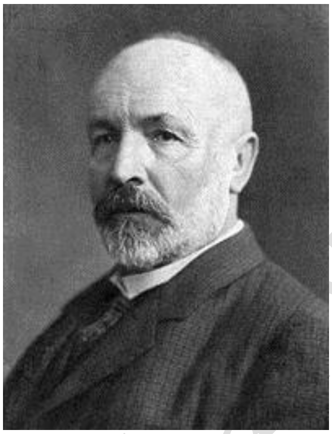
2. BÖLÜM
KÜMELER

KÜME KAVRAMI



George Cantor
(3 Mart 1845 St. Petersburg, Rusya - 6 Ocak 1918 Saksonya-Anhalt, Almanya)

2.1. Tanım: Varlıkların iyi tanımlanış bir grubuna (listesine) küme adı verilir. İyi tanımlamadan kast, herkesin aynı şekilde algılayabileceği şekilde tanımlamadır. Kümeyi oluşturan varlıkların her birine kümenin elemanı denir. $A, B, C, \cdots$ gibi sembollerle gösterilir. A kümesine ait bir x elemanı $x \in A$ şeklinde gösterilir. A kümesine ait olmayan bir x elemanı $x \notin A$ biçiminde gösterilir. Kümelere ait şu özellikler dikkat çeker.

1. Bir kümede bir eleman bir kez yazılır.
2. Kümenin elemanlarının yerleri değişmesiyle küme değişmez.
3. Bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ veya $n(A)$ şeklinde gösterilir.

Kümeler şu üç yöntemle gösterilir.

1. Liste Yöntemi: Kümenin elemanlarını { } biçimindeki bir parantez içine sıra gözetilmeksizin, birbirinden virgüle ayrılarak yazılmasına liste yöntemiyle gösterme denir.

Örnek: Haftanın günleri bir küme oluşturur. Bunu,

A = {Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe, Cuma, Cumartesi, Pazar}

şeklinde gösterime liste yöntemiyle gösterim denir. Burada her gün kümenin bir elemanıdır.

Örnek: Sokakta yürüyen insanları bir küme oluşturmaz. Çünkü sokakta yürüyen insanlar iyi tanımlanmamıştır. Hangi sokak, kaç kişi ve kimlerden oluşturduğunu bilinmemektedir.

2. Ortak Genelleme Yöntemi: Kümeyi oluşturan elemanların ortak özellikleri belirterek tanımlamaya ortak genelleme yöntemi denir.

Örnek: Haftanın günleri bir küme oluşturur. Bunu,

$$A = \{x : x \in \text{Haftanın Günü}\}$$

şeklinde gösterime ortak genelleme yöntemiyle gösterim denir.

3. Venn Şeması Yöntemi: Kümenin elemanları, kapalı bir eğri içinde yanlarına nokta (.) konularak yazılır.

Örnek: Haftanın günleri bir küme oluşturur. Bunu,

şeklinde gösterime Venn şeması yöntemiyle gösterim denir.

2.2. Tanım: $\mathbf{p_x}$ açık önermesini doğru önerme yapan bütün x elemanların P kümesine, $\mathbf{p_x}$ açık önermesinin doğruluk kümesi ya da çözüm kümesi denir ve $\mathbf{P} = \{\mathbf{x} : \mathbf{p_x}\}$ ile gösterilir.

Örnek: $\mathbf{p_x} = "\mathbf{1 \leq x \leq 3}$ **ve tamsayıdır**" açık önermesinin doğruluk kümesi,

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{1} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{3}\ \mathbf{ve}\ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}\} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$$

kümesidir.

BOŞ KÜME

2.2. Tanım: Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir. { } veya $\varnothing$ şeklinde gösterilir.

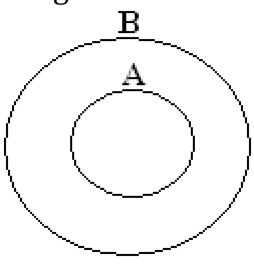
Örnek: A = {Alpaslan: Alpaslan Osmanlı Padişahıdır} kümesi boş kümedir. Çünkü Alpaslan Büyük Selçuklu devletinin sultanıdır.

Örnek: $B = \{x : x < 0, x \in \mathbb{N}\}$ bir boş kümedir. Çünkü $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sıfırdan küçük elemanı yoktur.

2.1. Uyarı: $A = \{\varnothing\}$ ve B = {0} kümeleri birer boş küme değildir. Çünkü A kümesi $\varnothing$ ve B kümesi 0 elemanlarına sahip kümelerdir.

ALT KÜME ve ÖZALT KÜME

2.4. Tanım: Bir A kümesinin bütün elemanları bir B kümesinin de aynı zamanda elemanları ise A kümesine B kümesinin alt kümeleri denir. $A \subset B$ (A, B'nin alt kümesi) veya $B \supset A$ (B kapsar A'yı) denir. Eğer A kümesi B kümesinin alt kümesi değilse $A \not\subset B$ şeklinde gösterilir. Bu kavram Venn şemasında,

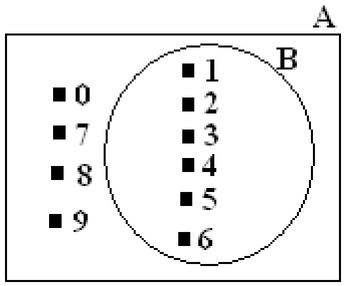


gibi şekillerde gösterilir. Buna göre $A \subset B$ ise A'nın her elemanı B'ninde elemanıdır. Yani;

$$A \subset B \text{ ise } x \in A \Rightarrow x \in B$$

dir.

Örnek: $A = \{x : x \text{ bir rakam}\}$ $B = \{x : x < 7, x \in \mathbb{N}\}$ kümelerinin Venn şeması



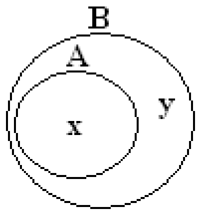
biçimindedir. Buna göre $B \subset A$ veya $A \subset B$ dir.

Örnek: $A \neq \{\varnothing\}$ ve $A \subset B$ olmak üzere,

$$s(A) + 2.s(B) = 10$$

olduğuna göre, $s(A)$ ve $s(B)$ nin değerlerini bulunuz.

Çözüm: Verilere göre $s(A) = x, s(B) = x + y$ olsun.



Buna göre, $x + 2(x + y) = 10$ ise $3x + 2y = 10$ dir. $A = \{\varnothing\}$ olduğundan $x = 2, y = 2$ olması ile mümkündür.

Örnek: $A = \{a, \{1, 2\}, b, \{3, 4, 5\}, \{c, d\}\}$ kümesi verilsin. Bu küme üzerinde,

a) $b \in A$
b) $s(A) = 8$
c) $\{c, d\} \in A$
d) $\{1, 2\} \not\subset A$

ifadelerinden hangileri doğrudur.

Çözüm: a) b elemanı A kümesinin elemanı olup doğrudur.

b) a, 1. eleman, {1,2}, 2. eleman, b, 3. eleman, {3, 4, 5}, 4. eleman, {c, d}, 5. elemandır. Öyleyse $s(A) = 5$ olduğundan yanlıştır.

c) $\{c, d\}$ elemanı A kümesinin elemanı olup doğrudur.

d) $\{1,2\} \in A$ olduğundan $\{1,2\} \not\subset A$ ifadesi yanlıştır.

2.1 Teorem: Boş küme her kümenin alt kümesidir. ($\emptyset \subset A$)

İspat: $\emptyset$ de olup ve bir A kümesinde olmayan hiçbir eleman söyleyemeyiz. O halde, her A kümesi için $\emptyset \subset A$ dır.

2.2. Teorem: Her küme kendisinin alt kümesidir. ($A \subset A$)

İspat: A kümesinin her elemanı yine A kümesinin bir elemanıdır. O halde alt küme tanımı gereğince $A \subset A$ dir.

Örnek: $A = \{a, b, c\}$ kümesinin bütün alt kümelerini bulunuz.

Çözüm: { }, {a}, {b} , {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} olup 8 tanedir.

2.3. Teorem: A, B ve C kümeleri için $(A \subset B \wedge B \subset C) \Leftrightarrow A \subset C$ dir. (Geçişme Özelliği)

İspat: $A \subset B$ ise A'nın her elemanı B'nin de elemanıdır. Yani $x \in A$ iken $x \in B$ dir. Yine $B \subset C$ ise B'nin her elemanı C'nin de elemanıdır. Yani $x \in B$ iken $x \in C$ dir. Şu halde A nın her elemanı C nin de elemanıdır. Yani her $x \in A$ iken $x \in C$ dir. Öyleyse $A \subset C$ dir.

