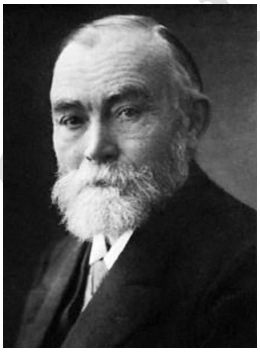
1. BÖLÜM
MANTIK

MANTIK BİLİMİ

Aristoteles
MÖ 19 Haziran 384, Stagira, Yunanistan – MÖ 07 Mart 322, Halkis, Yunanistan



Friedrich Ludwig Gottlob
(08 Kasım 1848, Wismar, Almanya, 26 Temmuz 1925, Bad Kleinen, Almanya)

Sembolik mantık, günümüzde;

1. Matematikteki teorilerin ispatında kullanılır.
2. Bilgisayar devrelerinde ve bilgisayar programlamada kullanılır.
3. Elektrik devrelerinin çözümlemesinde kullanılır.
4. Günlük hayatta akıl yürütme işlemlerinde ve iddiaların doğru ya da yanlışlığını tespitte kullanılır.
5. Dilbilgisini düzenli işletebilmek için sembolize edilmede kullanılır.
6. Felsefe ve sosyolojide verilerden sağlıklı sonuçlar elde edilmede kullanılır.

ÖNERME KAVRAMI ve DOĞRULUK DEĞERİ

1.1. Tanım: İçinde doğru ya da yanlış kesin olarak bir hüküm bildiren cümlelere önerme denir. Soru, ünlem, istek, emir ifade eden cümleler, kesin hüküm bildirmediğinden önerme değildir.

Örnek: Aşağıdakiler birer önermedir.

i) $\sqrt{5}$ bir irrasyonel sayıdır.
ii) $5-2 = 4$
iii) Turhal Tokat'ın ilçesidir.

Örnek: Aşağıdakiler birer önerme değildir.

i) Burası Dünya mı?
ii) Ne mutlu Türküm diyene!

1.2. Tanım: Bir önermenin doğru ya da yanlış olmasına, o önermenin doğruluk değeri denir. Önerme doğru ise doğruluk değeri 1, önerme yanlış ise doğruluk değeri 0 ile gösterilir.

Örnek: Aşağıdakiler birer önermedir.

i) $\sqrt{5}$ bir irrasyonel sayıdır. Doğruluk değeri 1'dir.
ii) 5–2 = 4 Doğruluk değeri 0'dir.
iii) Turhal Tokat'ın ilçesidir. Doğruluk değeri 1'dir.

Örnek: $4+\mathbf{5}$ ifadesi bir önerme değildir. Çünkü doğru ya da yanlış olan bir doğruluk değeri taşımaz. Ama $4+\mathbf{5}=9$ ifadesi bir önermedir.

1.3. Tanım: Bir veya daha fazla çok verilen önermelerden bir sonuç çıkarılması işlemine çıkarım denir. Çıkarımda sonuç önermesi "o halde, buna göre, demek ki, dolayısıyla" gibi kavramlarla birlikte deyimler ve bu deyimler $\equiv$ sembolü ile gösterilir.

Örnek: p: Ihlamur ağaçtır
q: Bütün ağaçlar yapraklıdır
r: O halde ıhlamur ağacı yapraklıdır.
Önermesi bir çıkarımdır.

BİR ÖNERMENİN DEĞİLİ

1.4. Tanım: Bir p önermesinin doğruluk değeri doğru iken yanlış, yanlış iken doğru yapılarak elde edilen önermeye p önermesinin değili ya da değilleme eklemi denir. p′ ile gösterilir.

Örnek: p "Türkiye'nin başkenti Ankara'dır"
p′: "Türkiye'nin başkenti Ankara değildir"

1.1. Aksiyom: p önermesinin doğruluk değeri 1 ise, p′ nin doğruluk değeri 0'dır. p önermesinin doğruluk değeri 0 ise, p′ nin doğruluk değeri 1'dir. Bu aksiyoma göre şu tabloyu çizebiliriz.

p	p′
1	0
0	1

BİRLEŞİK ÖNERME

1.5. Tanım: İki veya daha fazla önermenin doğruluk değerleri aynı ise bu iki önermeye denk (eşdeğer) önermeler denir. p ve q'nun doğruluk değerleri aynı ise bu bir çıkarımdır, çıkarım olduğundan $p \equiv q$ şeklinde gösterilir. Şu halde, teoremler birer birleşik önermelerdir.

1.6. Tanım: İki veya daha fazla önerme "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak", "ya da" bağlaçlarından en az biriyle bağlanmasından elde edilen yeni önermeye birleşik önerme denir. Şimdi bu dört bağlacı inceleyelim.

"Ve" Bağlacı

1.7. Tanım: p ile q iki önerme olsun. Bu iki önerme "ve" bağlacı ile birleştiriliyorsa aldıkları nümerik değerlerin minimumuna "ve" bağlacı veya "tümel evetleme eklemi" denir. $p \wedge q$ sembolü ile gösterilir. Buna göre $p \wedge q$ ifadesi $\min\{p; q\} = p \wedge q$ dir. "Ve bağlacı" günlük dilde hem … hem, gerek … gerekse, da … da, virgül (,) gibi bağlaçlarla ifade de edilir.

Örnek: p "Sivas'ta tarihi çifte minare vardır."
q "Erzurum'da tarihi çifte minare vardır."
$p \wedge q$: "Sivas ve Erzurum'da tarihi çifte minare vardır."

1.2. Aksiyom: p ile q iki önermesi "ve" bağlacı ile birleşiyorsa, p ile q birlikte doğru olduklarında doğru, diğer durumlarda yanlıştır. Buna göre $p \wedge q$ önermelerinin doğruluk tablosu şu şekildedir:

p	q	$\min\{p; q\} = p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

"Veya" Bağlacı

1.8. Tanım: p ile q iki önerme olsun. Bu iki önerme "veya" bağlacı ile birleştiriliyorsa aldıkları nümerik değerlerin maksimumuna "veya" bağlacı veya "tikel evetleme eklemi" denir. $p \vee q$ sembolü ile gösterilir. Buna göre $p \vee q$ ifadesi $\max\{p; q\} = p \vee q$ dir. "Veya bağlacı" günlük dilde, veyahut gibi bağlaçlarla da ifade edilir.

Örnek: p: "Üsküp Makedonya'dadır."
q: "Üsküp Yunanistan'dadır."
$p \vee q$: "Üsküp Makedonya veya Yunanistan'dadır."

1.3. Aksiyom: p ile q iki önermesi "veya" bağlacı ile birleşiyorsa, p ile q birlikte yanlış olduklarında yanlış, diğer durumlarda doğrudur. Buna göre $p \vee q$ önermelerinin doğruluk tablosu şu şekildedir:

p	q	$\max\{p; q\} = p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

"Ya da" Bağlacı

1.9. Tanım: p ile q iki önerme olsun. Bu iki önerme "ya da" bağlacı ile birleştiriliyorsa p ile q önermesine "ya da bağlacı" denir. $p \veebar q$ sembolü ile gösterilir. "Ya da" bağlacı günlük dilde, ya … ya, yahut gibi bağlaçlarla da ifade edilir.

Örnek: p: "Ali gelsin."
q: "Osman gelsin."
$p \veebar q$: "Ali ya da Osman gelsin."

Bu bileşik önermede Ali ile Osman'ın birlikte gelmeleri yanlıştır, ikisinin de gelmemeleri de yanlıştır. Ama ikisinden birinin gelmesi doğrudur.

