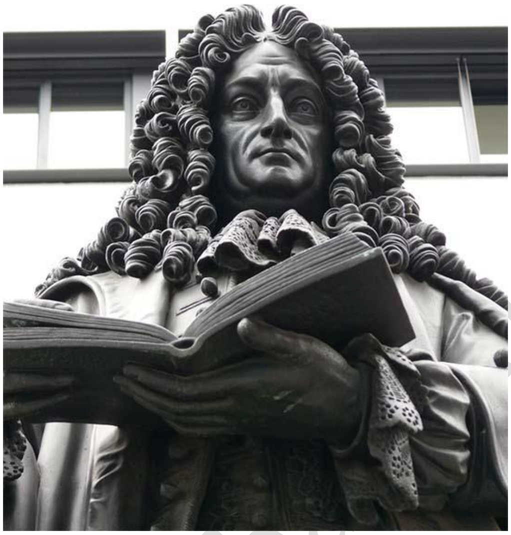
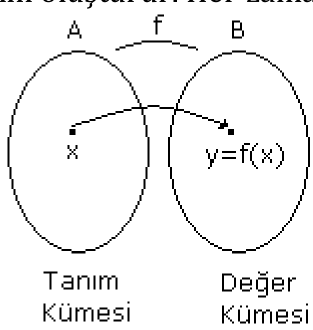
5. BÖLÜM
FONKSİYONLARA GİRİŞ



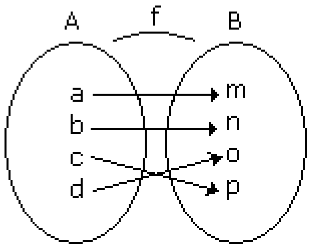
Gottfried Wilhelm Leibniz
(01 Temmuz 1646, Leipzig, Almanya - 14 Kasım 1716 Honnever, Almanya)

FONKSİYON KAVRAMI

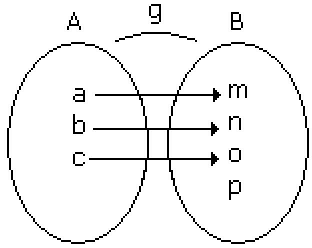
5.1. Tanım: $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olmak üzere, A'dan B'ye bir f bağıntısı verilmiş olsun. A'nın her elemanı B'nin elemanlarıyla bir ve yalnız bir kez eşleniyorsa bu bağıntıya fonksiyon denir. Her $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere, A'dan B'ye bir f fonksiyonu $f : A \to B$ ya da $A \xrightarrow{f} B$ ya da $x \to f(x) = y$ şeklinden biri ile gösterilir. Burada A kümesine tanım kümesi, B kümesine değer kümesi, değer kümesinde oluşan görüntülerin oluşturduğu kümeye görüntü kümesi denir. f(A) görüntü kümesini oluşturur. Her zaman $f(A) \subset B$ şeklindedir.



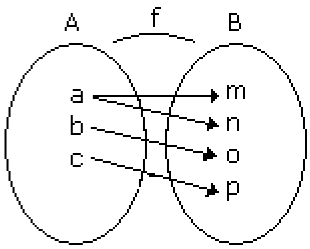
Örnek:



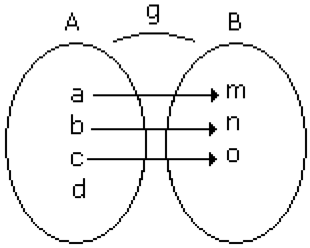
fonksiyondur



fonksiyondur



fonksiyon değildir



fonksiyon değildir

Venn şemalarında da görüldüğü gibi 1. ve 2. şemada A (tanım) kümesinin her elemanının B (değer) kümesinde bir ve yalnız bir görüntüsü olduğundan fonksiyonlardır. Ama 3. şemada a noktasının 2 görüntüsü, 4. şemada d noktasının görüntüsü olmadığından fonksiyon değillerdir.

Ayrıca

1. şemada $B = \{m, n, o, p\}$ kümesi değer kümesi olup $f(A) = \{m, n, o, p\}$ görüntü kümesidir.

2. şemada $B = \{m, n, o, p\}$ kümesi değer kümesi olup $f(A) = \{m, n, o\}$ görüntü kümesidir. Şu halde her iki fonksiyonda da $f(A) \subset B$ dir.

5.1. Not: $f : A \to B$ bağıntısının fonksiyon olması için

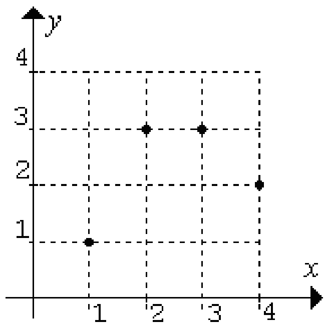
i) A'daki her elemanın f altında bir görüntüsü olmalıdır. Bu durum her $x \in A$ için $f(x) = y \in B$ dir.

ii) A'daki her elemanın f altında yalnız bir tek görüntüsü olmalıdır. Bu durum $f(x) = y$ dir.//

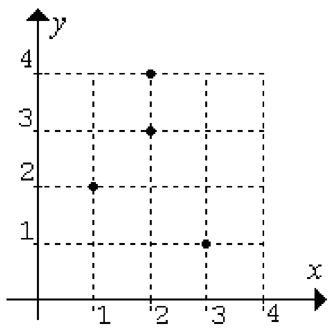
Şimdi de fonksiyonları koordinat sistemlerinde gösterimine bakalım.

5.2. Tanım: $f: A \rightarrow B$, $f = \{(x,y): x \in A, y \in B, y = f(x)\}$ fonksiyonuna ait olan ikililere analitik düzlemde karşılık gelen noktaların oluşturduğu kümeye, f fonksiyonunun grafiği denir. (Koordinat sistemlerinde x eksenleri tanım kümeleri, y eksenleri değer kümeleri olarak alındığı unutulmamalıdır.)

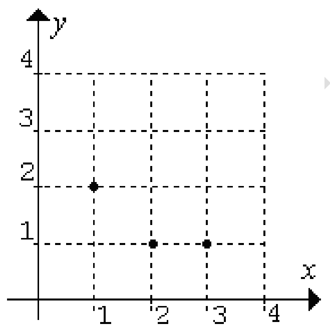
Örnek:



fonksiyon



fonksiyon değil

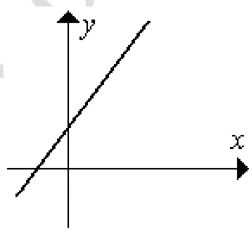


fonksiyon değil

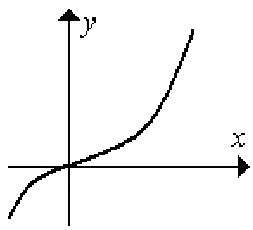
1. grafikte x ekseninin (tanım kümesinin) her elemanının y ekseninde (değer kümesinde) bir ve yalnız bir görüntüsü olduğundan fonksiyondur. Ama 2. grafikte 2 noktasının 2 görüntüsü ve 4 noktasının görüntüsü olmadığından, 3. grafikte 4 noktasının görüntüsü olmadığından fonksiyon değillerdir.

Şimdi bütün reel sayılar için aynı durumu sağlayalım. Yani bütün reel sayılar için noktaların görüntüsünü bulalım.

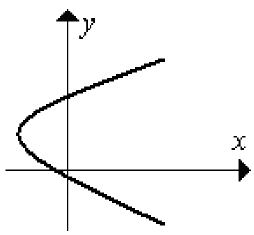
Örnek:



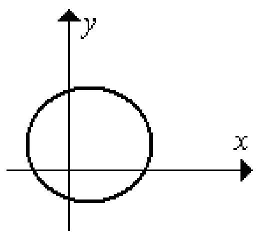
fonksiyon



fonksiyon



fonksiyon değil



fonksiyon değil

1. ve 2. grafiklerde x ekseninin (tanım kümesinin) her elemanının y ekseninde (değer kümesinde) bir ve yalnız bir görüntüsü olduğundan fonksiyondur. Ama x'in bazı noktalarının görüntüsü olmadığından fonksiyon değillerdir.

Bir bağıntının grafiğinde y eksenine çizdiğimiz her paralel doğru grafiği en fazla bir noktada kesiyor ise grafik fonksiyon grafiğidir. Şayet y eksenine çizdiğimiz en az bir paralel doğru grafiği en az iki noktada kesiyor ise grafik bağıntı grafiğidir, fonksiyon olamaz. Bizim yukarıdaki örnekte grafiklerde y eksenine paralel çizilen doğrular olduğunda 1. ve 2. şemada fonksiyon bir noktada kesmekteler, ama 3. ve 4. şemada iki noktada kesmekteler.

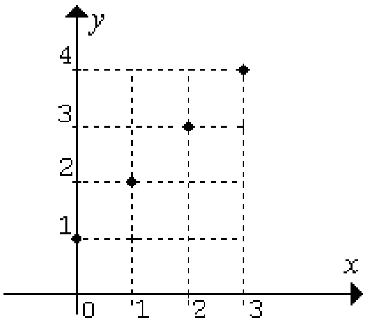
Görüldüğü gibi fonksiyonlar grafikler üzerinde inceleniyor. Ama fonksiyonların bir başka özelliği daha var ki, o da hiç şüphesiz fonksiyonların denklemleridir. Şimdi denklem kavramını anlamaya çalışalım.

Örnek: $A = \{0,1,2,3\}$ ve $B = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere $f : A \to B$ fonksiyonu "Her bir sayı kendisinin bir fazlasına götürür" şeklinde tanımlanıyor. Bu fonksiyonun grafiğini çiziniz ve denklemini bulunuz.

Çözüm: Her sayı kendisinin bir fazlasına götürdüğünden

$$f(0) = 1 \,, f(1) = 2 \,, f(2) = 3 \,, f(3) = 4$$

gibi olacağından



bulunur. Görüldüğü gibi, X tanım kümesinden alınan bir sayının Y değer kümesinde bir fazlasına götürüyor. Buna göre,

$$f(x) = x + 1$$

elde edilir.

Örnek: Bir havuzunda başlangıçta 3 m^3 su bulunmaktadır. Musluk açıldıktan sonra saatte 2 m^3 su akmaktadır. Buna göre havuzun dolmasının süresi ve su miktarını gösteren fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Havuzun dolmasının süresi ve su miktarını gösteren çizelge şu şekildedir.

0 saat	1 saat	2 saat	3 saat	
3 m^3	5 m^3	7 m^3	9 m^3	...

Buna göre $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonunu verir. //

Burada fonksiyonların grafiklerini incelemesini sonraya bırakalım. Şimdi fonksiyonların denklemleri üzerine bazı örnekler çözmeye çalışalım.

Fonksiyonlar $(x,y) = (x, f(x))$ sıralı ikililerinden oluştuğuna göre işlemlerinizi bu mantığa göre yapacağız.

Örnek: $f = \{(x,y) : y = 3x - 6$ ve $x,y \in \mathbb{R}\}$ bağıntısı fonksiyon mudur?

Çözüm: Her $x \in \mathbb{R}$ için $y = 3x - 6 \in \mathbb{R}$ olduğundan f bağıntısı bir fonksiyondur.

Örnek: $f = \{(x,y) : |y| = x$ ve $x,y \in \mathbb{R}\}$ bağıntısı fonksiyon mudur?

Çözüm: $|y| = x$ olduğundan $y = x$ veya $y = -x$ dir. Bu ise $\{(x,y), (-x,y)\}$ bağıntısını verir. Bu durum tanım kümesinin en az iki elemanının bir noktada görüntüsü olduğunu gösterir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$ ise $f(0)$ ve $f(5)$ i bulunuz.

Çözüm: $f(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$

$f(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6$

Örnek: $f(x) = \frac{3}{x+2}$ fonksiyonun tanımsız yapan değeri bularak tanım kümesini belirleyiniz.

Çözüm: Bir rasyonel ifadenin tanımsız olması için paydanın değeri 0 olmalıdır. Buna göre,

$$x + 2 = 0 \text{ ise } x = -2$$

olur. Şu halde fonksiyon tanımlı olması için $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$ olmalıdır.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x-4}$ fonksiyonun tanımsız yapan değeri bularak tanım kümesini belirleyiniz.

Çözüm: Kara köklü bir ifadenin içi negatif bir reel (gerçel) sayı olmayacağından

$$x - 4 \geq 0 \text{ ise } x \geq 4$$

olması ile mümkündür. Şu halde tanım kümesi $4 \leq x < \infty$ aralığında olup

$$f : [4,\infty) \rightarrow [0,\infty)$$

fonksiyon tanımlanabilir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)^2$ ise $f(x+1)$ i hesaplayınız.

