6. BÖLÜM
DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

Bu bölümde birinci dereceden fonksiyonların oluşturduğu doğrusal fonksiyonlardan bahsedeceğiz. Ayrıca Analitik geometri derslerinde doğrunun analitik incelemesi ayrıca yapılacaktır.

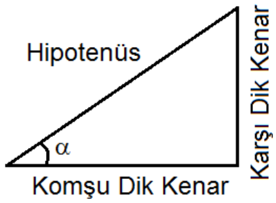
DOĞRUSAL (LİNEER) FONKSİYON KAVRAMI

6.1. Tanım: $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = mx + n$ biçimindeki fonksiyonlara doğrusal (lineer) fonksiyon denir. $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax + by = c$ da bir doğrusal fonksiyonun kapalı denklemdir. Çünkü burada y çekilirse, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ elde edilir.

Örnek: i) $y = \sqrt{3}x + 4$
ii) $f(x) = 8x + 15$
iii) $2x + 3y + 5 = 0$
iv) $x - y + 10 = 0$
birer doğrusal fonksiyonlardır.

DOĞRUNUN EĞİMİ

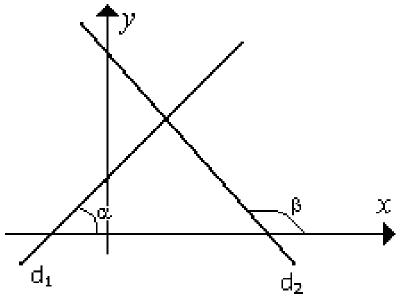
Doğrunun eğiminin tanımında tanjant kavramına ihtiyacımız var, trigonometri konusunda tanjanttan bahsedilecektir. Ama ihtiyaca binaen biz burada tanjantın tanımını şu şekilde verebiliriz (Bk. Trigonometri): Bir dik üçgende



$$\tan \alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kener}}{\text{Komşu Dil Kenar}}$$

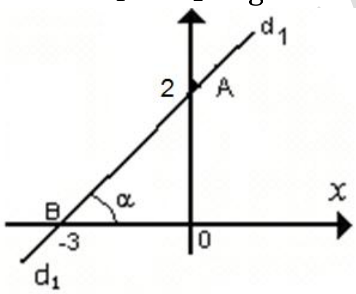
biçimindedir.

6.2. Tanım: Bir doğrunun x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açıya eğim açısı; eğim açısının tanjantına ise doğrunun eğimi denir. “m” ile gösterilir.



Şekilde d_1 doğrusunun eğimi; $m_1 = \tan\alpha$, d_2 doğrusunun eğimi; $m_2 = \tan\beta$ dır.

Örnek: Yandaki şekildeki d_1 ve d_2 doğrularının eğimlerini bulunuz.



Çözüm: ABO üçgenine göre $m = \tan\alpha = \frac{2}{3}$ dir.

6.1. Not: İhtiyacımıza binaen trigonometri konusunda ispatı yapılacak trigonometrik toplam ve fark formüllerinden olan tanjant hakkında şu bilgiyi burada vermek gerekiyor.

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

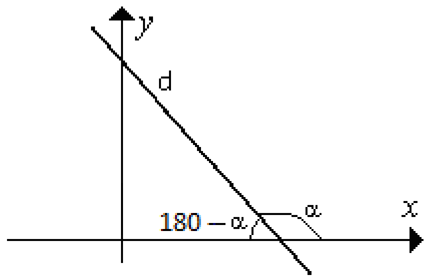
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

biçimindedir. $\tan 180 = 0$ ve olduğundan

$$\tan(\alpha + 180 - \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan(180-\alpha)}{1 - \tan\alpha \cdot \tan(180-\alpha)}$$

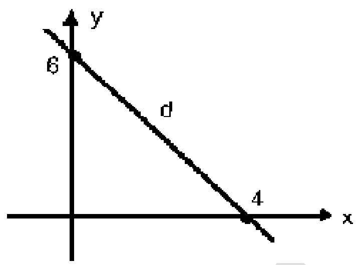
$$0 = \tan\alpha + \tan(180-\alpha)$$

$$m = \tan(180-\alpha) = -\tan\alpha$$



olur.

Örnek:



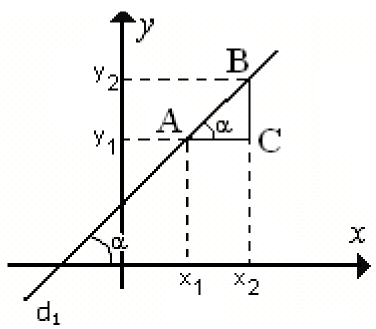
$m = -\tan\alpha = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

İKİ NOKTASI BİLİNEN DOĞRUNUN EĞİMİ

6.1. Teorem: $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi,

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

şeklindedir.



İspat: $|AC| = x_2 - x_1$, $|BC| = y_2 - y_1$ dir. Tanjantın tanımını hatırlarsak

$$m = \tan\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bulunur.

Örnek: A(3, 8) ve B(−1, 0) noktaları arasından geçen doğrunun eğimini bulunuz.

Çözüm: $x_1 = -1, y_1 = 0, x_2 = 3, y_2 = 8$ seçilirse, $m = \frac{8-0}{3-(-1)} = 2$ bulunur.

Örnek: A(2, 4) ve B(3, p) noktalarından geçen ve x ekseni ile eğimi 1 olan doğru olduğuna göre p'nin değeri nedir?

Çözüm: Doğrunun eğimi $m = 1$ olduğu verilmiş. Ayrıca

$$x_1 = 2, y_1 = 4, x_2 = 3, y_2 = p$$

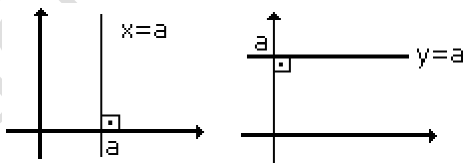
seçilirse

$$\frac{p-4}{3-2} = 1$$
$$p = 5$$

bulunur.

EKSENLERİ DİK ve PARALEL DOĞRULARIN EĞİMİ

6.2. Teorem: x eksenine dik bir doğrunun eğimi sonsuz (±∞) ve paralel doğrunun eğimi sıfır (0) dır. (Buna göre bu doğrunun grafikleri ise, aşağıdaki şeklindeki gibidir.)