2.4. Teorem: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n elemanlı sonlu bir kümenin alt küme sayısı 2^n dir.

İspat: Bu teoremi tümevarım yöntemiyle yapalım. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n elemanlı bir kümede,

P(1) için {a} gibi 1 elemanlı bir kümenin alt kümeleri {a, ∅} olup $2^1 = 2$ tanedir.

P(2) için $\{a_1, a_2\}$ gibi 2 elemanlı bir kümenin alt kümeleri $\{\{a_1\},\{a_2\},\{a_1,a_2\},\emptyset\}$ olup $2^2 = 4$ tanedir.

P(3) için $\{a_1, a_2, a_3\}$ gibi 3 elemanlı bir kümenin alt kümeleri
$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\},\{a_2, a_3\},\{a_3, a_1\},\{a_1, a_2, a_3\}, \emptyset\}$

olup $2^3 = 8$ tanedir.

P(k) için n = k doğru olsun. Bu takdirde k elemanlı bir kümenin alt küme sayısı 2^k tane olsun. Bunlar;

$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_k\},$
$\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \ldots, \{a_{k-1}, a_k\},$
$\ldots$
$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\},$
$\varnothing\}$

şeklindedir. $P(k+1)$ için $n = k + 1$ e bakalım.

$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_k\}, \boldsymbol{\{a_{k+1}\}},$
$\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \ldots, \{a_{k-1}, a_k\}, \boldsymbol{\{a_k, a_{k+1}\}, \{a_1, a_{k+1}\}, \{a_2, a_{k+1}\}, \ldots, \{a_{k-1}, a_{k+1}\}}$
$\ldots$
$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, \boldsymbol{\{a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}, \{a_1, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}\}, \{a_1, a_2, a_4, \ldots, a_k, a_{k+1}\}}, \ldots$
$\boldsymbol{\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}},$
$\varnothing\}$

olacaktır. Bu durum alt küme sayısını 2^k tane arttığı ortaya çıkar. Buna göre

$$2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$$

olur.

Örnek: 3 elemanlı bir kümenin alt küme sayısını $2^3 = 8$ tanedir. Nitekim bir önceki örnekte de alt küme sayısının 8 olduğu tespit edilmişti.

2.5. Tanım: Bir kümenin kendisi hariç, tüm alt kümelerine o kümenin özalt kümesi denir.

Örnek: $A = \{a, b, c\}$ kümesinin bütün öz alt kümelerini bulunuz.

Çözüm: { } , {a} , {b} , {c} , {a, b} , {a, c} , {b, c} olup 7 tanedir.

2.1. Sonuç: n elemanlı bir kümenin öz alt küme sayısı $2^n - 1$ tanedir.

Örnek: Alt küme ve öz alt küme sayısı 127 olan bir kümenin elemanları sayısını bulunuz.

Çözüm: İstenen kümenin eleman sayısı n olsun. Bu takdirde,

$$2^n + 2^n - 1 = 127$$
$$2 \cdot 2^n = 128$$

$$2^n = 2^6$$
$$n = 6$$

dir.

2.5. Teorem: Bir kümenin eleman sayısı öz alt küme sayısına eşit ise o küme sonsuz elemanlıdır.

İspat: Sonsuz elemanlı bir kümenin elemanından bir eleman çıkması o kümenin sonsuzluğuna zarar vermez. Buna göre bir kümenin eleman sayısı öz alt küme sayısına eşit ise o küme sonsuz elemanlıdır.

KUVVET KÜMESİ

2.6. Tanım: Bir A kümesinin tüm alt kümelerinin oluşturduğu kümeye, A kümesinin kuvvet kümesi denir ve P(A) ile gösterilir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin kuvvet kümesim yazınız.

Çözüm: A kümesinin bütün alt kümeleri,

$A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{2\}$, $A_4 = \{3\}$, $A_5 = \{1,2\}$, $A_6 = \{1, 3\}$, $A_7 = \{2, 3\}$,
$A_8 = \{1,2,3\}$

olduğuna göre, kuvvet kümesi

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\},\{1, 2, 3\}\}$

olur. Buna göre, P(A)' nın eleman sayısı,

$$s(P(A)) = 2^3 = 8$$

olduğuna dikkat ediniz.

İKİ KÜMENİN EŞİTLİĞİ

2.7. Tanım: A ve B iki kümesi aynı elemanlardan oluşuyorsa A ve B ye eşit kümeler denir. $A = B$ şeklinde gösterilir. A ve B aynı elemanlardan oluşmuyorsa A ve B'ye eşit olmayan kümeler denir. $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

Örnek: $A = \{x : x^2 < 17, x \in \mathbb{N}\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümeleri eşit kümelerdir. Çünkü her iki kümede aynı elemanlardan oluşmaktadır.

Örnek: $A = \{2, 3\}$ ve $B = \{x : (x - 2)(x - 3) = 0\}$ kümeleri eşit kümelerdir. Çünkü;

$x = 2$ için $(2-2)(2-3) = 0$ doğrudur.
$x = 3$ için $(3-2)(3-3) = 0$ doğrudur.
Buna göre, $B = \{2, 3\}$ yazılır, öyleyse, $A = B$ dir.

2.6. Teorem: A ve B kümeleri için $A \subset B$ ve $B \subset A$ şartı sağlanıyorsa $A = B$ dir.

$(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow A = B$

İspat: $A \subset B$ ise A'nın her elemanı B'nin de elemanıdır. Yani $x \in A$ iken $x \in B$ dir. Yine $B \subset A$ ise B'nin her elemanı A'nın de elemanıdır. Yani $x \in B$ iken $x \in A$ dir. O halde A ve B aynı elemanlardan oluşurlar. Yani $A = B$ dir.

Örnek: $A = \{m, n, p\}$ ve $B = \{p, n, m\}$ kümeleri eşit kümelerdir. Çünkü, A kümesinin alt kümeleri arasında $B = \{p, n, m\}$ kümesi yazılabileceğinden $B \subset A$ dır. Yine B kümesinin alt kümeleri arasında $A = \{m, n, p\}$ kümesi yazılabileceğinden $A \subset B$ dır. Şu halde $A = B$ olur.

İKİ KÜMENİN DENKLİĞİ

2.8. Tanım: Eğer A ve B kümelerinin eleman sayıları eşitse A ve B ye denk kümeler denir. Buna göre,

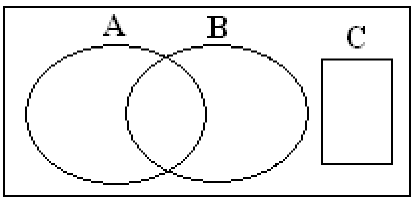
$$s(A) = s(B) \text{ ise } A \equiv B$$

şeklindedir.

Örnek: $A = \{x : x \leq 20, x \text{ tek doğal sayı}\}$, $B = \{x : x \leq 20, x \text{ çift doğal sayı}\}$ kümeleri aynı küme eşit değildir ama eleman sayıları eşittir. O halde $s(A) = s(B)$ dir.

EVRENSEL KÜME

2.9. Tanım: Üzerinde işlem yapılan bütün kümeleri kapsayan kümeye evrensel küme denir. E harfi ile gösterilir.



$A \subset E, B \subset E, C \subset E, (A \cup B) \subset E$

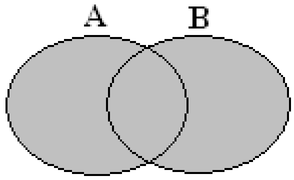
olur.

KÜMELERİN BİRLEŞİMİ

2.10. Tanım: A ve B kümelerindeki bütün elemanların meydana getirdiği yeni kümeye A ve B kümelerinin birleşimi denir. $A \cup B$ ile gösterilir. Bu,

$$A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}$$

ile ifade edilir. Venn şeması,



şeklindedir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{c, d, e, f, g\}$ kümesi verilsin. Buna göre,

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

şeklindedir.

2.1. Not: Birleşim kümesinde, kümelerde bulunan ortak elemanlar bir kez yazılır.

Örnek: $A = \{x : 10 < x < 32, x = 5k, k \in \mathbb{N}\}$

$$B = \{x : 30 < x < 80, x = 5k, k \in \mathbb{N}\}$$

ise $A \cup B$ kümesini bulunur.