Çözüm: f fonksiyonunda $f(x)$ biçiminde iken $f(x+1)$ şekline girmesi istenmiştir. Buna göre $f(x)$ de x görünen yere $x+1$ yazarsak,

$$f(x+1) = (x+1-1)^2 = x^2$$

olarak bulunur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(2x-4) = 5x + 8$ ise $f(0)$'ı bulunuz.

Çözüm: $f(2x-4) = f(0)$ olması için $2x - 4 = 0$ olmalıdır. Öyleyse $x = 2$ dir.

$$f(0) = 5 \cdot 2 + 8 = 18$$

Örnek: $xy + 2y - 5x + 6 = 0$ ise $y = f(x)$ i bulunuz.

Çözüm: Bu denklemde y yalnız bırakılmalıdır.

$$y(x+2) = 5x - 6$$

$$y = \frac{5x-6}{x+2}$$

Örnek: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4$ ise $f(2x)$'i $f(x)$ türünden bulunuz.

Çözüm: $f(x)$ denkleminde $f(2x)$ yazılması istendiğinden

$$\begin{aligned} f(2x) &= (2x)^2 + 4 \\ &= 4x^2 + 4 + 12 - 12 \\ &= 4(x^2 + 4) - 12 \\ &= 4\,f(x) - 12 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x+1)=f(x)+2x$ ve $f(1)=1$ olarak veriliyor. Buna göre f(5) in değerini bulunuz.

Çözüm: $x=1$ için $f(1+1)=f(1)+2\cdot 1$ ise $f(2)=1+2=3$
$x=2$ için $f(2+1)=f(2)+2\cdot 2$ ise $f(3)=3+4=7$
$x=3$ için $f(3+1)=f(3)+2\cdot 3$ ise $f(4)=7+6=13$
$x=4$ için $f(4+1)=f(3)+2\cdot 4$ ise $f(5)=13+8=21$

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(n)=\frac{n}{2}f(n-1)$, $f(5)=15$ ise f(2) yi bulunuz.

Çözüm: $f(5)=\frac{5}{2}f(5-1)$ ise $15=\frac{5}{2}f(4)$ olup $f(4)=6$
$f(4)=\frac{4}{2}f(4-1)$ ise $6=2f(3)$ olup $f(3)=3$
$f(3)=\frac{3}{2}f(3-1)$ ise $3=\frac{3}{2}f(2)$ olup $f(2)=2$

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$ için $f(x)=ax$ biçiminde tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

a) $f(m+n)=f(m)+f(n)$
b) $f(2m)=2f(m))$
c) $f(m-n)=f(m)-f(n)$
d) $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$

Çözüm: $f(m)=a\cdot m$ ve $f(x)=a\cdot n$
a) $f(m+n)=a(m+n)=a\cdot m+a\cdot n=f(m)+f(n)$ olup doğrudur.
b) $f(2m)=a(2m)=2(a\cdot m)=2f(m)$ olup doğrudur.
c) $f(m-n)=a(m-n)=a\cdot m-a\cdot n=f(m)-f(n)$ olup doğrudur.
d) $f(m\cdot n)=a(m\cdot n)\neq(a\cdot m)\cdot(a\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$ olup yanlıştır.

5.1. Teorem: A ve B boşlamayan iki $f:A\longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $s(A)=m, s(B)=n$ olsun. Bu takdirde A'dan B'ye tanımlanan fonksiyon sayısı n^m tanedir (Burada $n\geq m$ dir).

İspat: $s(A)=m, s(B)=n$ ise A'nın her elemanı n türlü seçilebilir. A kümesi m elemanlı olduğuna göre,

$$s(B)^{s(A)}=n^m$$

dir.

5.2. Teorem: A ve B boşlamayan iki $f: A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $s(A) = m, s(B) = n$ olsun. Bu takdirde A'dan B'ye tanımlanan fonksiyon olmayan bağıntı sayısı $2^{m \cdot n} - n^m$ tanedir (Burada $n \geq m$ dir).

İspatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümelerinde A'dan B'ye tanımlanan fonksiyon sayısı $s(B)^{s(A)} = 4^3 = 64$ tanedir.

EŞİT FONKSİYONLAR

5.3. Tanım: $f: A \longrightarrow B$ ve $g: A \longrightarrow B$ iki fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa f ve g fonksiyonları eşittir denir ve $f = g$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \{-2, 0\}, B = \{1, 5\}$ olmak üzere,

$f: A \longrightarrow B, f(x) = x^2 + 1$

$g: A \longrightarrow B, g(x) = -2x + 1$

ile tanımlanan f ve g eşit fonksiyonlar mıdır?

Çözüm: $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ ve $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

$g(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$ ve $g(-2) = (-2) \cdot (-2) + 1 = 5$

olduğuna her iki kümenin de değer kümeleri $B = \{1, 5\}$ olmaktadır. Şu halde $f = g$ dir.

Örnek: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x^2}$ birer eşit fonksiyonlardır. Gerçekten her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| = \sqrt{x^2}$ dir.

Örnek: $f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 1, g: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ birer eşit fonksiyonlardır. Gerçekten her $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ için

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1$$

dir.

FONKSİYONLARDA DARALMA ve GENİŞLEME

5.4. Tanım: $B \subset A$ olmak üzere $f : A \longrightarrow C$ ve $g : B \longrightarrow C$ fonksiyonları verilsin. Her $x \in B$ için $f(x) = g(x)$ ise g fonksiyonuna f'nin kısıtlanışı, f fonksiyonuna g'nin genişlenişi denir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{a, b, c\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$
$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3)\}$ ve $g = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3), (d, 4), (e, 2)\}$
fonksiyonlarında her $x \in B$ için $f(x) = g(x)$ olduğundan g fonksiyonuna f'nin kısıtlanışı, f fonksiyonuna g'nin genişlenişidir.

BİREBİR, ÖRTEN ve İÇİNE FONKSİYON

1. Birebir Fonksiyon

5.5. Tanım: $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonunda tanım kümesindeki farklı her elemanın görüntüsü de farklı ise, bu fonksiyonlara birebir fonksiyon denir. 1–1 sembolü ile gösterilir. Buna göre, her $x_1, x_2 \in A$ için

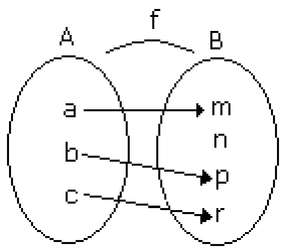
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ya da

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

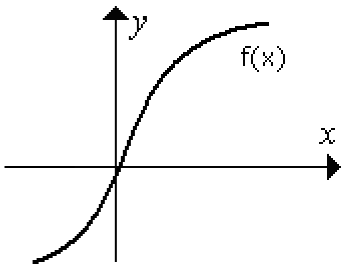
dir.

Örnek:

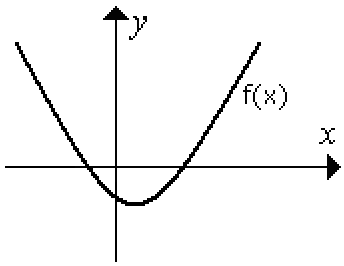


Görüldüğü gibi A kümesinin bütün elemanlarının B kümesindeki görüntüleri farklıdır. Buna göre 1–1 fonksiyondur.

Örnek:



1-1 fonksiyon



1-1 fonksiyon değil

1. grafikte y değer kümesinden alınan her noktanın 1 tane x tanım kümesinde görüntüsü vardır. Buna göre 1–1 fonksiyondur. 2. grafikte ise y değer kümesinden alınan bazı noktaların 2 tane görüntüsü olduğundan 1–1 fonksiyon değildir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^3+1$ fonksiyonunun birebir olup olmadığını bulunuz.

Çözüm: Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Rightarrow x_1^3+1=x_2^3+1 \\ &\Rightarrow x_1^3=x_2^3 \\ &\Rightarrow x_1=x_2 \end{aligned}$$

olacağından 1–1 fonksiyondur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2+3$ fonksiyonunun birebir olup olmadığını bulunuz.

Çözüm: Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Rightarrow x_1^2+3=x_2^2+3 \\ &\Rightarrow x_1^2=x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1=\pm x_2 \end{aligned}$$

olacağından 1–1 fonksiyon değildir.

Örnek: $f:\mathbb{R}-7/4\to\mathbb{R}-5/3, f(x)=\frac{3x+5}{4x-7}$ fonksiyonu 1-1 midir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Rightarrow \frac{3x_1+5}{4x_1-7}=\frac{3x_2+5}{4x_2-7} \\ &\Rightarrow (3x_1+5)(4x_2-7)=(3x_2+5)(4x_1-7) \\ &\Rightarrow 12x_1x_2-21x_1+20x_2-35=12x_1x_2-21x_2+20x_1-35 \\ &\Rightarrow -21x_1+20x_2=-21x_2+20x_1 \\ &\Rightarrow -41x_1=-41x_2 \end{aligned}$$

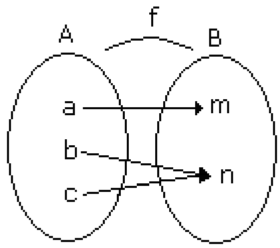
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

olup 1-1 dir.

2. Örten Fonksiyon

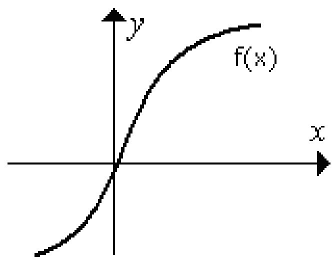
5.6. Tanım: $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu için değer kümesi ile görüntü kümesi eşit olan $(f(B) = A)$ fonksiyonlara örten fonksiyon denir. Buna göre, her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak biçimde en az bir $x \in A$ varsa, f örten bir fonksiyondur. Yani, değer kümesinde açıkta eleman kalmaması olayıdır.

Örnek:

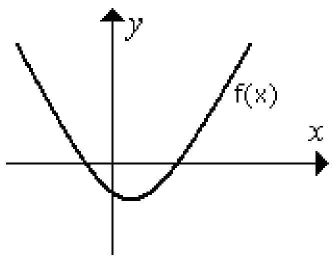


şekilde görüldüğü gibi f fonksiyonun değer kümesinin açıkta elemanı kalmadığından örten fonksiyondur.

Örnek:



örten fonksiyon

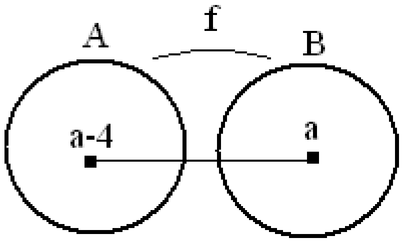


örten fonksiyon değil

1. grafikte y değer kümesinden alınan her noktanın en az 1 tane x tanım kümesinde görüntüsü vardır. Buna göre örten fonksiyondur. 2. grafikte ise y değer kümesinden alınan bazı noktaların görüntüleri olmadığından örten fonksiyon değildir. Ama 2. Fonksiyonun değer kümesi görüntü kümesi olacak şekilde daraltılırsa, o zaman örten fonksiyon olur.

Örnek: $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x + 4$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu örten bir fonksiyon mudur?

Çözüm: $a \in \mathbb{Z}$ olsun. $x + 4 = a$ ise olacak şekilde en az bir $x = a - 4$ sayısı bulunur. Burada $(a - 4)$ olduğundan f örten bir fonksiyondur. Bu durum



şeması ile gösterilir.

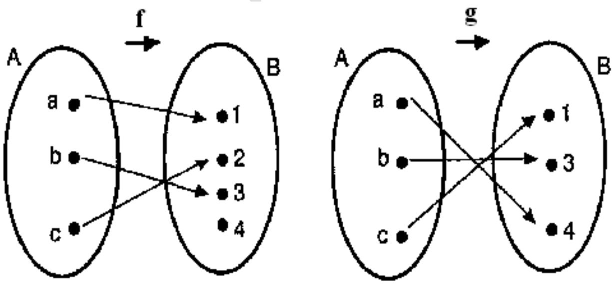
Örnek: $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun örten fonksiyon olması için tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $a \in \mathbb{R}$ olsun. $x^2 + 2x = a$ alınırsa $x^2 + 2x - a = 0$ olur. Bu durumda $\Delta \geq 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1(-a) > 0 \text{ ise } a > -1$$

dir. Şu halde fonksiyonun örten fonksiyon olması için tanım kümesi $f : [-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ şeklindedir.

