4. BÖLÜM
BAĞINTI

BAĞINTI KAVRAMI

4.1. Tanım: A ve B boştan farklı herhangi iki küme olmak üzere $A \times B$ nin her alt kümesine A'dan B'ye bağıntı denir. Bağıntı genellikle β biçiminde gösterilir.

$\beta \subset A \times B$ ise $\beta = \{(x, y): (x, y) \in A \times B\}$

dir.

Örnek: $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ kümeleri için aşağıdakilerden hangileri A'dan B'ye bağıntıdır?

i) $\beta_1 = \{(1, a), (1, c)\}$
ii) $\beta_2 = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}$
iii) $\beta_3 = \{(1,2), (1, b)\}$
iv) $\beta_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$

Çözüm: i) $\beta_1 \subset A \times B$ olduğundan β_1, A'dan B'ye bir bağıntıdır.

ii) $\beta_2 \subset A \times B$ olduğundan β_2, A'dan B'ye bir bağıntıdır.

iii) $(1, 2) \notin A \times B$ olduğundan $\beta_3 \not\subset A \times B$ dir. Buna göre β_3, A'dan B'ye bir bağıntı değildir.

iv) $(a, 1), (b, 2), (c, 2)$ elemanları $A \times B$ nin elemanı olmadığından β_4, A'dan B'ye bir bağıntı değildir.

Örnek: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi verilsin. Buna göre aşağıdaki bağıntıları liste yöntemi ile yazınız.

i) $\beta_1 = \{(x, y) \in A \times A: y = x^2\}$
ii) $\beta_2 = \{(x, y) \in A \times A: x \text{ tam böler } y\}$

Çözüm: i) $x = 0$ için $y = 0$
$x = 1$ için $y = 1$

$$x = 2 \text{ için } y = 4$$

olacağından $\beta_1 = \{(0,0),(1,1),(2,4)\}$ bağıntısı elde edilir.

ii) x = 1 sayısı y = 1 e tam bölünür
x = 1 sayısı y = 2 e tam bölünür
x = 1 sayısı y = 3 e tam bölünür
x = 1 sayısı y = 4 e tam bölünür
x = 2 sayısı y = 2 e tam bölünür
x = 2 sayısı y = 4 e tam bölünür
x = 3 sayısı y = 3 e tam bölünür
x = 4 sayısı y = 4 e tam bölünür

olacağından $\beta_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$ bağıntısı elde edilir.

Örnek: : $A = \{0,1,2,3,4\}$ kümesi verilsin.

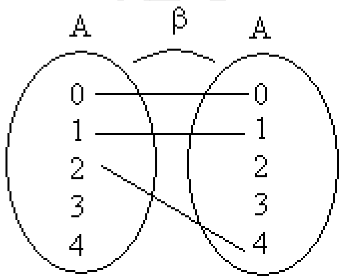
$$\beta = \{(x,y) \in A \times A : y = 2x\}$$

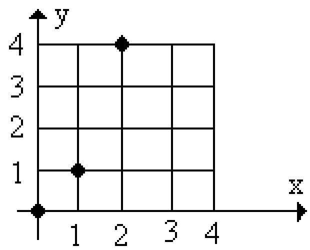
bağıntısını liste, Venn şeması ve kartezyen koordinat yöntemiyle gösteriniz.

Çözüm: A tek noktasını x ekseninde (apsiste) ve A tek nokta kümesini y ekseninde (ordinatta) alalım.

$$x = 0 \text{ için } y = 0 \in A$$
$$x = 1 \text{ için } y = 2 \in A$$
$$x = 2 \text{ için } y = 4 \in A$$
$$x = 3 \text{ için } y = 6 \notin A$$
$$x = 4 \text{ için } y = 8 \notin A$$

olacağından $\beta = \{(0,0),(1,1),(2,4)\}$ bağıntısı elde edilir. Şimdi bu bağıntıyı Venn Şeması ve kartezyen koordinat yöntemiyle gösterelim.





4.1. Teorem: A ve B boştan farklı birer küme, $s(A) = m, s(B) = n$ olsun. A'dan B'ye ($A \times B$ de) tanımlı bağıntı sayısı $2^{m \cdot n}$ tanedir.

İspat: $s(A) = m, s(B) = n$ ise $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = m \cdot n$ olduğunu kartezyen çarpımdan biliyoruz. Alt küme sayısına 2.4. Teorem göre,

$$2^{s(A \times B)} = 2^{m \cdot n}$$

olduğu görülür.

Örnek: $s(A)=5, s(B)=4$ elemanlı bir kümeleri üzerinde tanımlanacak bağıntı sayısı,

$$2^{s(A\times B)}=2^{5\cdot 4}=2^{20}$$

tanedir.

Örnek: $s(A)=3$ ve A'dan B'ye 8^9 tane bağıntı yazılabiliyor ise B kümesi kaç elemanlıdır?

Çözüm: $2^{s(A\times B)}=8^9$

$2^{3s(B)}=2^{27}$

$s(B)=9$

Örnek: $A=\{a,b,c\}$, $B=\{0,1\}$ kümeleri verilsin. Buna göre A'dan B'ye tanımlı

a) Bağıntı sayısı,
b) 3 elemanlı bağıntı sayısı,
c) 3 elemanlı olmayan bağıntı sayısı,
d) En çok 2 elemanlı bağıntı sayısı,
e) En az 5 elemanlı bağıntı sayısı,
f) İçinde (a, 0) bulunan 3 elemanlı bağıntı sayısı,
g) İçinde (c, 1) bulunmayan bağıntı sayısı

kaç tanedir?

Çözüm: a) $s(A)=3, s(B)=2$ olduğundan $2^{s(A\times B)}=2^{3\cdot 2}=64$ tanedir.

b) $s(A\times B)=3\cdot 2=6$ elemanlı olduğu için, bu 6 elemanlı $A\times B$ kümesinin 3 elemanlı alt kümeleri sayısı 3 elemanlı bağıntı sayısını verir. Buna göre

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=20$$

tanedir.

c) Tüm bağıntı sayısından, 3 elemanlılar çıkarılırsa 3 elemanlı olmayanlar kalır.

$$64-20=44$$

tanedir.

d) En çok 2 elemanlı demek; 2 elemanlı, bir elemanlı ya da boş bağıntı demektir.

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}=1+6+\frac{6!}{2!4!}=22$$

tanedir. Burada boş bağıntı sayısı 1'dir. Çünkü $\emptyset \subset A \times B$ dir.

e) En az 5 elemanlı bağıntı sayısı, 5 ya da 6 elemanlı bağıntı sayılarının toplamı kadardır.

$$\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=6+1=7$$

tanedir.

f) (a,0) daima olacağına göre geriye kalan 5 elemanlı kümenin 2 elemanlı alt kümeleri sayısını bulmak gerekir.

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10$$

tanedir.

g) (c,1) olmayacağına göre kalan 5 elemanın alt kümeleri sayısı kadardır.

$$2^5=32$$

tanedir.

BAĞINTININ KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİNE UYGULAMASI

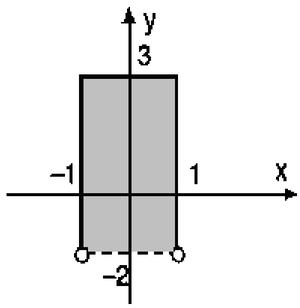
Bağıntı kartezyen çarpımda olduğu gibi sadece tek nokta kümelerinden değil, sonlu veya sonsuz aralıklardaki reel sayılardan da oluşur.

Örnek: $\beta=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : |x|\leq 1, -2<y\leq 3\}$ bağıntısının grafiğini çiziniz.

Çözüm: x sayılarını x ekseninde (apsiste) ve y sayılarını y ekseninde (ordinatta) alalım. (Bundan sonraki bütün konularda bu şekilde olacağından daha tekrar edilmeyecektir.)

$$|x|\leq 1 \text{ ise } -\leq x\leq 1, -2<y\leq 3$$

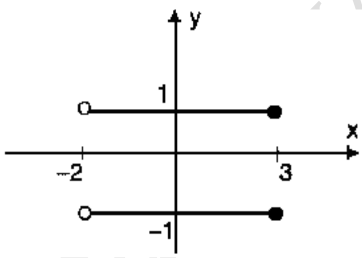
aralığını kartezyen çarpım yapılırsa,



grafiği elde edilir.

Örnek: $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\ -2 < x \leq 3, |y| = 1\}$ bağıntısının grafiğini çiziniz.

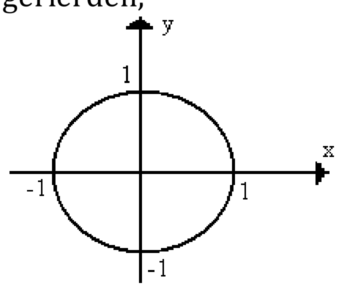
Çözüm: $|y| = 1$ ise $y = 1, y = -1, -2 < x \leq 3$ aralığını kartezyen çarpım yapılırsa,



grafiği elde edilir.

Örnek: $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\ x^2 + y^2 = 1\}$ bağıntısının grafiğini çiziniz.

Çözüm: x'e -1 ile $+1$ aralığında verilen değer y' de -1 ile $+1$ arasında sayı elde edilecektir. Bu değerlerden,



grafiği elde edilir.