İspat: x eksenine dik bir doğru $x = a$ olsun. Bu doğru üzerinde iki nokta $A(a, y_1)$ ve $B(a, y_2)$ olsun. Bu takdirde 6.1. teoremine göre,

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \pm\infty$$

dir. (Bu durum şimdilik tanımsız demeliyiz, limit durumunda ∞ dememiz gerekir.)

x eksenine paralel bir doğru $y = a$ olsun. Bu doğru üzerinde iki nokta $A(x_1, a)$ ve $B(x_2, a)$ olsun. Bu takdirde 6.1. teoremine göre,

$$m = \tan \alpha = \frac{a-a}{x_2-x_1} = 0$$

dir.

Örnek: $A(p+3,-2)$ ve $B(2p,5)$ noktalarından geçen doğru x eksenine dik ise p'nin değeri nedir?

Çözüm: x eksenine dik olması için eğim m = ∞ olması gerekir. Buna göre,

$$\frac{5-(-2)}{p-(p+3)} = \pm\infty$$

$$2p-(p+3) = 0$$

$$p = 3$$

bulunur.

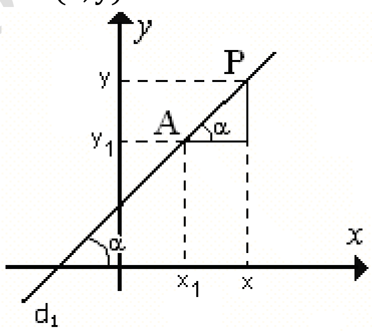
EĞİMİ ve BİR NOKTASI BİLİNEN DOĞRU DENKLEMİ

6.3. Teorem: Bir doğrunun eğimi m ve bir noktası $A(x_1,y_1)$ olarak bilinsin. Bu takdirde bu doğrunun denklemi,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

şeklindedir.

İspat: Doğrunun eğimi m ve bir noktası $A(x_1,y_1)$ olsun. Burada doğru üzerinde herhangi bir keyfi $P(x,y)$ noktası alalım.



6.1. teoreme göre

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

denklemi elde edilir.

Örnek: Eğimi 3 olan ve A(1, 4) noktasından geçen doğrunun denklemi nedir?

Çözüm: $m = 3, x_1 = 1$ ve $y_1 = 4$ olduğuna göre,

$$y - 4 = 3(x - 1)$$
$$y = 3x + 1$$

şeklinde elde edilir.

Örnek: Eğimi $m = 1$ olan ve A(2,–1) noktasından geçen doğrunun denklemi nedir?

Çözüm: x ekseniyle pozitif yönde 45^0 lik açı yapıyorsa eğim $m = 1$ olduğunu trigonometrik cetvelden bulunur. $x_1 = 2$ ve $y_1 = -1$ olacağından,

$$y - (-1) = 1(x - 2)$$
$$y = x - 3$$

elde edilir.

6.2. Not: Doğrusal fonksiyonun denklemindeki “m” ile eğimdeki “m” aynı sayılar olduğu bu teoremde ortaya çıkar. Yani, $y = mx + n$ ifadesindeki tanımda x’in katsayısı m eğimi verir. Buna göre eğim,

1. Denklemde y yalnız bırakılınca x ’in katsayısı
2. Doğrunun tanjantı
3. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

olmak üzere üç türlü bulunur.

İKİ NOKTASI BİLİNEN DOĞRU DENKLEMİ

6.4. Teorem: $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

şeklindedir.

İspat: $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

6.1. teoremden biliyoruz. Yine 6.3 teoremden

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
olduğunu biliyoruz. Bu iki eşitlikten,
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
elde edilir.

Örnek: $A(2, -3)$ ve $B(-4,0)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: $x_1 = 2, y_1 = -3$ ve $x_2 = -3, y_2 = 0$ seçilirse,
$$\frac{y-(-3)}{x-2} = \frac{0-(-3)}{-4-2}$$

$$\frac{y+3}{x-2} = \frac{3}{-6}$$

$$2y - x - 8 = 0$$
bulunur.

Örnek: $A(-3, 2)$ ve $B(1, -6)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: $x_1 = -3, y_1 = 2$ ve $x_2 = 1, y_2 = -6$ seçilirse,
$$\frac{y-(-3)}{x-(-3)} = \frac{-6-2}{1-(-3)}$$

$$y + 2x + 4 = 0$$
bulunur.

Örnek: $K(-a, 2a)$ noktası, $A(0, -4)$ ve $B(3,2)$ noktalarından geçen doğru üzerinde ise a'nin değeri nedir?

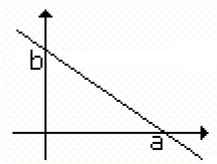
Çözüm: A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemi
$$\frac{y-(-4)}{x-0} = \frac{2-(-4)}{3-0}$$

$$y = 2x + 4$$
dir. Bir nokta elde edilen denklem üzerinde ise o denklemi sağlayacağından $K(-a, 2a)$ noktasını denklemde yerine yazmalıyız.
$$y = 2x + 4$$

$$2a = 2(-a) + 4$$
$$a = 1$$

EKSENLERİ KESTİĞİ NOKTALARI BİLİNEN DOĞRU DENKLEMLERİ

6.5. Teorem:



Doğrusal fonksiyon şekildeki gibi x eksenini a noktasında y eksenini b noktasında kesiyorsa bu takdirde doğrunun denklemi,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

şeklindedir.

İspat: Ekenleri kesen iki nokta $A(a,0)$ ve $B(0,b)$ olsunlar. 6.4. teoremine göre doğrun denklemi,

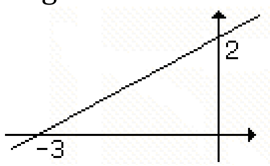
$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-0}{x-a} = \frac{b-0}{0-a}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

olarak bulunur.

Örnek: Şekilde verilen doğrunun denklemini bulunuz.



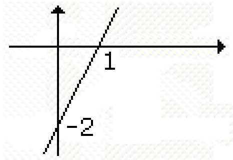
Çözüm: x eksenini –3 de y eksenini 2 kestiğine göre,

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$2x - 3y - 6 = 0$$

şeklinde bulunur.