1.4. Aksiyom: p ile q iki önermesi "ya da" bağlacı ile birleşiyorsa, p ile q birlikte doğru olduklarında veya yanlış olduklarında yanlış, diğer durumlarda doğrudur. Buna göre $p \veebar q$ önermelerinin doğruluk tablosu şu şekildedir:

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

"İse" Bağlacı

1.10. Tanım: p ile q iki önerme olsun. Bu iki önermeyi "ise" bağlacı ile birleştiriliyorsa p ile q önermesine "ise" bağlacı veya "koşul eklemi" denir. $p \Rightarrow q$ sembolü ile gösterilir. $p \Rightarrow q$ önermesine şartlı önerme ya da gerektirme denir. Bu önerme aşağıdaki ifade kalıplarından biri ile söylenebilir.

a) p ise q dür.

b) p, q için yeter şarttır.
c) q, p için gerek koşuldur.
d) p hipotez, q hükümdür.

Örnek: p: "Ekonomi iyi gidiyor."
q: "Fiyatlar düşer."
$p \Rightarrow q$: "Ekonomi iyi giderse fiyatlar düşer."

Dikkat edilirse bu iki önerme de tek gerektirme vardır. Ekonominin iyiye gitmesi fiyatların düşmesini gerektirir, ama bunun tersi doğru değildir. Yani, fiyatların düşmesi ekonominin iyiye gitmesini gerektirmez. Farklı sebeplerde etki yapabilir.

1.5. Aksiyom: p ile q iki önermesi "ise" bağlacı ile birleşiyorsa, p önermesi doğru iken q önermesi yanlış olduklarında yanlış, diğer durumlarda doğrudur. Buna göre $p \Rightarrow q$ önermelerinin doğruluk tablosu şu şekildedir:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

"Ancak ve Ancak" Bağlacı

1.11. Tanım: p ile q iki önerme olsun. Bu iki önermeyi "ancak ve ancak" bağlacı ile birleştiriliyorsa (karşılıklı birbirlerini gerektiriyorlarsa) p ile q önermesine "ancak ve ancak" bağlacı veya "karşılıklı koşul eklemi" denir. $p \Leftrightarrow q$ sembolü ile gösterilir. $p \Leftrightarrow q$ önermesi iki yönlü gerektirme ya da gerek ve yeter şartlı önerme denir.

Örnek: p: "Çocuk doğacak."
q: "Anne hamiledir."
$p \Leftrightarrow q$: "Çocuk doğacak ancak ve ancak anne hamiledir."

Dikkat edilirse bu iki önerme birbirlerini gerektirir. Çünkü çocuğun olması için annenin hamile olmasını ve anne hamile ise çocuğun doğacağını gerektirir.

1.6. Aksiyom: p ile q iki önermesi “ancak ve ancak” bağlacı ile birleşiyorsa, p ile q önermeleri doğru iken veya yanlış iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır. Buna göre $p \Leftrightarrow q$ önermelerinin doğruluk tablosu şu şekildedir:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ÖNERMELERDE DENKLİK

1.12. Tanım: p ve q önermeler dilinde verilmiş iki önerme olsun. p ve q da bulunan önerme değerlerinin doğruluk değeri aynı ise p ile q önermelerine denktir denir ve $p \equiv q$ (veya $p \Leftrightarrow q$) ile gösterilir.

Örnek: $(1' \wedge 0) \vee (0' \wedge 1)$ önermesinin denkliğini bulunuz.

Çözüm: $(1 \vee 0') \wedge (0' \vee 1) \equiv (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$

Örnek: $(1' \wedge 0) \vee (0' \vee 1)$ önermesinin denkliğini bulunuz.

Çözüm: $1' \equiv 0$ ve $0' \equiv 1$ olduğuna göre,
$(1' \wedge 0) \vee (0' \vee 1) \equiv (0 \wedge 0) \vee (1 \vee 1) \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$
bulunur.

1.1. Teorem (Değilin Değili Özelliği): Bir önermenin değilinin değili kendisidir. Yani, $p \equiv (p')'$ dir.

İspat: Bu önermesinin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	p′	$p \equiv (p')'$
1	0	1
0	1	0

p ile $(p')'$ önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan p ile değilinin değili denktir denir, $p \equiv (p')'$ ile gösterilir. Şu halde $(1')' \equiv 1$ ve $(0')' \equiv 0$ dır.

1.2. Teorem ("veya"nın Tek Kuvvet Özelliği): $p \vee p \equiv p$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	p	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

$p \vee p$ ile p önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \vee p$ ile p denktir denir, $p \vee p \equiv p$ ile gösterilir.

1.3. Teorem ("ve"nin Tek Kuvvet Özelliği): $p \wedge p \equiv p$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

$p \wedge p$ ile p önermenin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \wedge p$ ile p denktir denir, $p \wedge p \equiv p$ ile gösterilir.

1.4. Teorem ("veya"nın Değişme Özelliği): $p \vee q \equiv q \vee p$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \vee q$ ile $q \vee p$ önermenin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \vee q$ ile $q \vee p$ denktir denir, $p \vee q \equiv q \vee p$ ile gösterilir.

1.5. Teorem ("ve"nin Değişme Özelliği) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \wedge q$ ile $q \wedge p$ önermenin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \wedge q$ ile $q \wedge p$ denktir denir, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ ile gösterilir.

1.6. Teorem ("veya"nın Birleşme Özelliği): $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$q \vee p$	$(p \vee q) \vee r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

$p \vee (q \vee r)$ ile $(p \vee q) \vee r$ önermenin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \vee (q \vee r)$ ile $(p \vee q) \vee r$ denktir denir, $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ ile gösterilir.

1.7. Teorem ("ve"nin Birleşme Özelliği): $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0

0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$p \wedge (q \wedge r)$ ile $(p \wedge q) \wedge r$ önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \wedge (q \wedge r)$ ile $(p \wedge q) \wedge r$ denktir denir, $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ ile gösterilir.

1.8. Teorem ("ve"nin "veya" Üzerinde Dağılma Özelliği):

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$p \wedge (q \vee r)$ ile $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \wedge (q \vee r)$ ile $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ denktir denir, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ile gösterilir.

1.9. Teorem ("veya"nin "ve" Üzerinde Dağılma Özelliği):

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$p \vee (q \wedge r)$ ile $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \vee (q \wedge r)$ ile $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ denktir denir, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ile gösterilir.

Augustus De Morgan
(27 Haziran 1806, Madurai, Hindistan -18 Mart 1871, Londra, Birleşik Krallık)

1.10. Teorem (De Morgan kuralı): $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

$(p \wedge q)'$ ile $p' \vee q'$ önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $(p \wedge q)'$ ile $p' \vee q'$ denktir denir, $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ ile gösterilir.

1.11. Teorem (De Morgan kuralı): $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

$(p \vee q)'$ ile $p' \wedge q'$ önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $(p \vee q)'$ ile $p' \wedge q'$ denktir denir, $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ ile gösterilir.

1.12. Teorem (Çelişki –Karşıt Tersi– Yöntemi): $p \Leftrightarrow q \equiv q' \Leftrightarrow p'$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	p'	$p \Leftrightarrow q$	$q' \Leftrightarrow p'$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$p \Leftrightarrow q$ ile $q' \Leftrightarrow p'$ önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \Leftrightarrow q$ ile $q' \Leftrightarrow p'$ denktir denir, $p \Leftrightarrow q \equiv q' \Leftrightarrow p'$ ile gösterilir.

Örnek "Enflasyon artar ise, faizler artar" cümlesinin olmayan ergi yöntemine uygulaması nasıldır?

