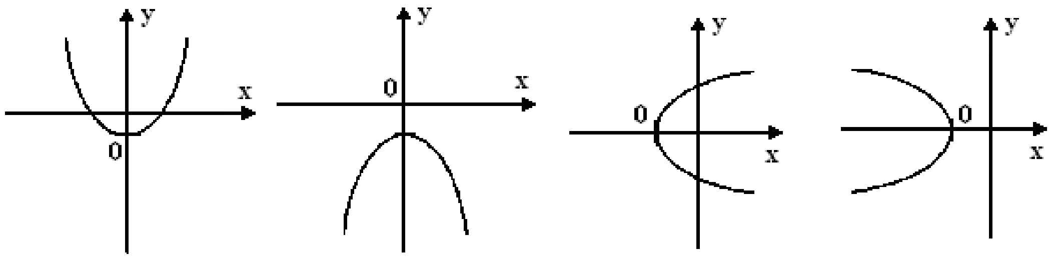
7. BÖLÜM
İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR

İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR

7.1. Tanım: $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlara ikinci dereceden fonksiyon denir. İkinci dereceden fonksiyonun grafiğine parabol adı verilir.



gibi şekiller birer parabollerdir. 1. ve 2. şekil fonksiyon iken 3. ve 4. ters fonksiyonun grafikleridir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

i) $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$

ii) $f(t) = 3t^2 - 8t$

iii) $f(m) = 3m^2 + 10$

iv) $y = \sqrt{5}x^2 + 3x + 12$

ifadeleri birer ikinci dereceden fonksiyonlardır. //

Parabol üzerinde bulunan herhangi bir noktanın koordinatları parabol denklemini sağlar.

Örnek: $y = f(x) = 2x^2 - 3x + m - 1$ parabolü $A(-1,2)$ noktasından geçmektedir. Buna göre, m'nin değerini bulalım.

Çözüm: Verilen parabol, $A(-1,2)$ noktasından geçtiğinden, bu noktaların koordinatları parabol denklemini sağlar.

$x = -1$ için $y = 2$ olur.
$y = 2x^2 - 3x + m - 1$
$2 = 2(-1)^2 - 3(-1) + m - 1$
$m = -2$

7.2. Tanım: x eksenine göre parabolün en alt ya da en üst nokrasına tepe noktası denir.

7.1. Teorem: $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$
ikinci dereceden fonksiyonun tepe noktalarının koordinatları $T(r, k)$ ile gösterirsek,

$$T(r,k) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

biçimindedir. O halde $r = -\frac{b}{2a}$ ve $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$ şeklindedir.

İspat: Tepe noktasının x eksenindeki değeri r ile gösterilirse, x eksenini $x_1$ve x_2 noktalarında kesişeceğinden,

$$\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a} = r$$

bulunur. Şimdi k değerini bulalım.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \\ &= a\left(x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $r = -\frac{b}{2a}$ ve $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$ alınırsa, bu sayıların en üst ve en az noktaları olup olmadıklarını inceleyelim.

Eğer $a > 0$ ise $a(x-r)^2 \geq 0$ olur. Buradan her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = a(x-r)^2 + k \geq k$ elde edilir. Bulunan bu k değeri görüntü kümesinin en küçük elemanıdır.

Eğer $a < 0$ ise $a(x-r)^2 \leq 0$ olur. Buradan her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = a(x-r)^2 + k \leq k$ elde edilir. Bulunan bu k değeri görüntü kümesinin en büyük elemanıdır.

7.1. Sonuç: $a > 0$ ise tepe noktası en az noktayı aldığından parabolün kolları yukarı doğru, $a < 0$ ise tepe noktası en üst noktayı aldığından parabolün kolları aşağı doğrudur. //

Şimdi ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin (parabolün) çizilmesini görelim: $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin çizimi için üç önemli nokta vardır. Bunlar; eksenleri kestiği noktalar, tepe noktası ve a'nın işaretidir.

1. Eksenleri kestiği noktalar, $x = 0$ ve $y = 0$ yazılarak bulunur.

2. Tepe noktasının koordinatlarını $T(r, k)$ ile gösterirsek,

$$r = -\frac{b}{2a} \text{ ve } k = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

ile bulunur.

3. $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı doğru, $a < 0$ ise parabolün kolları aşağı doğrudur.

7.1. Not: Fonksiyon tanımı gereği $k = f(r)$ olup $k = f(r) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ biçiminde k iki türlü bulunur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x - 5$ fonksiyonun grafiğini çizelim.

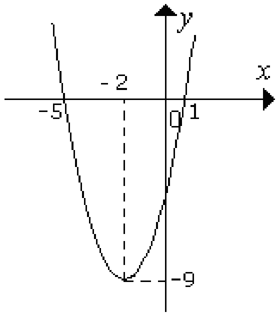
Çözüm: Şimdi üç hamleyi gerçekleştirelim.

1. $x = 0$ ise $y = f(0) = -5$ ve $y = 0$ ise $x^2 + 4x - 5 = 0, x_1 = -5, x_2 = 1$ bulunur.

2. $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2.1} = -2$ ve $k = f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 5 = -9$

yani, $T(-2,-9)$ elde edilir.

3. $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.

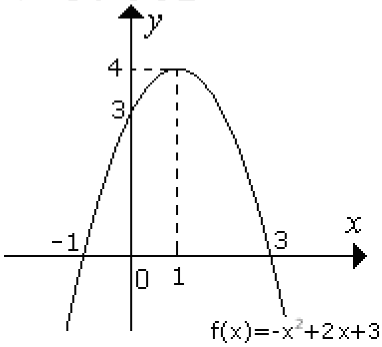


Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm: 1. Parabolün eksenleri kestiği noktalar,
$x = 0$ ise $y = 3$ ve $y = 0$ ise $-x^2 + 2x + 3 = 0, x_1 = -1, x_2 = 3$
$A(0,3), B(-1,0), C(3,0)$

2. $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = 1$ ve $k = f(1) = 4$ olup $T(1, 4)$ dir.

3. $a = -1 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.



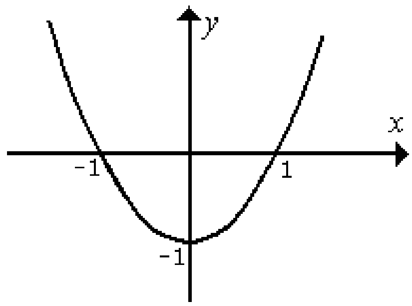
Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm: 1. Parabolün eksenleri kestiği noktalar,
$x = 0$ ise $y = -1$ ve $y = 0$ ise $x^2 - 1, x_1 = -1, x_2 = 1$
$A(0,-1), B(-1,0), C(1,0)$
bulunur.

2. $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0$ ve $k = f(0) = (0)^2 - 1 = -1$

yani, $T(0, -1)$ elde edilir.

3. $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.

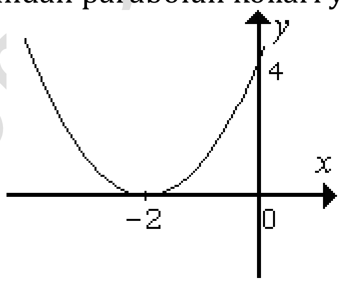


Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 4$ fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm: 1. Parabolün eksenleri kestiği noktalar,
$x = 0$ ise $y = 4$ ve $y = 0$ ise $x^2 + 4x + 4 = 0, x_1 = x_2 = -2$
$A(0, 4)$, $B(-2, 4)$
bulunur.

2. $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$ ve $k = f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = 0$
yani, $T(-2, 0)$ elde edilir.

3. $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.