Örnek: Şekilde verilen doğrunun denklemini bulunuz.



Çözüm: x eksenini 1 de y eksenini –2 kestiğine göre,

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} = 1$$

$$y = 2x - 2$$

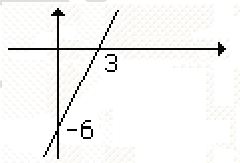
şeklinde bulunur.

DENKLEMİ VERİLEN BİR DOĞRUNUN GRAFİĞİNİN ÇİZİLMESİ

Denklemi verilen bir doğrunun grafiğinin çizilmesi için birkaç noktanın yerleri bilinmesi gerekir. Bunun için x ve y ye sayısal değerler verilerek çözülebilir.

Örnek: $y = 2x - 6$ doğrusal fonksiyonun grafiğini çiziniz.

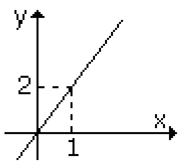
Çözüm: $x = 0$ için $y = -6$ ve $y = 0$ için yani $x = 3$, $A(0,-6)$, $B(3,0)$ bulunur. Buna göre,



grafiği elde edilir.

Örnek: $y = 2x$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

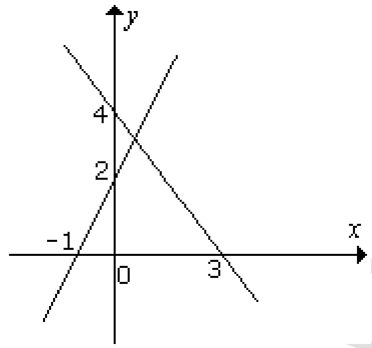
Çözüm: $x = 0$ için $y = 0$ ve $x = 1$ için $x = 2$ yani $A(0,0)$, $B(1,2)$ bulunur. Buna göre,



şeklindedir.

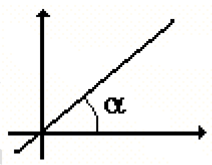
Örnek: $d_1 : 2x - y + 2 = 0$ ve $d_2 : 4x + 3y - 12 = 0$ doğrularının oluşturduğu grafiği çiziniz.

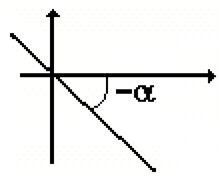
Çözüm: $d_1 : 2x - y + 2 = 0$ doğrusunda
$x = 0$ için $y = 2$ ve $y = 0$ için $x = -1$ yani $A(0, 2)$, $B(-1, 0)$ dir.
$d_2 : 4x + 3y - 12 = 0$ doğrusunda
$x = 0$ için $y = 4$ ve $y = 0$ için $x = 3$ yani $C(0, 4)$, $D(3, 0)$ dir. Buna göre aşağıdaki şekil çizilir.



Burada x'in katsayısına dikkat etmeliyiz. d_1 doğrusu $y = 2x + 2$ olup x'in katsayısı 2 yani pozitiftir. d_2 doğrusu $y = -\frac{4}{3}x + 4$ olup x'in katsayısı $-\frac{4}{3}$ yani negatiftir.

6.3. Tanım: Bir doğrunun saatin hareketinin ters yönünde yaptığı açıya pozitif yön, saatin hareket yönünde yaptığı açıya negatif yön denir. Bu durum





şekildeki gibidir. Yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi pozitif açının doğru denklemdeki x'in katsayısı pozitif, negatif yöndeki açının doğru denklemdeki x'in katsayısı negatiftir.

Örnek: 1. $y = 3x + 4$ fonksiyonunda x'in katsayısı $m = 3$,

2. $y = -x + 12$ fonksiyonunda x'in katsayısı $m = -1$,

3. $6x - 3y + 11 = 0$ fonksiyonu $y = 2x + \frac{11}{6}$ olacağından x'in katsayısı $m = 2$ dir.

İKİ DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

İki doğru veya eğri bir noktada kesişiyorsa bu iki doğru veya eğrinin kesiştiği nokta, denklemin çözüm kümesiyle mümkündür.

6.6. Teorem: $ax + by + c = 0$ ve $dx + ey + f = 0$ doğruları verilsin.

1. $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ ise bu iki doğru bir noktada kesişir.
2. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ise bu iki doğru birbirine çakışıktır.
3. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ ise bu iki doğru birbirine paraleldir.

İspat: 1. Birinci doğrunun eğimi $m_1 = -\frac{a}{b}$, ikinci doğrunun eğimi $m_2 = -\frac{d}{e}$ dir.

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$
$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{d}{e}$$
$$m_1 \neq m_2$$

eğimleri farklı olan iki doğru bir noktada kesişirler. //

Kesişen doğrular kesiştiği noktada aynı değerleri aldığını hatırlatmak gerekir. Yani, kesişen doğruların çözüm kümesi kesiştikleri noktayı verir.

2. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ise $a = d \cdot k$, $b = e \cdot k$, $c = f \cdot k$ yazılabilir. Buna göre bu iki denklem

$$\left.\begin{array}{r} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} kdx + key + kf = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} k(dx + ey + f) = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{array}\right\}$$

elde edilir. Burada k keyfi olduğundan bu iki doğrunun aynı doğru olduğunu gösterir. Öyleyse iki doğru birbirine çakışıktır.

3. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = k$ ise $a = d \cdot k$,$b = e \cdot k$
yazılabilir. Buna göre bu iki denklem

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} kdx + key + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} k(dx + ey) + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$k(-f) + c = 0$$
$$c = f \cdot k$$
$$k = \frac{c}{f}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Şu halde bu iki doğru birbirleriyle çakışmaz. Bu durum bu iki doğrunun hiçbir yerde çalışmadığını gösterir. Öyleyse bu iki doğru birbirlerine paraleldir.

Örnek: $ax - y = 5$ ve $4x + (a + 4)y = -5$ doğruları birbirine paralel ise a'nın değeri nedir?

Çözüm: $\frac{a}{4} = \frac{-1}{a+4} \neq \frac{5}{-5}$ dir. İlk iki eşitlikten

$$a^2 + 4a = -4$$
$$(a + 2)^2 = 0$$
$$a = -2$$

bulunur.