Örnek: Aşağıda Venn şemaları verilen fonksiyonların birebir ve örten olup olmadıklarını bulunuz.



f ve g fonksiyonlarında B kümelerindeki her elemanın görüntüsü bir tane olduğundan her ikisi de 1–1 dir. f fonksiyonunda B kümesinde 4 noktasının görüntüsü olmadığından örten değil, ama g fonksiyonu her noktanın görüntüsü olduğundan örten fonksiyondur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 3$ biçiminde tanımlanan fonksiyon nasıl bir fonksiyondur?

Çözüm:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4x_1 + 3 = 4x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

olup 1–1 dir.

Her $y \in \mathbb{R}$ için $4x + 3 = y$ ise olacak şekilde en az bir $x = \frac{y-3}{4}$ bulunur. Burada $\frac{y-3}{4} \in \mathbb{R}$ olduğundan f örten bir fonksiyondur.

Şu halde f fonksiyonu 1–1 ve örtendir.

5.3. Teorem: A ve B boşlamayan iki $f : A \longrightarrow A$ bir fonksiyon ve $s(A) = m, s(B) = n$ olsun.

i) $n \geq m$ olmak üzere A'dan B'ye tanımlanan 1–1 fonksiyon sayısı $\frac{n!}{(n-m)!}$ tanedir.

ii) A'dan A'ya tanımlanan 1–1 ve örten fonksiyon sayısı $m!$ tanedir.

İspat: i) m elemanlı bir A kümesi $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ ve n elemanlı bir B kümesi $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ olsun. A'dan B'ye tanımlanan 1–1 fonksiyon olacağından

a_1 elemanı n elemandan birisi ile eşleşir,
a_2 elemanı geriye kalan n–1 elemandan birisi ile eşleşir,
a_3 elemanı geriye kalan n–2 elemandan birisi ile eşleşir,
...
...
a_m yerine geriye kalan $n - (m - 1)$ elemandan birisi ile eşleşir.

Buna göre, m elemanın birbirinden farklı n–li tercih sayısı,

$$n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]$$

olarak bulunur. Elde edilen çarpım $(n - m)!$ ile çarpılıp bölünürse,

$$n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]\frac{(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

olacağından m elemanlı bir A kümesinin n elemanının eşleşme sayısı,

$$\frac{n!}{(n-m)!}$$

tane olur.

ii) $n = m$ alınırsa istenen elde edilir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor.

a) A'dan B'ye tanımlanan 1–1 fonksiyon sayısı

b) A'dan A'ya tanımlanan 1–1 ve örten fonksiyon sayısını bulunuz.

Çözüm: $s(A) = 3, s(B) = 4$ olduğuna göre,

a) $\dfrac{n!}{(n-m)!} = \dfrac{4!}{(4-3)!} = 24$ tanedir

b) $3! = 6$ tanedir

Örnek: $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $s(A) = 2, s(B) = 4$ ise A'dan B'ye 1–1 olamayan fonksiyon sayısı nedir?

Çözüm: A'dan B'ye tanımlanan fonksiyon sayısı $4^2 = 16$ tanedir

A dan B ye 1–1 olan fonksiyon sayısı $\dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$ tanedir

A dan B ye 1–1 olamayan fonksiyon sayısı $16 - 12 = 4$ tanedir.

3. İçine Fonksiyon

5.7. Tanım: Örten olmayan bir fonksiyona içine fonksiyon denir. Buna göre $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu için görüntü kümesi, değer kümesinin alt kümesi $(f(B) \subset A)$ olan fonksiyonlar içine fonksiyondur.

Örnek: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x + 5$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu içine bir fonksiyon mudur?

Çözüm: $y = 2x + 5$ ise $x = \frac{y-5}{2} \notin \mathbb{N}$ olduğundan örten fonksiyon değildir, örten fonksiyon olmadığından içine fonksiyondur.

Örnek: $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $s(A) = 3, s(B) = 4$ ise A'dan B'ye 1–1 ve içine (örten olamayan) fonksiyon sayısı nedir?

Çözüm: $s(B) = 4 > s(A) = 3$ olduğundan A'dan B'ye örten fonksiyon tanımlanamaz. A'dan B'ye ve örten olmayan fonksiyonların sayısı, A'dan B'ye tanımlanabilecek tüm fonksiyonların sayısından A'dan B'ye tanımlanabilecek 1–1 fonksiyonların sayısını çıkartarak buluruz. Buna göre,

A'dan B'ye tanımlanan fonksiyon sayısı $4^3 = 64$ tanedir

A'dan B'ye 1–1 olan fonksiyon sayısı $\dfrac{4!}{(4-3)!} = 24$ tanedir

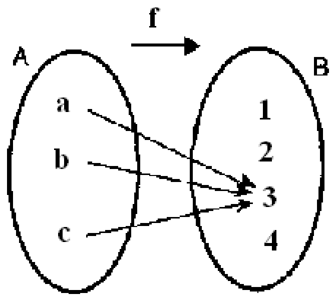
A’dan B’ye 1–1 ve içine (örten olamayan) fonksiyon sayısı $64 - 24 = 40$ tanedir.

SABİT ve BİRİM FONKSİYONLAR

1. Sabit Fonksiyon

5.8. Tanım: $f : A \longrightarrow B$ fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için $f(x) = c$, $c \in B$ sabit bir sayı ise f fonksiyonuna sabit fonksiyon denir. Sabit fonksiyon tanım kümesindeki her elemanı, değer kümesindeki aynı elemana eşleyen fonksiyondur.

Örnek:



$f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu her $x \in A$ için $f(x) = 3$, $3 \in B$ olduğundan f fonksiyonu sabit fonksiyondur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a-2)x^2 + (b+5)x + 8$ sabit fonksiyon ise $a + b + f(x)$ nedir?

Çözüm:

1. yol: f fonksiyonu görünüşte ikinci dereceden bir fonksiyondur. Hâlbuki f(x) sabit fonksiyondur. O halde x^2 ve x katsayıları 0 olmalıdır.

$$a - 2 = 0, b + 5 = 0 \text{ ise } a = 2 \text{ ve } b = -5$$

dir. Buna göre $f(x) = 8$ olur.

$$a + b + f(x) = 2 - 5 + 8 = 5$$

dir.

2. yol: Sabit fonksiyon her $x \in A$ için c gibi sabit sayı olacağından,

$$f(0) = f(1) = f(2) = \cdots$$

sağlayacaktır. Buna göre $f(0) = c = 8$ ve

$$f(0) = f(1)$$
$$8 = a - 2 + b + 5 + 8$$
$$a + b = -3$$
$$a + b + f(x) = -3 + 8 = 5$$

dir.

Örnek: $f : \mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax+5}{x-4}$ sabit fonksiyon ise a'nın değeri nedir?

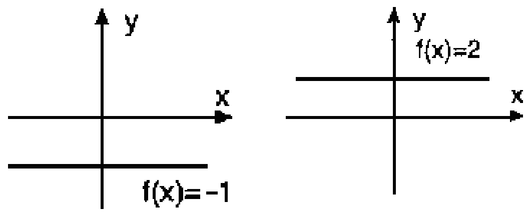
Çözüm: Önceki örnekteki gibi 2. yolla çözersek

$$f(0) = f(1)$$
$$\frac{a\cdot 0+5}{0-4} = \frac{a\cdot 1+5}{1-4}$$
$$\frac{5}{-4} = \frac{a+5}{-3}$$
$$a = -\frac{10}{3}$$

dir.

5.2. Not: Sabit fonksiyonun grafiği x eksenine paralel bir doğrudur.

Örnek: $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = -1$ ve $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2$ fonksiyonların grafiği aşağıdaki gibidir.



5.4. Teorem: A ve B boşlamayan iki $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $s(A) = m, s(B) = n$ olsun. A'dan B'ye tanımlanan sabit fonksiyon sayısı m tanedir.

İspat: İspatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. A'dan B'ye tanımlanan sabit fonksiyon sayısı nedir?

Çözüm: $s(A) = 3$ tanedir

5.9. Tanım: $f : A \longrightarrow B$ fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için $f(x) = 0$ olan sabit fonksiyonuna sıfır fonksiyon denir.

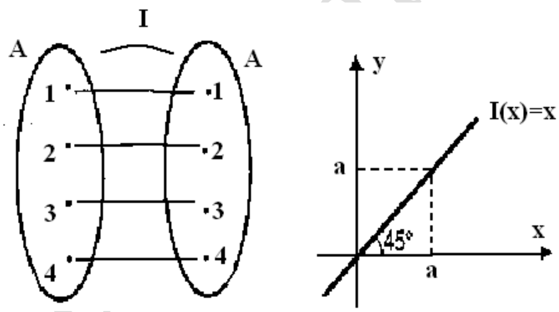
2. Birim Fonksiyon

5.10. Tanım: $f : A \longrightarrow B$ fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için $f(x) = x$ ise, f fonksiyonuna birim (özdeşlik, etkisiz) fonksiyon denir ve I ile gösterilir. Buna göre,

$$I : A \longrightarrow A, I(x) = x$$

tir.

Örnek: Birim fonksiyon Venn şeması ve grafik halinde aşağıdaki şekildeki gibidir.



Örnek: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a-2)x^2 + (b+4)x + c - 8$ birim fonksiyon ise $a + b + c$ nedir?

Çözüm:

1. yol: Birim fonksiyon 1. dereceden ve ilk katsayısı 1 olduğuna göre,
$a - 2 = 0, b + 4 = 1, c - 8 = 0$
$a = 2, b = -3, c = 8$
$a + b + c = 2 - 3 + 8 = 7$
bulunur.

2. yol: Birim fonksiyon her $x \in A$ için x olacağından,

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, \cdots$$

sağlayacaktır. Buna göre,

$$f(0) = 0 \text{ ise } (a-2)\cdot 0^2 + (b+4)\cdot 0 + c - 8 = 0$$
$$f(1) = 1 \text{ ise } (a-2)\cdot 1^2 + (b+4)\cdot 1 + c - 8 = 1$$

denklemlerinden

$$c = 8 \text{ ve } a + b = -1$$

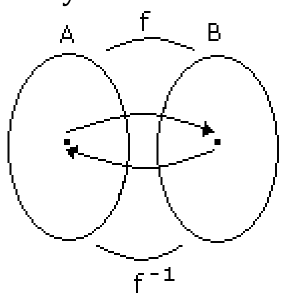
elde edileceğinden $a + b + c = -1 + 8 = 7$ olarak bulunur.

BİR FONKSİYONUN TERSİ

5.11. Tanım: $f : A \longrightarrow B, y = f(x)$ birebir ve örten fonksiyon iken, B'den A'ya olan fonksiyona f'nin tersi denir ve

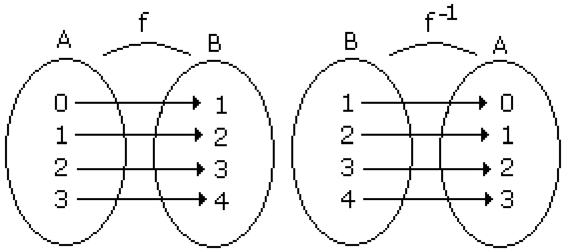
$$f^{-1}: B \longrightarrow A, x = f^{-1}(y)$$

biçiminde gösterilir. Yani f fonksiyonunun tersi f^{-1} ile sembolü ile ifade edilir.



Örnek: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. $f : A \longrightarrow B$, $f(x) = x + 1$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x + 1$ için $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$ olacağından,



$f(x)=x+1$ $\quad$ $f^{-1}(x)=x-1$

çizilebilir. f fonksiyonunun bütün noktalarının görüntüleri 1 fazlasına gittiği halde, f^{-1} fonksiyonun bütün noktalarının görüntüleri 1 eksiğine gitmekteler. Bu yüzden $f^{-1}(x) = x - 1$ bulunur.

Ama bütün fonksiyonların ters fonksiyonları böyle çözülmez. Bu yöntem uzun ve karışık yöntemdir. Bunun daha kısa bir hali vardır. Oda ters fonksiyonun tanımı gereğince x olan yere y, y olan yerlere x yazılır. Sonra y çekilerek ters fonksiyon elde edilir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=2x-8$ ise $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $y=f(x)$ olduğundan $y = 2x–5$ yazılır. y görülen yere x, z görünen yere y yazarsak ve buradan y'yi çekersek

$$x=2y-5$$
$$x+5=2y$$
$$f^{-1}(x)=y=\frac{x+5}{2}$$

elde edilir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{2}+5$ ise $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $y=f(x)$ olduğundan $y=\frac{x}{2}+5$ yazılır. y görülen yere x, x görünen yere y yazarsak ve buradan y'yi çekersek

$$x=\frac{y}{2}+5$$
$$x-5=\frac{y}{2}$$
$$2x-10=y$$
$$f^{-1}(x)=2x-10$$

elde edilir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{4x+1}{2x-3}$ ise $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $y=f(x)$ olduğundan $y=\frac{4x+1}{2x-3}$ yazılır. y görülen yere x, x görünen yere y yazarsak ve buradan y'yi çekersek

$$x=\frac{4y+1}{2y-3}$$
$$2xy-3x=4y+1$$
$$2xy-4y=3x+1$$
$$y(2x-4)=3x+1$$
$$f^{-1}(x)=y=\frac{3x+1}{2x-4}$$

elde edilir.

