8. BÖLÜM
POLİNOMLAR

POLİNOM FONKSİYONU KAVRAMI

8.1. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \neq 0$ olmak üzere $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlara polinom fonksiyonu denir, kısaca polinom yada çok terimli denir. Burada n'ye polinomun derecesi denir, der $P(x) = n$ şeklinde gösterilir. a_n ye polinomun baş katsayısı, a_0'a da polinomun sabit terim adı verilir. $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, \cdots, a_1 x, a_0$ ifadelerinin her birine polinomun bir terimi adı verilir. (Polinomlar halka özelliğini taşırlar. Halka kavramı Soyut Cebir derslerinden verileceğinden halka özelliğinden burada bahsedilmeyecektir. Bk. Soyut Cebir, Halka)

Eğer $n = 2$ ise $P(x) = a_2 x^2 a_1 x + a_0$ ikinci dereceden fonksiyon olur.

Eğer $n = 3$ ise $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ üçüncü dereceden fonksiyon olur.

Eğer $n = 4$ ise $P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ dördüncü dereceden fonksiyon olur. //

Bu konu boyunca anlatılan tanım, teorem ve çözülen örnekler her $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \neq 0$ ve $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olacağından bu ifadeler daha tekrar etmeyecektir.

Örnek: a) $P(x) = 5x^7 + 4x^3 + \sqrt{2}x^2 + 6$ polinomu 7. dereceden baş katsayısı 5 ve sabit terimi 6 olan bir polinomdur.

b) $P(x) = -3x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 10$ polinomu 5. dereceden baş katsayısı –3 ve sabit terimi 10 olan bir polinomdur.

c) $P(x) = x^6 + 8x^{3/2} + 16$ fonksiyonu bir polinom değildir, çünkü $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}^+$ olduğundan polinom değildir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $P(x)=\frac{8x^4+8x^2}{x^2+1}$ ifadesi de bir polinomdur, gerçekten;

$$P(x)=\frac{8x^4+8x^2}{x^2+1}=\frac{8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)}=8x^2$$

dir.

Örnek: $P(x)=-3x^{\frac{m+6}{m}}+x^m+5$ ifadesi bir polinom olduğuna göre, m'nin alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

Çözüm: P(x) in bir polinom olabilmesi için

$$\frac{m+6}{m}=1+\frac{6}{m}\in\mathbb{N}^+$$

olmalıdır. Buna göre $m\in\{1,2,3,6\}$ den biri olmalıdır. m'nin alabileceği değerler toplamı,

$$1+2+3+6=12$$

dir.

8.2. Tanım: $a_0\neq 0$ olmak üzere $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $P(x)=a_0$ biçiminde tanımlanan polinoma sabit polinom denir. Sabit polinomun derecesi sıfırdır.

Örnek: $P(x)=\frac{2}{3}$ ve $P(x)=\pi$ birer sabit polinomlardır.

Örnek: $P(x)=(a-5)x^3-(b+2)x-2$ polinomu sabit polinom ise $a+b$ nin değeri nedir?

Çözüm: P(x) polinomunun sabit polinom olması için

$$a-5=0 \text{ ve } b+2=0$$

olmalıdır. Şu halde $a+b=5+(-2)=3$ dür.

8.1. Not: Sabit polinom ile sabit fonksiyon aynıdır.

8.3. Tanım: $a_0=0$ olan sabit polinomuna sıfır polinom adı verilir. $P(x)=0$ biçimindedir. Sıfır polinomun derecesi yoktur. (Derecesi tanımsızdır.)

8.2. Not: Sıfır polinom ile sıfır fonksiyon aynıdır.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $P(x) = (m-10)x^3 + (n-3)x + (r+2)$ polinomu sıfır polinom ise $m+n-r$ nin değeri nedir?

Çözüm: $P(x)$ polinomunun sıfır polinom olması için

$$m-10=0, n-3=0, r+2=0$$

olmalıdır. Şu halde $m+n-r = 10+3-(-2) = 15$ dir.

8.1. Teorem: Bir fonksiyon aşağıdaki aksiyomlardan birini sağlıyorsa bu fonksiyon $n \in \mathbb{N}^+$ için $P(x) = x^n$ biçiminde polinomdur.

i) $P(x \cdot y) = P(x) \cdot P(y)$

ii) $P\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{P(x)}{P(y)}$

Bu teoremin ispatı aşikar olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $P\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{P(x)}{P(y)}$ ve $P(2) = 64$ ise $P(4)$ nedir?