Örnek: $(m + 2)x + 4y - 6 = 0$ ve $3x - 2ny + 3 = 0$ doğruları çakışık ise m ve n'nin değeri nedir?

Çözüm: $\frac{m+2}{3} = \frac{4}{-2n} = \frac{-6}{3}$ birinci ile üçüncü denklemini çözersek $m + 2 = -6$ olup $m = -8$; ikinci ile üçüncü denklemi çözersek, $4 = 4n$ olup $n = 1$ bulunur.

Örnek: $2x - y - 5 = 0$ ve $x + y - 4 = 0$ doğruları birbirine bir noktada kesişiyorsa kesiştikleri noktayı bulunuz.

Çözüm: “İki doğrunun kesiştikleri noktanın koordinatları daima o iki doğrunun çözüm kümesine eşittir.” İki bilinmeyenli iki denklemi yok etme metoduyla çözelim. Önce taraf tarafa toplayalım.

$$2x - y - 5 = 0 \text{ ve } x + y - 4 = 0$$
$$3x - 9 = 0$$
$$x = 3$$

x i herhangi bir denklemde yerine yazarsak,

$$2 \cdot 3 - y - 5 = 0 \text{ ise } y = 1$$

bulunur. Buna göre bu iki doğrunun kesiştikleri nokta A(3; 1) dir. //

Şimdi verilmesi gereken bir teorem için biraz trigonometrik bilgiye ihtiyaç vardır. O bilgiler trigonometrik cetvele bakılarak bulunabilir. (bk trigonometri)

6.7. Teorem: $ax + by + c = 0$ ve $dx + ey + f = 0$ doğruların eğimleri m_1 ve m_2 olsun;

i) Bu iki doğru birbirlerine paralel ise $m_1 = m_2$ dir.

ii) Bu iki doğru birbirlerine dik ise $m_1 \cdot m_2 = -1$ dir.

İspat: 6.1 notta

$$\tan\ (a - b) = \frac{\tan\ a - \tan\ b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

olarak verilmiştir.

i) Eğitimleri m_1 ile m_2 olan doğrular birbirine paralel ilse aralarındaki açı 0^0 dir. $\tan 0 = 0$ olduğundan

$$\tan\ 0 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$
$$0 = m_1 - m_2$$
$$m_1 = m_2$$

bulunur.

ii) Eğitimleri m_1 ile m_2 olan ($m_1 \neq 0$ ile $m_2 \neq 0$) doğruları dik ise aralarındaki açı 90^0 dir. $\tan 90 = \pm\infty$ (belirsiz) olduğuna göre bu durumun olması için paydanın 0 olması gerekir.

$$\tan\ 90 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$
$$0 = 1 + m_1 \cdot m_2$$
$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

bulunur.

Örnek: A(–1, 3) , B(2, 12) , C(0,–2) ve D(1, k) ve |AB| // |CD| ise k'nın değeri nedir?

Çözüm: |AB| // |CD| ise |AB| doğrusunun |CD| doğrusuna eğimi eşittir.

$$m_{|AB|} = \frac{12-3}{2-(-1)} = 2 \text{ ve } m_{|CD|} = \frac{k-(-2)}{1-0} = k+2$$

$$3 = k+2$$

$$k = 1$$

Örnek: $5x + 3y + 10 = 0$ ve $3x - ky + 8 = 0$ doğruları birbirine dik ise k nın değeri nedir?

Çözüm: $m_1 = -\frac{5}{3}$ ve $m_2 = \frac{3}{k}$

$$m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{k}\right) = -1$$

$$k = 5$$

Örnek: $2x - 4y - 5 = 0$ doğruya paralel olan ve A(1, 2) noktasından geçen doğrunun denklemi nedir?

Çözüm: $2x - 4y - 5 = 0$ doğrusunun eğimi $m_1 = -\frac{1}{2}$ ve eğimleri eşit olacağından $m_2 = -\frac{1}{2}$ dir. Buna göre eğimi ve bir noktası bilinen doğrunun denklemi,

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$2y - x - 3 = 0$$

bulunur.

Örnek: $x - 3y + 10 = 0$ doğrusuna dik olan ve $A(1, -2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: $x - 3y + 10 = 0$ doğrusunun eğimi $m_1 = -\frac{1}{3}$ dür. $m_1 \cdot m_2 = -1$ olacağından $m_2 = -3$ bulunur. Buna göre eğimi ve bir noktası bilinen doğrunun denklemi,

$$y - (-2) = -3(x-1)$$

$$y = -3 + 1$$

elde edilir.

Örnek: Bir d doğrusu denklemi $2x - 3y + 15 = 0$ olan doğruya paralel ve denklemi

$$9x + (a-1)y - 11 = 0$$

olan doğruya diktir. Buna göre a'nın değeri nedir?

Çözüm: d doğrusunun eğimi m olsun. d doğrusu ile $2x - 3y + 15 = 0$ doğrusu paralel ise eğimleri eşit olmalıdır. Buna göre $m_2 = \frac{2}{3}$ dir.

$9x + (a-1)y - 11 = 0$ doğrusunun eğimi $-\frac{9}{a-1}$ olduğuna göre ve d doğrusu ile dik ise eğimler çarpımı -1'e eşittir. Şu halde $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{a-1}\right) = -1$ ise $a = 7$ dir.

Örnek: İki farklı doğru $a^2x^2 - y^2 = 0$ denklemi biçiminde verilsin. Buna göre doğrularının birbirine dik olması için a'nın alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm: $a^2x^2 - y^2 = 0$

$$(ax - y)(ax + y) = 0$$

$$y = ax \text{ veya } y = -ax$$

olup doğruların eğimleri a ve $-a$ dır. Doğruların birbirine dik olması için eğimleri çarpımı -1 olmalıdır. Şu halde,

$$a(-a) = -1$$

$$a^2 = 1$$

$$a = 1 \text{ veya } a = -1$$

elde edilir.