Çözüm: p: Enflasyon artar, q: faizler artar
$p \Rightarrow q$: Enflasyon artar ise, faizler artar
$q' \Rightarrow p'$: Faizler azalır ise enflasyon azalır.

Örnek "Allah'ı seviyorsanız, peygambere (bana) tabi olunuz." (Al-i İmran 31. Ayet) ayetinin olmayan ergi yöntemine uygulaması nasıldır?

Çözüm: p: Allah'ı sevmek, q: peygambere tabi olmak
$p \Rightarrow q$: Allah'ı seviyorsanız, peygambere (bana) tabi olunuz.
$q' \Rightarrow p'$: peygambere (bana) tabi iseniz Allah'ı seviyorsunuz.

1.13. Teorem ("ise"nin "veya"ya İndirgeme Özelliği): $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	p'	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1

0	0	1	1	1

$p \Rightarrow q$ ile $p' \vee q$ önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \Rightarrow q$ ile $p' \vee q$ denktir denir, $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ ile gösterilir.

1.14. Teorem ("Ancak ve ancağ"ın "ise"ye İndirgeme Özelliği):

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

$p \Leftrightarrow q$ ile $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \Leftrightarrow q$ ile $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ denktir denir, $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ ile gösterilir.

Örnek: $[(p \vee q') \vee p]' \equiv q \wedge p'$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$[(p \vee q') \vee p]' \equiv [(q' \vee p) \vee p]'$ (Değişme özelliğinden)
$\equiv [q' \vee (p \vee p)]'$ (Veya'nın birleşme özelliğinden)
$\equiv [q' \vee p]'$ (Veya'nın tek kuvvet özelliğinden)
$\equiv (q')' \wedge p'$ (De Morgan kuralından)
$\equiv q \wedge p'$ (Değilinin değili özelliğinden)

Örnek: $[p \Rightarrow (q \vee p')]' \equiv p \wedge q'$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$[p \Rightarrow (q \vee p')]' \equiv [p' \vee (q \vee p')]'$ (ise'nin veya'ya indirgeme özelliği)
$\equiv (p')' \wedge (q \vee p')'$ (De Morgan kuralından)
$\equiv (p')' \wedge (q' \wedge (p')')$ (De Morgan kuralından)
$\equiv p \wedge (q' \wedge p)$ (Değilinin değili özelliğinden)
$\equiv p \wedge q'$ (Tek kuvvet özelliğinden)

TUTARLI, TOTOLOJİ (GEÇERLİ) ve ÇELİŞKİ (TUTARSIZ)

1.13. Tanım: Bir bileşik önermede tüm doğruluk değerleri için doğru oluyorsa, bu bileşik önermeye totoloji (geçerli); bileşenlerin tüm doğruluk değeri için yanlış oluyorsa, bu bileşik önermeye çelişki (tutarsız) denir. Bileşenlerin doğruluk değerlerinden en az bir tanesi doğru oluyorsa, bu bileşene tutarlı denir. Buna göre her totoloji tutarlıdır. Ama her tutarlı totoloji değildir.

1.15. Teorem: $p \vee p' \equiv 1$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	p'	$p \vee p'$
1	0	1
0	1	1

$p \vee p'$ önermesinin tüm doğruluk değerleri 1 olduğundan $p \vee p'$ önermesi totolojidir.

1.16. Teorem: $p \wedge p' \equiv 0$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	p'	$p \wedge p'$
1	0	0
0	1	0

$p \wedge p'$ önermesinin tüm doğruluk değerleri 0 olduğundan $p \wedge p'$ önermesi çelişkidir.

1.17. Teorem: $p \vee 1 \equiv 1$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	1	$p \vee 1$
1	1	1
0	1	1

$p \vee 1$ önermesinin tüm doğruluk değerleri 1 olduğundan $p \vee 1$ önermesi totolojidir.

1.18. Teorem: $p \wedge 0 \equiv 0$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	0	$p \wedge 0$
1	0	0
0	0	0

$p \wedge 0$ önermesinin tüm doğruluk değerleri 0 olduğundan $p \wedge 0$ önermesi çelişkidir.

1.19. Teorem: $p \vee 0 \equiv p$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	0	$p \vee 0$
1	0	1
0	0	0

$p \vee 0$ önermesinin tüm doğruluk değerleri p önermesi ile aynı olduğundan $p \vee 0 \equiv p$ olup tutarlıdır.

1.20. Teorem: $p \wedge 1 \equiv p$

İspat: Bu önermenin denk olduğunu tablo çizerek gösterelim.

p	1	$p \wedge 1$
1	1	1
0	1	0

$p \wedge 1$ önermesinin tüm doğruluk değerleri p önermesi ile aynı olduğundan $p \wedge 1 \equiv p$ dir.

Örnek: $(p' \wedge q)' \vee q \equiv 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$(p' \wedge q)' \vee q \equiv [(p')' \vee q'] \vee q$ (De Morgan Kuralı)

$\equiv (p \vee q') \vee q$ (Değilinin değili özelliği)

$\equiv p \vee (q' \vee q)$ (Birleşme özelliği)
$\equiv p \vee 1$ $(p \vee p' \equiv 1)$
$\equiv 1$ $(p \vee 1 \equiv 1)$

Örnek: $p' \wedge [(p \wedge q)' \vee q] \equiv p'$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
$p' \wedge [(p \wedge q)' \vee q] \equiv p' \wedge [(p' \vee q') \vee q]$ (De Morgan Kuralı)
$\equiv p' \wedge [p' \vee (q' \vee q)]$ (Birleşme Özelliği)
$\equiv p' \wedge (p' \vee 1)$ $(p \vee p' \equiv 1)$
$\equiv p' \wedge 1$ $(p \vee 1 \equiv 1)$
$\equiv p'$ $(p \wedge 1 \equiv p)$

Örnek: $p \wedge q \equiv 1$ ise $(p \vee q') \wedge [(p' \vee q) \wedge q']$ önermesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $p \wedge q \equiv 1$ olması için 1.2. Aksiyom gereği $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ olmalıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned}(p \vee q') \wedge [(p' \vee q) \wedge q'] &\equiv (1 \vee 1') \wedge [(1' \vee 1) \wedge 1'] \\ &\equiv (1 \vee 0) \wedge [(0 \vee 1) \wedge 0] \\ &\equiv 1 \wedge [1 \wedge 0] \\ &\equiv 1 \wedge 0 \\ &\equiv 0\end{aligned}$$

olup çelişki elde edilir.

Örnek: $p \vee q \equiv 0$ ise $[(p \wedge q') \vee q'] \wedge (p' \vee q)$ önermesinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $p \vee q \equiv 0$ olması için 1.3. Aksiyom gereği $p \equiv 0$ ve $q \equiv 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned}[(p \wedge q') \vee q'] \wedge (p' \vee q) &\equiv [(0 \wedge 0') \vee 0'] \wedge (0' \vee 0) \\ &\equiv [(0 \wedge 1) \vee 1] \wedge (1 \vee 0) \\ &\equiv [0 \vee 1] \wedge 1 \\ &\equiv 1 \wedge 1 \\ &\equiv 1\end{aligned}$$

olup totoloji elde edilir.

Örnek: $\{(p \vee q) \wedge [(p' \vee q') \wedge q]\} \vee p \equiv p \vee q$ olduğunu gösteriniz.