Çözüm: $P\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{P(x)}{P(y)}$ şartı sağlandığından P bir $P(x) = x^n$ biçiminde polinomdur.

$$P(2) = 64$$
$$2^n = 2^6$$
$$n = 6$$

olur. Buna göre;

$$P(x) = x^6$$
$$P(4) = 4^6 = 2^{12}$$

elde edilir.

POLİNOM İFADELERİNİN DEĞİŞKENLİĞİ

Polinomlar özel bir fonksiyon olduğundan fonksiyonlarda uygulanan ifadelerin değişkenliği işlemleri polinomlarda da geçerlidir.

Örnek: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4$ ise $P(2)$ nin değeri nedir?

Çözüm: $P(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 4 = 18$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $P(x) = x^2 - 6x + 5$ ise $P(x+3)$ polinomunu bulunuz.

Çözüm: $P(x+3) = (x+3)^2 - 6(x+3) + 5$
$= x^2 + 6x + 9 - 6x - 18 + 5$
$= x^2 - 4$

Örnek: Bir $P(x)$ polinomu için $P(x+1) = x^2 - 3x + 4$ ise $P(x)$ in değeri nedir?

Çözüm: $x + 1 = t$ alınırsa $x = t - 1$ olur. Buna göre,
$P(t-1+1) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 4$
$P(t) = t^2 - 2t + 1 - 3t + 3 + 4$
$P(t) = t^2 - 5t + 8$
olur.

8.3. Not: Bir $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomunda sabit terimi bulabilmek için $P(0)$ bulunmalıdır.

Örnek: $P(x) = -2(x-2)^3 - 4(x+2) - 2$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

Çözüm: $P(0) = -2(0-2)^3 - 4(0+2) - 2 = 6$

Örnek: $P(x)$ bir polinom ve
$P(x-1) + P(x+1) = x^3 + 2x + 2$
$P(2) = 3$
olduğuna göre, $P(x)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

Çözüm: $P(x)$ polinomunun sabit terimi bulmak için $P(0)$ bulunmalıdır. $x = 1$ yazılırsa,
$P(1-1) + P(1+1) = 1^3 + 2 \cdot 1 + 2$
$P(0) + P(2) = 5$
$P(0) + 3 = 5$
$P(0) = 2$
dir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $P(x) = 3ax - 6x + 8a + 6$ polinomu sabit polinom olduğuna göre, P(x) değerini bulunuz.

Çözüm: P(x) sabit polinom olduğuna göre, x'ten bağımsız olmalı, dolayısıyla x'li terimden katsayılarının toplamı sıfır (0) olmalıdır.

$$3a - 6 = 0 \text{ ise } a = 2$$
$$P(0) = 3 \cdot 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 8 \cdot 2 + 6 = 22$$

8.4. Not: Bir $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomunun katsayıları $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ dır. Bu katsayıları bulabilmek için P(1) olmalıdır.

Örnek: $P(x) = 4(x-2)^2 - 2x + 6$ polinomunun katsayılar toplamı bulunuz.

Çözüm: $P(1) = 4(1-2)^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 8$

8.2. Teorem: Bir $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomunun çift dereceli katsayılar toplamı Ç, tek dereceli terimlerin katsayılar toplamı T olmak üzere,

$$Ç = \frac{P(1)+P(-1)}{2} \text{ ve } T = \frac{P(1)-P(-1)}{2}$$

dir.

İspat: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomunda $n = 2m$ olsun. Bu takdirde,

	P(1)	P(−1)
a_0	a_0	a_0
$a_1 x$	a_1	$-a_1$
$a_2 x^2$	a_2	a_2
$a_3 x^3$	a_3	$-a_3$
$a_4 x^4$	a_4	a_4
...		
$a_{2m-1}x^{2m-1}$	a_{2m-1}	$-a_{2m-1}$
$a_{2m}x^{2m}$	a_{2m}	a_{2m}

verileri elde edilir. Buradan,

$$Ç = \frac{P(1)+P(-1)}{2} \text{ ve } T = \frac{P(1)-P(-1)}{2}$$

olduğu elde edilir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $P(x+1)=(x^4+3x^3+x+4)^3$ polinomunun da $P(x)$ çift dereceli terimlerinin katsayılar toplamını (Ç) ve tek dereceli terimlerinin katsayılar toplamını (T) bulunuz.

Çözüm: $P(1)$ in değerini bulmak için $x=0$ ve $P(-1)$ in değerini bulmak için $x=-2$ alınmalıdır.