Örnek: $\mathbb{R}$ kümesinde,

$$\beta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$$
$$\beta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y - 1 \geq 0\}$$

ile tanımlı β_1 ve β_2 bağıntıları veriliyor:

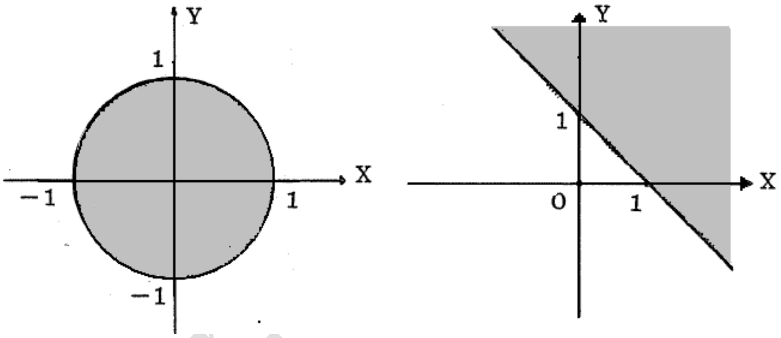
a) β_1, β_2 bağıntılarının grafiklerini çiziniz.

b) $\beta_1 \cap \beta_2$ ve $\beta_1 \cup \beta_2$ bağıntılarının grafiklerini çiziniz.

c) $\beta_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \beta_1$ ve $\beta_4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \beta_2$ şeklinde tanımlansınlar, buna göre β_3 ve β_4 bağıntılarının grafiklerini çiziniz.

Çözüm: a) x'e -1 ile $+1$ aralığında verilen değer y' de -1 ile $+1$ arasında sayı elde edilecektir. Bu veriler bir çember ve çemberin içini (daire) verir. Çemberin içi negatif bölgeyi gösterdiğine göre, β_1 bağıntısının grafiği, çemberin içi ile çember üzerindeki noktaların oluşturduğu kümedir. (Çemberin analitiği kavramında bu grafiğin ve benzeri grafiğin çizilimi geniş şekilde verilecektir.)

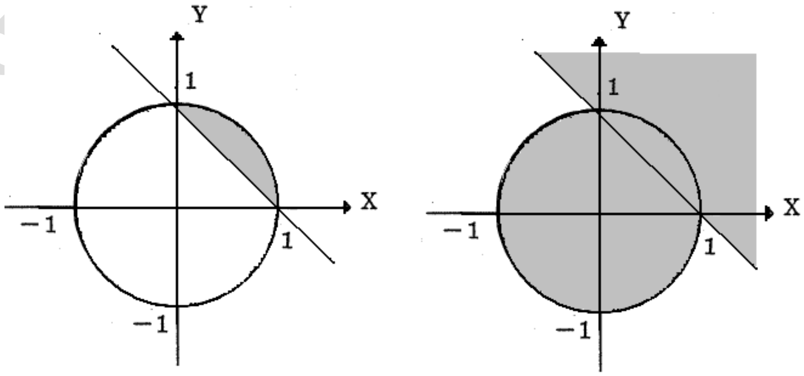
β_2 bağıntısının grafiği de, x'e ve y'ye verilen değerler $x + y - 1$ ifadesine göre, düzlemin pozitif bölgesindeki noktalar ile bu doğru üzerindeki noktaların oluşturduğu kümedir. (Doğrusal fonksiyon kavramında bu grafiğin ve benzeri grafiğin çizilimi geniş şekilde verilecektir.)



1. şekil β_1 in 2. şekil β_2 nin grafiğidir

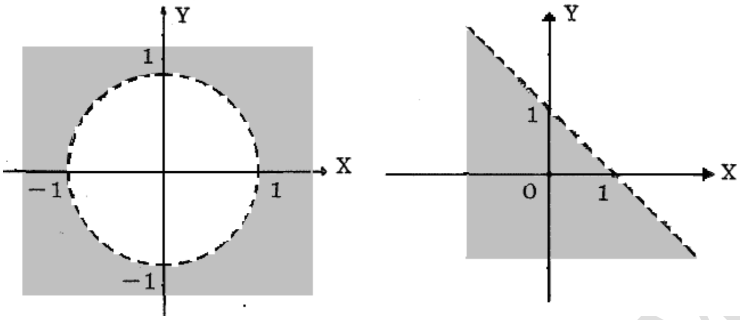
b) $\beta_1 \cap \beta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \{x^2 + y^2 - 1 \leq 0\} \cap \{x + y - 1 \geq 0\}\}$

$\beta_1 \cup \beta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \{x^2 + y^2 - 1 \leq 0\} \cup \{x + y - 1 \geq 0\}\}$



1. şekil $\beta_1 \cap \beta_2$ in 2. şekil $\beta_1 \cup \beta_2$ nin grafiğidir

c) $\beta_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \beta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 - 1 > 0\}$
$\beta_4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \beta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y - 1 < 0\}$
yazılır. Buna göre, bu bağıntıların grafikleri,



1. şekil β_3 in 2. şekil β_4 nin grafiğidir

4.1. Not: Bağıntıların nasıl ve ne şekilde şekil çizilecekleri fonksiyonların eşitsizlikleri, doğrusal fonksiyonlar, ikinci dereceden fonksiyonlar, analitik geometri v.s. konusunda anlatılacağından, şimdilik üzerinde durulmayıp o kısımlara havale edilmiştir.

BİR BAĞINTININ TERSİ

4.2. Tanım: A ve B boştan farklı iki küme ve A'dan B'ye bir β bağıntısı verilsin. β'nın sıralı ikilisinin elemanlarının yer değişmesinden oluşan yeni bağıntıya β'nın tersi denir ve β^{-1} ile gösterilir. Bu durum
$\beta \subset A \times B$ için $\beta = \{(x,y) : (x,y) \in A \times B\}$ ise
$\beta^{-1} \subset B \times A$ için $\beta = \{(y,x) : (y,x) \in B \times A\}$
biçimindedir.

Örnek: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre aşağıdaki bağıntıların terslerinin elemanlarını önce liste yöntemi ile yazınız, sonra denklemlerini bulunuz.
i) $\beta_1 = \{(x,y) \in A \times B : y = 2x - 1\}$
ii) $\beta_2 = \{(x,y) \in A \times B : y = x^2 + 1\}$

Çözüm: i) $\beta_1 = \{(1,1), (2,3), (3,5)\}$ ise $\beta_1^{-1} = \{(1,1), (3,2), (5,3)\}$
i) $\beta_2 = \{(0,1), (1,2), (2,5)\}$ ise $\beta_2^{-1} = \{(1,0), (2,1), (5,2)\}$

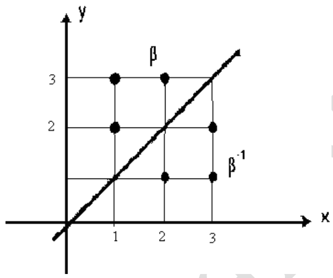
olarak bulunur. Şimdi bu bağıntıların denklemlerini bulalım. Denklemlerini bulabilmek için x ifadeleri yerine y, y ifadeleri yerine x yazılıp y ifadesi çekilmeye çalışılır.

i) $x = 2y - 1$ ise $y = \frac{x+1}{2}$ olup $\beta_1^{-1} = \left\{(x,y) \in A \times B : y = \frac{x+1}{2}\right\}$

ii) $x = y^2 + 1$ ise $y = \sqrt{x-1}$ olup $\beta_2^{-1} = \left\{(x,y) \in A \times B : y = \sqrt{x-1}\right\}$

Örnek: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesinde $\beta = \{(x,y) \,:\, x < y\}$ bağıntısı veriliyor. β ve β^{-1} ve bağıntısını liste yöntemi ile yazınız ve grafiğini çiziniz.

Çözüm: $\beta = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ ve $\beta^{-1} = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$



4.2. Not: β bağıntısı ile β^{-1} bağıntısını ikiye ayıran doğru $y = x$ doğrusu olur. Ayrıca grafik çizme ile ilgili bilgiler fonksiyonlar ve ilerleyen analizlerde detaylı izah edilecektir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinde tanımlı $\beta = \{(x,y): 2x + y = 9\}$ bağıntısı veriliyor. $\beta \cap \beta^{-1}$ bağıntısını bulunuz.

Çözüm: 1. Yol:

$\beta = \{(x,y): 2x + y = 9\}$ ve $\beta^{-1} = \{(x,y): x + 2y = 9\}$

bağıntıları denklemi,

$$2x + y = 9 \text{ ve } x + 2y = 9$$

bu iki denklem çözülürse $x = 3, y = 3$ olacağından $\beta \cap \beta^{-1} = \{(3,3)\}$ olarak bulunur.

2. yol: β bağıntısı ile β^{-1} bağıntısı $y = x$ doğrusu ile simetri olduklarından verilen denklemde $y = x$ denklem yazılırsa,

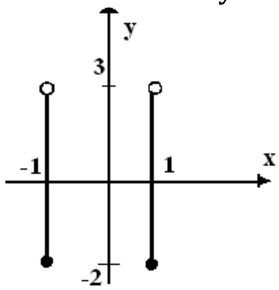
$$2x + y = 9 \text{ ve } x + 2y = 9$$

$$x = 3, y = 3$$

O halde $\beta \cap \beta^{-1} = \{(3,3)\}$ olarak bulunur.