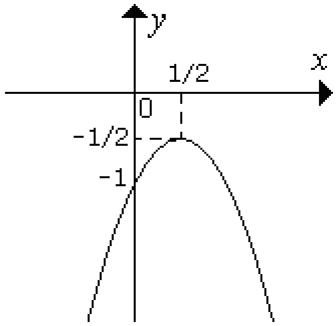
Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = -2x^2 + 2x - 1$ fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm: 1. Parabolün eksenleri kestiği noktalar,
$x = 0$ ise $y = -1, A(0, -1)$ ve $y = 0$ ise $-x^2 + 2x - 1 = 0$
denkleminin reel kökü yoktur. Çünkü, $\Delta = -4 < 0$ dır.

2. $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{2}$ ve $k = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2}$

yani, $T\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ elde edilir.

3. $r = -2 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.



Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - |x| - 2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Bu fonksiyonu $x > 0$ ve $x < 0$ olmak üzere 2 aşamada çözeriz.

$x > 0$ ise $f(x) = x^2 - x - 2$ ve $x < 0$ ise $f(x) = x^2 + x - 2$

i) $f(x) = x^2 - x - 2$ için,

1. $x = 0$ ise $y = f(0) = -2$ ve $y = 0$ ise $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = 2, x_2 = -1$ bulunur.

2. $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$ ve $k = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{9}{4}$
yani $T\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ elde edilir.

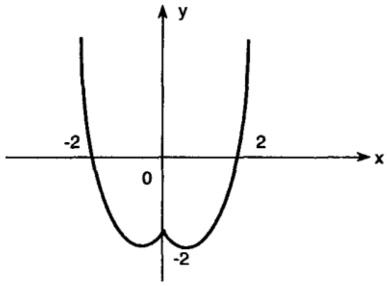
3. $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.

ii) $f(x) = x^2 + x - 2$ için,

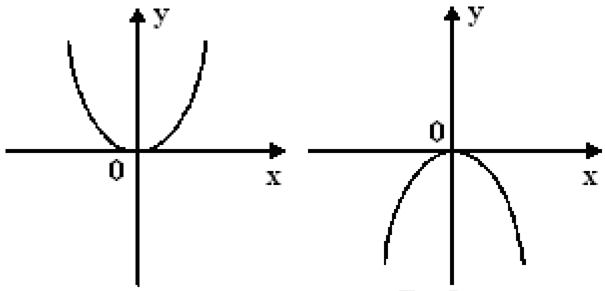
1. $x = 0$ ise $y = f(0) = -2$ ve $y = 0$ ise $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = -2, x_2 = 1$ bulunur.

2. $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}$ ve $k = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{9}{4}$
yani $T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ elde edilir.

3. $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.



7.3. Sonuç: $y = ax^2$ fonksiyonu biçiminde ise fonksiyon $O(0,0)$ noktasından geçer.



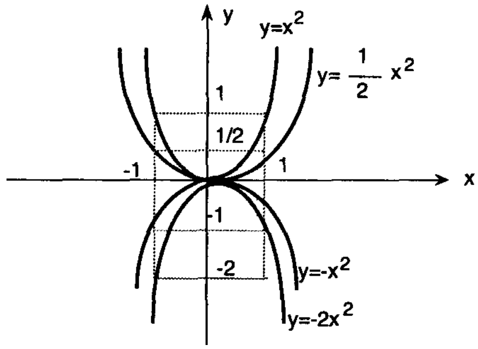
$a > 0$ ise 1. şekil, $a < 0$ ise 2. şekil gibidir.

7.3. Sonuç:

1. $a > 0$ iken, a büyüdükçe parabolün kolları y eksenine yaklaşır, a küçüldükçe parabolün kolları y ekseninden uzaklaşır.

2. $a < 0$ iken, a büyüdükçe parabolün kolları y eksenine uzaklaşır, a küçüldükçe parabolün kolları y ekseninden yaklaşır.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ye tanımlı, $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = -x^2$, $f_4(x) = -2x^2$ fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiziniz.

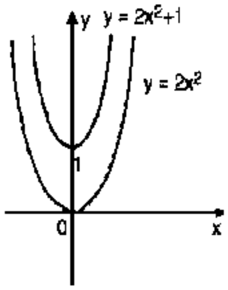


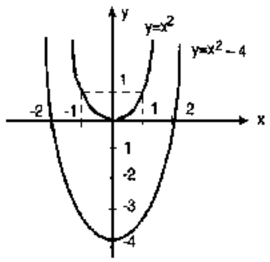
7.4. Sonuç: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + c$ fonksiyonunun grafiği;

i) $c > 0$ ise $f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin pozitif yönünde c birim kayar.

ii) $c < 0$ ise $f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin negatif yönünde $|c|$ birim kayar.

Örnek:





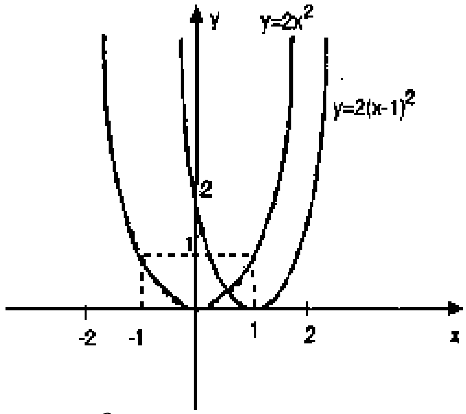
1. şekil $y = 2x^2$ ve $y = 2x^2 + 1$ fonksiyonundur. 2. şekil $y = 2x^2$ ve $y = 2x^2 - 4$ fonksiyonundur.

7.5. Sonuç: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - r)^2$ fonksiyonunun grafiği;

i) $r > 0$ ise $f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin pozitif yönünde r birim kayar.

i) $r > 0$ ise $f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin negatif yönünde r birim kayar.

Örnek:



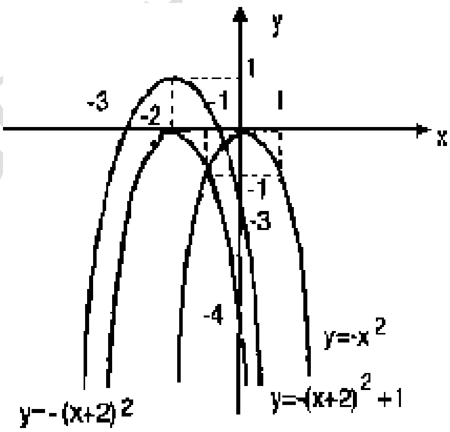
Şekil $y = 2x^2$ ve $y = 2(x-1)^2$ fonksiyonundur.

7.6. Sonuç: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a(x-r)^2 + k$ fonksiyonunun grafiği;

i) $k > 0$ ise $f(x) = a(x-r)^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin pozitif yönünde k birim kayar.

i) $k < 0$ ise $f(x) = a(x-r)^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin pozitif yönünde $|k|$ birim kayar.

Örnek:



Şekil $y = -x^2$, $y = -(x+1)^2$ ve $y = -(x+2)^2 + 1$ fonksiyonundur.

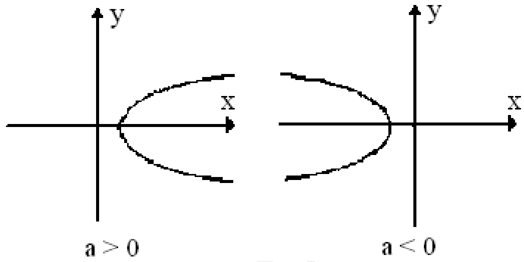
7.7. Sonuç: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda;
1. $\Delta > 0$ ise parabol x eksenini farklı iki noktada keser,
2. $\Delta = 0$ ise parabol x eksenine teğettir,

3. $\Delta < 0$ ise parabol x eksenini kesmez ve teğet olamaz. (Yukarıdaki örneklerde bu sonuç gözükmektedir.)