5.3. Not: Yukarıdaki örnekleri kullanarak şu genellemeleri buluruz.

1. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=ax+b$ ise $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ dir. $(a\neq 0)$

2. $f:\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}\longrightarrow\mathbb{R}-\left\{-\frac{a}{c}\right\}, f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ise $f^{-1}(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$ dir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x-1$ ise $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu bulunuz. $(x<-2)$

Çözüm: $y=f(x)$ olduğundan $y=x^2+4x-1$ yazılır. y görülen yere x, x görünen yere y yazarsak ve buradan y'yi çekersek

$$x=y^2+4y-1$$

bulunur. 2. dereceden denklemlerde fonksiyonun tersini bulabilmek için tam kareye tamamlamak gerekir.

$$x=y^2+4y+4-4-1$$
$$x=(y+2)^2-5$$
$$x+5=(y+2)^2$$
$$\sqrt{x+5}=y+2$$
$$f^{-1}(x)=-2+\sqrt{x+5}$$

elde edilir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow(1,\infty), f(x)=2^{2x-3}+5$ biçiminde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu için $f^{-1}(13)$ kaçtır?

Çözüm: $y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ olduğundan,

$$f^{-1}(13)=a \text{ ise } f(a)=13$$

bulunur. Bunu fonksiyon denkleminde yazarsak

$$2^{2a-3}+5=13$$
$$2^{2a-3}=2^3$$
$$2a-3=3$$
$$a=3$$

olarak bulunur.

Örnek: $f:(-\infty,1)\longrightarrow(01,\infty), f(x)=2^x+2^{x+1}$ biçiminde tanımlanan $f^{-1}(x)=3$ denklemini sağlayan x sayısını bulunuz.

Çözüm: $y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ olduğundan,

$$f^{-1}(x)=3 \text{ ise } f(3)=x$$

bulunur. Bunu fonksiyon denkleminde yazarsak

$$x = f(3) = 2^3 + 2^{3+1} = 24$$

olarak bulunur.

Örnek: 1–1 ve örten olan $f(x^2+5) = x^3 - 2$ fonksiyonunda $f^{-1}(25)$ nin değerini bulunuz.

Çözüm: $y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ olduğundan,

$$f(x^2+5) = x^3 - 2$$
$$x^2 + 5 = f^{-1}(x^3 - 2)$$
$$x^3 - 2 = 25$$
$$x = 3$$

bulunur. Bunu fonksiyon denkleminde yazarsak

$$f^{-1}(3^3 - 2) = 3^2 + 5$$
$$f^{-1}(27) = 14$$

elde edilir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + ax^2 - 6x - 5$ fonksiyonu veriliyor. f^{-1} fonksiyonunun grafiği $(-1,2)$ noktasından geçtiğine göre a'nın değeri kaçtır?

Çözüm: $(-1,2) \in f^{-1}$ olduğundan $(2,-1) \in f$ şeklindedir. Bu durum $f(2) = -1$ olduğunu gösterir. Buna göre,

$$f(2) = 2^3 + a \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 5 = -1$$
$$a = 2$$

dir.

5.4. Not: Her fonksiyonun tersi olmayabilir, ama belirli aralıkta 1-1 ve örten ise, o fonksiyon o aralıkta tersi mevcuttur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonu 1-1 ve örten olmadığından tersinden söz edilemez. (Yukarıda 1-1 ve örten olmadığı benzer örneklerde izah edildi.) Ama $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ için 1-1 ve örten ters fonksiyonu vardır. Tersini bulursak,

$$x = y^2$$
$$\sqrt{x} = y$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

olur.

5.5. Not: $\frac{A(x)}{B(x)}$ biçimindeki fonksiyonların tanım kümesi, paydayı sıfır yapmayan x değerlerinin kümesidir. Bir fonksiyonun görüntü kümesi, tersi olan fonksiyonlar için tersinin tanım kümesidir.

Örnek: $f(x) = \frac{2}{x-3}$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{3\}$ olduğuna göre görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm: Görüntü kümesini bulmak için önce ters fonksiyonunu elde etmeliyiz.

$$x = \frac{2}{y-3} \Leftrightarrow xy - 3x = 2$$
$$\Leftrightarrow xy = 3x + 2$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{3x+2}{x}$$

olur ki, bu fonksiyonun tanımlı olması için $x \neq 0$ dır. O halde görüntü kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$ dır.

FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

5.12. Tanım: $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere,

1. $(f+g) : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ fonksiyonuna f ile g'nin toplamı denir.

2. $(f-g) : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ fonksiyonuna f ile g'nin çıkarması denir.

3. $(f \cdot g) : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ fonksiyonuna f ile g'nin çarpımı denir.

4. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(c \cdot f) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $c \cdot f(x) = (c \cdot f)(x)$ fonksiyonuna f'in skalerle çarpımı denir.

5. $\frac{f}{g} : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x) \neq 0)$ fonksiyonuna f ile g'ye bölümü denir.

6. $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $f^n(x) = [f(x)]^n$ fonksiyonuna f'nin n. kuvveti denir.

Örnek: $f: A \longrightarrow \mathbb{R}, g: B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere,

$$f(x) = 2x + 3 \text{ ve } g(x) = 5x - 1$$

ise

i) $f + g$ ii) $f - g$

iii) $6 \cdot f$ iv) $f \cdot g$

leri bulunuz.

Çözüm:

i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x + 3) + (5x - 1) = 7x + 2$

ii) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x + 3) - (5x - 1) = -3x + 4$

iii) $(6 \cdot f)(x) = 6 \cdot f(x) = 6 \cdot (5x - 1) = 30x - 6$

iv) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x + 3)(5x - 1) = 10x^2 + 13x - 3$

Örnek: $f: A \longrightarrow \mathbb{R}, g: B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere,

$$f(x) = 4x - 2 \text{ ve } g(x) = 3x$$

ise $3f - 2g$ yi bulunuz.

Çözüm: $(3f - 2g)(x) = 3f(x) - 2g(x) = 3(4x - 2) - 2(3x) = 6x - 6$

Örnek: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 1$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$

fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(4 \cdot f \cdot g)(x)$ fonksiyonu nedir?

Çözüm: $(4 \cdot f \cdot g)(x) = 4 \cdot (f(x)) \cdot (g(x))$

$= 4 \cdot (x - 1) \cdot (2x + 1)$

$= 8x^2 - 4x - 4$

Örnek: $f: A \longrightarrow \mathbb{R}, g: B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere,

$$(f \cdot g)(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 12x + 20, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^2 + 2x + 5$$

olduğuna göre $f(2)$ i bulunuz.

Çözüm:

$(f \cdot g)(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2^2 + 12 \cdot 2 + 20 = 44$

$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 5 = 13$

olduğundan

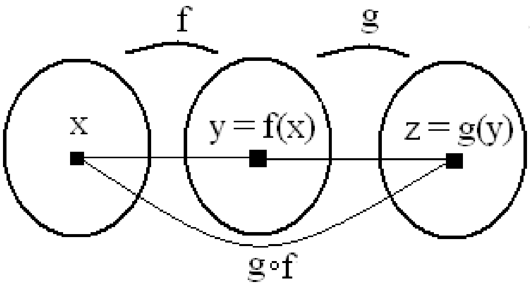
$$(f\cdot g)(2)\cdot\left(\frac{f}{g}\right)(2)=44\cdot 13$$
$$f(2)\cdot g(2)\cdot\frac{f(2)}{g(2)}=572$$
$$f^2(2)=572$$
$$f(2)=\sqrt{572}$$

FONKSİYONLARIN BİLEŞKESİ

5.13. Tanım: $f:A\longrightarrow B, x\rightarrow y=f(x), g:B\longrightarrow C, y\rightarrow z=g(y), f(A)\subset C$ olsun.

$$g(f(x))=g(y)=z$$

şeklinde olan fonksiyona f ve g fonksiyonlarının bileşkesi denir. $g\circ f$ sembolü ile gösterilir. Bu durum



$$(g\circ f)(x)=z=g(y)=g(f(x))$$

biçimindedir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=3x+4, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=x^2+5$ ise

i) $g\circ f$
ii) $f\circ g$

yi bulunuz.

Çözüm:

i) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$(x^2+5)\circ(3x+4)=(3x+4)^2+5=9x^2+24x+21$$

ii) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$$(3x+4)\circ(x^2+5)=3(x^2+5)+4=3x^2+19$$

5.6. Not: Bu örnekten $g\circ f\neq f\circ g$ olduğu anlaşılır. Öyleyse fonksiyonların bileşkesinde değişme özelliği yoktur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=5x-8, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=6x+4$ ise

i) $(g\circ f)(4)$

ii) $(f\circ g)(4)$

ü bulunuz.

Çözüm:

i) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$(6x+4)\circ(5x-8)=6(5x-8)+4=30x-44$

$(g\circ f)(4)=30\cdot 4-44=76$

ii) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$(5x-8)\circ(6x+4)=5(6x+4)-8=30x+12$

$(f\circ g)(4)=30x+12=30\cdot 4+12=132$

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x-3, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=4x+6$ ise $(g\circ f^{-1})$ yi bulunuz.

Çözüm: Soruda f^{-1} e ihtiyaç olduğundan f^{-1} i bulmalıyız. Ters fonksiyon

$f(x)=x-3$

$f^{-1}(x)=x+3$

olur. Şu halde,

$(g\circ f^{-1})(x)=(g(f^{-1}(x)))$

$(4x+6)\circ(x+3)=4(x+3)+6=4x+18$

bulunur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=3x+5$ ise $(f\circ f)$ 'u bulunuz.

Çözüm: $(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$(3x+5)\circ(3x+5)=3(3x+5)+5=9x+20$

5.5. Teorem (Birleşme Özelliği):

$f:A\longrightarrow B, x\to y=f(x), g:B\longrightarrow C, y\to z=g(y), h:C\longrightarrow D, z\to t=h(z)$, $f(A)\subset D$ olsun. Bu takdirde,

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$$

dir.

İspat: Bileşke tanımına göre,

$$\begin{aligned}((f\circ g)\circ h) &= (f\circ g(h(x))\\ &= (f(g(h(x)))\\ &= (f(g\circ h(x))\\ &= (f\circ (g\circ h))(x)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre $(f\circ g)\circ h = f\circ (g\circ h)$ dir.

Örnek:
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x-2, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(y)=x^2, h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, h(x)=3x+2$ ise $(f\circ g)\circ h = f\circ (g\circ h)$ eşitliğini gerçekleyiniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}(f\circ g)\circ h &= ((x-2)\circ (x^2))\circ (3x+2)\\ &= (x^2-2)\circ (3x+2)\\ &= (3x+2)^2-2\\ &= 9x^2+12x-2\\ f\circ (g\circ h) &= (x-2)\circ ((x^2)\circ (3x+2))\\ &= (x-2)\circ ((3x+2)^2)\\ &= ((3x+2)^2-2)\\ &= 9x^2+12x-2\end{aligned}$$

5.6. Teorem: $I:A\longrightarrow A, x\rightarrow y=f(x), f:A\longrightarrow B, x\rightarrow y=f(x)$ olsun. Bu takdirde,

$$I\circ f = f\circ I = f$$

dir.

İspat: Bileşke tanımına göre,

$$(f\circ I)(x) = (f\big(I(x)\big) = f(x)$$
$$(I\circ f)(x) = (I\big(f(x)\big) = f(x)$$

yazılabilir. Bu iki eşitlikten $I\circ f = f\circ I = f$ elde edilir.

5.7. Teorem: $I:A\longrightarrow A, x\rightarrow y=f(x), f:A\longrightarrow B, x\rightarrow y=f(x)$ olsun. Bu takdirde,

$$f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = I$$

dir.

Çözüm: $y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ olsun.

$$(f\circ f^{-1})(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = f(x) = y \Leftrightarrow f\circ f^{-1} = I$$
$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}\circ f = I$$

yazılabilir. Bu iki eşitlikten $f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = I$ elde edilir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, (f\circ f^{-1})(2x+3)=15$ ise x'in değeri nedir?