Çözüm: $A \cup B = \{x : 10 < x < 80, x = 5k, k \in \mathbb{N}\}$

2.7. Teorem (Tek Kuvvet Özelliği): A bir küme olmak üzere,

$$A \cup A = A$$

dır.

İspat: Önermelerde $p \lor p \equiv p$ olduğuna göre,

$$A \cup A = \{x : x \in A \lor x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$$

dir.

2.8. Teorem (Değişme Özelliği): A ve B iki küme olmak üzere,

$$A \cup B = B \cup A$$

dır.

İspat: Önermelerde $p \vee q \equiv q \vee p$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : x \in A \ \vee x \in B\} \\ &= \{x : x \in B \ \vee x \in A\} \\ &= B \cup A \end{aligned}$$

dır.

2.9. Teorem (Birleşme Özelliği): A, B ve C iki küme olmak üzere,

$$A \cup (B \cup C) = A \cup (B \cup C)$$

dır.

İspat: Önermelerde $p \vee (q \vee r) \equiv p \vee (q \vee r)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= \{x : x \in A \ \vee (x \in B \vee x \in C)\} \\ &= \{x : (x \in A \ \vee x \in B) \vee x \in C\} \\ &= A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

dir.

2.10. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,

$$A \subset B \text{ ise } A \cup B = B$$

dır.

İspat: $x \in A$ ise $A \subset B$ olduğundan $x \in B$ olacağından $x \in A \cup B$ bulunur. Yine $x \in A \cup B$ ise $x \in A$ ve $x \in B$ olacağından $A \cup B \subset B$ olur. Kümelerde eşitlik aksiyomu gereği, $A \subset B$ iken $A \cup B = B$ dir.

2.11. Teorem (Birim Eleman Özelliği): A bir küme olmak üzere,

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

dir. (Birleşim kümesinin birim elemanı boş kümedir)

İspat: A bir küme olmak üzere,

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= \{x : x \in A \ \vee x \in \emptyset\} \\ &= \{x : x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

dir.

2.12. Teorem (Yutan Eleman Özelliği): A bir küme, E evrensel küme olmak üzere,

$$A \cup E = E \cup A = E$$

dir. (Birleşim kümesinin yutan elemanı evrensel kümedir)

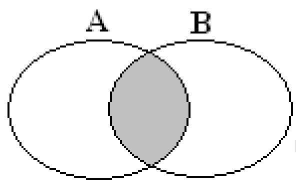
İspat: 2.9 teoreminde, $A \subset B$ ise $A \cup B = B$ olduğu 2.10. teoremde ispat edildi. Buna göre $A \subset E$ olduğundan $A \cup E = E$ olduğu ortaya çıkar.

KÜMELERİN KESİŞİMİ

2.11. Tanım: A ve B kümelerindeki ortak elemanların meydana getirdiği yeni kümeye A ve B kümelerinin kesişimi denir. $A \cap B$ ile gösterilir. Bu

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \land x \in B\}$$

ile ifade edilir. Venn şeması,



şeklindedir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{c, d, e, f, g\}$ kümesi verilsin. Buna göre,

$$A \cap B = \{c, d, e\}$$

şeklindedir.

2.12. Tanım: Ortak elemanı olmayan iki kümeye ayrık küme denir. $A \cap B \neq \emptyset$ ise A ve B ayrık kümelerdir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi verilsin. Buna göre,

$$A \cap B \neq \emptyset$$

olduğundan A ve B ayrık kümelerdir.

Örnek: $A = \{x : 50 < x < 100, x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x : 30 < x < 80, x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

ise $A \cap B$ kümesini bulunur.

Çözüm: $A = \{51, 54, 57, \cdots ,99\}$ ve $B = \{32, 34, 36, \cdots ,78\}$ olduğuna göre,

$$A \cap B = \{54, 60, 66, 72, 78\}$$

şeklindedir.

2.13. Teorem (Tek Kuvvet Özelliği): A bir küme olmak üzere,

$$A \cap A = A$$

dır.

İspat: Önermelerde $p \wedge p \equiv p$ olduğuna göre,

$$A \cap A = \{x : x \in A \ \wedge x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$$

dır.

2.14. Teorem (Değişme Özelliği): A ve B iki küme olmak üzere,

$$A \cap B = B \cap A$$

dır.

İspat: Önermelerde $p \wedge q \equiv q \wedge p$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x : x \in A \ \wedge x \in B\} \\ &= \{x : x \in B \ \wedge x \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

dır.

2.15. Teorem (Birleşme Özelliği): A, B ve C iki küme olmak üzere,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

dır.

İspat: Önermelerde $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= \{x : x \in A \ \wedge (x \in B \wedge x \in C)\} \\ &= \{(x : x \in A \ \wedge x \in B) \wedge x \in C\} \\ &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

dir.

2.16. Teorem: A ve B iki küme olsun. Bu takdirde,

$$A \subset B \text{ ise } A \cap B = A$$

dır.

İspat: $x \in A$ ise $A \subset B$ olduğundan $x \in B$ olacağından $x \in A \cap B$ bulunur. Yine $x \in A \cap B$ ise $x \in A$ ve $x \in B$ olacağından $A \cap B \subset A$ olur. Kümelerde eşitlik aksiyomu gereği, $A \subset B$ iken $A \cap B = A$ dir.

2.17. Teorem (Birim Eleman Özelliği): A bir küme ve E evrensel küme olmak üzere,

$$A \cap E = E \cap A = A$$

dır. (Kesişim kümesinde evrensel kümenin birim elemanı kendisidir.)

İspat: 2.16 teoreminde, $A \subset B$ ise $A \cap B \subset A$ olduğu ispat edildi. Buna göre $A \subset E$ olduğundan $A \cap E = A$ olduğu ortaya çıkarır.

2.18. Teorem (Yutan Eleman Özelliği): A bir küme olmak üzere,

$$A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$$

dır. (Kesişim kümesinin yutan elemanı boş kümedir)

İspat: A bir küme olmak üzere,

$$\begin{aligned} A \cap \varnothing &= \{x : x \in A \wedge x \in \varnothing\} \\ &= \{x : x \in \varnothing\} \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

dir.

KÜMELERİN DAĞILMA ÖZELLİĞİ

Kümelerin birleşimin kesişim üzerine ve birleşimin kesişim üzerine dağılma özellikleri vardır. Şimdi o özellikleri verelim.

2.19. Teorem: A, B ve C iki küme olmak üzere,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

dır.

İspat: Önermelerde $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \\ &= \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

dir.

2.20. Teorem: A, B ve C iki küme olmak üzere,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

dır.

İspat: Önermelerde $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x : x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\ &= \{x : (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} \end{aligned}$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

dir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6, 7\}, C = \{1, 5, 7, 8, 9\}$ olduğuna göre,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

eşitliğini gerçekleyiniz.

Çözüm: $B \cup C = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A \cap B = \{4, 5\}, A \cap C = \{1, 5\}$
$A \cap (B \cup C) = \{1, 4, 5\}, (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 4, 5\}$

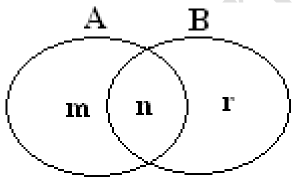
BİRLEŞİM KÜMESİNİN ELEMAN SAYISI

2.21. Teorem: A ve B iki küme ise,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

dir.

İspat: $s(A) = m + n, s(B) = n + r$ olsun. Bu takdirde,



şekli çizilebilsin. Buna göre,

$$\begin{aligned} s(A \cup B) &= m + n + r \\ &= (m + n) + (n + r) - n \\ &= s(A) + s(B) - s(A \cap B) \end{aligned}$$

dir.

Örnek: A kümesi 10 elemanlı, B kümesi 7 elemanlı ve $A \cap B$ kümesi 5 elemanlı ise $A \cup B$ kümesi kaç elemanlıdır.

Çözüm: $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 10 + 7 - 5 = 12$

Örnek: 30 kişilik bir sınıfta 23 öğrenci futbol oynamakta, 12 öğrenci basketbol oynamaktadır. Her iki oynayan öğrenciler bulunduğuna göre her iki oyunu oynayan öğrenci sayısı kaçtır?