İKİNCİ DERECEDEN TERS FONKSİYONLAR

İkinci dereceden fonksiyonlarında belirli aralıkta ters fonksiyonları mevcuttur. Şimdi ikinci dereceden ters fonksiyonların grafiklerini çizmeyi öğrenelim. Tersi de aynı işlemlerle gerçekleşir. Yalnız işlemleri yaparken x ve y'nin yer değiştiğini unutmamak gerekir. Ayrıca,

1. $x = ay^2 + by + c$ fonksiyonunun grafiği $a > 0$ ise parabolün kolları x ekseninin pozitif yönünde (sağa doğru), $a > 0$ ise parabolün x ekseninin kolları negatif yönündedir (sola doğrudur).



2. Tepe noktasının koordinatlarını T(k, r) ile gösterirsek,

$$r = -\frac{b}{2a} \text{ ve } k = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

ile bulunur.

Örnek: $x = 2y^2$ parabolünün grafiğini çiziniz.

Çözüm: 1. Parabolün eksenleri kestiği noktalar,

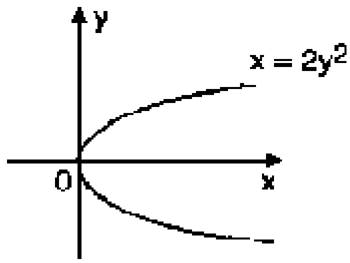
$y = 0$ ise $x = 0$ ve $y = 1$ ise $x = 2$

A(0, 0) , B(1, 2)

bulunur.

2. $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0$ ve $k = f(0) = 0$ yani, $T(0,0)$ elde edilir.

3. $a = 2 > 0$ olduğundan parabolün kolları sağa doğrudur.

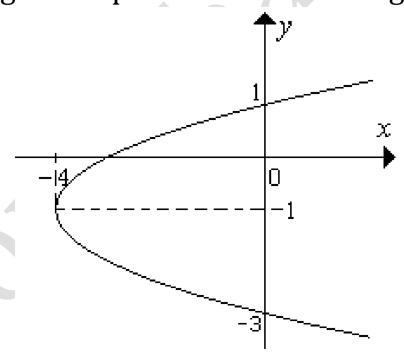


Örnek: $x = y^2 + 2y - 3$ fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm: 1. Parabolün eksenleri kestiği noktalar,
$y = 0$ ise $x = -3$ ve $x = 0$ ise $y^2 + 2y - 3 = 0$, $y_1 = 1, y_2 = -3$
$A(-3, 0), B(0, 1), C(0, -3)$
bulunur.

2. $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$ ve $k = f(-1) = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4$
yani, $T(-4, -1)$ elde edilir.

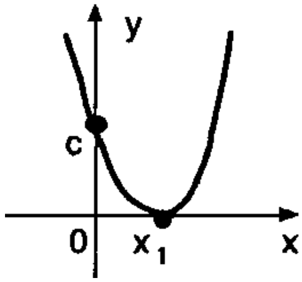
3. $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları sağa doğrudur.



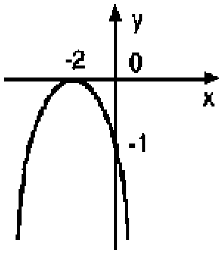
PARABOL DENKLEMİ İLE İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLERİN BULUNMASI

1. Parabol x Eksenine Teğet İse

Verilen parabol x eksenini iki noktada kesiyorsa
$$y = a(x - x_1)^2$$
biçimindedir.



Örnek:



şekildeki parabolün denklemi nedir?

Çözüm: Parabolün x eksenini kestiği noktaların apsisleri $x_1 = -2$ olduğundan, parabolün denklemi,

$$y = a(x - 2)^2$$

olur. Bu parabolün y eksenini kestiği nokta $(0, -1)$ olduğundan

$$-1 = a(0 - 2)^2 \text{ ise } a = -\frac{1}{4}$$

bulunur. Buna göre parabolün denklemi,

$$y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$$

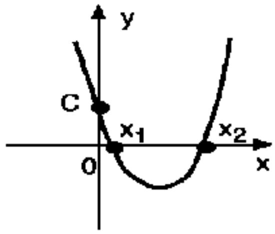
elde edilir.

2. Parabol x Eksenini İki Noktada Kesiyorsa

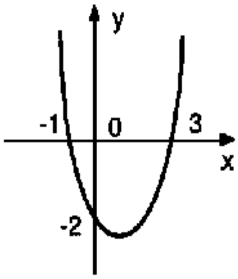
Verilen parabol x eksenini iki noktada kesiyorsa

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

biçimindedir.



Örnek:



şekildeki parabolün denklemi nedir?

Çözüm: Parabolün x eksenini kestiği noktaların apsisleri $x_1 = -1$ ve $x_2 = 3$ olduğundan, parabolün denklemi,

$$y = a(x+1)(x-3)$$

olur. Bu parabolün y eksenini kestiği nokta $(0,-2)$ olduğundan

$$-2 = a(0-1)(0-3) \text{ ise } a = \frac{2}{3}$$

bulunur. Buna göre parabolün denklemi,

$$y = \frac{2}{3}(x+1)(x-3)$$

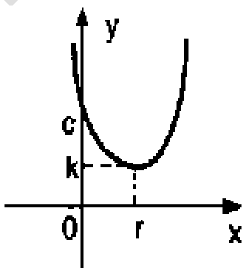
elde edilir.

3. Parabol Tepe Noktası Biliniyorsa

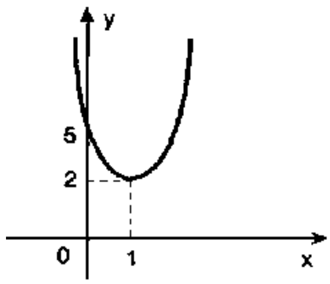
Verilen parabolün tepe noktada biliniyorsa

$$y = a(x-r)^2 + k$$

biçimindedir.



Örnek:



şekildeki parabolün denklemi nedir?

Çözüm: Parabolün tepe noktası (1, 2) dir. Parabolün denklemi

$$y = a(x-1)^2 + 2$$

Ayrıca parabol $(0,5)$ noktasından geçtiğinden,

$$5 = a(x-1)^2 + 2 \text{ ise } a = 3$$

olur. Buna göre parabolün denklemi

$$y = 3(x-1)^2 + 2 = 3x^2 - 6x + 5$$

dir.

4. Parabolün Herhangi Üç Noktası Bilinen Denklemi

Parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ ise verilen koordinatları denklemde yerine yazılarak denklem elde edilir.

Örnek: $A(0,6), B(1,0), C(4,6)$ noktalardan geçen parabolün denklemi nedir?

Çözüm: Parabolün denklemi $f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun. A, B, C noktaları denklemi sağladığından,

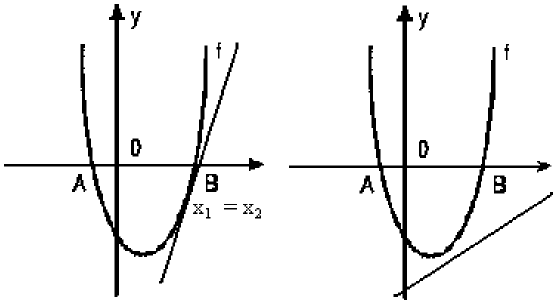
$A(0,6)$ için $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6$ ise $c = 6$
$B(1,0)$ için $f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$ ise $a + b + 6 = 0$
$C(4,6)$ için $f(4) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 6$ ise $16a + 4b + 6 = 6$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $a = 2, b = -8$ bulunur. Buna göre parabolün denklemi $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ dir.