$P(0+1)=(0^4+3\cdot 0^3+0+4)^3$ ise $P(1)=64$

$P(-2+1)=((-2)^4+3\cdot(-2)^3+(-2)+4)^3$ ise $P(-1)=-216$

$Ç=\frac{P(1)+P(-1)}{2}=\frac{64+(-216)}{2}=-76$

$T=\frac{P(1)-P(-1)}{2}=\frac{64-(-216)}{2}=-140$

olarak bulunur.

İKİ POLİNOMUN EŞİTLİĞİ

8.4. Tanım:

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$Q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$

şeklinde tanımlanan iki polinomun eşit $(P(x)+Q(x))$ ise,

$a_n=b_n, a_{n-1}=b_{n-1},\cdots,a_1=a_1,a_0=a_0$

dir.

Örnek: $P(x)=ax^3+2x^2+4x+5$

$Q(x)=-x^3+bx^2+(c+2)x+(d-1)$

polinomları eşit polinomlar ise $a+b+c+d$ nin değeri nedir?

Çözüm: $a=-1, b=2, c+2=4, d-1=5$

$a+b+c+d=-1+2+2+6=9$

POLİNOMLARDA TOPLAMA ve ÇIKARMA

Polinomlar özel birer fonksiyon olduğundan fonksiyonlardaki toplama ve çıkarma işlemleri burada da aynı şekilde yapılır.

8.5. Tanım:

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

ise,

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

işlemine bu iki polinomun toplamı

$$P(x) - Q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

işlemine bu iki polinomun çıkarımı adı verilir.

Örnek: $P(x) = 6x^4 + 8x^3 - x + 7$

$Q(x) = 8x^4 + 2x^2 + 4x - 3$

polinomlarının toplamı ve çıkarmasını bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (6+8)x^4 + 8x^3 + 2x^2 + (-1+4)x + (7-3) \\ &= 14x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \\ P(x) - Q(x) &= (6-8)x^4 + 8x^3 - 2x^2 + (-1-4)x + (7-(-3)) \\ &= -2x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 5x + 10 \end{aligned}$$

8.3. Teorem: $P(x)$ polinomunun derecesi der $P(x) = m$ ve $Q(x)$ polinomunun derecesi der $Q(x) = n$ olsun.

i) $m > n$ ise der $[P(x) \pm Q(x)] = m$

ii) $m = n$ ise der $[P(x) \pm Q(x)] \leq m$

dir.

Bu teoremin ispatı aşikar olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + 12x + 9$

$Q(x) = 2x^3 + 8x^2 + 4x - 3$

polinomlarında der $[P(x) \pm Q(x)]$ yi bulunuz.

Çözüm: der $P(x) = 4 >$ der $Q(x) = 3$ olduğundan

$$\text{der}[P(x) \pm Q(x)] = 4$$

dir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

POLİNOMLARDA ÇARPMA ve SKALERLE ÇARPIM

Polinomlar özel birer fonksiyon olduğundan fonksiyonlardaki çarpma ve skalerle işlemleri burada da aynı şekilde yapılır.

8.7. Tanım:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

ise,

$$P(x) \cdot Q(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0)$$

işlemine bu iki polinomun çarpımı,

$$c \cdot P(x) = (c \cdot a_n)x^n + (c \cdot a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (c \cdot a_1)x + (c \cdot a_0)$$

işlemine bir polinomun c skalerle çarpımı adı verilir.

Örnek: $P(x) = 2x^3 + x + 3$
$Q(x) = 2x^2 + 5x + 3$
polinomlarının $P(x) \cdot Q(x), 3 \cdot P(x), 4 \cdot Q(x)$ işlemlerini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^3 + x + 3)(2x^2 + 5x + 3) \\ &= 2x^3 2x^2 + 2x^3 5x + 2x^3 3 + x2x^2 + x5x + x3 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 5x + 3 \cdot 3 \\ &= 4x^5 + 10x^4 + 6x^3 + 2x^3 + 5x^2 + 3x + 6x^2 + 15x + 9 \\ &= 4x^5 + 10x^4 + 8x^3 + 11x^2 + 18x + 9 \end{aligned}$$

$$3 \cdot P(x) = 3(2x^3 + x + 3) = 6x^3 + 3x + 9$$

$$4 \cdot Q(x) = 4(2x^2 + 5x + 3) = 8x^2 + 20x + 12$$

Örnek: $x^3 + ax + b = (x^2 - 2x - 3)(cx + d)$ ise $a + b$ nin değerini bulunuz.