Örnek: Yukarıda verilen $\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -2 < x \leq 3, |y| = 1\}$ bağıntısının tersini bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Çözüm: $\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -2 < x \leq 3, |y| = 1\}$
$\beta^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -2 < y \leq 3, |x| = 1\}$



İKİ BAĞINTININ BİLEŞKESİ

4.3. Tanım: A, B ve C boştan farklı üç küme A'dan B'ye

$$\beta_1 = \{(x,y) : (x,y) \in A \times B\}$$

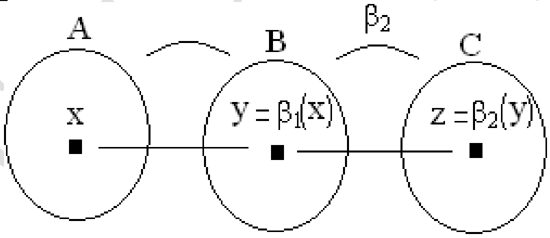
bağıntısı ve B'den C'ye

$$\beta_2 = \{(y,z) : (y,z) \in B \times C\}$$

bağıntısı verilsin. Bu takdirde,

$$\beta_1 \circ \beta_2 = \{(x,z) : (x,z) \in A \times C\}$$

bağıntısına β_1 ile β_2 nin bileşkesi denir ve " $\circ$ " simgesi ile gösterilir. Bu durum,



Venn şeması ile gösterilir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{5, 6, 9\}$ kümeleri ile A'dan B'ye
$\beta_1 = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$ ve $\beta_2 = \{(2,6), (2,9), (4,5), (5,5\}$
$\beta_1 \circ \beta_2 = \{(1,6) : (1,9), (2,5)\}$

BAĞINTININ ÖZELLİKLERİ

1. Yansıma Özelliği

4.4. Tanım: β, A'da tanımlı bir bağıntı olsun. Her $x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ ise β'ya A'da yansıyan bir bağıntıdır denir.

Örnek: $A = \{a, b, c\}$ kümesi veriliyor. Aşağıdakilerden hangileri A'da yansıyan bağıntıdır?

i) $\beta_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$
ii) $\beta_2 = \{(a,a),(b,b),(b,c)\}$
iii) $\beta_3 = \{(a,a),(a,c),(c,c)\}$

Çözüm: i) Her $x \in A$ için $(x,x) \in \beta_1$ olduğundan β_1 yansıyan bir bağıntıdır.

ii) $c \in A$ için $(c,c) \notin \beta_2$ olduğundan β_2 yansıyan bir bağıntı değildir.

iii) $b \in A$ için $(b,b) \notin \beta_3$ olduğundan β_3 yansıyan bir bağıntı değildir.

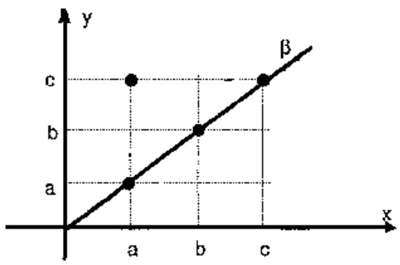
4.3. Not: A kümesinde tanımlı yansıyan bir bağıntı $y = x$ doğru üzerinde bulunan $A \times B$ bütün elemanlarını içerir. Bu durumda,

$$\beta \subset A \times B \text{ ve } \beta = \{(x,y):(x,y) \in A \times B\}$$

biçimindedir. Böyle bir bağıntının yansıyan olduğunu anlamak için y yerine x konur, çıkan sonuç A kümesinde daima doğruysa β yansıyandır. En az bir eleman için yanlış oluyorsa bağıntı yansıyan değildir.

Örnek: $A = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde tanımlı
$\beta = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$
yansıyan bir bağıntı olduğuna göre β bağıntısının grafiğini çiziniz.

Çözüm:



Örnek: $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ kümesinde $\beta = \{(x, y): x^2 = y^2\}$ bağıntısının yansıma özelliğini olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bağıntıda y yerine x yazalım.

$$x^2 = y^2 \text{ ise } x^2 = x^2$$

olur. Bu ifade daima doğru olduğundan β yansıyandır.

Örnek: $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x^2 > y\}$ bağıntısının yansıma özelliğini olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Bağıntıda y yerine x yazılınca $x^2 > x$ olur. Her $x \in (0,1)$ için $x^2 < x$ olduğundan yansıma özelliği yoktur.

4.2. Teorem: A kümesinin eleman sayısı $s(A) = n$ ise A'dan A'ya tanımlanan yansıyan bağıntıların sayısı 2^{n^2-n} tanedir.

İspat: A kümesinden A kümesine tanımlanan bağıntı sayısı 2^{n^2} olduğunu 4.1. teoremde gösterildi. A kümesi n elemanlı olduğundan A'dan A'ya yansımayan eleman bağıntı sayısı 2^n tanedir. Buna göre,

$$\frac{2^{n^2}}{2^n} = 2^{n^2-n}$$

biçimindedir.

Örnek: A kümesinde yazılabilecek tüm yansıyan bağıntıların sayısı 8^4 ise A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm: A kümesinin eleman sayısı $s(A) = n$ ise

$$2^{n^2-n} = 8^4$$
$$2^{n^2-n} = 2^{12}$$
$$n^2 - n = 12$$
$$(n-4)(n+3) = 0$$

olduğundan $n = 4$ dür.

Örnek: $\beta = \{(x, y) \in A \times A : y = \ x^3\}$ bağıntısı, yansıyan özellikli bir bağıntı olduğuna göre A kümesi üzerinde tanımlı, yansıyan kaç bağıntı ve yansımayan kaç bağıntı vardır?

Çözüm: Önce y yerine x yazalım.

$$x = x^3 \Leftrightarrow x^3 - x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

olur. Bu $A = \{-1, 0, 1\}$ noktalarında yansıma özelliği sağlandığını gösterir. Buna göre A kümesi üzerinde tanımlı, yansıyan bağıntı sayısı

$$2^{n^2-n} = 2^{3^2-3} = 64$$

tanedir. Toplam bağıntı sayısı ise

$$s(A \times A) = 3 \cdot 3 = 9 \text{ ise } 2^n = 2^9 = 512$$

tanedir. Yansımayan bağıntı sayısı ise

$$512 - 64 = 448$$

tanedir.

2. Simetri Özelliği

4.5. Tanım: β, A'da tanımlı bir bağıntı ve her $(x,y) \in \beta$ iken $(y,x) \in \beta$ ise β'ya A'da simetrik bağıntıdır denir.

Örnek: $A = \{a, b, c\}$ kümesi veriliyor. Aşağıdakilerden hangileri A'da simetrik bağıntıdır?

i) $\beta_1 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(c,a)\}$
ii) $\beta_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$
iii) $\beta_3 = \{(b,b),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$

Çözüm: i) $(c,a) \in \beta_1$ dir, fakat $(a,c) \in \beta_1$ olduğundan β_1 simetrik değildir.

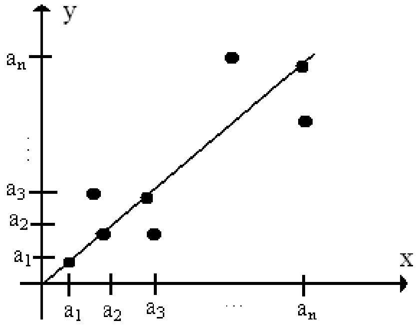
ii) Her $(x,y) \in \beta_2$ iken $(y,x) \in \beta_2$ olduğundan β_2 simetriktir.

iii) Her $(x,y) \in \beta_3$ iken $(y,x) \in \beta_3$ olduğundan β_3 simetriktir.

4.3. Teorem: β simetrik bir bağıntı ise $\beta = \beta^{-1}$ dir.

İspat: β simetrik bir bağıntı ise her $(x,y) \in \beta$ iken $(y,x) \in \beta$ dir. $(y,x) \in \beta$ ikilileri β^{-1} olduğunu gösterir.

4.4. Not: A'da simetrik bir β bağıntısının grafiğinde tüm elemanlar köşegene (y = x doğrusuna) göre simetriktir.



Örnek: $\mathbb{N} - \{0\}$ kümesi üzerinde tanımlı,

$$\beta = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$$

bağıntısının simetrik olduğunu gösterelim.

Çözüm: 4.3. teoremi sağlamak için x yerine y, y yerine x yazılır. Bu soruda x yerine y, y yerine x yazılırsa $\beta = \beta^{-1}$ olacağından β bağıntısı simetriktir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde tanımlı,

$$\beta = \{(x, y) : 3x + y = 6\}$$

bağıntısının simetrik olup–olmadığını gösterelim.

Çözüm: 4.3. teoremi sağlamak için x yerine y, y yerine x yazılırsa $3y + x = 6$ olacağından β bağıntısı simetrik değildir.

4.4. Teorem: A kümesinin eleman sayısı $s(A) = n$ ise A'dan A'ya tanımlanan simetrik bağıntıların sayısı $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ tanedir.