PARABOL İLE DOĞRULARIN BİRBİRLERİNE GÖRE DURUMLARI

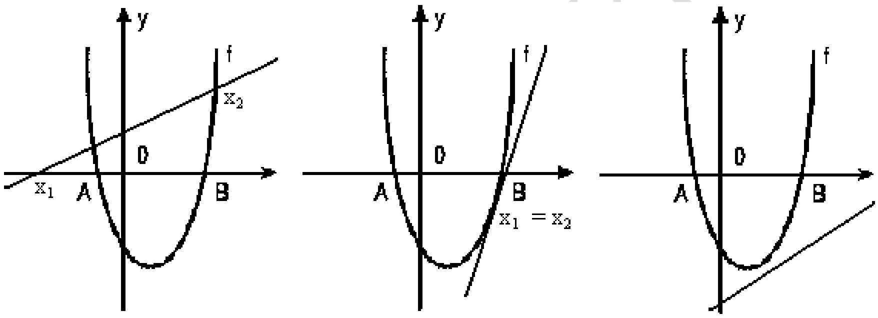
7.3. Tanım: İki eğri en az bir noktada kesişiyorsa bu iki eğri teğettir denir.

Örnek:



Verilen şekle göre 1. şekilde parabol doğruya bir noktada teğettir, 2. şekilde parabol ve doğru hiçbir yerde teğet değildir.

7.2. Teorem: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = g(x) = mx + n$ doğrusunun durumunu belirtmek için ortak çözümden yararlanır. $f(x) = g(x)$ ortak denkleminde;



i) $\Delta > 0$ ise parabol ile doğru farkı iki noktada kesişirler,
ii) $\Delta = 0$ ise doğru parabole teğettir,
iii) $\Delta < 0$ ise parabol ile doğru kesişmezler.

İspat: $f(x) = g(x)$ ortak denklemi varsa,

$$ax^2 + bx + c = mx + n$$

$$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bir fonksiyonun kesişime noktaları o denklemi sağladığından,

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

iki kökü bulunur. Bu takdirde,

i) Parabol ile doğru farkı iki noktada kesişir ise $\Delta > 0$ dır,
ii) Doğru ile parabole teğet ise $x_1 = x_2$ kökler aynı olduğundan $\Delta = 0$ dır,
iii) Parabol ile doğru kesişmiyorsa x_1 ve x_2 olmayacağından $\Delta < 0$ dır.

Örnek: $y = x^2 - 5$ parabolü ile $y = 2x - 2$ doğrusunun kesim noktalarını bulunuz.

Çözüm: İki fonksiyonun kesim noktalarını ya da değme noktalarını bulmak için iki denklemi ortak çözmek yeterlidir. Buna göre,

$$x^2 - 5 = 2x - 2$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x - 3)(x + 1) = 0$$
$$x = 3 \text{ veya } x = -1$$

bulunur. Bulunan bu x değerini parabol veya doğru denkleminin birinde yerine yazılırsa,

$$x = 3 \text{ ise } y = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \text{ oluo } (2, 4)$$
$$x = -1 \text{ ise } y = 2 \cdot (-1) - 2 = -4 \text{ oluo } (3, -4)$$

noktalarında kesiştikleri elde edilir.

Örnek: $y = x^2 + 4x + 3$ parabolünün $y = 2x + m$ doğrusuna teğet olabilmesi için m kaç olmalıdır?

Çözüm: Parabol ile doğru birbirine teğet ise ortak çözümlerin tek kökü olmalıdır. Buna göre,

$$x^2 + 4x + 3 = 2x + m$$
$$x^2 + 2x + (3 - m) = 0$$

denkleminde $\Delta = 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - m) = 0$$
$$m = 2$$

olur.

Örnek: $y = x^2 - 2x - 3$ parabolü $y = 4x + 1$ doğrusu ile hiçbir noktada kesişmiyor ise parabolün doğruya paralel olan teğetinin değme noktasını bulunuz.

Çözüm: Paralel doğruların eğimleri eşit olacağından $y = 4x + 1$ doğrusuna paralel olan doğru $y = 4x + c$ biçiminde yazılabilir.

$$y = x^2 - 2x - 3 \text{ ve } y = 4x + 1$$

denklemlerinin çözüm kümesi bir elemanlı olacağından

$$x^2 - 2x - 3 = 4x + c$$
$$x^2 - 6x - 3 - c = 0$$

denkleminde $\Delta = 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\Delta = (-6)^2 - 4(-3 - c) = 0$$
$$c = -12$$

bulunur. $y = x^2 - 2x - 3$ ve $y = 4x - 12$ denklemleri elde edilir. Şu halde bu denklem çözülürse

$$x^2 - 2x - 3 = 4x - 12$$
$$x^2 - 6x - 9 = 0$$

denkleminin kökü $x = 3$ olur. 3 değeri parabol veya doğru denkleminin birinde yerine yazılırsa $y = 0$ olur ki, bu bize teğetin değme noktası $(3, 0)$ olduğunu gösterir.

Örnek: Denklemleri,

$$f(x) = 4x^2 - (m-2)x + 3n - 1$$
$$g(x) = 2x^2 + (3m+1)x + n + 2$$

olan paraboller, x eksenini aynı noktalarda kesmektedir. Buna göre m ve n'nin değerleri nedir?

Çözüm: Parabollerin x ekseni üzerinde kesişmeleri demek, $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri eşit demektir. Buradan

$$4x^2 - (m-2)x + 3n - 1 = 0$$
$$2x^2 + (3m+1)x + n + 2 = 0$$

sisteminin katsayılarının oranlarsak

$$\frac{4}{2} = \frac{-(m-2)}{3m+1} = \frac{3n-1}{n+2}$$
$$m = 0 \text{ ve } n = 5$$

bulunur.

Örnek: $y = (6m^2 + 7)x^2 - (2m + 4)x + 5$ parabolünün tepe noktasının y ekseni üzerinde olması için m kaç olmalıdır?

Çözüm: Parabolün tepe noktası $T(r, k)$ ise y ekseni üzerinde ise $r = -\frac{b}{2a} = 0$ ise $b = 0$ olmalıdır. Buradan,

$$2m + 4 = 0 \text{ ise } m = -2$$

bulunur.

Örnek: $y = -2x^2 + 6x + m + 3$ parabolü x eksenine teğet ise m'nin değeri nedir?

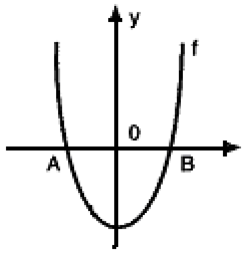
Çözüm: Parabolün x eksenine teğet olması tepe noktasının x ekseni üzerinde olması demektir. Tepe noktası $T(r, k)$ ise

$$k = 0 \text{ ise } \Delta = 0$$

dır. Buna göre $y = -2x^2 + 6x + m + 3$ parabolünde,

$$k = \frac{4ac-b^2}{4a} = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (m+3)$$
$$m = -\frac{15}{2}$$
olur.

Örnek: $f(x) = x^2 + 4x + m + 3$ olan parabolün grafiği



şekildeki gibi olsun. Bu parabol x ekseni A ve B noktalarında kesmiştir. $|AB| = 6$ birim ise m kaçtır?

Çözüm: A'nın apsisi x_1, B'nın apsisi x_2 olsun.
$y = 0$ için $f(x) = x^2 + 4x + m + 3$
denkleminin kökleri x_1, x_2 olur. Buna göre,
$$|AB| = 6$$
$$|x_1 - x_2| = 6, \quad \left(|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)$$
$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 6$$
$$\sqrt{16 - 4(m+3)} = 6$$
$$m = -8$$
$$m = -8$$
dir.

Örnek: $y = x^2 - 3x + 5$ olan parabole $A(1,-1)$ noktasından çizilen teğetlerinin denklemleri nedir?