DOĞRUSAL FONKSİYONLARIN EŞİTSİZLİKLERİ (DOĞRUSAL BAĞINTI)

6.4. Tanım: $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx + n$ doğrusal fonksiyonu üzerinde tanımlı $f(x) > 0, f(x) < 0, f(x) \geq 0$ ve $f(x) \leq 0$ eşitsizliklerine doğrusal fonksiyonların eşitsizlikleri veya doğrusal bağıntı denir. Doğrusal fonksiyonların eşitsizlikleri,

i) $y < mx + n$ ve $y \leq mx + n$ ise doğrunun sağ bölgesini taramaktadır.
ii) $y > mx + n$ ve $y \geq mx + n$ ise doğrunun sol bölgesi taramaktadır.

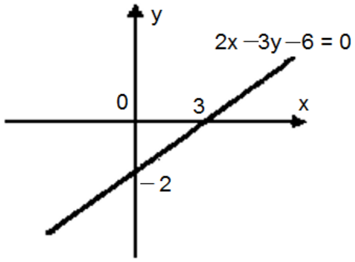
Örnek: $2x - 3y - 6 \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan (x, y) noktalarını analitik düzlemde bulunuz.

Çözüm: Önce $2x - 3y - 6 = 0$ doğrusunun grafiğini inceleyelim.

$x = 0$ ise $2 \cdot 0 - 3y - 6 = 0$ olup $y = -2$ yani $(0, -2)$

$y = 0$ ise $2x - 3 \cdot 0 - 6 = 0$ olup $x = 3$ yani $(3, 0)$

elde edilir. Bu doğrunun grafiği aşağıdaki şekildedir.

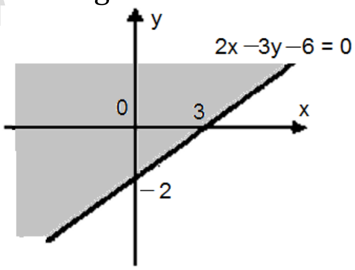


Şekilde gördüğünüz gibi $2x - 3y - 6 = 0$ doğru iki yarı düzleme ayrılmıştır. İstenen noktalar bu yarı düzlemlerden birisidir. Bunu bulmak için herhangi bir nokta seçelim. Bu noktanın koordinatlarının verilen eşitsizliği sağlayıp sağlamadığına bakalım. Eğer doğru $O(0,0)$ notasından geçmiyorsa, bu işlem için $O(0,0)$ tercih edilir. Farklı bir başka noktada tercih edilebilir.

$O(0,0)$ noktası $2x - 3y - 6 \leq 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 6 \leq 0$ ise $-6 \leq 0$

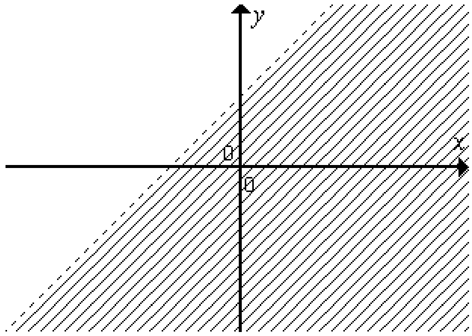
elde edilir. Bu önerme doğru olduğundan aranan yarı düzlem $O(0,0)$ noktasının olduğu yarı düzlemdir. Buna göre istenen noktaların kümesi,



şeklindedir.

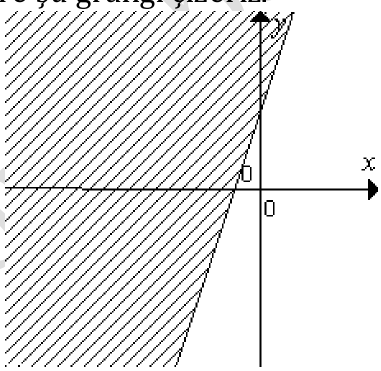
Örnek: $y < x + 2$ doğrusal fonksiyonların eşitsizliğinin taradığı bölgeyi bulunuz.

Çözüm: Öncelikle $y = x + 2$ doğrusal fonksiyonun grafiği çizilir. Sonra $y < x + 2$ doğrusal fonksiyonların eşitsizliğinin taradığı bölgeyi bulabilmek için herhangi bir noktanın o bölgede olup olmadığı tespit edilir. Burada orijin $O(0,0)$ noktasını alalım. $0 < 0 + 2$ işlemi doğru olacağından $O(0,0)$ noktası taranmalıdır. Buna göre şu grafiği çizeriz.



Örnek: $y \geq 2x + 3$ doğrusal fonksiyonların eşitsizliğinin taradığı bölgeyi bulunuz.

Çözüm: Öncelikle $y = 2x + 3$ doğrusal fonksiyonun grafiği çizilir. Sonra $y \geq 2x + 3$ doğrusal fonksiyonların eşitsizliğinin taradığı bölgeyi bulabilmek için herhangi bir noktanın o bölgede olup olmadığı tespit edilir. Burada orijin $O(0,0)$ noktasını alalım. $0 \geq 2 \cdot 0 + 3$ işlemi yanlış olacağından $O(0,0)$ noktası taranmamalıdır. Buna göre şu grafiği çizeriz.



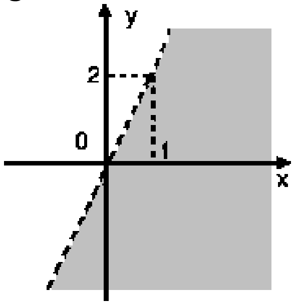
Örnek: $2x - y > 0$ eşitsizliğini sağlayan (x, y) noktalarını analitik düzlemde bulunuz.

Çözüm: $x = 0$ ise $2 \cdot 0 - y = 0$ olup $y = 0$ yani $(0,0)$
$x = 1$ ise $2 \cdot 1 - y = 0$ olup $y = 2$ yani $(1,2)$

Verileri elde edilir. Ayrıca $O(0,0)$ noktası bu doğrudan geçtiğinden biz başka bir noktayı almalıyız. $(1, 1)$ noktasını tercih edebiliriz. Buna göre,

$$2x - y > 0 \text{ için } 2 \cdot 1 - 1 > 0 \text{ olup } 1 > 0$$

elde edilir. Bu önerme doğru olduğundan aranan yarı düzlem (1, 1) noktasının olduğu yarı düzlemdir. Buna göre istenen noktaların kümesi,



şeklindedir. Bu şekilde doğru kesik kesik çizilmiştir. Bunun sebebi doğrunun denkleminde eşitlik olmayıp sadece eşitsizliğin olmasıdır.

