1	-1	-1 … 0	0	0 … 3	3	3 … $+\infty$
$\frac{m-3}{m+1}$	+	0	−		−	0	+
$\frac{2m}{m+1}$	+	0	−	0	+		+

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.

2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. M. Zeki DERMAN, Serdar GÜLMEZ, Ökkeş ÖZKÖSELER, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2002, Ankara.
4. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
5. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
6. Matematik Cep Kitabı, Final Dergisi Yayınları, 1989, İstanbul.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
8. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Fahriya ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, Ankara, 2006.
9. ÖSS Matematik Soru Bankası, Açı Yayınları, Ankara, 2006.