Çözüm: Teğet denklemi $y = mx + n$ olsun. $A(1,-1)$ denklemi sağlayacağından
$$-1 = m \cdot 1 + n$$
$$n = -m - 1$$
olur. Buna göre,
$$y = x^2 - 3x + 5 \text{ ve } y = mx - m - 1$$

denklem sistemlerinin çözüm kümesi bir elemanlı olacağından

$$x^2 - 3x + 5 = mx - m - 1$$
$$x^2 - (3 + m)x + (6 + m) = 0$$
$$\Delta = 0 \text{ için } [-(3 + m)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6 + m) = 0$$
$$m^2 + 2m - 15 = 0$$
$$m = -5 \text{ veya } m = 3$$

bulunur. $m = -5$ ise $n = -(-5) - 1 = 4$ ve $m = 3$ ise $n = -3 - 1 = -4$ olur. Buradan teğatin denklemi $y = -5x + 4$ ve $y = 3x - 4$ olarak bulunur.

7.8. Sonuç: $y = f(x)$ eğrisi ile $y = g(x)$ eğrisinin durumunu belirtmek için ortak çözümden yararlanır. $f(x) = g(x)$ ortak denkleminde,

i) $\Delta > 0$ ise eğriler iki noktada kesişirler,
ii) $\Delta = 0$ ise eğriler teğettir,
iii) $\Delta < 0$ ise eğriler kesişmezler.

Örnek: $y = x^2 - (m - 2)x - 4$ parabolü ile $y = 2x^2$parabolü teğet ise m'nin alabileceği değerleri nedir?

Çözüm: Ortak çözüm yapılırsa,

$$x^2 - (m - 2)x - 4 = 2x^2$$
$$x^2 + (m - 2)x + 4 = 0$$

denklemi elde edilir. Paraboller teğet olduğundan $\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\Delta = (m - 2)^2 - 4 \cdot 4 = 0$$
$$m^2 - 4m - 12 = 0$$
$$m = 6 \text{ veya } m = -2$$

bulunur.

Örnek: $y = 2x^2 - 2x + a$ parabolü ile $y = x^2 - 6$ parabolünün kesişmemeleri için a'nın alabileceği en büyük tamsayı değeri nedir?

Çözüm: İki parabolün kesişmemeleri için $\Delta < 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$2x^2 - 2x + a = x^2 - 6$$
$$x^2 - 2x + (a + 6) = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a + 6) < 0$$
$$-5 < a$$

dir.

İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLARIN DAİMA POZİTİF ve DAİMA NEGATİF OLMASI

7.3. Teorem: $f(x) = ax^2 + bx + c$

i) $f(x) > 0$ ise $a > 0$ ve $\Delta < 0$

ii) $f(x) < 0$ ise $a < 0$ ve $\Delta < 0$

dır.

İspat: Kabul edelim ki $\Delta \geq 0$ olsun. Öyleyse $ax^2 + bx + c > 0$ denkleminin kökleri iki tane olacağından denklemin pozitif veya negatif durumları vardır. Bu durum denklemlerin daima pozitif ya da daima negatif olamaz. Öyleyse kabul yanlıştır.

Örnek: $f(x) = x^2 + mx + m > 0$ olması için m ne olmalıdır?

Çözüm: $f(x) = x^2 + mx + m > 0$ ise $a = 1 > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\Delta = m^2 - 4m < 0$$
$$m(m-4) < 0$$

m	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$m^2 - 4m < 0$		+	o	−	o	+	

$Ç = \{x \in \mathbb{R}: 0 < m < 4\}$

Örnek: $(m+1)x^2 + mx - m > 0$ ikinci dereceden denklemi veriliyor. Her $x \in \mathbb{R}$ için $ax^2 + bx + c > 0$ olması için m hangi aralıkta bulunmalıdır?

Çözüm: $(m+1)x^2 + mx - m > 0$ ise $a > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$a = m + 1 > 0$$
$$\Delta = m^2 - 4(m+1)(-m) < 0$$
$$5m^2 + 4m < 0$$

eşitsizlik sistemleri çözülürse,

m	$-\infty$		-1		$-4/5$		0		$+\infty$
Δ		+		+	o	−	o	+	
a		−	o	+		+		+	

$Ç = \left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{4}{5} < m < 0\right\} = \left(-\frac{4}{5}; 0\right)$

bulunur.

İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR İLE BİR m SAYISININ KARŞILAŞTIRILMASI

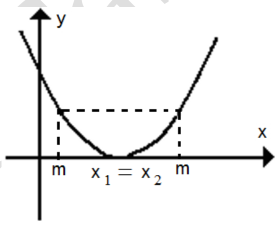
7.4. Teorem: $m \in \mathbb{R}$ ve $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

i) $\Delta = 0$ ve
a) $m < x_1 = x_2$ veya $x_1 = x_2 < m$ ise $a \cdot f(m) > 0$
b) $x_1 = x_2 = m$ ise $a \cdot f(m) = 0$

ii) $\Delta > 0$ ve
a) $m < x_1 < x_2$ veya $x_1 < x_2 < m$ ise $a \cdot f(m) > 0$
b) $m = x_1 < x_2$ veya $x_1 < x_2 = m$ ise $a \cdot f(m) = 0$
c) $x_1 < m < x_2$ ise $a \cdot f(m) < 0$

iii) $\Delta < 0$ ise denklemin reel kökü yoktur. Bu nedenle sıralama yapılamaz.

İspat: i) a) $\Delta = 0$ ve $a > 0$ ise fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekline benzer bir şekil oluşur.

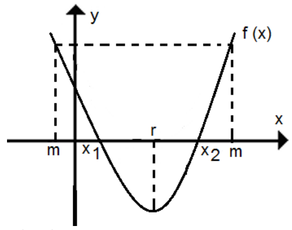


$m < x_1 = x_2$ ise $a \cdot f(m) > 0$
$x_1 = x_2 < m$ ise $a \cdot f(m) > 0$
olur.

Benzer şekilde $a < 0$ için de ispatlanır.

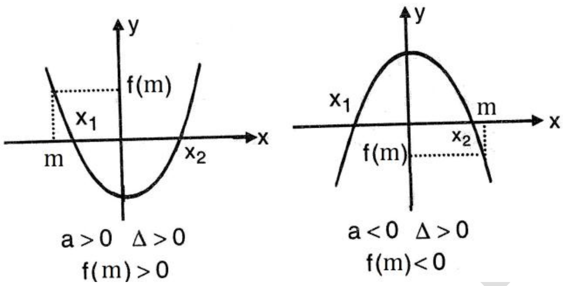
b) $a \cdot f(m) = 0$ ise $f(m) = r = 0$ olacağından $x_1 = x_2 = m$ dir.

ii) $\Delta > 0, a > 0$ ve $m < x_1 < x_2$ veya $x_1 < x_2 < m$ olsun. Fonksiyonun grafiği şekline benzer bir şekil oluşur.



$\Delta > 0$ olduğundan $a \cdot f(m) > 0$
olur.

Benzer şekilde $a < 0$ için de ispatlanır.



Diğer kısımların ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1 < 1 < x_2$ olması için m'nin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: Burada $k = 1$ olarak verilmiştir. Öyleyse,
$$\Delta > 0 \text{ ve } a \cdot f(t) < 0$$
olmalıdır. $a \cdot f(t) < 0$ ise $\Delta > 0$ a bakmaya gerek yoktur. Şu halde,
$$a \cdot f(1) = (2m)(2m \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 3m - 2) = 2m(-m-4) < 0$$
dir. Eşitsizliği çözülürse,

m	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
a.f(k)		$-$	o	$+$	o	$-$	

bulunur. Şu halde çözüm kümesi $Ç = (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ olarak bulunur.