Çözüm:

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 2x - 3)(cx + d)$$
$$x^3 + ax + b = cx^3 + (d - 2c)x^2 + (-2d - 3c)x - 3d$$

bulunur. Polinomlarda eşitlik tanımı gereği,

$$c = 1, d - 2c = 0, -2d - 3c = a, -3d = b$$
$$d = 2, a = -7, b = -6$$

elde edilir. Buna göre $a + b = -7 - 6 = -13$ olarak bulunur.

8.4. Teorem: $P(x)$ polinomunun derecesi $\operatorname{der} P(x) = m$ ve $Q(x)$ polinomunun derecesi $\operatorname{der} Q(x) = n$ olsun.

i) $\operatorname{der}[P(x) \cdot Q(x)] = m + n$
ii) $c \in \mathbb{R}$ ise $\operatorname{der}[c \cdot P(x)] = m$
iii) $\operatorname{der} P(Q(x)) = m \cdot n$
iv) $r \in \mathbb{R}$ ise $\operatorname{der} P^r(x) = r \cdot m$

dir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Bu teoremin ispatı aşikâr olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + 12x + 9$
$Q(x) = 2x^3 + 8x^2 + 4x - 3$
polinomlarında yukarıdaki özellikleri sağlayınız.

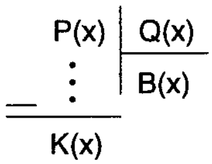
Çözüm:
i) $\text{der}\,[P(x) \cdot Q(x)] = 4 + 3 = 7$
ii) $\text{der}\,[2 \cdot P(x)] = 4$
iii) $\text{der}\,P\big(Q(x)\big) = 4 \cdot 3 = 12$
iv) $\text{der}\,P^3(x) = 3 \cdot 4 = 12$
dir.

Örnek: $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinomdur. $P^2(x)Q(x) = 14$ ve $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 4$ ise der $P(x)$ in değeri nedir?

Çözüm: $P(x) = a, Q(x) = b$ olsun.
$\text{der}\,[P^2(x)Q(x)] = 2a + b = 14$
$\text{der}\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right] = a - b = 4$
Bu iki bilinmeyenli iki denklem çözülürse, der $P(x) = a = 6$ olur.

POLİNOMLARDA BÖLME

8.8. Tanım: $P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(x) \neq 0$ olsun.
$$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$$
eşitliğini sağlayan $B(x)$ polinomu ile $K(x)$ polinomu varsa, $P(x)$ polinomunda $Q(x)$ polinomunun bölümünde bölüm $B(x)$, kalan $K(x)$ dir denir. Eğer $K(x) = 0$ ise $P(x)$ polinomu, $Q(x)$ polinomuna tam bölünüyor (kalansız bölme) denir.



Eğer $P(x) = Q(x) \cdot B(x)$ kalansız bölme mevcutsa $Q(x)$ ve $B(x)$ polinomlarına çarpan adı verilir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Bölme işlemi yapılırken aşağıdaki sıranın izlenmesi yapılır.

1. Bölünen ile bölen, x'in azalan kuvvetine göre sıralanır.
2. Bölünenin soldan ilk terimi (en büyük üstlü terim), bölenin soldan ilk terimine bölünür.
3. Elde edilen bölüm, bölenin bütün terimleri ile çarpılarak aynı dereceli terimler alt alta gelecek biçimde bölünenin altına yazılır.
4. Bu çarpım bölünenden çıkarılır.
5. Geri kalan, terimler farkın yanına yazılır.
6. Bulunan polinomlar için yukarıdaki işlemler sıra ile uygulanır.
7. Kalanın derecesi, bölenin derecesinden küçük olana kadar işleme devam edilir.

Örnek: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 10x - 7$ polinomunu $Q(x) = 2x - 3$ polinomuna bölünüz.

Çözüm:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 + x^2 - 10x - 7 & \underline{\;2x - 3\;} \\
- & \underline{\mp 2x^3 \pm 3x^2} & x^2 + 2x - 2 \\
 & +4x^2 - 10x - 7 & \\
- & \underline{\mp 4x^2 \pm 6x} & \\
 & -4x - 7 & \\
- & \underline{\pm 4x \mp 6} & \\
 & -13 &
\end{array}
$$

Bölüm : $B(x) = x^2 + 2x - 2$

Kalan : $K(x) = -13$

Örnek: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$ polinomunu $Q(x) = x^2 - 1$ polinomuna bölünüz.