İspat: A kümesi üzerinde tanımlanan simetrik elemanlar sayısı,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

tanedir. Buna göre bu elemanların alt küme sayısı,

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$$

dir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinde yazılabilecek simetrik bağıntı sayısı kaç tanedir?

Çözüm: $s(A) = 5$ ve A'da yazılabilecek simetrik bağıntı sayısı,

$$2^{\frac{5^2+5}{2}} = 2^{15}$$

tanedir.

4.5. Teorem: A kümesinin eleman sayısı $s(A) = n$ ise A'dan A'ya tanımlanan yansıyan ve simetrik bağıntıların sayısı $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ tanedir.

İspat: A'da tanımlanan yansıyan bağıntıların sayısı 4.2. teoreme göre 2^{n^2-n} tanedir. A da tanımlanan simetrik bağıntıların sayısı 4.4. teoreme göre $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ tanedir. Şu halde, A da tanımlanan yansıyan ve simetrik bağıntıların sayısı

$$2^{n^2-n} \cdot 2^{\frac{n^2+n}{2}} = 2^{\frac{n^2-n}{2}}$$

tanedir.

3. Ters Simetri Özelliği

4.6. Tanım: β, A'da tanımlı bir bağıntı ve

i) Her $x \neq y$ ve $(x,y) \in \beta$ iken $(y,x) \notin \beta$

ii) Her $x = y$ iken $(x,y) \in \beta$

ise β'ya A'da ters simetrik bağıntıdır denir.

Örnek: $A = \{a, b, c\}$ kümesi veriliyor. Aşağıdakilerden hangileri A'da simetrik bağıntıdır?

i) $\beta_1 = \{(a,b),(a,c),(b,c)\}$

ii) $\beta_2 = \{(a,b),(b,b),(b,c),(c,b)\}$

iii) $\beta_3 = \{(a,b),(a,c),(b,b),(c,c)\}$

Çözüm: i) Her $(x,y) \in \beta_1$ iken $(y,x) \notin \beta_1$ olduğundan β_1 simetriktir.

ii) $(b,c) \in \beta_2$ ve $(c,b) \in \beta_2$ olduğundan β_2 ters simetrik değildir.

iii) Her $(x,y) \in \beta_3$ iken $(y,x) \notin \beta_3$ olduğundan ve her $x = y$ iken $(x,y) \in \beta_3$ simetriktir.

4.5. Not: Simetrik olmayan bir bağıntının ters simetrik, ters simetrik olmayan bir bağıntının da simetrik olması gerekmez.

Örnek: $A = \{a, b, c\}$ kümesinde $\beta = \{(a, b), (a, c), (c, a), (c, c)\}$ bağıntısı
i) $(a, b) \in \beta$ fakat $(b, a) \notin \beta$ olduğundan β simetrik değildir.
ii) $(a, c) \in \beta$ ve $(c, a) \in \beta$ olduğundan β ters simetrik değildir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde tanımlı,

$$\beta = \{(x, y) : 3x + y = 6\}$$

bağıntısının ters simetrik olup–olmadığını gösterelim.

Çözüm: Ters simetrik içim $\beta \neq \beta^{-1}$ sağlaması gerekir. Bunun için x yerine y, y yerine x yazılırsa $x \neq y$ oluyorsa ters simetrik olur. Şu halde $3x + y = 6$ bağıntısında x yerine y, y yerine x yazılırsa $3y + x = 6$ olacağından $x \neq y$ olur. Bu durumda β bağıntısı ters simetriktir.

4.6. Teorem: A kümesinin eleman sayısı $s(A) = n$ ise A'dan A'ya tanımlanan hem simetrik hem ters simetrik olan bağıntıların sayısı 2^n tanedir.

İspat: Hem simetrik hem de ters simetrik bağıntıların sayısı tüm durumların sayısıdır. Tüm durumların sayısı n elemanlı bir kümenin tüm alt küme sayısı olan 2^n e eşittir.

4.7. Teorem: A kümesinin eleman sayısı $s(A) = n$ ise A'dan A'ya tanımlanan ters simetrik olmayan bağıntıların sayısı $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ tanedir.

İspat: n elemanlı bir kümenin ters simetrik olmayanların sayısı simetrik olanların sayına eşittir. Buna göre ters simetrik olmayan bağıntıların sayısı $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ tanedir.

4.8. Teorem: A kümesinin eleman sayısı $s(A) = n$ ise A'dan A'ya tanımlanan ters simetrik bağıntıların sayısı $2^{\frac{n^2+n+2}{2}} - 2^n$ tanedir.

İspat: 4.6. Teorem ve 4.7. Teorem gereği,

$$2 \cdot 2^{\frac{n^2+n}{2}} - 2^n = 2^{\frac{n^2+n+2}{2}} - 2^n$$

olduğu gözükür.

4. Geçişme Özelliği

4.7. Tanım: β, A'da tanımlı bir bağıntı her $(x,z),(y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ ise, β'ya A'da geçişken bir bağıntı denir.

Örnek: $A = \{a,b,c,d\}$ kümesi veriliyor. Aşağıdakilerden hangileri A'da geçişkendir?

i) $\beta_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$
ii) $\beta_2 = \{(a,a),(a,b),(b,c)\}$
iii) $\beta_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c)(c,a),(c,b)\}$

Çözüm: i) Her $(x,z),(y,z) \in \beta_1$ iken $(x,z) \in \beta_1$ olduğundan β_1 geçişkendir.

ii) $(a,b),(b,c) \in \beta_2$ fakat $(a,c) \notin \beta_2$ olduğundan β_2 geçişken değildir.

ii) Her $(x,z),(y,z) \in \beta_3$ iken $(x,z) \in \beta_3$ olduğundan β_3 geçişkendir.

Örnek: $\beta \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $\beta = \{(x,y) : x - y = k, k \in \mathbb{Z}\}$ bağıntısının geçişken olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: $\beta \subset A \times A$ ve $\beta = \{(x,y) : (x,y) \in A \times A\}$ bağıntısının geçişken olup olmadığını anlamak için bir başka yöntem bağıntıda x yerine y, y yerine z yazılarak elde edilen bağıntı, verilen bağıntıya ortak çözülür ve $(x,z) \in \beta$ olduğu gösterilirse bu bağıntı geçişkendir. Buna göre, bu soruda x yerine y, y yerine z yazılarsak

$$x - y = m, (m \in \mathbb{Z})$$
$$y - z = n, (n \in \mathbb{Z})$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$x - z = m + n, (m,n \in \mathbb{Z})$$

olduğundan bu bağıntı geçişkendir.

Örnek: Doğal sayılar kümesinde tanımlı $\beta = \{(x,y) : 3x + 4y = 30\}$ bağıntısı, bağıntının kaç özelliği sağlar?

Çözüm: $3x + 4y = 30$ ise $x = \frac{30-4y}{3} = 10 - \frac{4}{3}y$
$y = 0$ ise $x = 10$ olduğundan $(10,0) \in \beta$
$y = 3$ ise $x = 6$ olduğundan $(6,3) \in \beta$
$y = 6$ ise $x = 2$ olduğundan $(2,6) \in \beta$
dir. Bu değerlere göre,
$$\beta = \{(2,6),(6,3),(10,3)\}$$
olur. $(2,6) \in \beta$, $(6,3) \in \beta$ fakat $(2,3) \in \beta$ olduğundan β geçişken değildir.

Örnek: $\beta \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $\beta = \{(x,y) : x \text{ böler } y \text{ ve } x,y \in \mathbb{Z}\}$ bağıntısının yansıma, simetri, ters simetri ve geçişken olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: i) $0 \in \mathbb{Z}$ fakat $\frac{0}{0}$ tanımsız olduğundan $(0,0) \notin \beta$ dır ve β yansıyan bir bağıntı değildir.

ii) $(1,4) \in \beta$ fakat $\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan $(4,1) \notin \beta$ dır, öyleyse β simetrik değildir.

iii) $(a,b) \in \beta$ olsun. $b = k \cdot a$, $y \in \mathbb{Z}$ dir. Fakat $k \neq 1$ için $a \neq b$ ve $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$ dir. O halde $(b,a) \notin \beta$ dir. β ters simetrik bağıntıdır.

iv) $(a,b),(b,c) \in \beta$ olsun.
$(a,b) \in \beta \Rightarrow b = k_1 \cdot a,\ k_1 \in \mathbb{Z}$
$(b,c) \in \beta \Rightarrow c = k_2 \cdot b,\ k_2 \in \mathbb{Z}$
olduğundan
$c = k_2 \cdot b = k_2 \cdot k_1 \cdot a, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ yani $(a,c) \in \beta$
dır. β geçişken bağıntıdır.

DENKLİK BAĞINTISI ve DENKLİK SINIFLARI

4.8. Tanım: Bir A kümesinde tanımlı β bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa, β bağıntısına denklik bağıntısı denir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı
$\beta = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3)(3,1),(3,2)\}$
bağıntısı denklik bağıntısı mıdır?

Çözüm: i) Her $x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ olduğundan β yansıyandır.

ii) Her $(x,y) \in \beta$ iken $(y,x) \in \beta$ olduğundan β simetriktir.

iii) Her $(x,y),(y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ ise, β ya A da geçişkendir.