Çözüm: Futbol oynayanlar F, basketbol oynayanlar B ile gösterirsek,

$$s(F \cup B) = 30, \; s(F) = 23, s(B) = 12, s(F \cap B) = x$$

$s(F \cup B) = s(F) + s(B) - s(F \cap B)$
$30 = 23 + 12 - x$
$x = 5$
öğrenci olduğu bulunur.

Örnek: $s(A) = 2x - 3, s(B) = 3x + 4, s(A \cup B) = 3x + 7, s(A \cap B) = 4$ olduğuna göre x in değeri nedir?

Çözüm: $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
$3x + 7 = 2x - 3 + 3x + 4 - 4$
$x = 5$

2.22. Teorem: A ve B iki küme ise,
$s(A \cup B \cup C) =$
$= s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(B \cap C) - s(C \cap A) + s(A \cap B \cap C)$
dir.

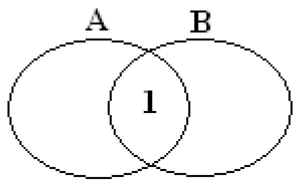
İspat: 2.20. teoremin ispatı gibi yapılır.

Örnek: 45 kişilik bir gruptan Tokat'ı görenler 22, Samsun'u görenler 18, Yozgat'ı görenler 14 kişidir. 5 kişi hem Tokat'ı hem Samsun'u, 10 kişi hem Samsun'u hem Yozgat'ı, 7 kişi hem Tokat'ı hem de Yozgat'ı görmüştür. Her üç şehir gören kaç kişi vardır.

Çözüm: Tokat'ı gören sayısı s(T),
Samsun'u gören sayısı s(S)
Yozgat'ı gören sayısı s(Y)
ve her üçü şehri gören $s(A \cup B \cup C) = x$ gösterirsek,
$s(A \cup B \cup C) =$
$= s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(B \cap C) - s(C \cap A) + s(A \cap B \cap C)$
$45 = 22 + 18 + 14 - 5 - 10 - 7 + x$
$x = 13$

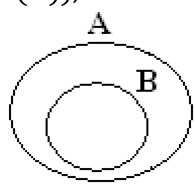
2.2. Uyarı: A ve B ayrık iki küme olmasınlar $(A \cap B \neq \emptyset)$ Bu takdirde,

1. $s(A \cap B) = 1$ ise



$s(A \cup B)$ en büyük değeri alır.

2. $B \subset A$ ise $(s(A \cap B) = s(B))$,



$s(A \cap B)$ nin değeri en büyük olacağından, $s(A \cup B)$ en küçük değer alır.

Örnek: $s(A) = 8, s(B) = 6$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olduğuna göre $s(A \cap B)$ nin alabileceği en büyük değer ile $s(A \cup B)$ nin alabileceği en büyük değerin toplamını bulalım.

Çözüm: **1.** $s(A \cap B) = 1$ alınırsa $s(A \cup B)$ nin alabileceği en büyük değeri,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 8 + 6 - 1 = 13$$

dir.

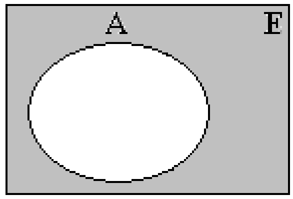
2. $B \subset A$ seçilirse $s(A \cap B)$ nin en büyük değeri $s(A \cap B) = s(B) = 6$ olarak bulunur.

KÜMELERİN TÜMLEYENİ

2.13. Tanım: A bir küme E evrensel küme olsun. E kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir. A^t ile gösterilir. Bu

$$A^t = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$$

ile ifade edilir. Venn şeması,



şeklindedir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E = \{x : x < 11 , x \in \mathbb{N}\}$ ise A^t ni bulunuz.

Çözüm: $A^t = E - A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

2.23. Teorem: A bir küme E evrensel küme olmak üzere,

a) $A \cap A^t = \varnothing$

b) $A \cup A^t = E$

dir.

İspat:

a) $A \cap A^t = \{x : x \in A \wedge x \in A^t\} = \{x : x \in A \wedge x \notin A\} = \{x : x \in \varnothing\} = \varnothing$

b) $A \cup A^t = \{x : x \in A \vee x \in A^t\} = \{x : x \in E\} = E$

2.24. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,

$A \subset B$ ise $B^t \subset A^t$

dir.

İspat: $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ önermesine göre,

$A \subset B$

$\{x : x \in A \text{ ise } x \in B\}$

$\{x : x \in B^t \text{ ise } x \in A^t\}$

$B^t \subset A^t$

dir.

2.25. Teorem (De Morgan Kuralı): A ve B iki küme olsun.

a) $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$

b) $(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$

dir.

İspat: Önermelerdeki De Morgan kuralını hatırlarsak,

a) $(A \cup B)^t = \{x : x \in E \wedge x \in (A \cup B)^t\}$

$= \{x : x \in E \wedge x \notin (A \cup B)\}$

$= \{x : x \in E \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\}$

$= \{x : x \in E \wedge (x \in A^t \wedge x \in B^t)\}$

$= \{x : x \in E \wedge x \in (A^t \cap B^t)\}$

$= A^t \cap B^t$

b) $(A \cap B)^t = \{x : x \in E \wedge x \in (A \cap B)^t\}$

$$
\begin{aligned}
&= \{x : x \in E \wedge x \notin (A \cap B)\} \\
&= \{x : x \in E \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)\} \\
&= \{x : x \in E \wedge (x \in A^t \vee x \in B^t)\} \\
&= \{x : x \in E \wedge x \in (A^t \cup B^t)\} \\
&= A^t \cup B^t
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek: $(A \cup B) \cap (A \cup B^t) \cap (A^t \cup B)$ işlemini en sade biçime getiriniz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A \cup B^t) \cap (A^t \cup B) &= [A \cup (B \cap B^t)] \cap (A^t \cup B) \\
&= [A \cup \varnothing] \cap (A^t \cup B) \\
&= A \cap (A^t \cup B) \\
&= (A \cap A^t) \cup (A \cap B) \\
&= \varnothing \cup (A \cap B) \\
&= A \cap B
\end{aligned}
$$

2.26. Teorem: A bir küme E evrensel küme olmak üzere,

a) $(A^t)^t = A$

b) $\varnothing^t = E$

c) $E^t = \varnothing$

İspat: $A^t = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$ olmak üzere,

a) $(A^t)^t = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}^t = \{x : x \in E \wedge x \in A\} = A$

b) $\varnothing^t = \{x : x \in E \wedge x \notin \varnothing\} = E$

c) $E^t = \{x : x \in E \wedge x \notin E\} = \varnothing$

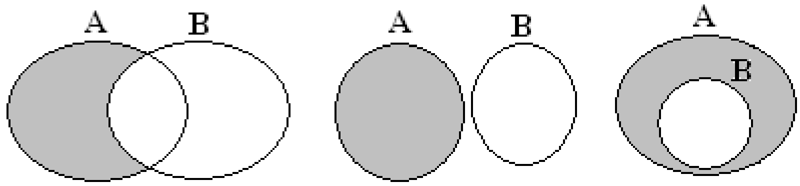
olur.

FARK İŞLEMLERİ

2.14. Tanım: A ve B iki küme olsun. A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A fark B kümesi denir ve A\B veya A–B ile gösterilir.

$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

ile ifade edilir. Venn şeması,

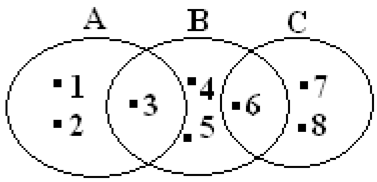


şeklindedir.

Örnek: $A = \{x : x < 10, x \in \mathbb{N}\}, B = \{x : 6 < x < 12, x \in \mathbb{N}\}$ ise $A \backslash B$ ve $B \backslash A$ kümelerini bulunuz.

Çözüm: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
olduğuna göre,
$A \backslash B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B \backslash A = \{10, 11, 12\}$
bulunur.

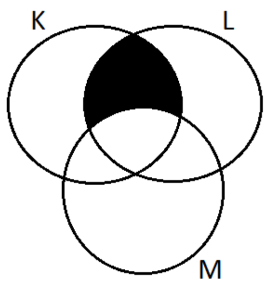
Örnek:



Verilen şekle göre $s[(B \backslash A) \cap (B \backslash C)]$ yi bulunuz.