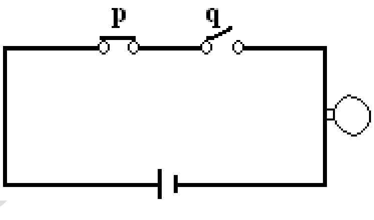
Çözüm:

$$
\begin{aligned}
\{(p \vee q) \wedge [(p' \vee q') \wedge q]\} \vee p &\equiv \{(p \vee q) \wedge [(p' \wedge q) \vee (q' \wedge q)]\} \vee p \\
&\equiv \{(p \vee q) \wedge [(p' \wedge q) \vee 0]\} \vee p \\
&\equiv \{(p \vee q) \wedge (p' \wedge q)\} \vee p \\
&\equiv \{[p \wedge (p' \wedge q)] \vee [q \wedge (p' \wedge q)]\} \vee p \\
&\equiv \{[(p \wedge p') \wedge q] \vee [q \wedge p' \wedge q]\} \vee p \\
&\equiv \{[0 \wedge q] \vee [q \wedge p']\} \vee p \\
&\equiv \{0 \vee [q \wedge p']\} \vee p \\
&\equiv \{q \wedge p'\} \vee p \\
&\equiv (q \vee p) \wedge (p' \vee p) \\
&\equiv (q \vee p) \wedge 1 \\
&\equiv q \vee p
\end{aligned}
$$

ÖNERMELERİN ELEKTRİK DEVRELERİNE UYGULAMASI

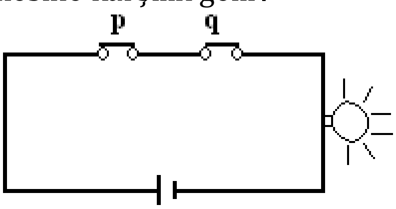
1.14. Tanım: Bir elektrik devresindeki bir anahtar kapalı iken devre tamamlandığından akımı geçirir, anahtar açık olduğu durumda da devre tamamlanmadığından akımı geçirmez.

Anahtarın kapalı olması durumu  biçiminde, açık olması durumu  biçiminde gösterilir.



Eğer bir p anahtarı kapalı pozisyonunda olduğunda devre o anahtarda tamamlanmasını $p \equiv 1$ şeklinde alınır. Eğer bir q anahtarı açık pozisyonunda olduğunda devre o anahtarda tamamlanmamasını $q \equiv 0$ şeklinde alınır.

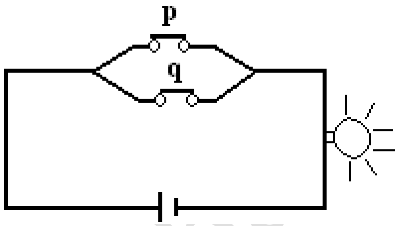
1.15. Tanım: Akımın geçtiği bir kolda art arda bağlanmış iki anahtar varsa, buna seri bağlama denir. p ve q anahtarlarından seri bağlanmış devresi varsa $p \wedge q$ bileşik önermesine karşılık gelir.



p ve q anahtarları şekildeki gibi seri bağlı iken her iki anahtarın kapalı olması durumunda devreden akım geçer, dolayısıyla lamba yanar. Anahtarlardan en az birisi kapalı iken devreden akım geçmez, dolayısıyla lamba yanmaz. Buna göre p ve q anahtarlarının seri bağlı olduğu bir devreye ait doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \wedge q$	Lamba
1	1	1	Yanar
1	0	0	Yanmaz
0	1	0	Yanmaz
0	0	0	Yanmaz

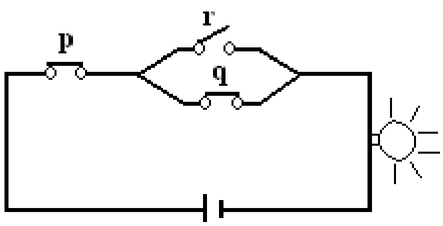
1.16. Tanım: Akımın en az iki kola ayrılıp farklı iki kolun anahtarları varsa, buna paralel bağlama denir. p ve q anahtarlarından paralel bağlanmış devresi varsa $p \wedge q$ bileşik önermesine karşılık gelir.



p ve q anahtarları şekildeki gibi paralel bağlı iken en az bir anahtarın kapalı olması durumunda devreden akım geçer, dolayısıyla lamba yanar. Anahtarlardan her ikisi açık iken devreden akım geçmez, dolayısıyla lamba yanmaz. Buna göre p ve q anahtarlarının paralel bağlı olduğu bir devreye ait doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \vee q$	Lamba
1	1	1	Yanar
1	0	0	Yanar
0	1	0	Yanar
0	0	0	Yanmaz

Örnek:



Şekildeki devreye uygun bileşik önermeyi yazıp, lambanın yanıp–yanmadığını bulalım.

Çözüm: Verilen şekilde r ve q paralel bağlamış r ve q anahtarına p seri bağlanmış. Buna göre,

$$\begin{aligned} p \wedge (r \vee q) &\equiv 1 \wedge (0 \vee 1) \\ &\equiv 1 \wedge 1 \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

dir. Şu halde elektrik devresindeki lamba yanar.

AÇIK ÖNERMELER

1.17. Tanım: Bir nesneler koleksiyonundan seçilen ve belirsiz bir nesneyi gösteren bir sembole değişken denir.

Örnek: (i) $x^2 = 1$ ifadesinde x olmak üzere 1 değişken vardır.
(ii) $x^3 - 2xy^2 + 4 = 0$ ifadesinde x ve y olmak üzere 2 değişken vardır.

1.18. Tanım: En az bir değişkeni bulunan ve bu değişkene verilen değerlere göre doğru veya yanlış önerme içeren ifadelere açık önerme adı verilir. Açık önermeler genellikle $p(x), q(x), r(x), p(x,y), q(x,y)$ gibi şekillerle ifade edilir.

Örnek: “$p(x): x + 3 = 12$” önermesinde değişken bulunduğundan bir açık önermedir.

Örnek: “Samsun Karadeniz bölgesindedir” önermesinde değişken olmadığından açık önerme değildir.

Örnek: “$x: y$” ifadesi bir açık önerme değildir. Çünkü her ne kadar 2 değişik değişken olmasına rağmen sonucu yanlış veya doğru olacak bir ifade söz konusu olmadığından açık önerme değildir.

Örnek: “$p(x): x + 5 > 0$” ifadesinde değişken bulunduğundan bir açık önermedir.

Örnek: “$p(x): x - 16 = 0$” önermesinin doğruluk kümesini tamsayılarda bulunur.

Çözüm: Bu denklem çözülürse,

$$x^2 - 16 = 0 \iff x = -4 \text{ ve } x = 4$$

olduğundan çözüm kümesi $Ç.K. = \{-4, 4\}$ dir.

Örnek: (a bir tek sayı) $\Rightarrow$ (a^2 bir tek sayı)
Bileşik önermesinin karşıtı nedir?

Çözüm: (a^2 bir tek sayı) $\Rightarrow$ (a bir tek sayı)

NİCELEYİCİLER

1.19. Tanım: Bir önemede "her" ve "bazı" kelimelerinin kullanılan önermelere niceleyiciler denir. Niceleyiciler önüne geldiği önerme elemanının çokluğunu belirtir. "Her" kelimesi $\forall$, "bazı" kelimesi $\exists$ simgesiyle gösterilir.

Örnek:

Bütün öğrenciler zekidir.	"$\forall$x: Bütün x:öğrenciler E: zekidir."
Her ineğin dört ayağı vardır.	"$\forall$x: Her x:ineğin F: dört ayağı vardır."
En az bir profesör bölümde var.	"$\exists$x: En az bir x:profesör G: bölümde var."
Bazı kanatlı hayvanlar kuş değil.	"$\exists$x: Bazı x:kanatlı hayvanlar H: kuş değil."
Her canlı ölümü tadacaktır.	"$\forall$x: Her x: canlı I: ölümü tadacaktır."