Çözüm:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 - 5x^2 - 3 & \underline{\;x^2 - 1\;} \\
- & \underline{\mp 2x^3 \pm 2x} & 2x - 5 \\
 & -5x^2 + 2x - 3 & \\
- & \underline{\pm 5x^2 \mp 5} & \\
 & 2x - 8 &
\end{array}
$$

Bölüm : $B(x) = 2x - 5$

Kalan : $K(x) = 2x - 8$

8. 5. Teorem: $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ ise,
i) $\operatorname{der} P(x) \geq \operatorname{der} Q(x)$
ii) $\operatorname{der} Q(x) > \operatorname{der} K(x)$
iii) $\operatorname{der} P(x) = \operatorname{der} Q(x) + \operatorname{der} B(x)$
iv) $\operatorname{der} P(x) = \operatorname{der} Q(x)$ ise $B(x)$ polinomunun derecesi sıfır olup $B(x)$ sıfırdan farklı bir reel sayıdır.
v) $\operatorname{der} P(x) < \operatorname{der} Q(x)$ ise $B(x)$ polinomu bazen bulunmaz, bazen bulunur. Eğer bulunursa
$$\operatorname{der} B(x) = \operatorname{der} P(x) - \operatorname{der} Q(x)$$
dir.

Bu teoremin ispatı aşikâr olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $P(x) \cdot Q(x) = 3x^7 + 5x^3 + 8x + 2$
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x + 8$$
olduğuna göre $\operatorname{der} P(x^3)^2$ yi bulunuz.

Çözüm: $\operatorname{der} P(x) = m$ ise $P(x) = x^m$
$\operatorname{der} Q(x) = n$ ise $Q(x) = x^n$
olsun. Bu takdirde,
$\operatorname{der} [P(x) \cdot Q(x)] = 7$ olduğundan $x^m \cdot x^n = x^7$ ise $m + n = 7$
$\operatorname{der} [P(x) : Q(x)] = 1$ olduğundan $x^m : x^n = x^1$ ise $m - n = 1$
dir. Bu eşitlikleri çözersek, $m = 4, n = 3$ olarak bulunur. O halde,
$$\operatorname{der} P(x^3)^2 = \operatorname{der} ((x^4)^3)^2 = 24$$
dir.

BÖLME İŞLEMİNDE KALANIN BULUNMASI

8.6. Teorem: Bir $P(x)$ polinomunun $(x^n - q(x))$ ile bölümünden kalanı bulmak için $x^n = q(x)$ yapmak yeterlidir.

İspat: $P(x) = \left(x^n - q(x)\right) \cdot Q(x) + K(x)$
$P(q(x)) = \left(q(x) - q(x)\right) \cdot Q\left(q(x)\right) + K\left(q(x)\right) = K(q(x))$

Örnek: $P(x) = 4x^2 - 2x + 5$ polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalan nedir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $x + 2 = 0$ ise $x = -2$

$$P(-2) = 4(-2)^2 - 2(-2) + 5 = 25$$

Örnek: $P(x) = (m-2)x^2 + (3m+2)x - 4$ polinomunun $x + 1$ ile tam olarak bölünmesi için m'nin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: $x + 1 = 0$ ise $x = -1$

$$P(-1) = (m-2)(-1)^2 + (3m+2)(-1) - 4 = 0$$
$$m - 2 - 3m - 2 - 4 = 0$$
$$m = -4$$

Örnek: $P(x) = 3x^{12} + 4x^8 + 5x^4 + 1$ polinomunun $x^4 + 2$ ile bölümünden kalan nedir?

Çözüm: $x^4 + 2 = 0$ ise $x^4 = -2$

$$P(x) = 3(x^4)^3 + 4(x^4)^2 + 5x^4 + 1$$
$$P(-2) = 3(-2)^3 + 4(-12)^2 + 5(-2) + 1 = -17$$

Örnek: $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + 5x + 6$ polinomunun $x^2 - x + 1$ ile bölümünden kalan nedir?