Çözüm: $B \backslash A = \{4, 5, 6\}, B \backslash C = \{3, 4, 5\}$
$(B \backslash A) \cap (B \backslash C) = \{4,5\}$
$s[(B \backslash A) \cap (B \backslash C)] = 2$
olarak bulunur.

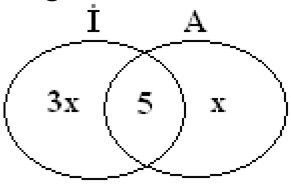
Örnek:



$(K \cap L) \backslash M$

Örnek: 25 kişilik bir sınıfta tüm öğrencilerin İngilizce veya Almanca dillerinden en az birini bilmekteler. Sadece İngilizce bilenlerin sayısı, sadece Almanca bilenlerin sayısının 3 katıdır. Her iki dili bilen 5 öğrenci bulunduğuna göre, bu sınıfta Almanca bilen kaç öğrenci vardır?

Çözüm: Sadece Almanca bilenler $s(A\setminus İ) = x$ alınırsa sadece İngilizce bilenler $s(İ\setminus A) = 3x$ olur. Buna göre,



Venn şeması çizilir. Şu halde,

$$3x + x + 5 = 25$$
$$x = 5$$
$$s(A) = 5 + 5 = 10$$

dir.

2.27. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,

$$A\setminus B \neq B\setminus A$$

dir.

İspat:

$A\setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B^t\}$

$B\setminus A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\} = \{x : x \in B \wedge x \in A^t\}$

olacağından $A\setminus B \neq B\setminus A$ dir.

2.28. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,

a) $A\setminus A = \varnothing$

b) $A\setminus \varnothing = A$

c) $\varnothing\setminus A = \varnothing$

İspat:

a) $A\setminus A = \{x : x \in A \wedge x \notin A\}$
$= \{x : x \in A \wedge x \in A^t\}$
$= \varnothing$

b) $A\setminus \varnothing = \{x : x \in A \wedge x \notin \varnothing\}$
$= \{x : x \in A \wedge x \in \varnothing^t\}$
$= \{x : x \in A \wedge x \in E\}$
$= A \cap E$
$= A$

c) $\varnothing\setminus A = \{x : x \in \varnothing \wedge x \notin A\}$
$= \{x : x \in \varnothing \wedge x \in A^t\}$
$= \varnothing \cap A^t$
$= \varnothing$

2.29. Teorem: A bir küme E evrensel küme olmak üzere, tümleyen ile fark arasında

$$E \backslash A = A^t$$

şeklinde bir ilişki vardır.

İspat: $E \backslash A = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$
$= \{x : x \in E \wedge x \in A^t\}$
$= A^t$

2.30. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere, fark ile tümleyen arasında

$$A \backslash B = A \cap B^t$$

şeklinde bir ilişki vardır.

İspat: $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
$= \{x : x \in A \wedge x \in B^t\}$
$= A \cap B^t$

2.31. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,

a) $(A \backslash B)^t = A^t \cup B$
b) $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$
c) $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$
d) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$

şeklindedir.

İspat: a) $(A \backslash B)^t = (A \cap B^t)^t = A^t \cup (B^t)^t = A^t \cup B$

b) $A \backslash (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^t$
$= A \cap (A \cap B)^t$
$= A \cap (A^t \cup B^t)$
$= (A \cap A^t) \cup (A \cap B^t)$
$= \varnothing \cup (A \cap B^t)$
$= A \cap B^t$
$= A \backslash B$

c) $(A \backslash B) \cup B = (A \cap B^t) \cup B$
$= (A \cup B) \cap (B^t \cup B)$
$= (A \cup B) \cap E$
$= A \cup B$

d) $(A \backslash B) \backslash C = (A \cap B^t) \cap C^t$

$$= A \cap (B^t \cap C^t)$$
$$= A \cap (B \cup C)^t$$
$$= A \backslash (B \cup C)$$

2.32. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,
$$s(A \cup B) = s(A \backslash B) + s(B \backslash A) + s(A \cap B)$$
dir.

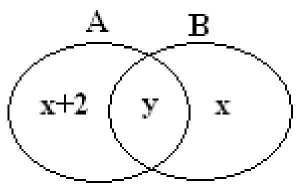
Bu teoremin ispatı aşikâr olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $s(B \backslash A) = 3$ ve $s(A \cup B) = 10$, A ile B'nin 3 tane ortak elemanı olduğuna göre, $s(A \backslash B)$ nin değerini nedir?

Çözüm: $s(B \backslash A) = 3, s(A \cup B) = 10, s(A \cap B) = 3,$ ve $s(A \backslash B) = x$ ise,
$$s(A \cup B) = s(A \backslash B) + s(B \backslash A) + s(A \cap B)$$
$$10 = x + 3 + 3$$
$$x = 4$$
dir.

Örnek: $A \cap B \neq \varnothing$ olmak üzere,
$$s(A \backslash B) - s(B \backslash A) = 2, s(A) = 8$$
olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm: $s(B \backslash A) = x$ alınırsa, $s(A \backslash B) = x + 2$ ve $s(A \cap B) = y$ alınabilir. Buna göre,



şekli çizilebileceğinden $x + 2 + y = 8$ olur. O halde, $s(B) = x + y = 6$ elde edilir.

Örnek: A, B ve C kümeleri E evrensel kümelerin alt kümeleridir.
$$s(A) + s(B^t) = 40$$
$$s(B) + s(A^t) = 40$$
ve C kümesinin dışında 10 tane eleman olduğuna göre, s(C) yi bulalım.

Çözüm: Verilen iki denklemi taraf tarafa toplarsak,

$$s(A) + s(B^t) + s(B) + s(A^t) = 80$$
$$2s(E) = 60 \text{ ise } s(E) = 40$$

dir. $s(C^t) = 10$ olduğuna göre,

$$s(C) + s(C^t) = 30 \text{ ise } s(C) = 30$$

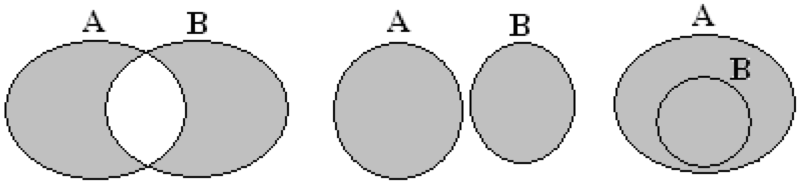
bulunur.

SİMETRİK FARK

2.15. Tanım: A ve B kümesinde $x \in A\backslash B$ veya $x \in B\backslash A$ oluyorsa A ve B kümelerinin simetrik farkı denir. $A \triangle B$ sembolü ile gösterilir.

$$A \triangle B = \{x : \ x \in A\backslash B \vee x \in B\backslash A\}$$

ile ifade edilir. Venn şeması,



şeklindedir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ise $A \triangle B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

2.33. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,

$$A \triangle B = B \triangle A$$

dir.

İspat: $A \triangle B = \{x : \ x \in A\backslash B \vee x \in B\backslash A\}$
$= \{x : \ x \in B\backslash A \vee x \in A\backslash B\}$
$= B \triangle A$

2.34. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,

$$A \triangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

dir.

İspat: $A \triangle B = \{x : x \in A\backslash B \vee x \in B\backslash A\}$
$= \{x : x \in A\backslash B\} \cup \{x : x \in B\backslash A\}$
$= (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$

2.35. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,

$$A \vartriangle B = A^t \vartriangle B^t$$

dir.

İspat:
$$\begin{aligned} A \vartriangle B &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ &= (A \cap B^t) \cup (B \cap A^t) \\ &= ((A^t)^t \cap B^t) \cup ((B^t)^t \cap A^t) \\ &= (B^t \cap (A^t)^t) \cup (A^t \cap (B^t)^t) \\ &= (B^t \backslash A^t) \cup (A^t \backslash B^t) \\ &= A^t \vartriangle B^t \end{aligned}$$

2.36. Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,

$$(A \vartriangle B)^t = (A^t \backslash B) \cup (B \backslash A^t)$$

dir.