Çözüm: $(f\circ f^{-1})(x)=I(x)$
$(f\circ f^{-1})(2x+3)=I(2x+3)=2x+3=15$
$x=6$

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=2x+4, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, (f^{-1}\circ g)(x)=x+7$ ise g fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $g(x)=(f\circ(f^{-1}\circ g))(x)$
$=(2x+4)\circ(x+7)$
$=2(x+7)+4$
$=2x+18$

Örnek: $g(x)=x-5, (f\circ g)(x)=4x+3$ ise f fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $g(x)=x-5$ ise $g^{-1}(x)=x+5$
$f(x)=((f\circ g)\circ g^{-1})(x)$
$=(4x+3)\circ(x+5)$
$=4(x+5)+3$
$=4x+23$

Örnek: $(f\circ g^{-1})(x)=2x-3, (g\circ f)(x)=5x+1$ ise $(f\circ f)(3)$ ün değerini bulunuz.

Çözüm: $(f\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=((f\circ(g^{-1}\circ g))\circ f)=((f\circ I)\circ f)=(f\circ f)$ olduğuna göre,
$(2x-3)\circ(5x+1)=2(5x+1)-3=10x-1$
$(f\circ f)(3)=10\cdot 3-1=29$
elde edilir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(4x+10)=2x+6$ ise f(x) i bulunuz.

Çözüm: Burada $g(x)=4x+10$ alınırsa $g^{-1}(x)=\frac{x-10}{4}$ olarak bulunur. Ayrıca,
$f(4x+10)=2x+6$

$$f(g(x)) = 2x + 6$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} f(x) &= ((f \circ g) \circ g^{-1})(x) \\ &= (2x+6) \circ \left(\frac{x-10}{4}\right) \\ &= 2\left(\frac{x-10}{4}\right) + 6 \\ &= \frac{x+2}{2} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

5.8. Teorem: $f : A \longrightarrow B, x \to y = f(x), g : B \longrightarrow C, y \to z = g(y)$ olsun. Bu takdirde,

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

dir.

İspat: 5.7. teoremden,

$$(f \circ g)^{-1} \circ (g \circ f) = I \qquad (1)$$

olduğu gözükür. Ayrıca yine aynı teorem ve 5.5. teoremden,

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) &= g^{-1} \circ ((f^{-1} \circ f) \circ g) \\ &= g^{-1} \circ (I \circ g) \\ &= g^{-1} \circ g \\ &= I \qquad (2) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre (1) ve (2) özelliğinden,

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

elde edilir.

5.9. Teorem: $f : A \longrightarrow B, x \to y = f(x)$ olsun. Bu takdirde,

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

dir.

Çözüm: $y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ olsun. 5.4. teoremden,

$$((f^{-1})^{-1} \circ f^{-1})(x) = I(x)$$

yazılır. Buna göre, 5.6 ve 5.7. teoremden

$$(((f^{-1})^{-1} \circ f^{-1}) \circ f)(x) = (I \circ f)(x)$$
$$((f^{-1})^{-1} \circ (f^{-1}f(x)) = I(f(x))$$
$$((f^{-1})^{-1}(I(x)) = f(x)$$
$$((f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$$

bulunur. Buna göre,

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

dir.

5.10. Teorem: f ve g; 1–1 iki fonksiyon olsun. Bu takdirde $(g \circ f)$ da 1–1 dir.

Çözüm: f ve g 1–1 iki fonksiyon ise her $x_1, x_2 \in A$ için,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2\end{aligned}$$

olduğundan $(g \circ f)$ da 1–1 dir.

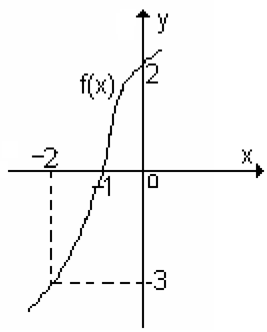
5.11. Teorem: $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ iki örten fonksiyon olsun. Bu takdirde $(g \circ f)$ fonksiyonu da örten fonksiyondur.

Çözüm: g fonksiyonu örten fonksiyon olduğundan, her $z \in C$ için, $(y, z) \in g$ olacak biçimde B'nin bir y elemanı vardır. f fonksiyonu örten fonksiyon olduğundan, her $y \in B$ için $(x,y) \in f$ olacak biçimde A kümesinin bir x elemanı vardır. Ayrıca, $y = f(x), z = g(y)$ olduğundan, $z = g(f(x))$ dir. Öyleyse, her $z \in C$ için $z = g(f(x))$ olacak biçimde A kümesinin bir x elemanı vardır. O halde $(g \circ f)$ fonksiyonu, örten fonksiyondur.

FONKSİYONLARIN GRAFİĞİNİ OKUMA

Fonksiyonların grafiğini okuma için özel bir tanım ve çeşitli açıklamalara gerek yoktur. Verilen grafikleri kartezyen koordinat sisteminde nasıl okunduğunu bilmemiz yeterlidir. Bu konuyu şimdi çeşitli örnekler çözerek cevap verelim.

Örnek: Aşağıda grafiği verilen f(x) fonksiyonu $[-2, 0]$ da olsun.



$\frac{f(-2)+f^{-1}(2)}{f(-1)+f(0)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

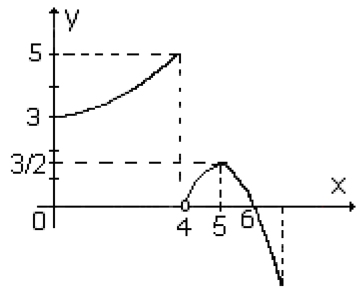
Çözüm: $y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ olduğunu bildiğimize göre,

$$f(-2) =-3, f^{-1}(2) = 0, f(-1) = 0, f(0) = 2$$

$$\frac{f(-2)+f^{-1}(2)}{f(-1)+f(0)} = \frac{-3+0}{0+2} = -\frac{3}{2}$$

biçimindedir.

Örnek:



Bir $y = f(x\ )$ fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir. Buna göre

$$f(6) + f^{-1}(3\ ) + f(4)$$

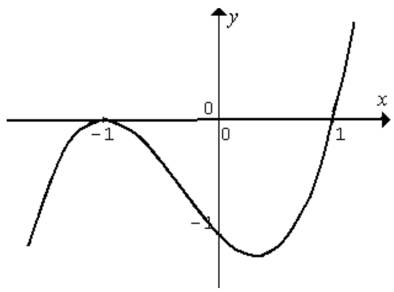
ün değeri nedir?

Çözüm: $f(6) = 0, f^{-1}(3) = 0, f(4) = 5$ olduğuna göre

$$f(6) + f^{-1}(3\ ) + f(4) = 0 + 0 + 5 = 5$$

dir.

Örnek: Aşağıdaki grafiği verilen fonksiyon $y = (x\ +\ 1)^2(ax-1)$ olduğuna göre a'nın değeri nedir?

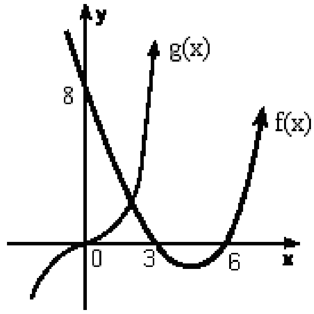


Çözüm: Bir fonksiyonun değerleri o fonksiyonu sağlar. Çözüm için bize verilen (–1, 0) veya (0, –1) veya (1, 0) değerlerinden birini denklemde yerine yazmamız yeterlidir. Biz (1, 0) ı alırsak

$$0 = (1\ +\ 1)^2(a\cdot 0-1)$$

olacağından $a = 1$ dir.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde f ve g fonksiyonları verilmiştir. Bu şekle göre

$$f(3) + g(0) + f^{-1}(8)$$

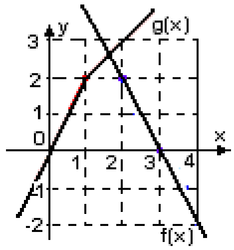
in sonucu nedir?

Çözüm: $f(3) = 0, g(0) = 0, f^{-1}(8) = 0$ olduğundan

$$f(3) + g(0) + f^{-1}(8) = 0 + 0 + 0 = 0$$

bulunur.

Örnek: f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafiği aşağıdaki verilmiştir.



Grafikteki bilgilere göre, $\dfrac{(f\circ g)(1)}{g(2)+f(4)}$ değeri kaçtır?

Çözüm: $g(1) = 2, f(2) = 2, g(2) = 3, f(4) = -2$ olduğundan

$$\frac{(f\circ g)(1)}{g(2)+f(4)} = \frac{f(2)}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

bulunur.

KAPALI FONKSİYONLAR

5.14. Tanım: $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonu $F(x,y) = 0$ şeklinde yazılmasına kapalı fonksiyon denir.

Örnek: $F(x,y) = x^2 + y^2 = 0$ bir kapalı fonksiyondur.

Örnek: $F(x,y) = 2xy - x^2 + y^3 = 0$ bir kapalı fonksiyondur.

GÖRÜNTÜ ve TERS GÖRÜNTÜ

5.15. Tanım: $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, $A \subset X$ ve $B \subset Y$ olsun.

$$f(A) = \{f(x) \in Y, x \in A\}$$

kümesine A'nın f altındaki görüntüsü,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B$$

kümesine B'nin f altındaki ters görüntüsü denir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonu verilsin. $A = \{-2, 0, 3\}$ ve $B = \{1, 4, 16\}$ ise $f(A) = \{0, 4, 9\}$ ve $f^{-1}(B) = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ şeklindedir.

5.12. Teorem: $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, $A, B \subset X$ olsun. Bu takdirde;

i) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

iii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

iv) $f(A \backslash B) \subset f(A)$

dir.

İspat: i) $A \subset B$ olduğundan her $x \in A$ için $x \in B$ olacağından $f(x) \in f(A)$ için $f(x) \in f(B)$ olur. Buna göre $f(A) \subset f(B)$ elde edilir.

ii) $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ olduğu aşikardır. Her $x \in A \cap B$ ise $x \in A$ ve $x \in B$ olacağından $f(x) \in f(A)$ ve $f(x) \in f(B)$ dir. Buna göre;

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

olur.

iii) $A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$ olduğu aşikardır. Buna göre,

$$f(A) \subset f(A \cup B) \text{ ve } f(B) \subset f(A \cup B)$$

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \qquad (1)$$

olur. Tersine her $x \in A \cup B$ ise $x \in A$ veya $x \in B$ olacağından $f(x) \in f(A \cup B)$ ise $f(x) \in f(A)$ veya $f(x) \in f(B)$ dir. Buna göre;

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) denkleminden

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

elde edilir.

iv) $A\backslash B \subset A$ olduğundan $f(A\backslash B) \subset f(A)$ olur.

5.13. Teorem: $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, $A, B \subset X$ olsun. Bu takdirde;

i) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

iii) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

iv) $f^{-1}(A\backslash B) = f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$

v) $f^{-1}(A^t) = [f^{-1}(A)]^t$

vi) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

dir.