Çözüm: $x^2 - x + 1$ ise $x^2 = x - 1$

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x(x-1) + 5(x-1) + 5x + 6 \\ &= 3x^2 - 3x + 5x - 5 + 5x + 6 \\ &= 3(x-1) + 7x + 1 \\ &= 3x - 3 + 7x + 1 \\ &= 10x - 2 \end{aligned}$$

Örnek: Bir $P(x)$ polinomu için $P(x+2) = x^2 - 4x + 5$ olduğu biliniyor. Buna göre $P(x)$ in $x - 4$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm: $P(x)$ in $x - 4$ ile bölümünden kalan $P(4)$ dür. $P(4)$ ün olması için $x = 2$ olmalıdır.

$$P(2+2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$$

Örnek: $P(x)$ bir polinom olmak üzere $x^4 + 2x^2 - ax + b = (x+1)^2 P(x)$ eşitliğine göre a ve b'yi bulunuz.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $(x+1)^2$ çarpanlardan biri olduğundan eşitliğin solu $(x+1)^2$ ile bölümünden kalan sıfırdır. Buna göre,

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 0$ ise $x^2 = -2x - 1$

$$
\begin{aligned}
&x^4 + 2x^2 - ax + b = (x+1)^2 P(x) \\
&(x^2)^2 + 2x^2 - ax + b = 0 \\
&(2x-1)^2 + 2(-2x-1) - ax + b = 0 \\
&4x^2 - 4x + 1 - 4x - 2 - ax + b = 0 \\
&4(-2x-1) - 8x - 1 - ax + b = 0 \\
&-8x - 4 - 8x - 1 - ax + b = 0 \\
&(-16-a)x + (-5+b) = 0 \cdot x + 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Polinomlarda eşitlik gereği,

$$
\begin{aligned}
&-16 - a = 0 \ \wedge -5 + b = 0 \\
&a = -16 \ \wedge b = 5
\end{aligned}
$$

olmalıdır.

8.1. Sonuç: $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölünmesinden kalan $K(x)$, $R(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölünmesinden kalan $M(x)$ olsun.

a) $P(x) \pm R(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölünmesinden kalan $K(x) \pm M(x)$ dir.

b) $P(x) \cdot R(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölünmesinden kalan $K(x) \cdot M(x)$ dir.

c) $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $P^n(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölünmesinden kalan $K^n(x)$ dir.

Burada $K(x) \pm M(x)$, $K(x) \cdot M(x)$, $K^n(x)$ polinomların derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesine eşit veya büyük ise bu polinomların $Q(x)$ ile bölümünden kalan bulunur.

Örnek: $P(x)$, $Q(x)$ gibi iki polinomun $x+6$ ile bölümünden kalan sırasıyla 2 ve -3 ise $P(x) \cdot Q(x)$ çarpımının $x+6$ ile bölümünden kalan ne olur?

Çözüm: $P(-6) = 2, Q(-6) = 3$

$$P(-6) \cdot Q(-6) = 2 \cdot (-3) = -6$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $P(x)$ polinomunun x^2+1 ile bölünmesinden elde edilen kalan $K(x)=2x+1$, $Q(x)$ polinomunun x^2+1 ile bölünmesinden elde edilen kalan $M(x)=x+1$ ise, $P(x)\cdot Q(x)$ in x^2+1 ile bölünmesinden elde edilen kalan nedir?

Çözüm: $x^2+1=0$ ise $x^2=-1$

$$\begin{aligned} K(x)\cdot M(x) &= (2x+1)(x+1)\\ &= 2x^2+3x+1\\ &= 2(-1)+3x+1\\ &= 3x-1 \end{aligned}$$

HORNER YÖNTEMİ

Bölme işlemi Horner yöntemi ile de yapılabilir. Bu yöntem sadece herhangi bir polinomunun 1. dereceden polinom ile bölümünde kullanılır. Şimdi Horner yöntemini açıklayalım. Yalnız biz teoremi 2. dereceden polinomlarda vereceğiz ama işlem n. dereceden polinomlar için de geçerlidir.

8.7. Teorem: $P(x)=ax^2+bx+c$ polinomunu $Q(x)=x-d$ polinomuna bölümü,

	a	b	c
d	$\downarrow$	ad	$bd+ad^2$
	a	$b+ad$	$c+bd+ad^2$

biçiminde işlem yapılır. Burada bölüm $B(x)=ax+b+ad$ ve kalan $K(x)=cx+bd+ad^2$ dir. ($P(x)$ polinomunun baş katsayılarını yatay ve $Q(x)$ bölünen sayısını dikey kutucukları üzerine yazdıktan soran, a sayısı direk aşağı yazılır. Sonra a ile d çarpılır, elde edilen ad sayısı b in altına yazılır. b ile ad sayısı toplanır. $b+ad$ sayısı alta yazılır. Sonra $b+ad$ sayısı yine d ile çarpılır, elde edilen $bd+ad^2$ sayısı c'nin altına yazılır. c'le $bd+ad^2$ sayısı toplanarak $c+bd+ad^2$ elde edilir.)