1.20. Tanım: Her ($\forall$) niceleyicisine evrensel niceleyici veya tümel niceleyici denir. "Her" kelimesi yerine günlük dilde tüm, bütün, hiçbir gibi kavramlar da kullanılır.

Her ile verilen açık önermeler $\forall x, p(x)$ şeklinde kurulur. Bu önermenin doğru olduğunu göstermek için $p(x)$ in bütün değer için doğru olduğunu göstermek gerekir.

Örnek: "$\forall x, x^2 \geq 0$" açık önermesinin doğruluk değerini araştırınız.

Çözüm: Bütün pozitif ve negatif sayıların kareleri sıfırdan büyük olduğundan $x^2 \geq 0$ dır. Yani,

(i) $x = 0$ ise $x^2 = 0$

(ii) $x > 0$ ise $x^2 > 0$
(iii) $x < 0$ ise $x^2 > 0$
dir. Şu halde bu açık önerme doğrudur.

Örnek: "$\forall x \in \mathbb{N}, x^2 - 1 = 15$" açık önermesinin doğruluk değerini araştırınız.

Çözüm: Her doğal sayı için doğru olacağından özel olarak $x = 3 \in \mathbb{N}$ içine doğru olmalıdır. Hâlbuki $3^2 - 1 = 9$ olup bu önerme her x için doğru değildir. Dolayısıyla açık önerme doğru değildir.

1.21. Tanım: Bazı ($\exists$) niceleyicisine varlıksal niceleyici veya tikel niceleyici denir. "Bazı" kelimesi yerine günlük dilde çoğu, en az bir gibi kavramlar da kullanılır.

Bazı ile verilen açık önermeler $\exists x, p(x)$ şeklinde kurulur. Bu önermenin doğru olduğunu göstermek için $p(x)$ in en az bir değer için doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

Örnek: "$p(x): 3 < 2x + 1 < 7$" önermesini $\exists x \in \mathbb{N}$ ile ifade edip bu önermenin doğruluk değerini araştırınız.

Çözüm: $\exists x \in \mathbb{N}, 3 < 2x + 1 < 7$ şeklinde oluşur Bu önerme doğrudur. Çünkü,

$$3 < 2x + 1 < 7$$
$$3 - 1 < 2x + 1 - 1 < 7 - 1$$
$$2 < 2x < 6$$
$$1 < x < 3$$
$$x = 2$$

olup doğrudur.

Örnek: "$\exists x$, x hayvanı lise matematiğini bilir." açık önermesinin doğruluk değerini araştırınız.

Çözüm: Lise matematiğini çözen bir hayvan olamayacağından böyle bir açık önerme yanlıştır.

1.1. Sonuç: Evrensel ve varlıksal niceleyicilerin değilleri:

$\forall x, p(x)$ ifadesinin değili $\exists x, p'(x)$
$\exists x, p(x)$ ifadesinin değili $\forall x, p'(x)$
şeklindedir. Buna göre $\forall' \Leftrightarrow \exists$ ve $\exists' \Leftrightarrow \forall$ dir. Ayrıca
$=$ nin değili $\neq$
$<$ nin değili $\geq$
$>$ nin değili $\leq$
dür.

Örnek: "Bazı çocuklar yaramazdır." önermesinin değili nedir?

Çözüm: $\exists x$: Bazı, x:çocuklar, F: yaramazdır alınırsa,
$(\exists x, Fx)' \equiv \forall x, F'x$
Her çocuk yaramaz değildir.

Örnek: "$\forall x, x > 3$" önermesinin değilini bulunuz.

Çözüm: $(\forall x, x > 3)' \Leftrightarrow \exists x, x \leq 3$

Örnek: "$\exists x, x + 1 = 15$" önermesinin değilini bulunuz.

Çözüm: $(\exists x, x + 1 = 15)' \Leftrightarrow \forall x, x + 1 \neq 15$

Örnek: "$(\forall x, x < 4) \vee (\exists x, x = 10)$" önermesinin değilini bulunuz.

Çözüm: $\{(\forall x, x < 4) \vee (\exists x, x = 10)\}' \Leftrightarrow (\exists x, x \geq 4) \wedge (\forall x, x \neq 10)$

Örnek: "$(\exists x, x^2 + 5 < 6) \wedge (\forall x, x - 6 = 10)$" önermesinin değilini bulunuz.

Çözüm:
$\{(\exists x, x \geq 4) \wedge (\forall x, x \neq 10)\}' \Leftrightarrow (\forall x, x^2 + 5 \geq 6) \vee (\exists x, x - 6 \neq 10)$

Örnek: "$(\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 2 > 0) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x + 10 = 0)$" bileşik önermesinin olumsuzu nedir?

Çözüm: $(\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 + 2 \leq 0) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, x + 10 \neq 0)$

1.7. Aksiyom: Evrensel niceleyici ($\forall$) de ve ($\wedge$) bağlacı, varlıksal niceleyici ($\exists$) de veya ($\vee$) bağlacı kullanılır.

Örnek: $\forall$x (x başkenttir) önermesinde

$$E = \{Ankara, Viyna, Bakü, Cidde\}$$

evreninde totoloji midir (gerçekleşir mi)?

Çözüm: Evrende geçen adların doğruluk değerlerine balalım.

Ankara başkenttir $\equiv 1$
Viyana başkenttir $\equiv 1$
Bakü başkenttir $\equiv 1$
Cidde başkenttir $\equiv 1$

olduğundan

$$1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \equiv 1$$

bulunur. Şu halde $\forall$x (x başkenttir) önermesi totolojidir.

Örnek: $\forall$x (x başkenttir) önermesinde

$$E = \{Ankara, Mekke, Belgrad, İstanbul\}$$

evreninde totoloji midir (gerçekleşir mi)?

Çözüm: Evrende geçen adların doğruluk değerlerine balalım.

Ankara başkenttir $\equiv 1$
Mekke başkenttir $\equiv 0$
Belgrat başkenttir $\equiv 1$
İstanbul başkenttir $\equiv 0$

olduğundan

$$1 \wedge 0 \wedge 1 \wedge 0 \equiv 0$$

bulunur. Şu halde $\forall$x (x başkenttir) önermesi çelişkidir (tutarsızdır).

Örnek: $\exists$x (x başkenttir) önermesinde

$$E = \{Ankara, Mekke, Belgrad, İstanbul\}$$

evreninde totoloji midir (gerçekleşir mi)?

Çözüm: Evrende geçen adların doğruluk değerlerine balalım.

Ankara başkenttir $\equiv 1$
Mekke başkenttir $\equiv 0$
Belgrat başkenttir $\equiv 1$
İstanbul başkenttir $\equiv 0$

olduğundan

$$1 \vee 0 \vee 1 \vee 0 \equiv 1$$

bulunur. Şu halde ∃x (x başkenttir) önermesi totolojidir.

Örnek: ∃x (x başkenttir) önermesinde

$$E = \{\text{Tokat}, \text{Mekke}, \text{Selanik}, \text{İstanbul}\}$$

evreninde totoloji midir (gerçekleşir mi)?

Çözüm: Evrende geçen adların doğruluk değerlerine balalım.

Tokat başkenttir $\equiv 0$
Mekke başkenttir $\equiv 0$
Selanik başkenttir $\equiv 0$
İstanbul başkenttir $\equiv 0$

olduğundan

$$0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \equiv 0$$

bulunur. Şu halde ∃x (x başkenttir) önermesi çelişkidir (tutarsızdır).