β'ya A'da yansıyan, simetrik ve geçişken olduğundan β denklik bağıntısıdır.

Örnek: $A = \{1, 2, 3,4\}$ kümesinde tanımlı
$\beta = \{(x,y) : 3 \text{ böler } (x - y) \text{ ve } x,y \in A\}$
bağıntısı denklik bağıntısıdır.

Çözüm: Verilen bağıntıyı önce liste yöntemi şeklinde,
$\beta = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(0,3),(3,0),(1,4)(4,1)\}$
yazılabilir. Buna göre yansıyan, simetrik ve geçişken olduğu görülmektedir. Şu halde β denklik bağıntısıdır.

Örnek: Rasyonel sayılarda eşitlik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Çözüm: i) Her $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ olduğundan rasyonel sayılarda eşitlik bağıntısı yansıyan bir bağıntıdır.

ii) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ ve $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ olduğundan rasyonel sayılarda eşitlik bağıntısı simetrik bir bağındır.

iii) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ve $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ olsun. Bu takdirde,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ise } a \cdot d = b \cdot c$$
$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f} \text{ ise } c \cdot f = d \cdot e$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$a \cdot d \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot d \cdot e$$
$$a \cdot f = b \cdot e$$

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

olduğundan rasyonel sayılarda eşitlik bağıntısı geçişken bir bağıntıdır.

Rasyonel sayılarda eşitlik bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından denklik bağıntısıdır.

4.9. Tanım: β denklik bağıntısı olmak üzere, birinci bileşeni x olan ikililerin ikinci bileşenlerinin oluşturduğu kümeye x in denklik sınıfı denir ve $\bar{x}$ ile gösterilir. Denklik sınıflarının kümesi ise $\beta_{/x}$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\bar{x} = \{y : (x,y) \in \beta \text{ ve } x \in A\}$$
$$\beta_{/x} = \{\bar{x} : x \in A\}$$

olur.

Örnek: Yukarıda $A = \{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$\beta = \{(x,y) : 3 \text{ böler } (x-y) \text{ ve } x,y \in A\}$$

bağıntısı denklik bağıntısı olduğu gösterilmiştir. Bu bağıntı da 1 ve 2 sayılarının denklik sınıflarını bulalım.

Çözüm: Bağıntı

$$\beta = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(0,3),(3,0),(1,4)(4,1)\}$$

olduğuna göre,

$$\bar{1} = \{1,4\}, \bar{2} = \{2\}$$

denklik sınıfları yazılabilir.

Örnek: $\mathbb{Z}_{/5} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ kalanlar sınıfı denklik bağıntısıdır.

Çözüm: Bir tamsayı 5 ile bölündüğünde kalanların kümesi $\{0,1,2,3,4\}$ olduğunu biliyoruz. Bir tamsayı 5 ile bölündüğünde 0 kalanını veren $\bar{0}$ denklik sınıfını verir ki,

$$\bar{0} = \{\cdots,-15,-10,-5,0,5,10,15,\cdots\}$$

biçimindedir. Benzer şekilde,

$$\bar{1} = \{\cdots,-14,-9,-4,1,6,11,16,\cdots\}$$
$$\bar{2} = \{\cdots,-13,-8,-3,2,7,12,17,\cdots\}$$
$$\bar{3} = \{\cdots,-12,-7,-2,3,8,13,18,\cdots\}$$
$$\bar{4} = \{\cdots,-11,-6,-1,4,9,14,19,\cdots\}$$

bulunur.

Örnek: Yukarıda rasyonel sayılarda eşitlik bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğu gösterilmiştir. Bu denklik bağıntısı rasyonel sayıları denklik sınıflarına ayırıp ayırmadığını bulunuz.

Çözüm: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $k \neq 0$ için $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$
olduğundan $\overline{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a \cdot k}{b \cdot k}\right)$ dir.

Örnek: $\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^3 - 4x = y^3 - 4y\}$ denklik bağıntısında 2 nin denklik sınıfını bulunuz.

Çözüm: $(x,y) \in \beta$ olsun. Bu takdirde

$$x^3 - 4x = 2^3 - 4 \cdot 2$$
$$x(x^2 - 2^2) = 0$$
$$x(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 0, x = 2, x = -2$$

dir. Şu halde $\overline{2} = \{-2, 0, 2\}$ olarak bulunur.

Örnek: $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlı,

$$\beta = \{(x,y) : |x| - x = |y| - y\}$$

bağıntısı denklik bağıntısında 0'ın denklik sınıfını bulunuz.

Çözüm: $(x,0) \in \beta$ olsun. Bu takdirde

$$|x| - x = |0| - 0 \text{ ise } x = |x|$$

ise x in alabileceği değerler; 0, 1, 2, 3 tür. O halde $\overline{0} = \{0, 1, 2, 3\}$ olarak bulunur.

4.1. Sonuç: β, A'da tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. Her $x \in A$ için $(x,x) \in A$ olduğundan $x \in \overline{x}$ dir. Her denklik sınıfının en az bir elemanı vardır. Denklik sınıfları boş küme olamaz.

4.9. tanımdan sonraki örneklerde gösterildi.

4.2. Sonuç: β, A'da tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. $(x,y) \notin \beta$ ise, $x \neq y$ ve $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$ dir.

4.9. tanımdan sonraki $\mathbb{Z}_{/5}$ örneğine göre $\overline{1} \cap \overline{2} = \emptyset$ dir.

4.3. Sonuç: β, A'da tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. β'nın A'dan ayırdığı denklik sınıflarının birleşimi A kümesine eşittir.

4.9. tanımdan sonraki $\mathbb{Z}_{/5}$ örneğine göre $A = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3} \cup \bar{4}$ dir.

SIRALAMA BAĞINTISI

4.10. Tanım: Bir A kümesinde tanımlı β bağıntısının yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa, β bağıntısına sıralama bağıntısı denir.

Örnek: $A = \{0, 2, 4, 6\}$ kümesinde tanımlı $\beta = \{(x, y) : x \leq y\}$ bağıntısını sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Verilen bağıntıyı önce liste yöntemi şeklinde,
$\beta = \{(0,0), (2,2), (4,4), (0,2), (0,4), (0,6), (2,4), (2,6)(4,6)\}$
yazılabilir. Buna göre

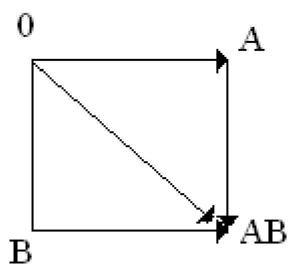
i) Her $x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ olduğundan β yansıyandır.

ii) Her $(x,y) \in \beta$ iken $(y,x) \notin \beta$ olduğundan β ters simetriktir.

iii) Her $(x,y), (y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ ise, β'ya A'da geçişkendir.

β'ya A'da yansıyan, ters simetrik ve geçişken olduğundan β sıralama bağıntısıdır.

Örnek: $A = \{0, A, B, AB\}$ kümelerinden oluşan kan gruplarının diğer kan gruplarına kan verme yetkisini,



şeklinde gösterilir. Buna göre 0 kan grubu A, B, AB ye, A ve B kan grupları AB ye kan verebilir. Bu kan verme işlemini ile gösterelim. Tanımlanan bu β bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Çözüm: Verilen bağıntıyı önce liste yöntemi şeklinde,
$\beta = \{(0,0),(A,A),(B,B),(AB,AB),(0,A),(0,B),(0,AB),(A,AB)(B,AB)\}$
yazılabilir. Buna göre yansıma, ters simetri ve geçişken olduğundan β sıralama bağıntısıdır. (Yansıma, ters simetri ve geçişken özelliklerinin gösterimi okuyucuya bırakılmıştır.)

Örnek: $A = \{m,n,r\}$ kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi olan $P(A)$ kuvvet kümesinde,
$$\beta = \{(E,F): E \subset F, F \in P(A)\}$$
biçiminde tanımlanan β bağıntısının sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Verilere göre kuvvet kümesi,
$P(A) = \{\{m\},\{n\},\{r\},\{m,n\},\{n,r\},\{r,m\},\{m,n,r\},\emptyset\}$
biçimindedir.

i) Her $E \in P(A)$ için $E \subset E$ olup $(E,E) \in \beta$ olduğundan β yansıyandır.

ii) $E \neq F$ ve $(E,F) \in \beta$ olsun. $E \subset F$ fakat $E \neq F$ olduğundan $F \not\subset E$ dir. Öyleyse $(E,F) \in \beta$ dir. β ters simetriktir.

iii) Her $(E,F),(F,G) \in \beta$ için $E \subset F$ ve $F \subset G$ olduğundan $E \subset G$ dır. Buna göre $(E,G) \in \beta$ dir. Şu halde β geçişkendir.

β yansıma, ters simetri ve geçişken olduğundan β sıralama bağıntısıdır.

4.9. Teorem: β, A kümesinde tanımlı bir sıralama bağıntısı ve $s(A) = n$ olsun. Bu takdirde β bağıntısının en fazla $\frac{n(n-1)}{2}$ elemanı vardır.

Çözüm: n elemanlı bir kümenin arasında yazılabilecek bağıntı sayısı elemanların sayısının toplamı kadar olacaktır. Şu halde sıralama bağıntısı olan β bağıntısının en fazla $\frac{n(n-1)}{2}$ elemanı olur.