İspat: 8.6. Teoremde $Q(x)=x-d$ ye bölünen bir $P(x)$ polinomunda kalanı bulmak için $P(d)$ yi bulmak gerekir.

$$P(d)=ad^2+bd+c$$

olup Horner metodundaki son değerleri elde ederiz. Ayrıca,

$$ax^2+bx+c=\big(ax+(b+ad)\big)(x-d)+(ad^2+bd+c)$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

yazılabileceğinden $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomunu $Q(x) = x - d$ polinomuna bölümünden bölüm $B(x) = ax + b + ad$, kalan $K(x) = ad^2 + bd + c$ olduğu gözükür. //

Bu teoreme benzer şekilde n. dereceden polinom hesaplanır.

Örnek: $P(x) = 2x^2 + x - 5$ polinomunu $Q(x) = x - 3$ polinomunu Horner yöntemi ile bölünüz.

Çözüm: P(x) polinomunun baş katsayılarını yatay ve Q(x) bölünen sayısını dikey kutucukları üzerine aşağıdaki şekildeki gibi yazalım. $x - 3 = 0$ ise $x = 3$

	2	1	–5
3	↓	6	21
	2	7	16

2 sayısı direk aşağı yazılır. Sonra 2 ile 3 çarpılır, elde edilen 6 sayısı 1'in altına yazılır. 1 + 6 = 7 elde ederek 7 sayısı alta yazılır. Sonra 7 ile 3 çarpılır, elde edilen 21 sayısı –5 in altına yazılır. $-5 + 21 = 16$ olarak bulunur. Burada son kutucuklarda bulunan ilk iki değer $B(x) = 2x + 7$ ve son değer $K(x) = 16$ şeklinde olur.

Örnek: $P(x) = x^6 - 5x^5 + 2x^3 + 4x^2 + 7$ polinomunu $Q(x) = x - 2$ polinomunu Horner yöntemi ile bölünüz.

Çözüm: $x - 2 = 0$ ise $x = 2$

	1	–5	0	2	4	0	7
2	↓	2	–6	–12	–20	–32	–64
	1	–3	–6	–10	–16	–32	–57

$B(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 - 16x - 32$
$K(x) = -57$

Örnek: $P(x) = 4x^4 + 5x^2 + 3x - 2$ polinomunu $Q(x) = 2x - 1$ polinomunu Horner yöntemi ile bölünüz.

Çözüm: $2x - 1 = 0$ ise $x = \frac{1}{2}$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

	4	0	5	3	−2
1/2	↓	2	1	3	3
	4	2	6	6	1
	2	1	3	3	

$2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ olduğundan kalanın solundaki sayıları {4, 2, 6, 6}, bölenin baş katsayısı olan 2 ile tekrar bölünür ve bölümün katsayıları {2, 1, 3, 3} olarak bulunur.

$B(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 3$

$K(x) = 1$

8.8. Teorem: Bir P(x) polinomunun $x - a$ ile bölündüğünde bölüm $B_1(x)$, kalan $K_1(x)$ olsun. Yine P(x) polinomunun $x - b$ ile bölündüğünde bölüm $B_2(x)$, kalan $K_2(x)$ olsun. Bu takdirde, P(x) polinomunun $(x - a)(x - b)$ ile bölündüğünde bölüm $B_2(x)$ olup kalan,

$$K(x) = (x - a)K_2(x) + K_1(x)$$

dır.

İspat: Önce P(x) polinomu $x - a$ ile bölünmesi, sonra $B_1(x)$ polinomu $x - b$ ile bölünmesi yapılırsa,

$P(x) = (x - a)B_1(x) + K_1(x)$ ve $B_1(x) = (x - b)B_2(x) + K_2(x)$

olsun. Buna göre,

$P(x) = (x - a)[(x - b)B_2(x) + K_2(x)] + K_1(x)$

$P(x) = (x - a)(x - b)B_2(x) + (x - a)K_2(x) + K_1(x)$

bulunur. Buna göre P(x) polinomunun $(x - a)(x - b)$ ile bölündüğünde kalan,

$K(x) = (x - a)K_2(x) + K_1(x)$

olur.

Örnek: $P(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 15$ polinomunu $Q(x) = (x + 1)(x - 2)$ polinomunu Horner yöntemi ile bölünüz.