İspat:
$$\begin{aligned} (A \vartriangle B)^t &= [(A \backslash B) \cup (B \backslash A)]^t \\ &= (A \backslash B)^t \cap (B \backslash A)^t \\ &= (A \cap B^t)^t \cap (B \cap A^t)^t \\ &= (A^t \cup (B^t)^t) \cap (B^t \cup (A^t)^t) \\ &= (A^t \cup B) \cap (B^t \cup A) \\ &= (A^t \cap B^t) \cup (A^t \cap A) \cup (B \cap B^t) \cup (B \cap A) \\ &= (A^t \cap B^t) \cup \varnothing \cup \varnothing \cup (B \cap A) \\ &= (A^t \cap B^t) \cup (B \cap A) \\ &= (A^t \cap B^t) \cup (B \cap (A^t)^t) \\ &= (A^t \backslash B) \cup (B \backslash A^t) \end{aligned}$$

ALTKÜME SAYISI

Permütasyon ve Kombinasyon ayrı birer konudur. Burada ihtiyaca binaen Permütasyon tanımları verilecek, çarpanlara ayırma konusunda Kombinasyon tanımından bahsedilmişti. Bu kısımda kısaca birkaç örnekten sonra altküme sayısını tespit edecek teoremler verilecektir.

2.16. Tanım: Sonlu n elemanlı bir A kümesinin herhangi r elemanının ($r \leq n$) yan yana dizilişinden (sıralanışından) her birine, $n-$nin $r-$li permütasyonu denir. Bu şekildeki farklı dizilişlerin sayısına da $n-$nin $r-$li permütasyonların sayısı denir.

2.37. Teorem: n elemanlı bir A kümenin herhangi r elemanının ($r \leq n$) yan yana sıralanış (diziliş) sayısı;

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

kadardır.

İspat: n elemanlı bir A kümesinin r elemanının yan yana sıralanışına bakalım. Bu r eleman $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ kümesi olsun.

a_1 yerine n elemandan birisi,
a_2 yerine geriye kalan $n-1$ elemandan birisi,
a_3 yerine geriye kalan $n-2$ elemandan birisi,
...
...
a_r yerine geriye kalan $n-(r-1)$ elemandan birisi gelebilir.

n elemanın birbirinden farklı r–li sıralanış sayısı,

$$(n-1)(n-2)(n-3)\cdots[n-(r-1)]$$

olur. Elde edilen çarpım $(n-r)!$ İle çarpılıp bölünürse,

$$(n-1)(n-2)(n-3)\cdots[n-(r-1)]\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

olacağından n elemanlı bir A kümesinin r elemanının tüm sıralanış sayısı,

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

olur.

Örnek: $P(12,4)$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $P(12,4) = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12\cdot 11\cdot 10 = 1320$

2.38. Teorem: Sonlu n elemanlı bir A kümesinin herhangi r elemanlı $(r \le n)$ alt kümeleri sayısı,

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

kadardır.

İspat: Bir A kümesinin r elemanlı alt kümeleri (r–li kombinasyonları) $C(n,r)$ tane olsun. Bu alt kümenin her elemanının her birinden $r!$ tane, A kümesinin r–li sıralanışı (permütasyonu) vardır. Şu halde,

$$C(n,r)\cdot r! = P(n,r)$$

yazılır. Buradan,

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

bulunur.

Örnek: $A = \{a, b, c\}$ kümesinin 2 elemanlı alt kümelerini bulalım. Bunlar,

$$\{a,b\}, \{b, c\}, \{c, a\}$$

dir. 3 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı (kombinasyon sayısı) 3 tanedir. Yani

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = 3$$

tanedir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin 3 elemanlı alt küme sayısı kaç tanedir?

Çözüm: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = 20$ tanedir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin en çok 3 elamanlı kaç tane alt kümesi vardır?

Çözüm: $s(A) = 5$ olduğundan en çok 3 elemanlı alt kümeleri demek, 0, 1, 2 ve 3 elemanlı alt kümelerinin sayısıdır. Buna göre,

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 1 + 5 + 10 + 10 = 26$$

tanedir.

2.39. Teorem: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n elemanlı sonlu bir kümenin alt küme sayısı 2^n dir.

İspat: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n elemanlı bir kümede,

0 elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{n}{0}$

1 elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{n}{1}$

2 elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{n}{2}$

...

n elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{n}{n}$

olduğuna göre,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}$$

kadardır. Çarpanlara ayırma konusunun Paskal üçgenine uygulamasında

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}.x^0y^n$$

olduğu gösterildi. Burada özel olarak x = y = 1 seçilirse,

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

olur.

Örnek: Eleman sayısı 3 arttığında alt kümelerin sayısı 28 artan bir kümenin ilk durumdaki eleman sayısını bulunuz.

Çözüm: Kümenin eleman sayısı n olsun. O zaman alt kümeleri sayısı 2^n dir.

$$2^{n+3} = 2^n + 28$$
$$2^n \cdot 8 = 2^n + 28$$
$$2^n \cdot 7 = 28$$
$$2^n = 4$$
$$n = 2$$

Örnek: Bir kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı 5 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit olduğuna göre, bu kümenin,

a) 4 elemanlı alt küme sayısı,
b) En çok 2 elemanlı alt kümelerinin sayısını,
c) En az 3 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

Çözüm: Bir kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı 5 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit ise,

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{5}$$
$$\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!} = \frac{n!}{5!\cdot(n-5)!}$$
$$\frac{5!\cdot(n-5)!}{3!\cdot(n-3)!} = 1$$
$$\frac{5\cdot4\cdot3!\cdot(n-5)!}{3!\cdot(n-3)(n-4)(n-5)!} = 1$$
$$20 = (n-3)(n-4)$$
$$n^2 - 7n - 8 = 0$$
$$n = 1$$

olur.

a) 8 elemanlı bir kümenin 4 elemanlı alt küme sayısı,

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot(8-4)!} = 70$$

tanedir.

b) 8 elemanlı bir kümenin en çok 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 37$$

tanedir.

c) 8 elemanlı bir kümenin en az 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$$2^8 - \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 257 - 37 = 219$$

tanedir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d, e\}$, kümeleri verilsin. Buna göre A'dan B'ye tanımlı
a) Alt küme sayısı,
b) 3 elemanlı alt küme sayısı,
c) 3 elemanlı olmayan alt küme sayısı,
d) En çok 2 elemanlı alt küme sayısı,
e) En az 5 elemanlı alt küme sayısı,
f) İçinde a bulunan 3 elemanlı alt küme sayısı,
g) İçinde c bulunmayan alt küme sayısı,
h) İçinde b veya c bulunmayan alt küme sayısı
kaç tanedir?

Çözüm: a) A kümesi 5 elemanlı olduğundan $2^n = 2^5 = 32$ tanedir.

b) 3 elemanlı alt küme sayısını

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

tanedir.

c) Tüm bağıntı sayısından, 3 elemanlılar çıkarılırsa 3 elemanlı olmayanlar kalır.

$$32 - 10 = 12$$

tanedir.

d) En çok iki elemanlı demek; iki elemanlı, bir elemanlı ya da boş bağıntı demektir.

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 1 + 5 + \frac{5!}{2!3!} = 16$$

tanedir.

e) En az 5 elemanlı alt küme sayısı, 5 ya da 6 elemanlı alt küme sayılarının toplamı kadardır.

$$\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=6+1=7$$

tanedir.

f) a elemanı daima olacağına göre geriye kalan 5 elemanlı kümenin iki elemanlı alt kümeleri sayısını bulmak gerekir.

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10$$

tanedir.

g) c olmayacağına göre kalan 4 elemanın alt kümeleri sayısı kadardır.

$$2^4=16$$

tanedir.

h) içinde b'nın bulunmadığı kümelerin sayısı B, c'nin bulunmadığı kümelerin sayısı C ile gösterirsek

$$\begin{aligned} s(B\cup C) &= s(B)+s(C)-s(B\cap C) \\ &= 2^4+2^4-2^3 \\ &= 24 \end{aligned}$$

tane olur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $A=\{a,b,\{1\},\{2,3\},\{c,d,e\}\}$ kümesi için aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

a) Bu küme 5 elemanlı bir kümedir.
b) $1\in A$
c) $\{2,3\}\in A$
d) $\{c,d,e\}\subset A$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: a) $\{1\}$, A kümesinin bir elemanı, $\{2,3\}$ de A kümesinin bir elemanı ve $\{c,d,e\}$ de A kümesinin bir elemanı olduğundan $s(A)=5$ elemanlıdır.

b) $1\in A$ değildir. Çünkü $\{1\}\in A$ olmalıdır.

c) $\{2,3\}\in A$ olup doğrudur.

d) $\{c,d,e\}$ kümesi A kümesinin alt kümesidir.