Örnek: $2x - y + 2 \geq 0$ ve $4x + 3y - 12 \leq 0$ doğrularının oluşturduğu grafiği çiziniz.

Çözüm: $2x - y + 2 = 0$ doğrusunda $x = 0$ için $y = 2$ ve $y = 0$ için $x = -1$ olup $A(0,2), B(-1,0)$ dir.

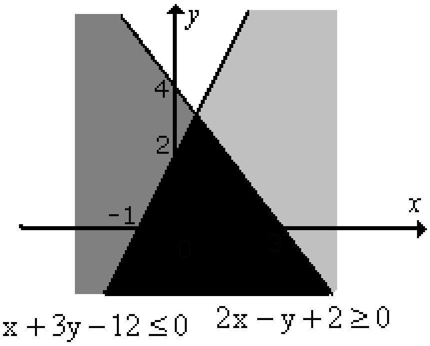
İkinci doğru $4x + 3y - 12 = 0$ doğrusunda $x = 0$ için $y = 4$ ve $y = 0$ için $x = 3$ olup $C(0,4), B(3,0)$ dir.

Bu iki doğruda $O(0,0)$ noktasının eşitsizliklerde olup olmadığını inceleyelim.

$2x - y + 2 \geq 0$ için $2 \cdot 0 - 0 + 2 \geq 0$ ise $2 \geq 0$ doğrudur

$4x + 3y - 12 \leq 0$ için $4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12 \leq 0$ ise ise $-12 \leq 0$ doğrudur

Buna göre her iki doğruda da $O(0,0)$ noktası dahil edilmelidir.



$2x - y + 2 \geq 0$ doğrusu açık koyu renkle, $4x + 3y - 12 \leq 0$ doğrusu yarı koyu renkle, iki denklemin kesiştiği yer siyah renkle taranmıştır.

6.3. Not: Bu bölümde doğrusal fonksiyonlar hakkında bilgi verdik. Analitik geometri derslerinde doğrunun analitiği konusunda doğrunun analitiği incelencektir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Doğrusal Fonksiyonların İşlemleri

1. $f(x)$ doğrusal fonksiyonu için $f(1) = 8, f(3) = 12$ ise $f(3)$ kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm: $f(x)$ doğrusal fonksiyon olduğundan $f(x) = ax + b$ biçimindedir.

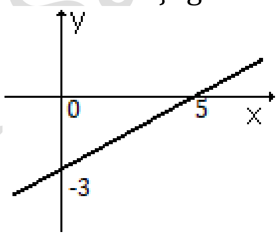
$$\left.\begin{aligned} f(1) = a \cdot 1 + b = 8 \\ f(3) = a \cdot 3 + b = 12 \end{aligned}\right\} a = 2, b = 6$$

dir. Buna göre verilen denklem $f(x) = 2x + 6$ olur.

$f(3) = 2 \cdot 2 + 6 = 10$

Cevap: D

2. Şekildeki doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



A) $3x + 5y + 15 = 0$ B) $-3x - 5y + 15 = 0$
C) $3x + 5y - 15 = 0$ D) $-3x + 5y + 15 = 0$
E) $3x - 5y + 15 = 0$

Çözüm: Verilen doğrusal fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar $x = 5$ ve $y = -3$ olduğuna göre,

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$$

$$-3x + 5y + 15 = 0$$

olur.

Cevap: C

3. A(4; 3) noktasını başlangıç noktasına birleştiren doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3x + 4y = -2$ B) $3x + 4y = 0$ C) $3x - 4y = 2$
D) $-3x + 4y = 2$ E) $3x - 4y = 0$

Çözüm: A(4; 3) ve B(0; 0) noktalarından geçen doğrunun denklemi,

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{3-0}{4-0}$$

$$3x - 4y = 0$$

elde edilir.

Cevap: E

4. $y = (a-1)x - 6$ doğrusunun $5x - y + 8 = 0$ doğrusuna paralel olması için a'nın değeri ne olmalıdır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

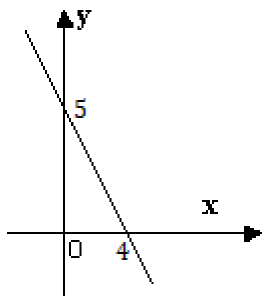
Çözüm: $y = (a-1)x - 6$ doğrusunun eğimi $m = a - 1$ ve $5x - y + 8 = 0$ doğrusunun eğimi $m = 5$ olduğuna göre, paralel iki doğrunun eğimleri eşit olmasından,

$$a - 1 = 5$$
$$a = 6$$

dür.

Cevap: A

5.



Şekildeki doğrunun eğimi aşağıdaki değerlerden hangisidir?

A) $\frac{4}{5}$ B) $-\frac{4}{5}$ C) $-\frac{5}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) 1

Çözüm: Verilen şekle göre A(4,0) , B(0,5) şeklinde olsunlar. Burada $x_1 = 4, y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = 5$ seçilirse eğim formülü gereğince,

$$m = \frac{4-0}{0-5} = -\frac{4}{5}$$

olur.

Cevap: B

6. $8x + 5y + 6 = 0$
$10x + ky - 3 = 0$
doğruların dik olması için k'nin değeri aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

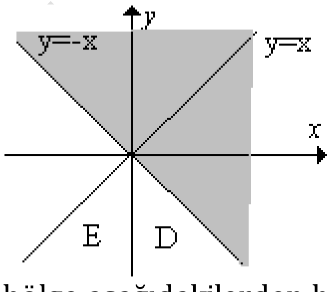
A) 16 B) 14 C) 12 D) 10 E) 8

Çözüm: İki doğru birbirine dik olması için eğimleri çarpımı –1 olmalıdır.

$$m_1 = -\frac{8}{5} \text{ ve } m_2 = \frac{10}{k}$$
$$m_1 \cdot m_2 = -1$$
$$-\frac{8}{5} \cdot \frac{10}{k} = -1$$
$$k = 16$$

Cevap: A

7.