İspat: i) $x \in f^{-1}(A)$ olsun. Ters görüntü tanımından $f(x) \in A$ dır. Hipotezde $A \subset B$ olduğundan $f(x) \in B$ dir. Ters görüntü tanımından $x \in f^{-1}(B)$ dir. Buna göre $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ elde edilir.

ii) Her x için,

$$x \in f^{-1}(A \cap B)$$
$$f(x) \in A \cap B$$
$$f(x) \in A \text{ ve } f(x) \in B$$
$$x \in f^{-1}(A) \text{ ve } x \in f^{-1}(B)$$
$$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

dir. Buradan

$$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \qquad (1)$$

olur. Tersine her x için,

$$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$x \in f^{-1}(A) \text{ ve } x \in f^{-1}(B)$$
$$f(x) \in A \text{ ve } f(x) \in B$$
$$f(x) \in A \cap B$$
$$x \in f^{-1}(A \cap B)$$

dir. Buradan

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B) \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) denkleminden

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

elde edilir.

iii) Her x için

$$x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$x \in f^{-1}(A) \text{ veya } x \in f^{-1}(B)$$
$$f(x) \in A \text{ veya } f(x) \in B$$
$$f(x) \in A \cup B$$
$$x \in f^{-1}(A \cup B)$$

bulunur. O halde;

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B) \qquad (1)$$

olur. Tersine her x için

$x \in f^{-1}(A \cup B)$
$f(x) \in A \cup B$
$f(x) \in A$ veya $f(x) \in B$
$x \in f^{-1}(A)$ veya $x \in f^{-1}(B)$
$x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

bulunur. O halde;

$$f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) denkleminden

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

elde edilir.

iv) Her x için,

$x \in f^{-1}(A \backslash B)$
$f(x) \in A \backslash B$
$f(x) \in A$ ve $f(x) \notin B$
$x \in f^{-1}(A)$ ve $x \notin f^{-1}(B)$
$x \in [f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)]$

olur ki bu bize,

$$f^{-1}(A \backslash B) \subset f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B) \qquad (1)$$

olduğunu gösterir. Tersine her x için;

$x \in [f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)]$
$x \in f^{-1}(A)$ ve $x \notin f^{-1}(B)$
$f(x) \in A$ ve $f(x) \notin B$
$f(x) \in A \backslash B$
$x \in f^{-1}(A \backslash B)$

dir. Olur ki bu bize,

$$f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \backslash B) \qquad (2)$$

olduğunu gösterir. Buna göre (1) ve (2) denkleminden

$$f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$$

elde edilir.

v) Her x için,

$x \in f^{-1}(A^t)$
$f(x) \in A^t$
$f(x) \notin A$
$x \notin f^{-1}(A)$
$x \in [f^{-1}(A)]^t$

olur ki bu bize,

$$f^{-1}(A^t) \subset [f^{-1}(A)]^t \qquad (1)$$

olduğunu gösterir. Tersine her x için;

$x \in [f^{-1}(A)]^t$

$x \notin f^{-1}(A)$
$f(x) \notin A$
$f(x) \in A^t$
$x \in f^{-1}(A^t)$

olur ki bu bize,

$$[f^{-1}(A)]^t \subset f^{-1}(A^t) \qquad (2)$$

olduğunu gösterir. Buna göre (1) ve (2) denkleminden

$$f^{-1}(A^t) = [f^{-1}(A)]^t$$

elde edilir.

vi) (iv) özelliğinde $A = B$ alınırsa,

$$f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \backslash A) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(A)$$
$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

bulunur.

5.14. Teorem: $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, $A, B \subset X$ olsun. Bu takdirde;

i) $A \subset f^{-1}(f(A)), f(f^{-1}(B) \subset B$

ii) $f(A) - f(B) \subset f(A - B), f^{-1}(A) - f^{-1}(B) = f^{-1}(A - B)$

dir.

İspat: i) $a \in A$ ise $f(a) \in f(A)$ dır. Böylece $a \in f^{-1}(f(A))$ olacağından $A \subset f^{-1}(f(A))$ dir. $c \in f(f^{-1}(B))$ ise $b \in f^{-1}(B)$ olacak şekilde $c = f(b)$ vardır. Böylece $f(b) \in B$ dır. Yani $c = f(b) \in B$ olacağından $f(f^{-1}(B) \subset B$

ii) $b \in f(A) - f(B)$ olsun. Bir $a \in A$ için $b = f(a)$ dir. Fakat $a \in B$ için bu eşitlik yoktur. Böylece $b \in f(A - B)$ dır. Yani

$$f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$$

dır. $a \in f^{-1}(A - B)$ olsun. $f(a) \in A - B$ dur. O zaman $f(a) \in A$ ve $f(a) \notin B$ dur. Yani $a \in f^{-1}(A)$ ve $a \notin f^{-1}(B)$ dur. O halde $a \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$ dur. Diğer yönü de benzer şekilde yapılır.

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

5.16. Tanım: Boş küme olmayan herhangi A, B ve C kümeleri verilsin ve A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı;

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$$

olsun, $A \times B$ kümesinden alınmış her (x, y) çiftini C kümesinden bir ve yalnız bir z elemanı ile eşleyen bir f fonksiyonu verilmişse bu f fonksiyonu $A \times B$ kümesinden C kümesine iki değişkenli fonksiyon denir ve

$$f : A \times B \to C$$

$(x,y) \rightarrow \; z = f\,(x,y)$

biçiminde gösterilir. $A \times B$ ye fonksiyonun tanım kümesi veya tanım bölgesi, C ye ise değer kümesi denir.

Örnek: $A = \{1,2,3\}, B = \{-2,-1\}, C = \{3,4,5\}$ kümeleri verilsin.

$A \times B = \{(1,-2),(1,-1),(2,-2),(2,-1),(3,-2),(3,-1)\}$

olsun. Burada,

$f(1,-2) = 3, f(1,-1) = 3, f(2,-2) = 4, f(2,-1) = 4, f(3,-2) = 5, f(3,-1) = 5$

biçiminde bir fonksiyon tanımlanabilir.

Örnek: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\,, f(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy$ iki değişkenli fonksiyonu için $f(0,1), f(3,2)$ yı bulunuz.

Çözüm: $f(0,1) = 0^2 - 1^2 + 4\cdot 0\cdot 1 = -1$

$f(3,2) = 3^2 - 2^2 + 4\cdot 3\cdot 2 = 29$

5.7. Not: Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi iki değişkenli fonksiyonlarda da değişkenlerin ve kuralın hangi harflerle gösterildiğinin önemi yoktur. Örneğin,

$f(x,y) = \log(x^2 + \sqrt{y})$

$g(m,n) = \log(m^2 + \sqrt{n})$

denklemleri aynı fonksiyonları ifade eder.

5.17. Tanım: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, boş küme olmayan $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ve C kümeleri verilsin. $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n$ olmak üzere, her bir

$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$

n-lisinin C kümesinden bir ve yalnız bir z elemanı ile eşleşmişse $A_1, A_2, \cdots, A_n$ den C ye n-değişkenli fonksiyon denir ve

$f :\; A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \rightarrow C$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = z$

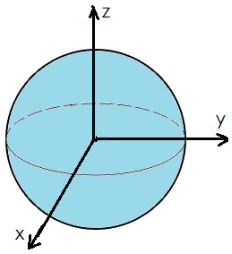
biçiminde gösterilir. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ kümesine fonksiyonun tanım kümesi C kümesine ise değer kümesi denir.

Örnek: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_3^2$ üç değişkenli fonksiyonu için $f(0,1,2)$ yı bulunuz.

Çözüm: $f(0,1,2) = (-1)^2 - 3\cdot 1 + 4\cdot(-1)\cdot 2^2 = -18$ //

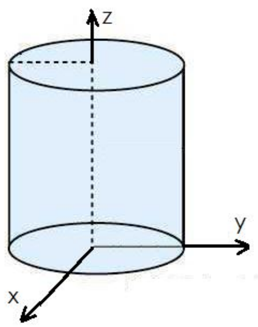
Bu kısımda meşhur birkaç iki değişkenli fonksiyonların denklemini ve grafiğini vereceğiz.

1. Küre:



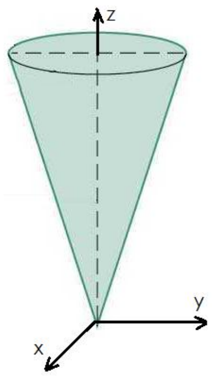
$$x^2 + y^2 = r^2$$

2. Silindir



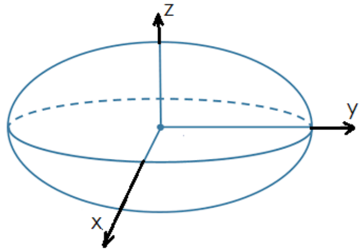
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3. Koni



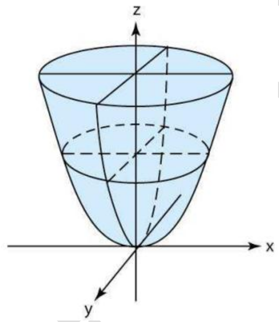
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

5. Elipsoid



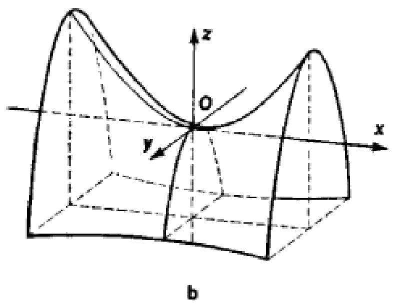
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

6. Eliptik Paraboloid



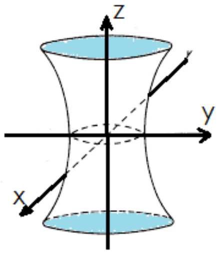
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

7. Hiperbolik Paraboloid



$$\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}=z$$

8. Tek Kanatlı Paraboloid



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

5.8. Not: Çok değişkenli fonksiyonlar ayrı bir konu olarak anlatılacaktır. Burada ihtiyaca binaen anlatılmıştır. Şimdilik kısa kesiyoruz.

FONKSİYONLARIN ÇEŞİTLERİ

Fonksiyonlar aşağıdaki şekilde sınıflandırılır.

1. Cebirsel Fonksiyonlar
   - a) 1. Dereceden (Doğrusal) Fonksiyonlar
   - b) 2. Dereceden (Paraboller) Fonksiyonlar
   - c) Polinom Fonksiyonları
   - d) Rasyonel Fonksiyonlar

2. Parçalı Fonksiyonlar
   - a) Parçalı Yazılabilen Fonksiyonlar
   - b) Mutlak Değer Fonksiyonları
   - c) İşaret Fonksiyonları
   - d) Tam Değer Fonksiyonları

3. Üstel ve Logaritma Fonksiyonları

4. Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonları

5. Metrik Fonksiyonlar

6. İşletmecilik Fonksiyonları

7. İstatistik ve Olasılık Fonksiyonları

8. Karar Alma Fonksiyonları

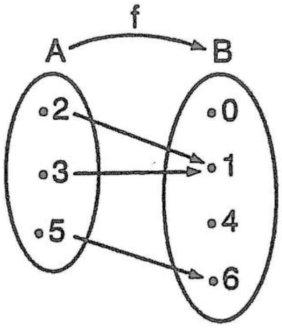
a) Bulanık Mantık Fonksiyonu

b) Esnek Küme Fonksiyonu

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Fonksiyon Kavramı

1. Aşağıdaki fonksiyonda A'dan B'ye f fonksiyonu verilmiştir.



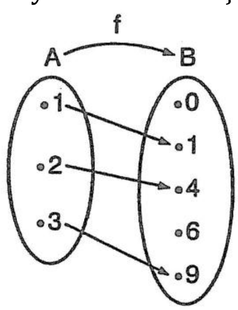
Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $f(5) = 6$ tir.
B) $f(x) = 1$ ise x'in iki tane değeri vardır.
C) $f(x) = 0$ ise x'in değeri yoktur.
D) Görüntü kümesi $\{1, 6\}$ tir.
E) $f(x)$ en büyük değeri 5'tir.

Çözüm: $f(x)$ görüntü kümesidir. Görüntü kümesinin en büyük değeri 6'dır.

Cevap: E

2. Aşağıda $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonunu verilmiştir.



Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $f(x) = x$ B) $f(x) = 2x$ C) $f(x) = x + 1$
D) $f(x) = x^2$ E) $f(x) = 3x - 1$

Çözüm: $f = \{(1,1), (2,4), (3,9)\}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ olarak gösterilir.
Cevap: D

3. $f : A \longrightarrow (-4, 6], f(x) = 2x - 8$ ise A tanım kümesi nedir?

A) $(2,7]$ B) $(2,6]$ C) $(-1,5]$ D) $(1,4]$ E) $(1,5]$

Çözüm: Bir fonksiyonda tanım kümesi verildiğinde değer kümesini bulmak için tanım kümesinin elemanları fonksiyonda yerine konulur.
$-4 < 2x - 8 \leq 6$
$4 < 2x \leq 14$
$2 < x \leq 7$

Cevap: A

4. $f : [4,7) \longrightarrow B, f(x) = -2x + 1$ ise B değer kümesi nedir?

A) $(-15,-7]$ B) $(-13,-7]$ C) $(-1,5]$ D) $(1,8]$ E) $(1,10]$

Çözüm: $f(x) = -2x + 1$ ise $f^{-1}(x) = \frac{-x+1}{2}$
ters fonksiyonu elde edilir. Bir fonksiyonda tanım kümesi verildiğinde değer kümesini bulmak için tanım kümesinin elemanları fonksiyonda yerine konulur. O halde
$4 \leq \frac{-x+1}{2} \leq 7$
$8 \leq -x + 1 \leq 14$
$7 \leq -x \leq 13$
$-13 \leq x \leq -7$
olur.

Cevap: B

5. $f(x) = 5 + f(x - 1)$ ve $f(1) = -5$ ise $f(16)$ nedir?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

Çözüm: $f(x) - f(x - 1) = 5$
$x = 2$ için $f(2) - f(1) = 5$

$x = 3$ için $f(3) - f(2) = 5$
$x = 4$ için $f(4) - f(3) = 5$
...
$x = 16$ için $f(16) - f(15) = 5$

elde edilir. Bu 15 denklem taraf tarafa toplanırsa,

$f(16) - f(1) = 15 \cdot 5$
$f(16) - (-5) = 15 \cdot 5$
$f(16) = 70$

olur.