Cevap: D

2. $\{x: x^2 < x, x \in \mathbb{N}\}$ kümesi kaç elemanlıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Karesi kendisinden küçük olan bir doğal sayı olamayacağından bu küme boş kümedir.

Cevap: A

3. $A = \{x: -2 < x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin öz alt küme sayısı kaçtır?

A) 20 B) 23 C) 26 D) 28 E) 31

Çözüm: $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ biçiminde olup $s(A) = 5$ dir. Buna göre A kümesinin öz alt küme sayısı $2^5 - 1 = 31$ dir.

Cevap: E

4. $A = \{(a, b): 3a + 2b = 18, a, b \in \mathbb{N}\}$ kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E) 21

Çözüm: Bu denklem

$a = 0$ iken $b = 9$
$a = 2$ iken $b = 6$
$a = 4$ iken $b = 3$
$a = 6$ iken $b = 0$

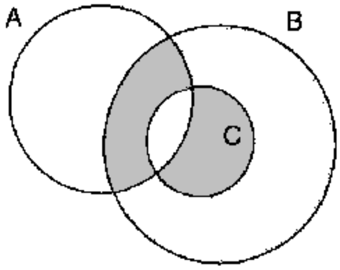
ikililerinden oluşur. Şu halde A kümesi,

$A = \{(0, 9), (2, 6), (4, 3), (6, 0)\}$

şeklinde olup $s(A) = 4$ dür. Buna göre A kümesinin alt küme sayısı $2^4 = 16$ dır.

Cevap: B

5. Aşağıdaki şeklideki taralı bölge nasıl ifade edilir?



A) $[(A \cap C) \setminus B] \cup (C \setminus A)$ B) $[(A \cap B) \cap C] \cup (C \setminus A)$
C) $[(A \cap B) \setminus C] \cup (C \setminus A)$ D) $[(A \cap B) \setminus C] \cup (C \cap A)$
E) $[(A \cap B) \setminus C] \cup (C \cup A)$

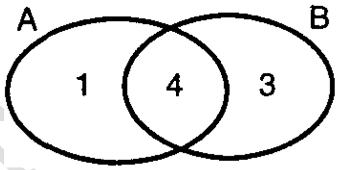
Çözüm: $[(A \cap B) \setminus C] \cup (C \setminus A)$

Cevap: C

6. $A \cap B \neq \emptyset, A \not\subset B, B \not\subset A, s(A) = 5, s(B) = 7$ ise $A \cup B$ kümesinin eleman sayısının alabileceği en küçük değer nedir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $s(A \cup B)$ en küçük sayı olması için $s(A \cap B)$ en büyük olmalıdır. $A \not\subset B$ olduğundan $s(A \setminus B) = 1$ alınırsa, $s(A \cap B) = 4$ olup $s(B \setminus A) = 3$ olur.



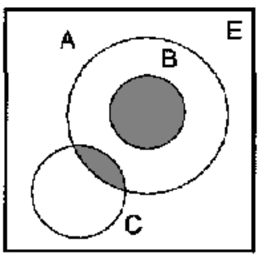
Buna göre;

$$\begin{aligned} s(A \cup B) &= s(A \setminus B) + s(A \cap B) + s(B \setminus A) \\ &= 1 + 4 + 3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

dir.

Cevap: D

7.



Yukarıdaki şekle göre küme işlemi nasıl olur?

A) $(A \cap C) \cup B$ B) $(A \cap B) \cup C$ C) $(B \cap C) \cup A$
D) $(A \cup C) \cap B$ E) $(A \cup B) \cap C$

Çözüm: $(A \cap C) \cup B$

Cevap: A

8. $A = \{x : 10 < x < 100, x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$
$B = \{x : 20 < x < 120, x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$
kümeleri veriliyor. $A \cap B$ kümesi kaç elemanlıdır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

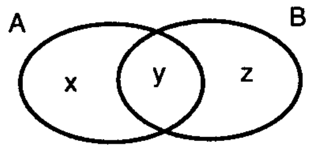
Çözüm: $A \cap B = \{x : 20 < x < 100, x = 6k, k \in \mathbb{N}\}$
$= \{24, 30, 36, 42, 48, \cdots, 96\}$
olup $s(A) = \frac{96-24}{6} + 1 = 13$ dür.

Cevap: C

9. $A^t \cap B$ kümesinin alt küme sayısı 8, $A \backslash B^t$ kümesinin alt küme sayısı 32 ve $s(A) = 2s(B)$ ise $A \cup B$ kümesi kaç elemanlıdır?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

Çözüm:



$2^z = 8$ olduğundan $s(A^t \cap B) = z = 3$
$2^y = 32$ olduğundan $s(A \backslash B^t) = y = 5$
$s(A) = 2s(B) \Leftrightarrow x + y = 2(y + z)$
$\Leftrightarrow x + 5 = 2(5 + 3)$
$\Leftrightarrow x = 11$
$s(A \cup B) = x + y + z = 11 + 5 + 3 = 19$

Cevap: B

10. A ve B kümesinin için $s(A) = 12, s(A^t) = 13, s(B^t) = 15$ ise B kümesinin eleman sayısı nedir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

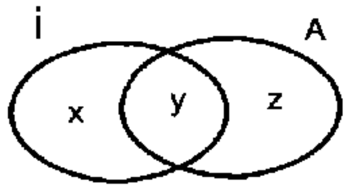
Çözüm: $s(E) = s(A) + s(A^t) = 12 + 13 = 25$
$s(E) = s(B) + s(B^t) = x + 15 = 25$
olduğundan $x = 10$ olur.

Cevap: E

11. Bir adliyede İngilizce veya Almanca dillerinden en az birini bilen 35 hukukçu bulunmaktadır. İngilizce bilenlerin sayısı her iki dili bilenlerin 4 katından 2 fazladır. Sadece İngilizce bilen 23 olduğuna göre sadece Almanca bilen kaç hukukçu vardır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

Çözüm: $x + y + z = 35, x = 23$



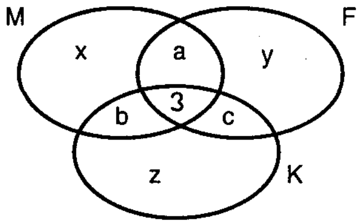
$x + y = 4y + 2 \Leftrightarrow 23 = 3y + 2 \Leftrightarrow y = 7$
$x + y + z = 35 \Leftrightarrow 23 + 7 + z = 35 \Leftrightarrow z = 5$
$y + z = 7 + 5 = 12$

Cevap: C

12. Matematik, fizik ve kimya derslerden en az birinden geçer not alan öğrencilerin oluşturduğu 40 kişilik bir sınıfta 3 öğrenci üç dersten de geçerli not almıştır. Matematikten 21 öğrenci, kimyadan 17 öğrenci, fizikten 16 öğrenci geçerli not aldığına göre, yalnız iki dersten geçen öğrenci sayısı nedir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

Çözüm:



Matematikten geçer not alanlar $x + a + b + 3 = 21$
Fizikten geçer not alanlar $y + a + c + 3 = 16$
Kimyadan geçer not alanlar $z + b + c + 3 = 17$
Sınıf mevcudu $x + y + z + a + b + c + 3 = 40$

İlk üç denklem taraf tarafa toplanırsa, $x + y + z + 2(a + b + c) = 45$ bulunur. Bu denklemler dördüncü denklemde yerine yazılırsa

$a + b + c = 45 - 37 = 8$

olarak bulunur.

Cevap: A

13. A = {Sınıftaki Erkek öğrenciler}
B = {Sınıftaki Kız öğrenciler}
C = {Sınıftaki şişman öğrenciler}
D = {Sınıftaki zayıf öğrenciler}

kümeleri için $B \cap [(A \setminus C) \cup D]$ kümesi nasıl bir kümedir?