Şekilde verilere göre taralı bölge aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y > x$ B) $y \geq -x$ C) $y > -x$ D) $y < x$ E) $y \leq x$

Çözüm: $y = -x$ doğrusu bölgenin içindedir. Ayrıca (2, 1) noktası taralı bölge içinde olduğuna göre $1 \geq -2$ doğrudur.

Cevap: B

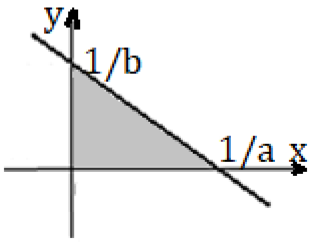
8. $a > 0$ ve $b > 0$ olmak koşuluyla, $ax + by = 2$ doğrusunun, koordinat eksenleri ile meydana getirdiği üçgenin alanının $\frac{1}{8}$ birim kare olması için, $a \cdot b$ çarpımının değeri ne olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $ax + by = 2$

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} + \frac{y}{\frac{1}{b}} = 1$$

olacağından x eksenini $\frac{1}{a}$ noktasında y eksenini $\frac{1}{b}$ noktasında kesmektedirler. Şu halde aşağıdaki grafik çizilir.



grafiği elde edilir. Öyleyse oluşan bu üçgenin alanı,

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$a \cdot b = 4$$

olarak bulunur.

Cevap: D

9. $A(-2,3), B(k,5), C(10,6)$ noktaları veriliyor. C noktası AB doğrusu üzerinde olduğuna göre k kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: C noktası $|AB|$ doğrusu üzerinde ise $|AB|$ doğrusunun eğimi $|AC|$ doğrusunun eğimi ile aynı olacağından;

$$m_{|AC|} = \frac{6-3}{10-(-2)} = \frac{1}{4} \text{ ve } m_{|AB|} = \frac{5-3}{k-(-2)} = \frac{1}{4}$$

$$k = 6$$

bulunur.

Cevap: E

10. $A(5,2), B(2,-1)$ ve $C(k,0)$ noktaları veriliyor. $|AB|+|BC|$ nin en küçük olması için k kaç olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

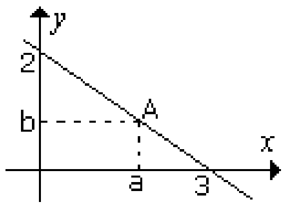
Çözüm: $|AB|+|BC|$ nin en küçük olması için A, B ve C noktaları aynı doğru üzerindedir. O zaman $|AB|$ doğrusu ile $|BC|$ doğrusunun eğimleri aynı olmalıdır. Buna göre,

$$\frac{-1-2}{2-5}=\frac{0-(-1)}{k-2} \text{ ise } k=3$$

olur.

Cevap: C

11.



Dik koordinat sisteminde A(a, b) noktasından geçen bir doğru x−eksenini apsisi 2 olan y−eksenini de ordinatı 3 olan noktada kesmektedir. Buna göre $2a+3b$ ifadesinin değeri nedir?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: Doğru denklemi $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ olduğuna göre, A(a, b) noktasını bu denklem sağlamaktadır.

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=1 \text{ ise } 2a+3b=6$$

Cevap: C

12. $5x+3y=41$ ve $3x+7y=35$ doğrularının kesim noktasının koordinatlarının toplamını nedir?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) 15

Çözüm: İki doğrunun kesim noktaları o doğruların çözüm kümesidir.

$$\left.\begin{array}{l} 7/ \quad 5x+3y=41 \\ -3/ \quad 3x+7y=35 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 35x + 21y = 287 \\ -9x - 21y = -105 \end{array}\right\}$$

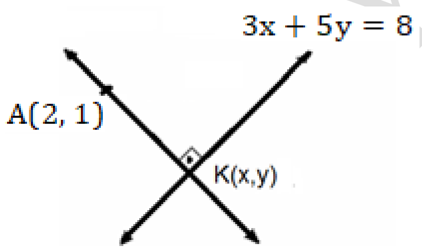
$x = 7, y = 2$
$x + y = 9$

Cevap: A

13. A(2, 1) noktası $3x + 5y = 8$ doğruna en yakın noktadan geçtiğine göre, A(2, 1) noktasından geçen doğrunun denklemi nedir?

A) $3y + x - 4 = 0$ B) $3y - x + 4 = 0$ C) $-3y + x + 4 = 0$
D) $3y + x + 4 = 0$ E) $3y - x - 4 = 0$

Çözüm: Bir noktanın bir doğruya en yakın olması için o noktadan geçen doğruya dik olmalıdır.



Verilen doğrunun eğitimi $m_1 = -\frac{3}{5}$ dir. Buna göre,

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$
$$-\frac{3}{5} \cdot m_2 = -1$$
$$m_2 = \frac{5}{3}$$

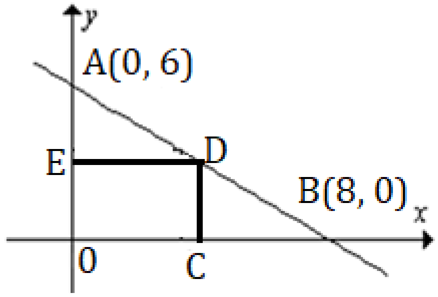
olur. Eğimi ve bir noktası bilindiğine göre,

$$y - 1 = \frac{5}{3}(x - 1)$$
$$3y - x - 4 = 0$$

bulunur.

Cevap: E

14. A(0, 6) ve B(8, 0) noktalarından bir doğru geçmektedir?



$|DC| = 2|ED|$ ise E noktasının oordinatı nedir?

A) 2,1 B) 2,4 C) 2,5 D) 2,7 E) 2,8

Çözüm: Verilen doğrunun denklemi,

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1 \text{ ise } 3x + 4y = 24$$

olur. $|DC| = 2m$ alınırsa $|ED| = m$ olacaktır. Buna göre $D(2m, m)$ dir. Bu nokta doğru denklemini sağlayacağından,

$$3 \cdot 2m + 4 \cdot m = 24$$
$$m = 2{,}4$$

olur.