Cevap: E

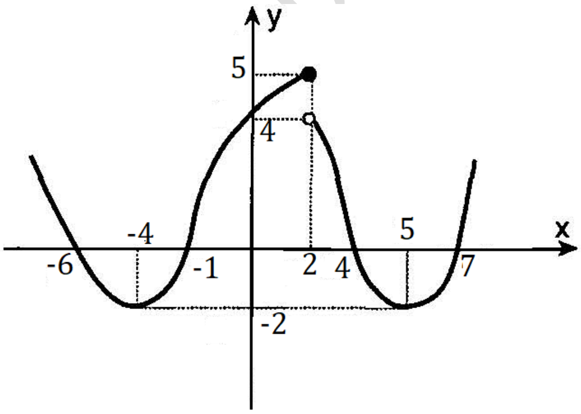
6. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(2^{2x-1}) = x^3 - 4x^2 + 3x + 10$ ve $f(8)$ in değeri nedir?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 15

Çözüm: $2^{2x-1} = 8 = 2^3$ ise $x = 2$
$f(2^{2\cdot 2-1}) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 10 = 8$

Cevap: C

7.



Şekilde $f(x)$ fonksiyonun grafiği çizilmiştir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

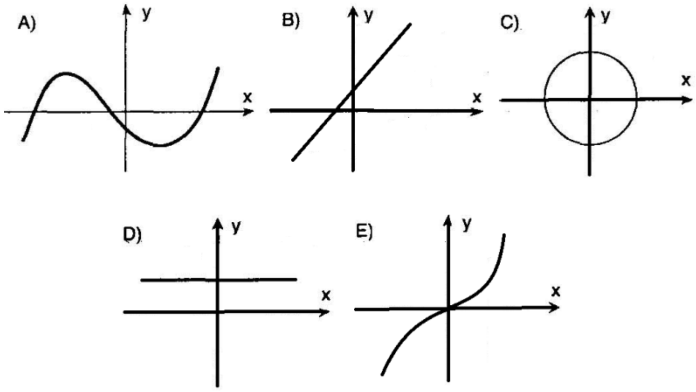
A) $f(-6) = f(-1) = 0$ B) $f(5) + f(2) = 3$ C) $f(0)f(-4) = -8$
D) $f(-4) \cdot f(5) > 0$ E) $f(4) + f(7) = 7$

Çözüm:
A) $f(-6) = f(-1) = 0$ olup doğrudur.
B) $f(5) + f(2) = -2 + 5 = 3$ olup doğrudur.
C) $f(0)f(-4) = 4 \cdot (-2) = -8$ olup doğrudur.

D) $f(-4) \cdot f(5) = (-2)(-2) > 0$ olup doğrudur.
E) $f(4) + f(7) = 0 + 0 \neq 7$ olup yanlıştır.

Cevap: E

8. Aşağıdaki grafiklerin hangileri fonksiyon değildir.



Çözüm: Bir grafiğin fonksiyon olduğu yukarıdan aşağıya dik doğrular çizmekle tespit edilir. Bu dik doğrular verilen bağıntıyı 1 noktada kesmesi gerekmektedir. Bu şartı sağlamayan C şıkıdır.

Cevap: C

9. $A = \{1, 2, 3\}$, $f: A \longrightarrow B$, $f(x) = x^2 + 5x$ ise B değer kümesinin elemanları toplamı nedir?

A) 35 B) 36 C) 38 D) 44 E) 15

Çözüm:
$x = 1$ için $f(1) = 1^2 + 5 \cdot 1 = 6$
$x = 2$ için $f(2) = 2^2 + 5 \cdot 2 = 14$
$x = 3$ için $f(3) = 3^2 + 5 \cdot 3 = 24$
$B = \{6, 14, 24\}$
B kümesinin elemanlarının toplamı 44 olur.

Cevap: D

10. $3^{f(x)} = x + 5$ ise $f(4) + f(22)$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $3^{f(4)} = 4 + 5 = 3^2$ olduğundan $f(4) = 2$

$3^{f(22)} = 22 + 5 = 3^3$ olduğundan $f(22) = 3$
$f(4) + f(22) = 2 + 3 = 5$

Cevap: A

11. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ise $f(1 + \sqrt[3]{4})$ ün değeri nedir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

Çözüm: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$
$f\left(1 + \sqrt[3]{4}\right) = (1 + \sqrt[3]{4} - 1)^3 = 4$

Cevap: B

12. $f(x + 1) = x \cdot f(x)$ ve $f(1) = 10$ ise $f(20)$ nedir?

A) 10! B) 20! C) $20! \cdot 10$ D) $20! \cdot 20$ E) $10! + 20$

Çözüm: $f(x + 1) = x \cdot f(x)$ ise $\frac{f(x+1)}{f(x)} = x$ dir.

$x = 2$ için $\frac{f(2)}{f(1)} = 2$

$x = 3$ için $\frac{f(3)}{f(2)} = 3$

$x = 4$ için $\frac{f(4)}{f(3)} = 4$

…

$x = 20$ için $\frac{f(20)}{f(19)} = 20$

olur. Bu denklemleri taraf tarafa çarparsak,

$$\frac{f(2)}{f(1)} \cdot \frac{f(3)}{f(2)} \cdot \frac{f(4)}{f(3)} \cdots \frac{f(20)}{f(19)} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 20$$
$$f(20) = 20! \cdot 10$$

elde edilir.

Cevap: C

13. $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + x + y$, $g(x,y) = y^2 + 2xy$ ise $3f(4,2) + 2g(3,1)$ nedir?

A) 72 B) 78 C) 83 D) 86 E) 90

Çözüm: $f(4,2) = 4^2 + 4 + 2 = 22$, $g(3,1) = 1^2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 = 10$
$3f(4,2) + 2g(3,1) = 3 \cdot 22 + 2 \cdot 10 = 86$

Cevap: D

14. $f(x) = x^2 - 3$ ise $f(2x)$ in $f(x)$ cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3f(x)$ B) $4f(x) + 5$ C) $4f(x) + 9$ D) $5f(x) - 1$ E) $f(x) + 9$

Çözüm: $f(x) = x^2 - 3$ ise $f(x) + 3 = x^2$ dir.
$f(2x) = 4x^2 - 3 = 4(f(x) + 3) - 3 = 4f(x) + 9$

Cevap: C

15. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, f(x + y) = 2 \cdot f(x) \cdot f(y)$ olduğuna göre $f(0)$ ın değeri nedir?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm: $x = y = 0$ alınırsa,
$f(0 + 0) = 2 \cdot f(0) \cdot f(0)$
$f(0) - 2 \cdot [f(0)]^2 = 0$
$f(0)(1 - 2 \cdot f(0)) = 0$
$f(0) = 0$ ve $f(0) = \frac{1}{2}$

Cevap: D

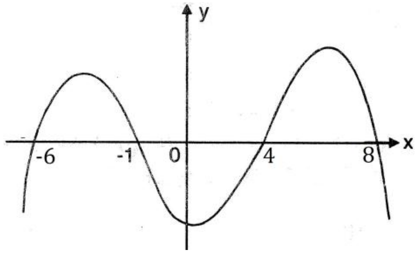
16. $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x - 2$ ve $f(x + 1) = g(x - 1)$ olarak veriliyor. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu nedir?

A) $2x + 5$ B) $4x + 5$ C) $3x + 8$ D) $-2x + 6$ E) $3x - 8$

Çözüm:
$g(x) = 3x - 2$ ise $g(x - 1) = 3(x - 1) - 2$
$$f(x + 1) = 3x - 5$$
bulunur. Elde edilen bu fonksiyonda x yerine $x - 1$ yazılırsa
$$f((x - 1) + 1) = 3(x - 1) - 5$$
$$f(x) = 3x - 8$$
olur.

Cevap: E

17. Aşağıda f fonksiyonun grafiği verilmiştir.



$f(x) > 0$ eşitsizliğini sağlayan farklı x tamsayı değerleri kaç tanedir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:
$f(-5) > 0, f(-4) > 0, f(-3) > 0, f(-2) > 0, f(5) > 0, f(6) > 0, f(7) > 0$
7 tanedir

Cevap: D

18. $f(x) = \frac{x^2 - x \cdot f(x) - 1}{x^2}$ ise f(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x+3}{x}$ B) $\frac{x-1}{x}$ C) $-\frac{x-1}{x}$ D) $\frac{x+1}{x}$ E) $\frac{x+5}{x}$

Çözüm: $f(x) = \frac{x^2 - x \cdot f(x) - 1}{x^2}$

$x^2 \cdot f(x) = x^2 - x \cdot f(x) - 1$

$x^2 \cdot f(x) + x \cdot f(x) = x^2 - 1$

$f(x) \cdot (x^2 + x) = x^2 - 1$

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x}$

Cevap: B

19. $f(x) = \frac{ax-2}{5}$ fonksiyonun oluşturduğu eğrinin A(1; 1) noktasından geçmesi için a ne olmalıdır?

A) ∞ B) 8 C) 7 D) 4 E) 0

Çözüm: A(1;1) noktası eğri üzerinde olduğundan koordinatları eğri denklemini sağlar;

$$1=\frac{a\cdot 1-2}{5} \text{ ise } a=7$$

dir.

Cevap: C

20. A = {a, b, c} kümesinden B = {1, 2, 3, 4} kümesine, tanımlanan aşağıdaki bağıntılardan hangisi bir fonksiyon belirtir?

A) β_1 = {(a, 1),(a, 2),(a, 3),(b, 1),(c, 3)}
B) β_2 = {(a, 2),(b, 1),(c, 1)}
C) β_3 = {(a, 3),(b, 2),(b, 3),(a, 1)}
D) β_4 = {(a, 1),(b, 2),(b, 3),(c, 4)}
E) β_5 = {(a, 2),(c, 1),(c, 4)}

Çözüm: Bir bağıntının fonksiyon olması için "Tanım kümesinin her elemanının bir ve yalnız bir görüntüsü vardır." Şu halde A kümesinin bütün elemanlarının bir tane görüntüsü sadece B şıkkında vardır.

Cevap: B

21. $A=\{x : x=2n \text{ ve } n\in\mathbb{Z}\}, f : A\to B$ fonksiyonu $f(x)=\frac{x+4}{2}$ olduğuna göre B değer kümesi nedir?

A) Tek sayılar B) Çift sayılar C) Tam sayıları
D) Asal sayılar E) Doğal sayılar

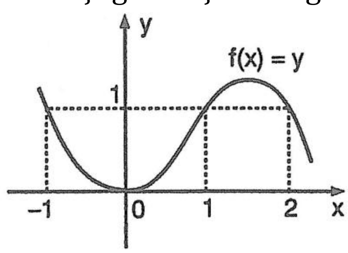
Çözüm: Tanım kümesi çift tamsayılardan oluşmaktadır. $n\in\mathbb{Z}, n=2n$ olduğuna göre,

$$f(2n)=\frac{2n+4}{2}=\frac{2(n+2)}{2}=n+2$$

olur ki bu bize değer kümesinin tamsayılar kümesinin olduğunu gösterir.

Cevap: C

22. y = f(x) fonksiyonu aşağıdaki şekilde gibi olsun.



$f(x-2)=1$ denklemini sağlayan x değerlerin kümesi nedir?

A) $\{1,2,4\}$ B) $\{1,2,5\}$ C) $\{1,3,4\}$ D) $\{0,1,6\}$ E) $\{1,3,6\}$

Çözüm: $x-2=-1$ ise $x=1$
$x-2=1$ ise $x=3$
$x-2=2$ ise $x=4$
olup denklemi sağlayan x değerlerin kümesi $\{1,3,4\}$ dir.

Cevap: C

Fonksiyon Özellikleri

23. n pozitif bir tamsayı olmak üzere,
$$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$$
$$g(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}$$
biçiminde tanımlanıyor. Buna göre, $\frac{f(10)}{g(10)}$ işleminin sonucu nedir?

A) 1 B) 10 C) x D) x^{-10} E) x^{10}

Çözüm:
$$\frac{f(10)}{g(10)}=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{10}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^{10}}}$$
$$=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{10}}{\frac{x^{10}+x^9+\cdots+1}{x^{10}}}$$
$$=x^{10}$$

Cevap: A

24. $f(x)=(a-3)x+b-5$ birim fonksiyon, $g(x)=(c-6)x+8$ sabit fonksiyon ise $a+b+c$ nedir?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 21

Çözüm: $f(x)$ bir birim fonksiyon ise $f(x)=x$ olması için $a-3=1$ ve $b-5=0$ olacağından $a=4$ ve $b=5$ dir.