A) Sınıftaki şişman olan Erkek veya zayıf ve kız öğrenciler
B) Sınıftaki şişman olmayan Erkek veya zayıf ve kız öğrenciler
C) Sınıftaki zayıf olmayan Erkek veya şişman ve kız öğrenciler
D) Sınıftaki zayıf olan Erkek veya şişman ve kız öğrenciler
E) Sınıftaki şişman olmayan Erkek ve kız öğrenciler

Çözüm: $A \setminus C$ = {Sınıftaki şişman olmayan Erkek öğrenciler}
$(A \setminus C) \cup D$ = {Sınıftaki şişman olmayan Erkek veya zayıf öğrenciler}
$B \cap [(A \setminus C) \cup D]$ ={Sınıftaki şişman olmayan Erkek veya zayıf ve kız öğrenciler}

Cevap: B

14. Alt küme ve öz alt küme sayısı 255 olan bir A kümesinin eleman sayısı nedir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: İstenen kümenin eleman sayısı n olsun. Bu takdirde,

$2^n + 2^n - 1 = 255$

$$2 \cdot 2^n = 256$$
$$2^n = 2^7$$
$$n = 7$$

dir.

Cevap: D

15. A ve B ayrık kümeler olmak üzere,

$$s(A \cup B) = 12, s(B \setminus A) = 8$$

ise A kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

Çözüm: $s(A) = s(A \cup B) - s(B \setminus A) = 12 - 8 = 4$

$$2^4 = 16$$

Cevap: E

16. $A \setminus (A \setminus B)$ kümesinin en sade hali nedir?

A) $A \cap B$ B) $A \cup B$ C) $A \cup B^t$ D) $A^t \cup B$ E) $A \cap B^t$

Çözüm: $A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (A \cap B^t)$

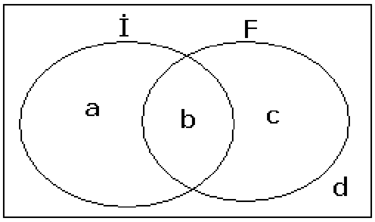
$$= A \cap (A \cap B^t)^t$$
$$= A \cap (A^t \cup (B^t)^t)$$
$$= A \cap (A^t \cup B)$$
$$= \emptyset \cup (A \cap B)$$
$$= A \cap B$$

Cevap: A

17. Bir grupta, İngilizce ve Fransızca veya hiçbirini bilmeyen kişilerden oluşmaktadır. Bu grup da İngilizce bilmeyenlerin sayısı 6, Fransızca bilmeyenlerin sayısı 10'dur. İngilizce veya Fransızcadan en çok birini bilenlerin sayısı 13 olduğuna göre hiç birini bilmeyenlerin sayısı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm:



$c + d = 6, a + c + d = 13, a + d = 10$
$d = 4$

Cevap: B

18. A ve B gibi iki kümeden A'nın öz alt küme sayısı 127, B'nin öz alt küme sayısı 63, $A \cap B$ nin alt cümleleri sayısı 31 olduğuna göre, $A \cup B$ cümlesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm: A'nın öz alt küme sayısı 127 ise,

$$2^n - 1 = 127 \text{ ise } n = 7$$

dir. B'nin öz alt küme sayısı 63 ise,

$$2^n - 1 = 63 \text{ ise } n = 6$$

dir. $A \cap B$ nin alt cümleleri sayısı 31 ise,

$$2^n - 1 = 31 \text{ ise } n = 5$$

dir. Buna göre,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 7 + 6 - 5 = 8$$

olur.

Cevap: C

19. $a \in A$ önermesi p, $b \in B$ önermesi q ve $c \in C$ önermesi de r ile gösterilirse $A = B \cap C$ eşitliği aşağıdakilerden hangisi ifade edilmektedir?

A) $p = q \wedge r$ B) $p \Rightarrow q \wedge r$ C) $p \Rightarrow q \vee r$
D) $p \Leftrightarrow q \wedge r$ E) $p = q \vee r$

Çözüm: $A = B \cap C$ eşitliğini ifade eden önerme $p \Leftrightarrow q \wedge r$ önermesidir.

Cevap: D

20. Bir kentte yapılan bir sayımda öğrencilerin internete %70'i bilgisayardan, %85'i tabletten girdiği tespit edilmiştir. Öğrencilerin en az yüzde kaçında hem bilgisayardan hem de tabletten internet kullanmaktadır?

A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

Çözüm: Bu kentte 100 aile olduğunu kabul edelim. İnternete 70'i bilgisayardan kullanıyorsa geriye 30 öğrencide bilgisayar bulunmamaktadır. 85 öğrenci tabletten internet giriyorsa 15'i tablet kullanmamaktadır. Buna göre,

$$85 - 30 = 55$$

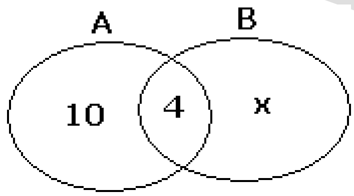
inde hem bilgisayar hem de tablet bulunmaz.

Cevap: E

21. A ve B iki küme, $3 \cdot s(A) = 2 \cdot s(B), s(A \backslash B) = 10$ ve $s(A \cap B) = 4$ göre $s(A \cup B)$ kümesin eleman sayısı kaçtır?

A) 22 B) 24 C) 27 D) 28 E) 31

Çözüm: $s(B \backslash A) = x$ alınırsa



şekli çizilir. Ayrıca $s(A) = 3 \cdot s(B)$ verisine göre,

$$3 \cdot (10 + 4) = 2 \cdot (4 + x) \text{ ise } x = 17$$

olarak bulunur. O halde $s(A \cup B) = 10 + 4 + 17 = 31$ eleman bulunur.

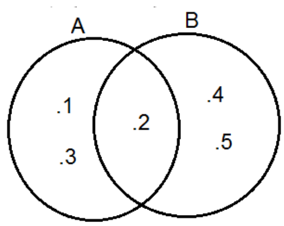
Cevap: E

22. $B = \{2, 4, 5\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B \backslash A = \{4, 5\}$

olduğuna göre, A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {1} B) {1, 4} C) {1, 2, 3} D) {1, 2} E) {1, 3}

Çözüm:



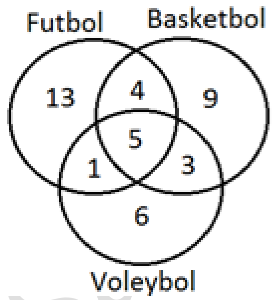
$A = \{1, 2, 3\}$

Cevap: C

23. Futbol, voleybol ve basketbol oynayanlardan oluşan bir sporcu kafilesinde, üç oyunu da oynayanlar 5, futbol ve basketbol oynayanlar 9, voleybol ve basketbol oynayanlar 8, futbol ve voleybol oynayanlar 6 kişidir. Futbol oynayanlar 23, basketbol oynayanlar 21, voleybol oynayanlar 15 kişi olduğuna göre kafilece kaç sporcu vardır?

A) 41 B) 42 C) 43 D) 44 E) 45

Çözüm:
$s(F \cap B) = 9 = 4 + 5, s(B \cup V) = 8 = 3 + 5, s(F \cap V) = 6 = 1 + 5$
$s(F) = 23 = 13 + 4 + 1 + 5, s(B) = 21 = 9 + 4 + 5 + 3,$
$s(V) = 15 = 6 + 3 + 1 + 5$



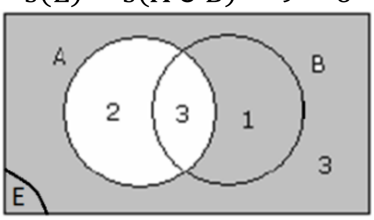
Toplam 41 sporcu var.

Cevap: A

24. E evrensel küme olmak üzere,
$$s(E) = 9\ s(A \cap B) = 3, s(A \cup B) = 6, s(B) = 4$$
olduğuna göre, A kümesinin tümleyenin (A^t) iki elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $s(B \backslash A) = s(B) - s(A \cap B) = 4 - 3 = 1$
$s(A \backslash B) = s(A) - s(B) = 6 - 4 = 2$
$s(A \cup B)^t = s(E) - s(A \cup B) = 9 - 6 = 3$



$s(A^t) = s(A \cup B)^t + s(A \backslash B) = 3 + 1 = 4$
4 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı;

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

olur.

Cevap: E

25. n pozitif tamsayılar için, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}\right\}$$

alt kümeleri tanımlanıyor. Buna göre,

$$A_1 \cap A_2$$

kesişim kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{2} < x < 2$ B) $1 < x < 2$ C) $1 < x < 3$ D) $\varnothing$ E) $\{1\}$

Çözüm: $A_1 = \{x \in \mathbb{R}: 1 < x < 2\}$ ve $A_2 = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing$$

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Zühtü ÖZEL, Arif SABUNCUOĞLU, Soyut Matematik, 5. Baskı, 2020.