Örnek: $(m-2)x^2 + 2(m-1)x + m - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $1 < x_1 < x_2$ olması için m'nin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: Bu durum $\Delta > 0, a \cdot f(m) < 0, m < r$ olması ile mümkündür.
$\Delta = [2(m-1)]^2 - 4(m-2)(m-3) > 0$ ise $3m - 5 > 0$

$a \cdot f(m) = a \cdot f(1) > 0$

$(m-2)(m-2+2m-2+m-3) > 0$
$(m-2)(4m-7) > 0$
$m < r, r = -\frac{b}{2a}$
$1 < -\frac{2(m-1)}{2(m-2)}$
$1 + \frac{m-1}{m-2} < 0$
$\frac{2m-3}{m-2} < 0$

		3/2		5/3		7/4		2	
Δ	–		–		+		+		+
a.f(m)	+		+		+		–		+
m–r < 0	+		–		–		–		+

$Ç = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{4}\right)$

7.5. Teorem: $m, n \in \mathbb{R}$ ve $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda $r = -\frac{b}{2a}$, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olsun.

i) $n < x_1 < m < x_2$ ise $f(n) \cdot f(m) < 0, (n < r)$
ii) $x_1 < n < x_2 < m$ ise $f(n) \cdot f(m) < 0, (r < m)$

Bu teoremin ispatı 7.3. teoremine benzer olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $4x^2 - 2x + m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $-1 < x_1 < 1 < x_2$ olması için m'nin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: $-1 < x_1 < 1 < x_2$
$a \cdot f(-1) < 0$ veya $a \cdot f(1) < 0$
$f(-1) > 0$ veya $f(1) < 0$
$f(-1) \cdot f(1) < 0$
$[4(-1)^2 - 2(-1) + m][4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + m] < 0$
$(m+6)(m+2) < 0$
$1 + \frac{b}{2a} = -1 + \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} < 0$

		-6		-2	
f (1).f(−1)	+	○	−	○	+
−1+r	−		−		−

$Ç = (-6, -2)$

Örnek: $(m-1)x^2 - 4(m-2)x + 2m - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $0 < x_1 < 1 < x_2$ olması için m'nin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: $0 < x_1 < 1 < x_2$ ise

$f(0) \cdot f(1) < 0$

$(2m-4)(m-1-4m+8+2m-4) < 0$

$(2m-4)(-m+3) < 0$

$0 < r$

$0 < \frac{4(m-2)}{2(m-1)} < 0$

		1		2		3	
f(0).f(1)	−		−	○	+	○	−
0+r	−		+	○	+	○	−

$Ç = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLARIN EŞİTSİZLİĞİ (PARABOL BAĞINTISI)

7.6. Tanım: $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü üzerinde tanımlı $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$ ve $f(x) \leq 0$ eşitsizliklerine ikinci dereceden fonksiyonların eşitsizliği (parabol bağıntısı) denir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1 \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan (x, y) noktalarını analitik düzlemde bulunuz.

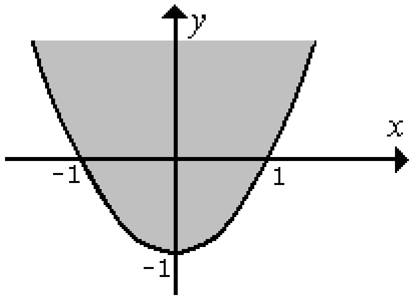
Çözüm: Önce parabolüm grafiği çizilir. Sonra parabolün iç ya da dış bölgesinden bir nokta seçilerek verilen eşitsizliği sağlayıp sağlanamadığına bakılır. Şimdi O(0, 0) noktasının eşitsizliklerde olup olmadığını inceleyelim.

$f(x) = x^2 - 1 \leq 0$

$0^2 - 1 \leq 0$

$$-1 \leq 0$$

olup eşitsizlik doğru olduğundan taranacak bölge O(0, 0) noktasını tarar. Buna göre,



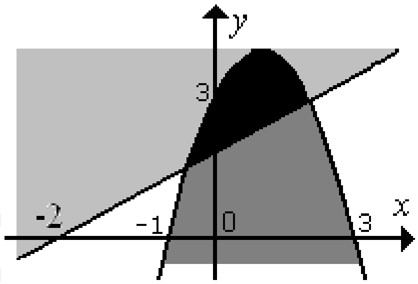
şekli çizilir.

Örnek: $f(x) = -x^2 + 2x + 3 \geq 0$ ve $f(x) = x + 2 \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan (x, y) noktalarını analitik düzlemde bulunuz.

Çözüm: Parabolün ve doğrunun grafiğini çizelim. Sonra O(0, 0) noktasının eşitsizliklerde olup olmadığını inceleyelim.

$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \geq 0$ için $-0^2 + 2 \cdot 0 + 3 \geq 0$ ise $3 \geq 0$ doğrudur

$f(x) = -x - 2 \geq 0$ için $-0 - 2 \geq 0$ ise $-2 \geq 0$ yanlıştır



$f(x) = x + 2 \leq 0$ doğrusu açık koyu renkle, $f(x) = -x^2 + 2x + 3 \geq 0$ parabolü yarı koyu renkle, iki denklemin kesiştiği yer siyah renkle taranmıştır.

7.2. Not: Parabole ait bazı bilgiler "Analitik Geometri" dersinin "Parabolün Analitik İncelmesi" konusunda ele alınacaktır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

İkinci Dereceden Fonksiyon Kavramı

1. $f(x) = 2x^2 + 8x + m - 1$ parabolünün x eksenini farklı iki noktada kesmesi için m ne olmalıdır?

A) $m < 3$ B) $m < 4$ C) $m < 5$ D) $m < 6$ E) $m < 7$

Çözüm: Parabolün x eksenini farklı iki noktada kemesi için $\Delta > 0$ olmalıdır.

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 1) > 0$
$64 > 8m + 8$
$56 > 8m$
$m < 7$
olur.

Cevap: E

2. $f(x) = x^2 + 10x + 5m + 15$ parabolünün tepe noktasının x ekseni üzerinde olması için m ne olmalıdır?

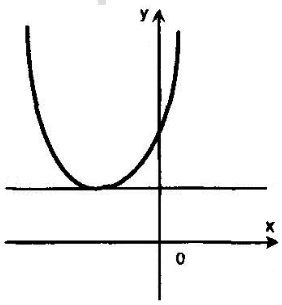
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Tepe noktasının x ekseni üzerinde olması için $k = 0$ olmalıdır.

$r = -\frac{10}{2} = -5$
$f(-5) = 5^2 - 50 + 5m + 15 = 0$ ise $m = 2$

Cevap: C

3.



Yukarıda verilen fonksiyon için aşağıdakilerden hangisi doğru olabilir?

A) $y = x^2 + 5x - 3$ B) $y = x^2 + 4x + 6$
C) $y = x^2 - 6x + 3$ D) $y = x^2 - 4x - 3$
E) $y = x^2 + 5x + 2$

Çözüm: x eksenini kesmediğinden $\Delta < 0$ olur. Bunu gerçekleyen fonksiyon $y = x^2 + 4x + 6$ dur.

Cevap: B

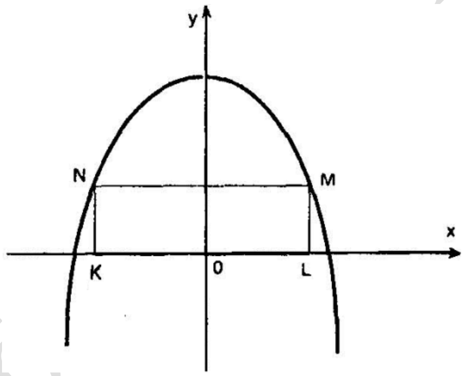
4. $A(0,8), B(1,15), (-1,3)$ noktalarından geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + 6y + 8$ B) $x^2 - 6y + 8$ C) $x^2 - 6y - 8$
D) $x^2 + 6y - 8$ E) $x^2 + 6y$

Çözüm: $f(x) = ax^2 + by + c$
$x = 0$ ise $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 8$ olup $c = 8$
$x = 1$ ise $y = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 8 = 15$ olup $a + b = 7$
$x = -1$ ise $y = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 8 = 3$ olup $a - b = -5$
olup $a = 1$ ve $b = 6$ dır.
$f(x) = x^2 + 6y + 8$

Cevap: A

5.