1.21. Teorem (De Morgan Kuralı): A kümesinde tanımlanan bir açık önerme p(x) olsun. Buna göre;

i) $\{\forall x \in E, p(x)\}' \equiv \{\exists x \in E, p'(x)\}$
ii) $\{\exists x \in E, p(x)\}' \equiv \{\forall x \in E, p'(x)\}$

dir.

İspat: $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ olmak üzere, A kümesinde tanımlanan bir açık önerme p(x) olsun. 1.10. Teorem ve 1.11. Teoremlerini hatırlayalım.

i) $$\begin{aligned}\{\forall x \in E, p(x)\}' &\equiv \{p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)\}' \\ &\equiv \{p'(a_1) \vee p'(a_2) \vee \cdots \vee p'(a_n)\} \\ &\equiv \{\exists x \in E, p'(x)\}\end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned}\{\exists x \in E, p(x)\}' &\equiv \{p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)\}' \\ &\equiv \{p'(a_1) \wedge p'(a_2) \wedge \cdots \wedge p'(a_n)\} \\ &\equiv \{\forall x \in E, p'(x)\}\end{aligned}$$

1.22. Teorem: A kümesinde tanımlanan bir açık önerme p(x) ve q(x) olsun. Buna göre;

i) $\{\forall x \in E, p(x) \wedge q(x)\} \equiv \{\forall x \in E, p(x)\} \wedge \{\forall x \in E, q(x)\}$
ii) $\{\forall x \in E, p(x) \vee q(x)\} \equiv \{\forall x \in E, p(x)\} \vee \{\forall x \in E, q(x)\}$
iii) $\{\exists x \in E, p(x) \wedge q(x)\} \equiv \{\exists x \in E, p(x)\} \wedge \{\exists x \in E, q(x)\}$
iv) $\{\exists x \in E, p(x) \vee q(x)\} \equiv \{\exists x \in E, p(x)\} \vee \{\exists x \in E, q(x)\}$

dir.

İspat: i) $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ olmak üzere, A kümesinde tanımlanan bir açık önerme p(x) ve p(x) olsun. 1.10. Teorem ve 1.11. Teoremlerini hatırlayalım.

$$\begin{aligned}\{\forall x \in E, p(x) \wedge q(x)\} \\ &\equiv \{[p(a_1) \wedge q(a_1)] \wedge [p(a_2) \wedge q(a_2)] \wedge \cdots \wedge [p(a_n) \wedge q(a_n)] \\ &\equiv \{[p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots p(a_n)] \wedge [q(a_1) \wedge q(a_2) \wedge \cdots \wedge q(a_n)] \\ &\equiv \{\forall x \in E, p(x)\} \wedge \{\forall x \in E, q(x)\}\end{aligned}$$

ii, iii ve iv de benzer şekilde gösterilir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

Önermeler

1. Aşağıdakilerden hangisi bir önerme değildir.

a) 5 bir çift sayıdır.
b) Güneşin 9 gezegeni vardır.
c) Senin arabanı kullanabilir miyim?
d) Edirne Türkiye'nin en batısındadır.
e) Sınıfı geçmek çok zor.

Çözüm: c şıkkında soru sorulmaktadır. Bu bir hüküm değildir. Ama diğer şıklar hüküm belirtmekteler.

Cevap: C

2. $(p \Rightarrow 1) \wedge (p \vee 0)$ ifadesinin en sade şekli nedir?

A) p B) 0 C) 1 D) p' E) tutarlı

Çözüm:

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow 1) \wedge (p' \vee 0) &\equiv (p' \vee 1) \wedge (p \vee 0) \quad &&, (p \vee 1 \equiv 1, p \vee 0 \equiv p) \\ &\equiv 1 \wedge p &&, (p \wedge 1 \equiv p) \\ &\equiv p\end{aligned}$$

Cevap: A

3. $p \Rightarrow (p' \wedge q)'$ önermesinin değili nedir?

A) p B) 0 C) 1 D) p' E) q

Çözüm:

$$\begin{aligned}[p \Rightarrow (p' \wedge q)']' &\equiv [p' \vee (p' \wedge q)']' && \text{, (ise'nin indirgeme özelliği)}\\ &\equiv [p \wedge (p' \wedge q)] && \text{, (De'Morgan kuralı)}\\ &\equiv [(p \wedge p') \wedge q] && \text{, } (p \wedge p' \equiv 0)\\ &\equiv 0 \wedge q && \text{, } (p \wedge 0 \equiv 0)\\ &\equiv 0\end{aligned}$$

olup önermenin sonucu çelişkidir.

Cevap: B

4. $(1 \vee 0) \vee [0 \vee (1' \wedge 0)']'$ ifadesinin sonucu nedir?

A) çelişki B) tutarlı C) 1' D) 1 E) 0

Çözüm:

$$\begin{aligned}(1 \vee 0) \vee [0 \vee (1' \wedge 0)']' &\equiv (1 \vee 0)' \vee [0' \wedge (0 \wedge 0)']\\ &\equiv 1' \vee [1 \wedge 0']\\ &\equiv 0 \vee [1 \wedge 1]\\ &\equiv 0 \vee 1\\ &\equiv 1\end{aligned}$$

olup önermenin sonucu totolojidir.

Cevap: D

5. $(p \Rightarrow q)' \wedge (q' \wedge r) \equiv 1$ olduğuna göre r'nin doğruluk değerini bulunuz.

A) çelişki B) tutarlı C) 1' D) 0 E) 1

Çözüm: $(p \Rightarrow q)' \wedge (q' \wedge r) \equiv 1$ olması için $(p \Rightarrow q)' \equiv 1, q' \wedge r \equiv 1$ olmalıdır. Buna göre $(p \Rightarrow q)' \equiv 1$ olması için $p \Rightarrow q \equiv 0$ olmalıdır. Şu halde $p \equiv 1, q \equiv 0$ dir. Ayrıca $q' \wedge r \equiv 1$ için $0' \wedge r \equiv 1$ olacağından $1 \wedge r \equiv 1$ dir. O halde $r \equiv 1$ dir.

Cevap: E

6. $(p \Rightarrow 1) \wedge (p \vee 0)$ ifadesini sadeleştiriniz?

A) 0 B) 1 C) q D) q' E) p

Çözüm:

$(p \Rightarrow 1) \wedge (p \vee 0) \equiv (p' \vee 1) \wedge (p \vee 0)$, $(p \vee 1 \equiv 1, p' \vee 0 \equiv P)$
$\equiv 1 \wedge p$, $(p \wedge 1 \equiv P)$
$\equiv p$

Cevap: E

7. $p \Rightarrow (p' \vee q)'$ ifadesini sadeleştiriniz?

A) 0 B) 1 C) p D) $p' \vee q'$ E) $p \vee q$

Çözüm:
$p \Rightarrow (p' \vee q)' \equiv p \Rightarrow (p \wedge q')$, (De Morgan Kuralı)
$\equiv p' \vee (p \wedge q')$, (ise'nin indirgenmesi)
$\equiv (p' \vee p) \wedge (p' \vee q')$, (veya'nın ve üzerine dağılması)
$\equiv 1 \wedge (p' \vee q')$, $(p' \vee p \equiv 1)$
$\equiv p' \vee q'$, $(1 \vee p \equiv 1)$

Cevap: D

8. $p \equiv 1$ ise $(p' \vee q) \wedge p$ önermesinin sonucu nedir?