4.11. Tanım: β, A kümesinde tanımlı bir sıralama bağıntısı olsun.
Her $x,y \in A$ için $(x,y) \in \beta$ veya $(y,x) \notin \beta$
ise β ya tam sıralı bağıntısı denir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlı $\beta = \{(x, y): x - y \leq 0, x, y \in A\}$ bağıntısının tam sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Verilen bağıntıyı önce liste yöntemi şeklinde,
$\beta = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4)(3,4)\}$
yazılabilir. Buna göre β yansıma, ters simetri ve geçişken olduğundan β sıralama bağıntısıdır.

A kümesinin her elemanı ikişer ikişer birbirine bağlanmıştır. Buna göre β bağıntısı tam sıralama bağıntısıdır.

Örnek: 4.10. tanımdan sonra verilen ilk örnek tam sıralı bağıntısıdır.

4.12. Tanım: β, A kümesinde tanımlı bir sıralama bağıntısı olsun.
Bazı $x, y \in A$ için $(x,y) \notin \beta$ veya $(y,x) \notin \beta$
ise β bağıntısına kısmi (parçalı) sıralı bağıntısı denir.

Örnek: $A = \{3, 4,5\}$ kümesinde tanımlı $\beta = \{(3,3), (4,4), (5,5), (3, 4)\}$ bağıntısının kısmi sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Verilen bağıntıyı yansıma, ters simetri ve geçişken olduğundan β sıralama bağıntısıdır. Ama $4, 5 \in A$ için $(4,5) \notin \beta$ veya $(5,4) \notin \beta$ olduğundan 4 ve 5 birbirine bağlanmamıştır. Bu nedenle β bağıntısı kısmi sıralama bağıntısıdır.

Örnek: 4.10. tanımdan sonra verilen ikinci örnek kısmi (parçalı) sıralı bağıntıdır. Çünkü $\{m\}, \{n\} \in P(A)$ fakat $\{m\} \not\subset \{n\}$ ve $\{n\} \not\subset \{m\}$ olduğundan $(\{m\}, \{n\}) \notin \beta$ ve $(\{n\}, \{m\}) \notin \beta$ dir. O halde β kısmi sıralama bağıntısıdır.

KISMİ, TOPLAM, İYİ SIRALAMALAR

4.13. Tanım: Bir S kümesi üzerindeki $\leq$ (küçük eşit) ikili bağıntısı,
i) $\forall\, s \in S, s \leq s$ (yansıma)
ii) $\forall\, s, t \in S, (s \leq t) \wedge (t \leq s) \Rightarrow s = t$ (ters simetri)
iii) $\forall\, s, t, u \in S, (s \leq t) \wedge (t \leq u) \Rightarrow s \leq u$ (geçisme)

olacağından bu bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı denir. Kısmi sıralama bağıntısı $\leq$ ile birlikte S kümesine kısmi sıralı küme denir. $(S, \leq)$ ile gösterilir.

4.14. Tanım: $(S, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun.
1) $\forall\, s \in S$ için $s \leq m$ ise $m \in S$ ye maksimal eleman denir.
2) $U \subset S$ alt küme olsun. $\forall\, u \in U$ için $u \leq s$ mevcut ise $s \in S$ ye, U kümesinin üst sınırı denir.

4.15. Tanım: $(S, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. $U \subset S$ alt küme olsun. Tüm $u, v \in U$ için ya $u \leq v$ ya da $v \leq u$ ise U alt kümesine bir zincir denir. Kısmi sıralı kümesi bir zincir ise bu kısmi sıralı kümeye toplam sıralı küme denir.

4.16. Tanım: U, S'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $(S, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. U'nun bir ilk elemanı varsa, kısmi sıralı küme iyi sıralıdır denir.

Örnek: Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, $\leq$ sıralı bağıntısına göre bir toplam sıralı kümedir.
$(\mathbb{N}, \leq)$ iyi sıralı küme iken $(\mathbb{Z}, \leq)$ ve $(\mathbb{R}, \leq)$ iyi sıralı küme değildir.

Örnek: Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ üzerinde kısmi sıralama bağıntısı $\leq$ olsun. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sözlük sıralama bağıntısına göre iyi sıralıdır.

4.10. Teorem (Zorn's Lemma): $(S, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. S'deki her zincirde üst sınır varsa, S'de maksimal eleman vardır.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Bağıntının Tanımı

1. β, A kümesinden B kümesine tanımlı bir bağıntı ise, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $\beta \in A \times B$ B) $\beta \subset A \times B$ C) $\beta \subset B \times A$
D) $A \times B \subset \beta$ E) $B \times A \subset \beta$

Çözüm: Bağıntının tanımından $\beta \subset A \times B$ olduğu görülür.

Cevap: B

2. $A = \{a, b\}, B = \{c, d\}$ kümeleri üzerinde, aşağıdakilerden hangisi A'dan B'ye tanımlı bir bağıntıdır?

A) $\{(a, a)\}$ B) $\{(b, b)\}$ C) $\{(c, c)\}$ D) $\{(a, d)\}$ E) $\{(a, b)\}$

Çözüm: A'dan B'ye tanımlı bir bağıntıda 1. eleman A'dan 2. Eleman B'den seçilmelidir. Bu durumu $\{(a, d)\}$ kümesi sağlar.

Cevap: D

3. $\beta = \{(1,1), (2, 3), (3,1)\}$ ifadesi A kümesinden B kümesine tanımlı bir bağıntı olduğuna göre, $s(A)$ kaç elemanlıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $A = \{1, 2, 3\}$ olduğundan $s(A) = 3$ dür.

Cevap: C

4. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\beta(x, y) = 3x + 4y$ bağıntısı tanımlanmıştır. Buna göre, $\beta(4, 3) = \beta(m, 6)$ eşitliği sağlandığına göre m'nin değeri nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 6

Çözüm: $\beta(4, 3) = \beta(m, 6)$

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 3 \cdot m + 4 \cdot 6$$
$$m = 0$$

Cevap: A

5. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}$ kümeleri veriliyor. A'dan B'ye tanımlanan bağıntılardan kaç tanesinde $(1, b)$ elemanı bulunur, fakat $(3, c)$ elamanı bulunmaz?

A) 2^9 B) 2^{10} C) 2^{11} D) 2^{12} E) 2^{13}

Çözüm: $s(A\times B)=s(A)\cdot s(B)=3\cdot 4=12$ dir. 12 elemandan iki tanesi $(1,b)$ ve $(3,c)$ dir. Diğer 10 eleman ile 2^{10} farklı bağıntı (alt küme) yazılabilir. Bu bağıntıların her birinde $(1,b)$ bulunurken, $(3,c)$ bulunmaz.

Cevap: B

Bağıntı Sayısı

6. $A\times B$ kümesinin 256 tane alt kümesi vardır. Buna göre, A kümesinden B kümesine tanımlı kaç bağıntı vardır?

A) 8 B) 32 C) 64 D) 256 E) 512

Çözüm: $A\times B$ kümesinin alt küme sayısı ile A kümesinden B kümesine tanımlı bağıntı sayısı ikisi de aynı $2^{s(A\times B)}=2^{m\cdot n}$ formülüyle yapılır. Şu halde A kümesinden B kümesine 256 tane bağıntı tanımlanır.

Cevap: D

7. $s(B)\cdot[s(A)+1]=s(B)+7$ denklemine göre, A kümesinden B kümesine tanımlı kaç bağıntı vardır?

A) 7 B) 16 C) 32 D) 64 E) 128

Çözüm: $s(A)=m$ ve $s(A)=n$ olsun.

$$n\cdot[m+1]=n+6$$
$$m\cdot n=7$$

olur. A kümesinden B kümesine tanımlı bağıntı sayısı;

$$2^{s(A\times B)}=2^{m\cdot n}=2^7=128$$

tanedir.

Cevap: E

8. $s[(A\times B)\cap(B\times C)]=24$, B'nin eleman sayısı bağıntıyı sağlayan en büyük asal sayının değeri kadar olduğuna göre, $s(A\cap B)$ nin değeri nedir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $(A\times B)\cap(B\times C)=B\times(A\cap C)$ olduğundan

$$s[B\times(A\cap C)]=24$$

ve B'nin eleman sayısı en büyük asal sayı olduğundan $s[B]=3$ dür. Buna göre

$$s(A\cap B)=8$$

olur.

Cevap: E

9. $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}$ olduğuna göre, A kümesinden B kümesine tanımlı bağıntıların kaç tanesi iki elemanlıdır?

A) 28 B) 32 C) 36 D) 42 E) 48

Çözüm: $s(A\times B)=3\cdot 3=9$ dur. A kümesinden B kümesine tanımlı bağıntıların sayısı;

$$\binom{9}{2}=\frac{9!}{7!2!}=36$$

olur.

Cevap: C

10. $A=\{1,2,3\}$ olduğuna göre, A kümesinde tanımlı bağıntıların kaçında $(1,1)$ ikilisi bulunur?