Şekilde KLMN dikdörtgeninin alanı 18 birim kare; M noktasının koordinatları birbirine eşittir. $f(x) = -2x^2 + m - 1$ ise m'nin (m>0) değeri nedir?

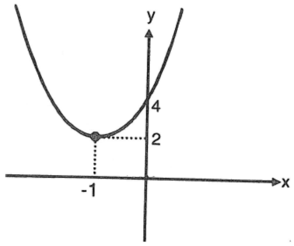
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $L(a,0), M(a,b)$ olarak alınırsa $N(-a,b), K(-a,b)$ olur. M noktasının koordinatları birbirine eşit olduğundan $a = b$ dir. Buna göre,
$|LM| = a$ ve $|KL| = 2a$
$2a \cdot a = 18$
$a = 3$
olacağından $L(3,0)$ dır. Verilen bir nokta denklemi sağlayacağından
$f(0) = -2 \cdot 0^2 + m - 1 = 3$
$m = 4$
olur.

Cevap: D

Parabolün Grafiğinden Denklem Elde etme

6.



Parabolün denklemi nedir?

A) $f(x) = 2x^2 + 4x - 4$ B) $f(x) = 2x^2 + 5x + 4$
C) $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$ D) $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$
E) $f(x) = 2x^2 + 4x + 8$

Çözüm: Parabolün tepe noktası $T(-1, 2)$ ve parabolün bir noktası $(0, 4)$ dür.

$f(x) = a(x - r)^2 + k$

$f(x) = a(x - (-1))^2 + 2 = a(x + 1)^2 + 2$

olur. Ayrıca $(0, 4)$ olduğundan

$f(0) = a(0 + 1)^2 + 2 = 4$

$a = 2$

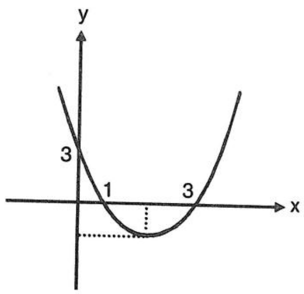
bulunur. Buna göre parabol;

$f(x) = 2(x + 1)^2 + 2 = 2x^2 + 4x + 4$

elde edilir.

Cevap: D

7.



Parabolün denklemi nedir?

A) $f(x) = x^2 + 4x - 3$ B) $f(x) = x^2 + 4x + 4$
C) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ D) $f(x) = x^2 - 4x - 3$

E) $f(x) = x^2 + 4x + 6$

Çözüm: İkinci dereceden denklemin kökleri $x_1 = 1, x_2 = 3$ ve bir noktası $(0, 3)$ bilinmektedir.

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$
$$y = a(x - 1)(x - 3)$$

olur. Ayrıca $(0, 3)$ olduğundan

$$f(0) = a(0 - 1)(0 - 3) = 3$$
$$a = 1$$

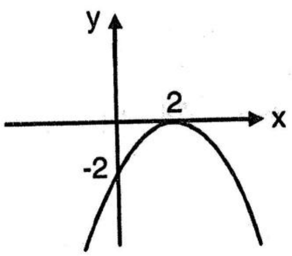
bulunur. Buna göre parabol;

$$f(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$$

elde edilir.

Cevap: C

8.



Parabolün denklemi nedir?

A) $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2$ B) $y = -2(x - 2)^2$ C) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$
D) $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2$ E) $y = 2(x - 2)^2$

Çözüm: Verilen parabol $x = 2$ noktasında x eksenine teğet olduğundan çift kat kök vardır. O halde,

$$y = a(x - 2)^2$$

olur. Ayrıca $(0, -2)$ noktası parabolde bilinen bir nokta olduğundan,

$$-2 = a(0 - 2)^2$$
$$a = -\frac{1}{2}$$

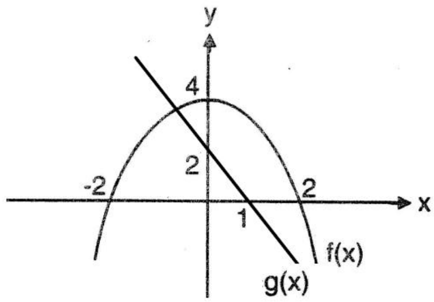
bulunur. Buna göre parabolün denklemi;

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2$$

olur.

Cevap: A

9.



Şekilde tanımlı f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre $(f \circ g^{-1})(4)$ değeri nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: f fonksiyonu bir paraboldür. Bu parabolün ikinci dereceden denkleminin kökleri $x_1 = -2, x_2 = 2$ ve bir noktası $(0, 4)$ bilinmektedir.

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$
$$y = a(x + 2)(x - 2)$$

olur. Ayrıca $(0, 4)$ olduğundan

$$a(0 + 2)(0 - 2) = 4$$
$$a = -1$$

bulunur. Buna göre parabol;

$$f(x) = -(x + 2)(x - 2) = -x^2 + 4$$

elde edilir.

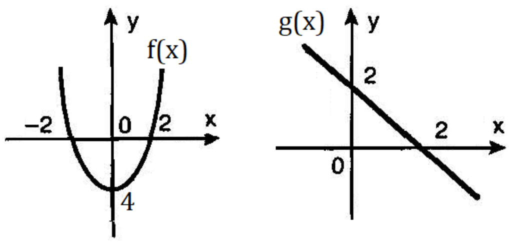
g doğrusal fonksiyon olup, denklemi $x + \frac{y}{2} = 1$ yani $g(x) = 2 - 2x$ dir.

Buna göre $g^{-1}(x) = \frac{2-x}{2}$ olur.

$$g^{-1}(4) = \frac{2-4}{2} = -1$$
$$(f \circ g^{-1})(4) = f\big(g^{-1}(4)\big) = f(-1) = -(-1)^2 + 4 = 3$$

Cevap: B

10.



Yukarıda f ve g fonksiyonların grafikleri verilmiş. $f \circ g$ fonksiyonu aşağıdaki hangisidir.

A) $x^2 - 4x$ B) $x^2 + 4x$ C) $x^2 - 4$ D) $x^2 + 4$ E) $-x^2 + 4x$

Çözüm: f fonksiyonu bir paraboldür. Bu parabolün ikinci dereceden denkleminin kökleri $x_1 = -2, x_2 = 2$ ve bir noktası $(0, 4)$ bilinmektedir.

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$y = a(x + 2)(x - 2)$

olur. Ayrıca $(0, -4)$ olduğundan

$a(0 + 2)(0 - 2) = -4$

$a = 1$

bulunur. Buna göre parabol;

$f(x) = x^2 - 4$

elde edilir.

g doğrusal fonksiyon olup, denklemi $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ yani $g(x) = 2 - x$ dir.