A) 0 B) 1 C) q D) p E) $p \vee q$

Çözüm:
$(p' \vee q) \wedge p \equiv (1' \vee q) \wedge 1$
$\equiv (0 \vee q) \wedge 1$, $(p \vee 0 \equiv p)$
$\equiv q \wedge 1$, $(p \wedge 1 \equiv p)$
$\equiv q$, $(p \wedge 1 \equiv p)$

Cevap: C

9. $[(0 \vee 1)' \wedge (0' \vee 1)]'$ bileşik önermesinin değeri nedir?

A) 1 B) 1' C) 0 D) çelişki E) tutarlı

Çözüm:
$[(0 \vee 1)' \wedge (0' \vee 1)]' \equiv [(0 \vee 1) \vee (1 \vee 1)']$, (De Morgan Kuralı)
$\equiv 1 \vee 1'$
$\equiv 1$

Cevap: A

10. $[(p' \vee 1) \wedge 0'] \vee 1'$ ise p nin doğruluk değeri nedir?

A) 1' B) 1 C) 0 D) çelişki E) tutarlı

Çözüm:

$$[(p' \vee 1) \wedge 0'] \vee 1' \equiv [1 \wedge 1] \vee 0 \quad , (p \vee 1 \equiv 1)$$
$$\equiv 1 \vee 0$$
$$\equiv 1$$

Cevap: B

11. $(p \wedge q') \wedge (p \vee q)'$ bileşik önermesinin en sade şekli nedir?

A) 0 B) 1 C) q D) p E) $p \vee q$

Çözüm:

$$(p \wedge q') \wedge (p \vee q)' \equiv (p \wedge q') \wedge (p' \wedge q') \quad , \text{(De Morgan Kuralı)}$$
$$\equiv (p \wedge q') \wedge (p' \wedge q')$$
$$\equiv (p \wedge p') \wedge q' \quad , (p \wedge p' \equiv 0)$$
$$\equiv 0 \wedge q' \quad , (p \wedge 0 \equiv 0)$$
$$\equiv 0$$

Cevap: A

12. $[(p \wedge p') \vee (q' \vee q)] \wedge p$ bileşik önermesinin en sade şekli nedir?

A) 0 B) 1 C) q D) p E) $p \vee q$

Çözüm:

$$[(p \wedge p') \vee (q' \vee q)] \wedge p \equiv [0 \vee 1] \wedge p \quad , (p \wedge p' \equiv 0, p \vee p' \equiv 1)$$
$$\equiv 1 \wedge p$$
$$\equiv p \quad , (p \wedge 1 \equiv p)$$

Cevap: D

13. $p \vee (p \vee q)'$ bileşik önermesinin en sade şekli nedir?

A) 0 B) 1 C) q D) p' E) $p \vee q'$

Çözüm:

$$p \vee (p \vee q)' \equiv p \vee (p' \wedge q') \quad , \text{(De Morgan Kuralı)}$$
$$\equiv (p \vee p') \wedge (p \vee q') \quad , \text{(veya'nın ve üzerine dağılması)}$$
$$\equiv 1 \wedge (p \vee q') \quad , (p \vee p' \equiv 1)$$
$$\equiv p \vee q' \quad , (p \wedge 1 \equiv p)$$

Cevap: E

14. $p \wedge q \equiv 0$ ise $(p \vee q)' \wedge (p' \vee q)'$ önermesinin doğruluk değeri nedir?

A) p B) q C) 0 D) 1 E) $p \vee q$

Çözüm:

$$\begin{aligned}(p \vee q)' \wedge (p' \vee q)' &\equiv (p' \wedge q') \wedge (p \wedge q') && \text{, (De Morgan Kuralı)}\\ &\equiv (p' \wedge p) \wedge (q' \wedge q') \\ &\equiv 0 \wedge q' && \text{, } (p \wedge p' \equiv 0)\\ &\equiv 0 && \text{, } (p \wedge 0 \equiv 0)\end{aligned}$$

Cevap: C

15. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ bileşik önermesinin en sade şekli nedir?

A) p B) $p \Leftrightarrow q$ C) 0 D) 1 E) $p \vee q$

Çözüm:

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) &\equiv (p \wedge q)' \vee (p \vee q) && \text{, (ise'nin indirgenmesi)}\\ &\equiv (p' \vee q') \vee (p \vee q) && \text{, (De Morgan Kuralı)}\\ &\equiv (p' \vee q) \vee (q' \vee p)\\ &\equiv (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)\\ &\equiv p \Leftrightarrow q\end{aligned}$$

Cevap: B

16. "Ve" bağlacının (tümel evetleme ekleminin) doğruluk çizelgesine göre, bir "ve bağlacının" 1 (Doğru) değerini alabilmesi için aşağıdakilerden hangi durum olmalıdır?

A) Bileşenlerden birinin doğru değeri 0 olmalı
B) En bir bileşenin 1 değerini alması
C) Bütün bileşenlerin 1 olması
D) En az bir bileşenin yanlış olması
E) Bütün bileşenlerin yanlış olması

Çözüm: Bütün bileşenlerin 1 olması durumunda "ve" bağlacı 1 değerini alır.

Cevap: C

17. $p' \wedge [(p' \wedge q) \vee p]$ önermesinin en sade şekli nedir?

A) $p' \wedge q$ B) $p \wedge q$ C) 0 D) 1 E) $p \vee q$

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
p' \wedge [(p' \wedge q) \vee p] &\equiv p' \wedge [(p' \vee p) \wedge (q \vee p)] && \text{, (veya'nın ve üzerine dağılması)}\\
&\equiv p' \wedge [1 \wedge (q \vee p)] && \text{, } (p \vee p' \equiv 1)\\
&\equiv p' \wedge (q \vee p) && \text{, } (p \wedge 1 \equiv p)\\
&\equiv (p' \wedge q) \vee (p' \wedge p) && \text{, (ve'nin veya üzerine dağılması)}\\
&\equiv (p' \wedge q) \vee 0 && \text{, } (p \wedge p' \equiv 0)\\
&\equiv (p' \wedge q) \vee 0 && \text{, } (p \vee 0 \equiv p)\\
&\equiv p' \wedge q
\end{aligned}
$$

Cevap: A

18. $[p \Rightarrow (q \wedge p)]'$ önermesinin en sade şekli nedir?

A) p B) q C) 1 D) 0 E) $p \vee q$

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
[p \Rightarrow (q \wedge p)]' &\equiv [p' \vee (q \wedge p)]' && \text{, (ise'nin indirgenmesi)}\\
&\equiv p \wedge (q \wedge p)' && \text{, (De Morgan Kuralı)}\\
&\equiv p \wedge (q' \wedge p') && \text{, (De Morgan Kuralı)}\\
&\equiv (p \wedge q') \wedge (p \wedge p') && \text{, (ve'nin veya üzerine dağılması)}\\
&\equiv (p \wedge q') \wedge 0 && \text{, } (p \wedge p' \equiv 0)\\
&\equiv 0 && \text{, } (p \wedge 0 \equiv 0)
\end{aligned}
$$

Cevap: D

19. $p \Rightarrow (q' \Rightarrow p)$ önermesinin sonucu nedir?

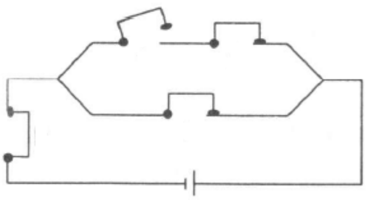
A) q B) p C) $p \vee q$ D) 1 E) 0

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
p \Rightarrow (q' \Rightarrow p) &\equiv p' \vee (q \vee p) && \text{, (ise'nin indirgenmesi)}\\
&\equiv (p' \vee p) \vee q && \text{, } (p \vee p' \equiv 1)\\
&\equiv 1 \vee q && \text{, } (p \vee 1 \equiv 1)\\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$

Cevap: E

20.