A) 256 B) 128 C) 64 D) 32 E) 16

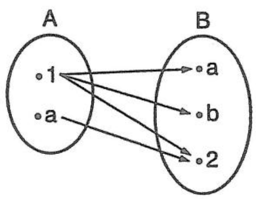
Çözüm: $s(A\times A)=3\cdot 3=9$ dur. $A\times A$ kümelerinde $(1,1)$ ikilisi zorunlu mevcutsa geriye $A\times A$ da 8 eleman kalır.

$$2^{s(A\times A)}=2^8=256$$

olur.

Bağıntının Gösterilişi

11. A kümesinden B kümesine tanımlı β bağıntısı aşağıdaki gibi şema yöntemiyle gösterilmiştir.



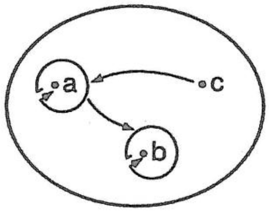
Buna göre, β bağıntısında kaç tane ikili vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\beta=\{(1,a),(1,b),(1,2),(a,2)\}$ olup 4 elemanlıdır.

Cevap: D

12. A kümesinde tanımlı α bağıntısı aşağıdaki gibi şema yöntemiyle gösterilmiştir.



Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $(a,a) \in \alpha$ B) $(b,b) \in \alpha$ C) $(b,a) \in \alpha$
D) $(a,b) \in \alpha$ E) $(c,a) \in \alpha$

Çözüm: $\alpha = \{(a,a),(b,b),(c,a),(a,b)\}$ olduğundan $(b,a) \notin \alpha$ dir.

Cevap: C

13. Doğal sayılar kümesinde tanımlı,

$$\beta = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = 5\}$$

bağıntısında kaç tane ikili vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $\beta = \{(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$ olup 5 elemanlıdır.

Cevap: A

14. $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4,5,6\}$ olmak üzere,

$$\beta = \{(x,y) \in A \times B : y = 2x\}$$

bağıntısında kaç tane ikili bağıntı vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $\beta = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$ olup 3 elemanlıdır.

Cevap: B

15. $\beta = \{(x,y) : ax + 2x = 16\}$ ve $(3,2) \in \beta$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $ax + 2x = 16$
$a \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16$
$a = 4$

Cevap: E

16. $\beta = \{(x, y) : y = x^2 + a\}$ ve $\beta(2) = 8 - a$ olduğuna göre, $\beta(a)$ kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $x = 2$ olduğunda $y = 8 - a$ olur.
$8 - a = 2^2 + a$
$a = 2$

Cevap: C

Bağıntının Tersi

17. $\beta = \{(1,3), (2,4)\}$ olduğuna göre β^{-1} aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(3,1), (4,2)\}$ B) $\{(3,1), (2,4)\}$ C) $\{(3,1), (4,4)\}$
D) $\{(1,3), (4,2)\}$ E) $\{(1,3), (2,2)\}$

Çözüm: $\beta = \{(1,3), (2,4)\}$ olduğuna göre $\beta^{-1} = \{(3,1), (4,2)\}$ dir.

Cevap: A

18. A kümesinden B kümesine tanımlı β bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur.

A) β^{-1} bağıntısı A'dan A'ya tanımlıdır.
B) β^{-1} bağıntısı B'den B'ye tanımlıdır.
C) $(a, a) \in \beta$ ise, $(b, b) \in \beta^{-1}$ dir.
D) $(a, b) \in \beta$ ise, $(b, a) \in \beta^{-1}$ dir.
E) $\beta(x) = y$ ise, $\beta^{-1}(x) = y$ dir.

Çözüm: $(a, b) \in \beta$ ise, $(b, a) \in \beta^{-1}$ dir. Diğer bilgiler yanlıştır.

Cevap: D

19. β tamsayılarda tanımlı bir bağıntı olmak üzere,

$$\beta = \{(x, y) : 2x + 3y = 6\}$$

olduğuna göre, β^{-1} aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\beta^{-1} = \{(x, y) : 2x - 3y = 6\}$
B) $\beta^{-1} = \{(x, y) : 3x + 2y = 6\}$
C) $\beta^{-1} = \{(x, y) : -2x + 3y = 6\}$
D) $\beta^{-1} = \{(x, y) : 2x + 3y = -6\}$
E) $\beta^{-1} = \{(x, y) : 2x - 3y = -6\}$

Çözüm: Bir bağıntının tersinin bulunması için x yerine y, y yerine x yazılarak bulunur.

$$\beta^{-1} = \{(x, y) : 3x + 2y = 6\}$$

Cevap: B

20. Tam sayılar kümesinde tanımlı β bağıntısı,

$$\beta = \{(x, y) : x + 2y = 12\}$$

olduğuna göre $\beta \cap \beta^{-1}$ kümesinin kaç elemanı vardır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: $\beta = \{(x, y) : x + 2y = 12\}$ ve $\beta^{-1} = \{(x, y) : 2x + y = 12\}$

$$x + 2y = 2x + y$$
$$x = y$$

olduğundan

$$x + 2y = 12$$
$$x + 2x = 12$$
$$x = y = 4$$

olur.

Cevap: E

Bağıntının Özellikleri

21. Aşağıdaki bağıntılardan hangisi,

$$A = \{0, 1, 2\}$$

kümesinde tanımlı simetrik bir bağıntıdır?

A) $\{(0,0), (0,1)\}$
B) $\{(0,0), (0,2), (2,0), (1,2)\}$
C) $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,2), (2,1)\}$

D) $\{(0,0),(2,2),(1,2),(2,1)\}$
E) $\{(0,1)\}$

Çözüm: $(0,0) \in \beta$
$(0,1) \in \beta$ iken $(1,0) \in \beta$
$(1,2) \in \beta$ iken $(2,1) \in \beta$

Cevap: C

22. Aşağıdaki bağıntılardan hangisi,
$A = \{1,2,3\}$
kümesinde tanımlı ters simetrik bir bağıntıdır?

A) $\{(1,2),(2,3),(3,2)\}$
B) $\{(1,1),(2,3),(3,1)\}$
C) $\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}$
D) $\{(1,2),(2,1),(2,2)\}$
E) $\{(1,3),(2,1),(1,2)\}$

Çözüm: $(1,1) \in \beta$
$(2,3) \in \beta$ ike $(3,2) \notin \beta$
$(3,1) \in \beta$ ike $(1,3) \notin \beta$

Cevap: B

23. Aşağıdaki bağıntılardan hangisi,
$A = \{x,y,z\}$
kümesinde tanımlı geçişken bir bağıntıdır?

A) $\{(x,y),(y,z)\}$
B) $\{(x,x),(x,z),(z,x)\}$
C) $\{(x,z),(z,y),(y,y)\}$
D) $\{(x,y),(y,x),(x,x),(y,y)\}$
E) $\{(z,z),(x,y),(z,x)\}$

Çözüm: $(x,y) \in \beta$ ve $(y,x) \in \beta$ iken $(x,x) \in \beta$
$(y,x) \in \beta$ ve $(x,y) \in \beta$ iken $(y,y) \in \beta$

Cevap: D

24. $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ için $\beta \subset A \times B$ ise $\beta = \{(x,y): x, y'\text{nin bölenidir}\}$ bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) Yansıyandır B) Simetriktir C) Ters simetriktir
C) Geçişkendir D) Sıralama bağıntısıdır

Çözüm: A) Yansıyan değildir. Çünkü sıfır, sıfırın böleni olmaz.

B) Simetrik değildir. Çünkü sıfır olmayan sayılar sıfırın bölenidir, ancak sıfır diğer sayıların böleni değildir.

C) Ters simetrik değildir. Çünkü -1, 1 in böleni, 1'de -1'in bölenidir.

D) Geçişkendir. Çünkü

x, y'nin böleni ise $y = kx$, $(k \in \mathbb{Z})$

y, z'nin böleni ise $z = py$, $(p \in \mathbb{Z})$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemden

$z = kpx$

olur ki, bu bize x'in z'ninde çarpanı olduğunu gösterir.

E) Sıralama bağıntısı değildir. Çünkü yansıma ve ters simetri özelliği yoktur.

Cevap: D

25. Aşağıdakilerden kaç tanesi simetriktir?

I. Doğrular arasında "dik olma" bağıntısı
II. Sayılar arasında büyük olma bağıntısı
III. Kümeler arasında alt küme olma bağıntısı
IV. Dikdörtgenin alan bağıntısı

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:
I. Hiçbir doğru kendisine dik olmayacağı için yansıyan değildir.
II. $a < a$ eşitsizliği olacağından yansıyan değildir.
III. Her küme kendisinin alt kümesi olması nedeniyle yansıyandır.
IV. Tüm kenarları aynı uzunlukta olan dikdörtgene kare denir. Kare yansıyandır.

Cevap: B

26. $\beta = \{(x,y) \in A \times A : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 8, x, y \in \mathbb{Z}\}$ bağıntısı yansıyan özelliğini sağladığına göre A kümesinin iki elemanlı kaç alt kümesi vardır?

A) 6 B) 9 C) 15 D) 18 E) 20

Çözüm: β yansıyan ise her $(x,y) \in \beta$ olmalıdır.

$$2 \leq x^2 + x^2 \leq 8$$
$$2 \leq 2x^2 \leq 8$$
$$1 \leq x^2 \leq 4$$

ise bu şartlara uyan küme $A = \{-2,-1,1,2\}$ dir. Bu 4 elemanlı kümenin 2 elemanlı alt kümeleri sayısı

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

dır.