$(f \circ g)(x) = (x^2 - 4) \circ (2 - x) = (2 - x)^2 - 4 = x^2 - 4x$

Cevap: A

Parabol ile Diğer Fonksiyonların Birbirine Göre Durumları

11. $y = x^2 - 3x + 1$ parabolü ile $y = x - m$ doğrusunun teğet olması için m'nin değeri ne olmalıdır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $x^2 - 3x + 1 = x - m$

$x^2 - 4x + 1 + m = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (1 + m) = 0$

$16 - 4 - 4m = 0$

$m = 3$

Cevap: B

12. $y = x^2 - 3x - 1$ parabolü ile $y = 2x + 5$ doğrusunun kesim noktalarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $x^2-3x-1=2x+5$

$x^2-5x-6=0$

$(x-6)(x+1)=0$

$x=6$ veya $x=-1$

Cevap: E

13. $y=x^2-3x+6$ parabolüne $y+2x+t=0$ doğrusu teğet ise t'nin değeri nedir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: $y=x^2-3x+6$ parabolüne $y+5x+t=0$ doğrusu teğet ise

$x^2-3x+6=5x+t$

$x^2-8x+(6+t)=0$

$\Delta=(-8)^2-4\cdot(6+t)=0$

$64-4(6+t)=0$

$t=10$

Cevap: B

14. $y=x^2-2x+5$ parabolünün $y=2x+4$ doğrusuna en yakın noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{2}$ B) $2-\sqrt{2}$ C) $2+\sqrt{2}$ D) $1+\sqrt{2}$ E) $1-\sqrt{2}$

Çözüm: Parabol ile doğrunun en yakın noktaları değme (teğet) noktalardır. Buna göre;

$x^2-2x+6=2x+4$

$x^2-4x+2=0$

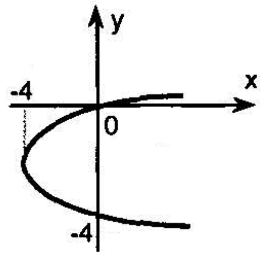
$\Delta=(-4)^2-4\cdot2=0$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\cdot1}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\cdot1}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$$

Cevap: D

15.



Parabolün denklemi nedir?

A) $-y^2 + 4y$ B) $y^2 - 4$ C) $y^2 + 4$ D) $y^2 - 4y$ E) $y^2 + 4y$

Çözüm: İkinci dereceden denklemin kökleri $y_1 = 0, y_2 = -4$ ve tepe noktası $(-4, -2)$ bilinmektedir.

$x = a(y - y_1)(y - y_2)$

$x = a(y - 0)(y - (-4))$

olur. Ayrıca $(-4, -2)$ olduğundan

$f^{-1}(-2) = a(-2 - 0)(-2 + 4) = -4$

$a = 1$

bulunur. Buna göre parabol;

$f^{-1}(y) = (y - 0)(y + 4) = y^2 - 4y$

elde edilir.

Cevap: D

16. Denklemi $f(x) = x^2 - 2mx + 2m$ olan parabol ile denklemi, $f(x) = -x^2 - (2m + 4)x + m$ olan parabol teğet olduklarına göre m nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

$x^2 - 2mx + 2m = -x^2 - (2m + 4)x + m$

$2x^2 + 4x + m = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot m = 0$

$m = 2$

Cevap: A

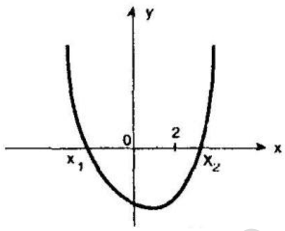
17. $y = x^2 - 2x + 5$ parabolü $y + 2x + t = 0$ doğrusunu iki farklı nokta kesiyorsa t'nin değeri nedir?

A) $-2 > t$ B) $2 > t$ C) $3 > t$
D) $-3 > t$ E) $-1 > t$

Çözüm: $y = x^2 - 2x + 5$ ve $y = -2x - t$
$x^2 - 2x + 5 = -2x - t$
$x^2 - 4x + (5 + t) = 0$
$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5 + t) > 0$
$4 > 5 + t$
$-1 > t$

İkinci Dereceden Fonksiyonlar İle Bir m Sayısının Karşılaştırılması

18.



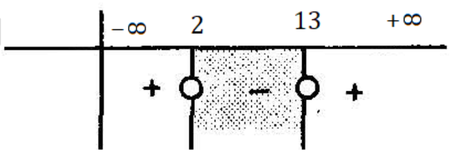
Yukarıdaki şeklin grafiğinin fonksiyonu

$$f(x) = (m - 2)x^2 - (2m + 1)x + m - 3$$

dür. Buna göre m nedir?

A) $-\infty < m < 2$ B) $2 < m < +\infty$ C) $2 < m < 13$
D) $-2 < m < 13$ E) $13 < m < +\infty$

Çözüm: $x_1 < 2 < x_2$ ise $a \cdot f(2) < 0$
$f(2) = (m - 2)2^2 - (2m + 1)2 + m - 3$
$(m - 2)(m - 13) < 0$



Cevap: C

19. $f(x) = ax^2 + bx + c$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olduğuna göre, bir m sayısı verilmişken $a \cdot f(x) < 0$ ise m sayısının köklere göre yeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x_1 = m < x_2$ B) $x_1 < m < x_2$ C) $m < x_1 < x_2$
D) $x_1 < x_2 < k$ E) $x_1 < m = x_2$

Çözüm: Bir k sayısı verilmişken, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ve $a \cdot f(x) < 0$ ise a ile f(x) ters işaretlidir. Şu halde m sayısı kökler arasındadır. Yani, $x_1 < m < x_2$ olur.

Cevap: B

20. $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. $x_1 < 1 < x_2$ olması için m aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\Delta > 0, a \cdot f(m) < 0$ olmalıdır.
$a \cdot f(m) = (2m)(2m \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 3m - 2) = 2m(-m-4)$

m	$-\infty$	-4		0	$+\infty$
a.f(m)	−	o	+	o	−

$Ç = (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

Cevap: A

21. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = (m-5)x^2 + 4x - m < 0$ olması için m hangi aralıkta bulunmalıdır?

A) $-1 \le x$ B) $x < 1$ C) $1 < x < 4$
D) $-1 < x < 0$ E) $-1 \le x < 1$

Çözüm: $f(x) = (m-5)x^2 + 4x - m < 0$ ise $a < 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır. Buna göre,

$a = m - 5 > 0$
$\Delta = 4^2 - 4(m-5)(-m) < 0$
$m^2 - 5m + 4 < 0$

eşitsizlik sistemleri çözülürse,

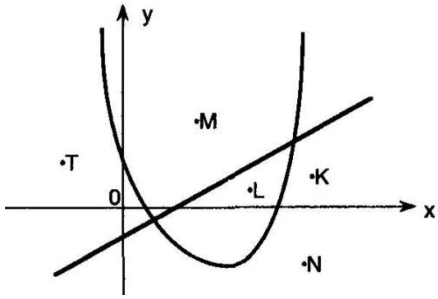
		1		4		5	
Δ	+	o	−	o			+
a	−		−		−	o	+

$Ç = \{x \in \mathbb{R}: 1 < m < 4\}$
bulunur.

Cevap: C

Parabol Bağıntısı

22.



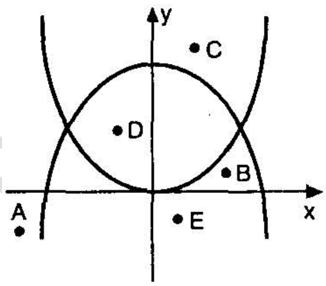
$y < x^2 - 7x + 10$ parabolü ile $y > x - 2$ doğrusu grafikteki hangi noktanın bölgesini tarar.

A) K B) L C) M D) N E) T

Çözüm: $y < x^2 - 7x + 10$ parabolün alt kısmıdır. $y > x - 2$ doğrunun üst kısmıdır. Bu durum T bölgesini tarar.

Cevap: E

23.



$y < x^2 + 3$ parabolü ile $y > -x^2 + 5$ doğrusu grafikteki hangi noktanın bölgesini tarar.

A) A B) B C) C D) D E) E

Çözüm: $y < x^2 + 3$ parabolün iç kısmını tarar. $y > -x^2 + 5$ parabolün iç kısmını tarar. Bu durum D bölgesini tarar.

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.