Elektrik devresinin bileşik önermesi aşağıdakilerden hangisidir.

A) $1 \wedge [(0 \wedge 1) \vee 0]$ B) $1 \wedge [(0 \wedge 1) \vee 1]$ C) $1 \wedge [(0 \wedge 0) \vee 1]$
D) $0 \wedge [(0 \wedge 1) \vee 1]$ E) $1 \wedge [(0 \vee 1) \vee 1]$

Çözüm: Kapalı devreler 1, açık devreler 0 alınırsa, soldan sağa doğru,
$1 \wedge [(0 \wedge 1) \vee 1]$
olur.

Cevap: B

21. $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge r')' \equiv 0$ olduğuna göre p hakkında ne denir?

A) 0 B) 1 C) totoloji D) tutarlı E) yorum yapılamaz

Çözüm: $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge r')' \equiv 0$
$(p \wedge q)' \vee (q \wedge r')' \equiv 0$
$(p \wedge q)' \equiv 1, (q \wedge r')' \equiv 0$
$p \wedge q \equiv 0, q \wedge r' \equiv 1$
$p \wedge q \equiv 0, q \equiv 1, r' \equiv 1$
$p \equiv 0, q \equiv 1, r \equiv 0$

Cevap: A

22. Aşağıdaki ifadelerden hangileri önermelerdir?

I. En küçük asal sayı "1" dir.
II. Göl manzarası çok güzeldir.
III. 12 sayısı 5 ile tam bölünür.
IV. İyi akşamlar.
V. Hoşça kalın.

A) I, II, IV B) I, II, V C) I, III D) III, IV E) II, IV, V

Çözüm: Sonucu doğru ya da yanlış tek bir hüküm (yargı) bildiren ifadeler önerme, istek, temenni, emir bildiren ifadeler ise önerme değildir.

Cevap: C

23. $p' \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersinin olumsuzu (değili) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $p \wedge q$ B) $p' \vee q$ C) $p' \vee q$ D) $p \wedge q'$ E) $p' \wedge q'$

Çözüm: $p' \Rightarrow q$ nun karşıt tersi $q' \Rightarrow p$ ve $q' \Rightarrow p$ nin olumsuzu,

$$(q' \Rightarrow p)' \equiv [(q')' \vee p]' \equiv [q \vee p]' \equiv q' \wedge p'$$

olur.

Cevap: E

Açık Önerme ve Niceleyiciler

24. $\exists x, x^2 - 4x - 10 < 0$ önermesinin olumsuzu, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\forall x, x^2 - 4x - 10 < 0$
B) $\forall x, x^2 - 4x - 10 \geq 0$
C) $\exists x, x^2 - 4x - 10 \geq 0$
D) $\forall x, x^2 - 4x - 10 > 0$
E) $\exists x, x^2 - 4x - 10 > 0$

Çözüm:
$\exists x, x^2 - 4x - 10 < 0$ önermesinin olumsuzu $\forall x, x^2 - 4x - 10 \geq 0$ dur.

Cevap: B

25. Aşağıdaki koşullu önermelerden hangileri bir gerektirmedir?

I. "$x = 4$ ise $x^2 + 4 = 20$ dir."
II. "$3 < 8$ ise $5 \neq 5$ tir."
III. "En küçük doğal sayı 0 ise bütün doğal sayılar çifttir.”

A) I ve III B) II ve III C) I, II ve III D) Yalnız I E) Yalnız II

Çözüm: Doğruluk değeri 1 olan koşullu önermeye gerektirme denir. Buna göre,

I. "$x = 4$ ise $x^2 + 4 = 20$ dir." (Doğru)
II. "$3 < 8$ ise $5 \neq 5$ tir." (Yanlış)
III. "En küçük doğal sayı 0 ise bütün doğal sayılar çifttir.” (Yanlış)

O halde, sadece I. önerme bir gerektirmedir.

Cevap: D

26. Aşağıdaki iki yönlü koşullu önermelerin hangileri bir çift gerektirmedir?

I. "Kare, bir dikdörtgendir. $\Leftrightarrow$ Dikdörtgen, bir karedir."
II. "x çift sayıdır $\Leftrightarrow$ x^2 tek sayıdır."
III. "Dünya yuvarlaktır $\Leftrightarrow$ $2 + 3 > 4$ tür."

A) I ve II B) I ve III C) I, II ve III D) Yalnız I E) Yalnız III

Çözüm: Doğruluk değeri 1 olan iki yönlü şartlı önermeye çift gerektirme denir. Buna göre,

I. $1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$ (Yanlış)
II. Birinci doğru iken ikinci yanlış olduğundan bu önerme de yanlıştır.
III. $1 \Leftrightarrow 1 \equiv 1$ (Doğru)

O halde, yalnızca III. önerme bir çift gerektirmedir.

Cevap: E

27. x ve y doğal sayılar olmak üzere, P(x,y): "$x + y < 3$" açık önermesinden kaç tane doğru önerme bulunabilir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: P(x,y): "$x + y < 3$" önermesinden bulunabilecek doğru önermeler;

$x = 0$ için, $y = 0, 1, 2, 3$ olup 4 tane
$x = 1$ için, $y = 0, 1, 2$ olup 3 tane
$x = 2$ için, $y = 0, 1$ olup 3 tane
$x = 3$ için, $y = 0$ olup 1 tane

toplam 10 tanedir.

Cevap: A

28. P(x, y, z): "$x + 2y + 3z = 11$" açık önermesi için, $P(1, 2, a) = 1$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: P(x, y, z): "$x + 2y + 3z = 11$" verilen önermeyi sağlar. Buna göre,

$$x + 2y + 3z = 11 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot a = 11$$
$$\Rightarrow a = 2$$

Cevap: D

29. "Bu gece kar yalarsa yarın kardan adam yapacağım." önermesinin karşıt tersi (çelişkisi) aşağıdakilerden hangisidir?

A) Yarın ancak, bu gece kar yağarsa kardan adam yapacağım.
B) Yarın kardan adam yapmazsam bu gece kar yağmamıştır.
C) Bu gece kar yağmazsa yarın kardan adam yapacağım.
D) Yarın kardan adam yaparsam bu gece kar yağmamıştır.
E) Bu gece kar yağmazsa yarın kardan adam yapmayacağım.

Çözüm: $p \Leftrightarrow q$ nun karşıt tersi $q' \Leftrightarrow p'$ dur.
p : Bu gece kar yağması
q: Yarın kardan adam yapmam
önermesinin karşıt tersi
q: Yarın kardan adam yapmamam
p : Bu gece kar yağmaması
olacağından önerme " Yarın kardan adam yapmazsam bu gece kar yağmamış-tır." olur.

Cevap: B

30. "Okulda bütün öğretmenler erkektir." ifadesi yanlış olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Okulda hiç bayan öğretmen yoktur.
B) Okulda bütün öğretmenler bayandır.
C) Okulda bazı öğretmenler erkektir.
D) Okulda hiç erkek öğretmen yoktur.
E) Hepsi doğrudur

Çözüm: Bütün kelimesi evrensel ($\forall$) niceleyicidir ve değili varlıksal ($\exists$) niceleyicidir. Buna göre; verilen ifadenin doğru ifadesi "Okulda bazı öğretmen-ler erkektir." şeklinde olur.

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.

3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Zühtü ÖZEL, Arif SABUNCUOĞLU, Soyut Matematik, 5. Baskı, 2020.