Cevap: A

27. Aşağıdaki bağıntılardan hangisi $\mathbb{Z} - \{0\}$ da yansıyan değildir?

A) $\{(x,y) : \frac{x}{y} = 1\}$
B) $\{(x,y) : x \cdot y > 0\}$
C) $\{(x,y) : x + y = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$
D) $\{(x,y) : x \cdot y = \text{tam kare}\}$
E) $\{(x,y) : x^n + y^m = y^n + x^m\}$

Çözüm:
A) Sıfırdan farklı her sayının kendisine bölümü 1'dir. (Yansıyandır)

B) Her $(x,x) \in \beta$, $x \cdot x > 0$ dir. (Yansıyandır)

C) Her $(x,x) \in \beta$, $x + x = 2n + 1$ ifadesi doğru değildir.

D) Her $(x,x) \in \beta$, $x \cdot x = x^2 =$ tam karedir. (Yansıyandır)

E) Her $(x,x) \in \beta$, $x^n + x^m = x^n + x^m$ dir. (Yansıyandır)

Cevap: C

28. $\beta = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 5\}$ bağıntısında $x \neq y$ ise hangi ikilinin simetriği vardır?

A) $(0,5)$ B) $(1,-1)$ C) $(2,2)$ D) $(-1,-3)$ E) $(2,4)$

Çözüm: Bağıntı simetrik ise her $(x,y) \in \beta$ iken $(y,x) \in \beta$ dir.

$$x^2 + 4y^2 = 5 \text{ ve } y^2 + 4x^2 = 5$$

$$x^2 + 4y^2 = y^2 + 4x^2$$
$$3y^2 = 3x^2$$
$$x = \pm y$$

olur. $X \neq y$ olduğundan $x = -y$ olmasıyla mümkündür. Bu şartı sağlayan $(1,-1)$ noktalarıdır.

Cevap: B

29. Aşağıdaki bağıntılardan hangisi ters simetriktir?

A) $\{(x,y) \mid x - y = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$
B) $\{(x,y) \mid \frac{x}{y} > 0\}$
C) $\{(x,y) \mid \frac{x}{y} > 1\}$
D) $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 5, x, y \in \mathbb{Z}\}$
E) $\{(x,y) \mid x + y = \text{tam kare}\}$

Çözüm: A) $x - y = 2n$ çift sayıdır. Yine $y - x = -2n$ olup bu da çift sayıdır. (Simetriktir)

B) $\frac{x}{y} > 0$ ise $\frac{y}{x} > 0$ (Simetriktir)

C) $\frac{x}{y} > 1$ ise $\frac{y}{x} < 1$ (Eşitsizlik kavramını hatırlayalım) (ters simetriktir)

D) $x^2 + y^2 = 5$ ise $y^2 + x^2 = 5$ (Simetriktir)

E) $x + y =$ tam kare ise $y + x =$ tam kare (Simetriktir)

Cevap: C

30. $\beta = \{(x,y) : x^2 + y = y^2 + x\}$ bağıntısı denklik bağıntısıdır. Buna göre 0 (Sıfır) sayısının denklik kümesi nedir?

A) $\{-1, 0\}$ B) $\{-1, 1\}$ C) $\{1, 2\}$ D) $\{-1, 4\}$ E) $\{0, 1\}$

Çözüm:
$y = 0$ ise $x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$
$x = 0$ veya $x = 1$ olup $\bar{0} = \{0, 1\}$ dir.

Cevap: E

31. $\beta \subset A \times B$ bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) β yansıyan ise β^{-1} yansıyandır.
B) β simetrik ise β^{-1} simetriktir.
C) β ters simetrik ise β^{-1} ters simetriktir.
D) β geçişken ise β^{-1} geçişken değildir.
D) β sıralama bağıntısı ise β^{-1} sıralama bağıntısıdır.

Çözüm: her $(x,z),(y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ ise her $(x,z),(y,z) \in \beta^{-1}$ iken $(x,z) \in \beta^{-1}$ olacağından geçişkendir.

Cevap: D

32. Reel sayılar kümesinde $x \neq y$ için aşağıdaki bağıntıların hangisi ters simetriktir?

A) $\{(x,y) \mid 2x^2 + 3y^2 = 4\}$
B) $\{(x,y) \mid x^3 - y = y^3 - x\}$
C) $\{(x,y) \mid \frac{x}{y} > 0\}$
D) $\{(x,y) \mid |x| - |y| = 0\}$
E) $\{(x,y) \mid 4x + 5y = 8\}$

Çözüm:
A) $2x^2 + 3y^2 = 4$ ise $2y^2 + 3x^2 = 4$ olup $x = -y$ (ters simetriktir)
B) $x^3 - y = y^3 - x$ ise $y^3 - x = x^3 - y$ (simetriktir)
C) $\frac{x}{y} > 0$ ise $\frac{y}{x} > 0$ (simetriktir)
D) $|x| - |y| = 0$ ise $|y| - |x| = 0$ (simetriktir)
E) $4x + 5y = 8$ ise $4y + 5x = 8$ olup $x = y$ (simetriktir)

Cevap: A

33. $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\beta = \{(x,y) : |x| - x = |y| - y\}$ bağıntısında 2'nin denklik sınıfı nedir?

A) $\mathbb{R}^-$ B) $\{-2\}$ C) $\{-2, 2\}$ D) $\mathbb{R} - \{0\}$ E) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Çözüm: $\overline{2} = \{y : (0,y) \in \beta \text{ ve } y \in A\}$ olduğuna göre,

$$|x| - x = |y| - y \Rightarrow |2| - 2 = |y| - y$$
$$\Rightarrow 0 = |y| - y$$
$$\Rightarrow y = |y|$$

olacağından y'nin alacağı değerler $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dir. O halde, $\overline{2} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olarak bulunur.

Cevap: E

34. A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesinde tanımlı

$$\beta = \{(x, y) : 5 \text{ böler } x - y \text{ ve } x, y \in A\}$$

bağıntısı denklik bağıntısıdır. Buna göre, 1'in denklik sınıfını aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1, 6\}$ B) $\{1, 5\}$ C) $\{0, 5\}$ D) $\{0, 6\}$ E) $\{0, 1\}$

Çözüm: $\overline{1} = \{x : (1, x) \in \beta \text{ ve } x \in A\}$ ise $1 - x$ değeri 5 ile tam bölünmelidir. Buna göre, x'in alabileceği değerler, 1 ve 6'dır. O halde;

$$\overline{1} = \{1, 6\}$$

olur.

Cevap: A

35. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde

$$\beta = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,1), (2,3), (3,1)\}$$

bağıntısı için aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

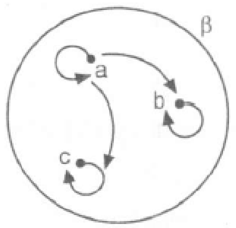
I. Yansıyandır
II. Simetriktir
III. Ters Simetriktir
IV. Geçişkendir
V. Denklik bağıntısıdır
VI. Sıralama bağıntıdır

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $(1,1), (2,2), (3,3)$ olduğundan, β yansıyandır. Simetrik değildir, çünkü $(2,1), (2,3), (3,1)$ noktalarının tersleri β'nın elemanı olmadığından ters simetriktir. Yine $(2,1), (2,3), (3,1)$ noktaları geçişme özelliğini sağlamaktadır. O halde β bağıntısı sıralama bağıntısı olup denklik bağıntısı değildir.

Cevap: D

36. $A = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde tanımlanan β bağıntısı şekildeki gibidir.



Buna göre β bağıntısının hangi özellikleri mevcuttur?

A) Yansıma – Simetri
B) Yansıma – Geçişme
C) Yansıma – Ters Simetri – Geçişme
D) Simetri – Geçişme
E) Ters Simetri – Geçişme

Çözüm: $\beta = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(a,b)\}$ dir. β bağıntısı; yansıyan, ters simetrik ve geçişkendir.

Cevap: C

37. $A = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde $\beta = \{(2,2),(2,3)\}$ bağıntısı veriliyor. Buna göre, β bağıntısına aşağıdakilerden hangisi eklenince bu bağıntı sıralama bağıntısı olur?

A) $\{(1,1),(1,3)\}$ B) $\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
C) $\{(1,1),(3,1)\}$ D) $\{(3,2),(1,1)\}$
E) $\{(3,3),(1,1)\}$

Çözüm: $\beta = \{(2,2),(2,3)\}$ bağıntısına $(3,3)$ ile $(1,1)$ eklenince yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlar. Dolayısıyla β bağıntısı sırlama bağıntısı olur.

Cevap: E

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.

4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Zühtü ÖZEL, Arif SABUNCUOĞLU, Soyut Matematik, 5. Baskı, 2020.
7. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
8. Doç. Dr. Mustafa Bayraktar, Atatürk Üniversitesi, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, 1988, ERZURUM.
9. Halil İbrahim KARAKAŞ, Başkent Üniversitesi, Soyut Cebir, 2010, ANKARA.
10. Prof. Dr. Said HALICIOĞLU, Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR, Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2018, ANKARA.
11. Prof. Dr. Şehmus YARDIMCI Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2018, ANKARA.