Cevap: B

15. $kx + y - 4 = 0$
$6x + (k+1)y - 12 = 0$

denklemleriyle verilen doğrular paralel olduğuna göre, k'nın değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

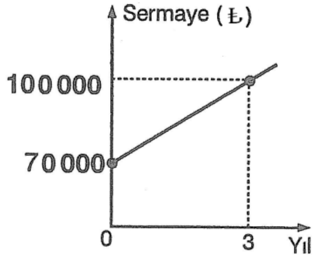
Çözüm: Doğrular paralel ise koordinat katsayıları birbirine eşittir.

$$\frac{k}{6} = \frac{14}{k+1}$$
$$k^2 + k - 6$$
$$(k-3)(k+2) = 0$$
$$k = 3 \text{ ve } k = -2$$

Cevap: D

Doğrusal Fonksiyonların Uygulaması

16.



Yukarıdaki şekilde, bir işletmenin yıllara göre sermayesinin grafiği verilmiştir. Buna göre, kaçıncı yılda bu işlemenin sermayesi 150 000 ₺ olacaktır.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: Başlangıçtaki nokta (0, 70 000), 3 yıl sonra (3, 100 000) noktasına ulaşmıştır. Bu iki noktadan geçen doğrunun denklemi;

$$\frac{y-70\ 000}{x-0}=\frac{100\ 000-70\ 000}{3-0}$$

$$y=10\ 000x+70\ 000$$

fonksiyonu elde edilir. Sermayenin 150 000 ₺ olması için

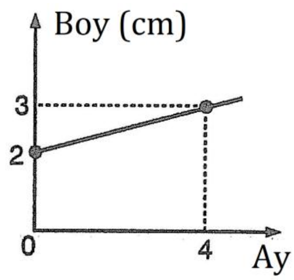
$$150\ 000=10\ 000x+70\ 000$$

$$x=8 \text{ yıl}$$

olması gerekir.

Cevap: E

17.



Yukarıdaki grafikte, toprağa dikilen bir bitkinin aylara göre boy uzunluğunun grafiği verilmiştir. Buna göre, 24. ayda bu bitkinin boyu kaç cm olur?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Başlangıçtaki nokta (0, 2), 4 ay sonra (4, 3) noktasına ulaşmıştır. Bu iki noktadan geçen doğrunun denklemi;

$$\frac{y-2}{x-0}=\frac{3-2}{4-0}$$

$$4y-x-8=0$$

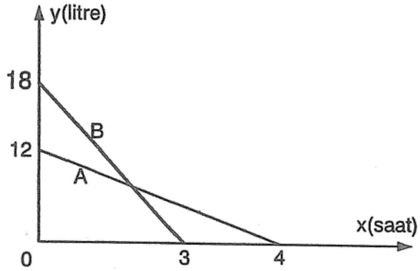
fonksiyonu elde edilir. $x=24$ ise

$$4y-24-8=0$$
$$y=8\text{ cm}$$

olur.

Cevap: D

18. Aşağıdaki grafikte, A ve B araçlarının yolda geçen süreye göre depolarında kalan benzin miktarını göstermektedir.



Buna göre, araçlar harekete geçtikten kaç saat sonra, iki aracın depolarında eşit miktarda benzin olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: A aracının doğru denklemi x eksenini 4'de, y eksenini 12'de kesmektedir. B aracının doğru denklemi x eksenini 3'de, y eksenini 18'de kesmektedir. Bu doğruların denklemleri çözülerek;

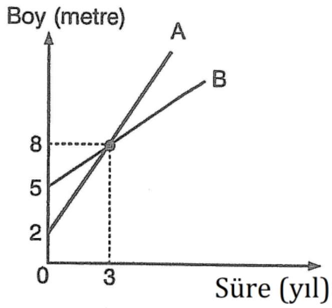
$$\frac{x}{4}+\frac{y}{12}=1 \text{ ve } \frac{x}{3}+\frac{y}{18}=1$$

$$\left.\begin{matrix}3x+y=12\\6x+y=18\end{matrix}\right\} x=2\text{ sa.}$$

elde edilir.

Cevap: B

19. Aşağıda, toprağa dikilen A ve B bitkilerin aylara göre boy uzunluklarının grafiği verilmiştir.



Buna göre, kaç yıl sonra iki bitkinin boyları farkı 9 metre olur?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: A bitkisinin noktaları $(0, 2)$ ve $(3, 8)$ dir ve B bitkisinin noktaları $(0, 5)$ ve $(3, 8)$ dir. Bu noktalardan geçen doğruların denklemi;

$$\frac{y-2}{x-0} = \frac{8-2}{3-0} \text{ ve } \frac{y-5}{x-0} = \frac{8-5}{3-0}$$

$$y = 2x + 2 \text{ ve } y = x + 5$$

fonksiyonları elde edilir.

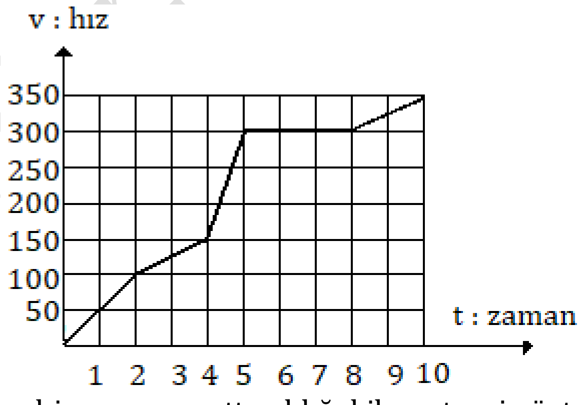
$$(2x + 2) - (x + 5) = 9$$

$$x = 12 \text{ yıl}$$

olur.

Cevap: C

20.



Yukarıdaki grafikte, bir aracın saatte aldığı kilometreyi göstermektedir. Aracın en hızlı gittiği zaman aralığı hangisidir?

A) $4 \leq t \leq 5$ B) $1 \leq t \leq 2$ C) $8 \leq t \leq 10$
D) $2 \leq t \leq 4$ E) $5 \leq t \leq 8$

Çözüm: Aracın hızının en yüksek olduğu an çizgilerin dikeye en yakın olduğu $4 \leq t \leq 5$ zaman aralığıdır.

Cevap: A

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.