$g(x)$ sabit fonksiyon ise $g(x)=8$ olması için $c-6=0$ olacağından $c=6$ dir.

$a+b+c=4+5+6=15$

Cevap: B

25. $f\left(\frac{x+1}{4}\right)=\frac{4}{x+1}, g(x)=\frac{2}{x}$ ise $(f+g)(x)$ işleminin sonu nedir?

A) $\frac{3}{x}$ B) $\frac{x}{2}$ C) $-\frac{1}{x}$ D) $5x+4$ E) $8x+5$

Çözüm: $f\left(\frac{x+1}{4}\right)=\frac{4}{x+1}$ ise $f(x)=\frac{1}{x}$ olur.

$$(f+g)(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{3}{x}$$

Cevap: A

26. $f: A \to A, s(A)=3$ bir fonksiyon olmak üzere, her $n \in A$ için $f(n) \neq n$ şartını sağlayan bire bir f fonksiyonlarının sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $n \geq m$ olmak üzere A'dan B'ye tanımlanan 1–1 fonksiyon sayısı $\frac{n!}{(n-m)!}$ tanedir. Fakat $f(n) \neq n$ şartı olduğundan,

$$\frac{3!}{(3-3)!}-\binom{2}{1}\binom{2}{1}=6-4=2$$

bulunur.

Cevap: B

27. $A=\{0,3,8\}, B=\{1,3,4\}$ olmak üzere,

$$f=\{(0,4),(3,3),(x,x-m)\}$$

ifadesi birebir fonksiyon olduğuna göre, m'nin değeri nedir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Fonksiyon 1-1 olduğundan A kümesinin 0 ile 3 sayısı eşlendiğine göre 5 sayısının eşlenmesi kalmıştır. O halde,

$$x=8, \text{ve } x-m=4$$
$$m=4$$

olur.

Cevap: B

Ters Fonksiyonlar

28. $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $f(x) = \frac{ax+b}{c}$ ise $f(x) = f^{-1}(x)$ olduğuna göre a, b, c için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $a = b \neq c$ B) $a = -c$ C) $b = -c$
D) $b = c \neq 1$ E) $a = b = c$

Çözüm: $f(x) = \frac{ax+b}{c}$ fonksiyonun tersini bulalım. y yerine x, x yerine y yazalım.

$$x = \frac{ay+b}{c} \Leftrightarrow y = \frac{cx-b}{a} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{cx-b}{a}$$

olur. Burada $f(x) = f^{-1}(x)$ ise

$$\frac{ax+b}{c} = \frac{cx-b}{a}$$
$$a^2x + ab = c^2x - cb$$

dir. Burada x'li katsayılar birbirine eşit, diğer katsayılar birbirine eşittir. (Bu durumun sebebi Polinomlar konusunda Polinomların eşitliğinde detaylı izah edilecektir.)

$$a^2 = c^2 \text{ ve } ab = -cb$$
$$a = -c$$

olur.

Cevap: C

29. $x = t - 2$ ve $y = t + 5$ biçiminde tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu için $f^{-1}(x)$ in kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = 3x + 5$ B) $f(x) = 2x + 5$ C) $f(x) = x - 7$
D) $f(x) = -x + 6$ E) $f(x) = x + 7$

Çözüm: $x = t - 2$ ise $t = x + 2$ dir. Bu denklemi $y = t + 5$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$f(x) = x + 2 + 5 = x + 7$$

fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonun tersi,

$$f^{-1}(x) = x - 7$$

olur.

Cevap: E

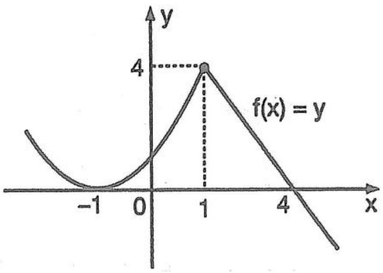
30. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin tersi bir fonksiyon değildir.

A) $y = \frac{2}{x}$ B) $y = x + 3$ C) $y = 4x$ D) $y = x^2$ E) $y = x^3$

Çözüm: Bir fonksiyonun tersini bulmak için birebir ve örten fonksiyon olduğunu göstermeliyiz.
A) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2}{x_1} = \frac{2}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ olup birebir ve örten fonksiyondur.
B) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$ olup birebir ve örten fonksiyondur.
C) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ olup birebir ve örten fonksiyondur.
D) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$ olup birebir fonksiyon değildir.
E) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$ olup birebir ve örten fonksiyondur.

Cevap: D

31.



Verilen şekilde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyondur. Bu fonksiyona göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $f^{-1}(0) = -1$ B) $f^{-1}(0) > 0$ C) $f^{-1}(4) = 1$
D) $f^{-1}(0) = 4$ E) $f^{-1}(1) < 0$

Çözüm: $f^{-1}(1) < 0$ ifadesi yanlıştır.

Cevap: E

Bileşke Fonksiyonlar

32. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = 4x + 15$ ise $f(3)$ ün değeri nedir?

A) $\{11, -12\}$ B) $\{2, 5\}$ C) $\{4, 2\}$ D) $\{-2, 6\}$ E) $\{3, 6\}$

Çözüm: Verilen bileşke fonksiyon 1. dereceden fonksiyondur.
$f(x) = ax + b$ seçilirse,
$(f \circ f)(x) = 4x + 15$

$(ax + b) \circ (ax + b) = 4x + 15$
$a(ax + b) + b = 4x + 15$
$a^2x + ab + b = 4x + 15$

bulunur. Burada x'li katsayılar birbirine eşit, diğer katsayılar birbirine eşittir.

$a^2 = 4$ ve $ab + b = 15$

olur. Eğer

i) $a = 2$ ise $2b + b = 15$ olup $b = 3$
ii) $a = -2$ ise $-2b + b = 15$ olup $b = -15$

dir. Buna göre verilen fonksiyon iki tane olup

$f_1(x) = 2x + 5$ ve $f_2(x) = -x - 9$

şeklindedir. O halde,

$f_1(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$ ve $f_2(3) = -3 - 9 = -12$

bulunur.

Cevap: A

33. $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, g(x) = bx + a$ fonksiyonları için

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

şartı sağlanması için a ile b arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır? $(a \neq b)$

A) $a = b$ B) $a - b = 1$ C) $a + b = 0$ D) $a + b = 1$ E) $a \cdot b = 1$

Çözüm:
$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$
$(ax + b) \circ (bx + a) = (bx + a) \circ (ax + b)$
$a(bx + a) + b = b(ax + b) + a$
$abx + a^2 + b = abx + b^2 + a$
$a^2 + b = b^2 + a$
$a^2 - b^2 = a - b$
$(a - b)(a + b) = (a - b)$
$a + b = 1$

Cevap: D

34. $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = 4x - 4, f(x) = x - 3$ ise $g(x) = -4$ sağlayan x değeri nedir?

A) -5 B) -3 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm: $f(x) = x - 3$ ise $f^{-1}(x) = x + 3$ olur.
$((g \circ f) \circ f^{-1})(x) = (4x - 4) \circ (x + 3)$
$= 4(x + 3) - 4$
$= 4x + 8$

$g(x) = 4x + 8 = -4$ ise $x = -3$

Cevap: B

35. $f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x, f_2(x) = 2x, f_3(x) = 3x, \cdots, f_n(x) = nx$ ise
$(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x)$
nedir?

A) nx B) x^n C) $x^{n!}$ D) $n! \cdot x$ E) $(n+1)x$

Çözüm:

$$\begin{aligned}(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x) &= (f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2)f_1(x)\\ &= (f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_3)f_2(x)\\ &= (f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_3)2x\\ &= (f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_4)3(2x)\\ &= (f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_5)4(3(2x))\\ &\cdots\\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot x\\ &= n! \cdot x\end{aligned}$$

Cevap: D

36. $f(2x-1) = 8x - 1$ ve $f(k+1) = 27$ ise k'nın değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $f(g(x)) = 6x - 1$ olarak yazılırsa $g(x) = 2x - 1$ ve $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ olur.

$$\begin{aligned}f(x) &= ((f \circ g) \circ g^{-1})(x)\\ &= (8x-1) \circ \left(\frac{x+1}{2}\right)\\ &= 8\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1\\ &= 4x + 3\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}f(k+1) &= 4(k+1) + 3 = 27\\ k &= 5\end{aligned}$$

olur.

Cevap: E

37. $f(x) = ax + 2$ ve $g(x) = 3x + b$ ve $(f \circ g)(x) = 3x - 1$ olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $(f\circ g)(x) = 3x - 1$

$$(ax + 2) \circ (3x + b) = 3x - 1$$
$$a(3x + b) + 2 = 3x - 1$$
$$3ax + ab + 2 = 3x - 1$$

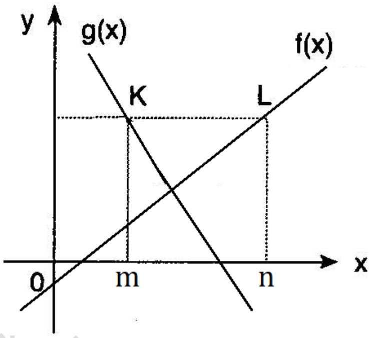
olur. "x'li katsayılar birbirine eşit, diğer katsayılar birbirine eşittir." Aksiyomu gereği,

$$3a = 3 \text{ ve } ab + 2 = -1$$
$$a = 1 \text{ ve } b = -3$$
$$a + b = 1 - 3 = -2$$

elde edilir.

Cevap: A

38.



f ve g fonksiyonların grafikleri şekildeki gibidir. KL//OX ve K noktasının apsisi m ise L noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

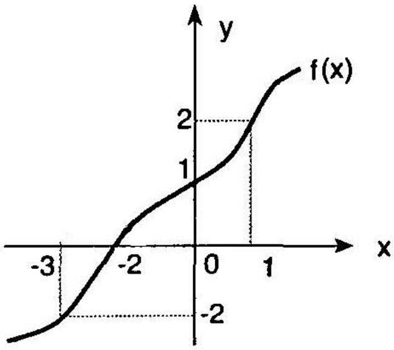
A) $(f\circ g)(m)$ B) $(f^{-1}\circ g)(m)$ C) $(f\circ g^{-1})(m)$
D) $(g\circ f)(m)$ E) $(g\circ f^{-1})(m)$

Çözüm: Şekilden $f(n) = g(m)$ olduğu açıktır.

$$(f^{-1}\circ f)(n) = (f^{-1}\circ g)(m)$$
$$n = (f^{-1}\circ g)(m)$$

Cevap: B

39. f(x) fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



$(f \circ f)(0) + (f^{-1} \circ f^{-1})(0)$ kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm:

$$\begin{aligned}(f \circ f)(0) + (f^{-1} \circ f^{-1})(0) &= f\big(f(0)\big) + f^{-1}(f^{-1}(0)) \\ &= f(1) + f^{-1}(-2) \\ &= 2 + (-3) \\ &= -1\end{aligned}$$

Cevap: A

40. $f(x) = x^2$ ve $g(x) = \frac{x}{2}$ ise $(f \circ g)$ fonksiyonun $A = \{2, 4, 6, 8\}$ kümesini aşağıdaki kümelerden hangisi ile eşleşir?

A) $\{1, 2, 4, 8\}$ B) $\{5, 16, 25, 75\}$ C) $\{2, 4, 16, 64\}$
D) $\{2, 4, 64, 100\}$ E) $\{1, 4, 9, 16\}$

Çözüm: $(f \circ g)(x) = (x^2) \circ \left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$

$$(f \circ g)(2) = \frac{2^2}{4} = 1$$

$$(f \circ g)(4) = \frac{4^2}{4} = 4$$

$$(f \circ g)(4) = \frac{6^2}{4} = 9$$

$$(f \circ g)(4) = \frac{8^2}{4} = 16$$

olduğuna göre değer kümesi $\{1, 4, 8, 16\}$ elde edilir.

Cevap: E

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Zühtü ÖZEL, Arif SABUNCUOĞLU, Soyut Matematik, 5. Baskı, 2020.
7. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
8. Doç. Dr. Mustafa Bayraktar, Atatürk Üniversitesi, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, 1988, ERZURUM.
9. Halil İbrahim KARAKAŞ, Başkent Üniversitesi, Soyut Cebir, 2010, ANKARA.
10. Prof. Dr. Said HALICIOĞLU, Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR, Soyut Cebir, Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2018, ANKARA.
11. Prof. Dr. Şehmus YARDIMCI Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2018, ANKARA.
12. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.