Çözüm:

	1	0	−3	−4	15	
−1	↓	−1	1	2	2	
	1	−1	−2	−2	17	$K_1 = 17$
2	↓	2	2	0		
	1	1	0	−2		$K_2 = -2$

Bölüm $B_2(x) = x^2 + x$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Kalan $K(x) = (x+1)(-2) + 17 = -2x + 15$

8.5. Not: Bir $P(x)$ polinomunun $(x-a)^n$ ile bölümü yapılırken, Horner yöntemi n defa peş peşe uygulanır.

İKİ DEĞİŞKENLİ POLİNOMLAR

8.4. Tanım: Her $m, n \in \mathbb{N}^+$, $a_{m,n} \neq 0$ olmak üzere $P : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$P(x,y) = a_{(m+1)(n+1)}x^m y^n + a_{(m+1)+(n+1)-1}x^m y^{n-1} + \cdots + a_1 xy + a_0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara iki değişkenli polinom fonksiyonu denir, kısaca iki değişkenli polinom denir. Burada $m+n$ ye polinomun derecesi denir, der $P(x,y) = m+n$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımlama ikiden fazla değişkenli fonksiyonlar içinde yapılır.

Örnek: a) $P(x,y) = 3x^4y^5 + 6x^2y^3 + 6xy - 10$ fonksiyonu $4+5=9$ dereceden iki değişkenli polinomdur.

b) $P(x,y) = -x^3y^8 + 7x^3y^3 + 8x + y + 2$ fonksiyonu $3+8=11$ dereceden iki değişkenli polinomdur.

Örnek: $P(x,y) = (6x^4y^3 - 5x^2y + 2xy^2)^n$ iki değişkenli polinomunun açılımı yapıldığında, katsayıların toplamı 243 oluyor. Buna göre n'in değeri nedir?

Çözüm: $x = 1$ ve $y = 1$ yazılırsa,

$P(1,1) = (6 \cdot 1^4 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1^2)^n$

$243 = 3^n$

$n = 5$

olur.

RASYONEL İFADELER

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

8.9. Tanım: P(x) ve Q(x) reel katsayılı iki polinom olsun. $Q(x) \neq 0$ olmak üzere, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki ifadelere rasyonel ifade denir. Rasyonel ifadelerde çarpma ve sadeleştirme gibi işlemler rasyonel sayılarda olduğu gibi yapılır. Ayrıca çarpanlara ayırma bölümünde yapılan bazı işlemler burada tekrar edilecektir.

Örnek: $\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\right)\frac{(a+b)^2}{ab+b^2}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: Önce payda eşitleyerek, sonra sadeleştirme yapılır.

$$\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\right)\frac{(a+b)^2}{ab+b^2}=\frac{(a+b)-(a-b)}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{(a+b)^2}{b(a+b)}$$
$$=\frac{2b}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a+b}{b}$$
$$=\frac{2}{a-b}$$

Örnek: $\frac{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)}{(x^3-y^3)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi nedir?

Çözüm:

$$\frac{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)}{(x^3-y^3)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)\left(\frac{x+y}{xy}\right)}$$
$$=\frac{(x+y)}{\left(\frac{x+y}{xy}\right)}$$
$$=\frac{x+y}{1}\cdot\frac{xy}{x+y}$$
$$=xy$$

8.6. Not: $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ rasyonel denkleminin kökleri, P(x) i sıfır yapan x değeri, Q(x) i sıfır yapmayan değerlerdir. Yani,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \text{ ise } P(x)=0 \wedge Q(x)\neq 0$$

dir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{3}{x}$ rasyonel denklemlerin köklerini ve denklemi sağlamayan değerleri bulunuz.

Çözüm: $x-1\neq 0,\ x+1\neq 0, x\neq 0$ olması gerektiğinden denklemi sağlamayan değerler $x\in\{-1,0,1\}$ ve

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{3}{x}$$
$$\frac{(x+1)+2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{x}$$
$$\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{3}{x}$$
$$3x^2-x=3x^2-3$$
$$x=3$$

denklemi sağlayan değerdir.

Örnek: $\frac{2x}{x-1}+\frac{x}{x+1}=0$ rasyonel denklemlerin köklerini ve denklemi sağlamayan değerleri bulunuz.

Çözüm: $x-1\neq 0,\ x+1\neq 0$ olması gerektiğinden denklemi sağlamayan değerler $x\in\{-1,0,1\}$ ve

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{x}{x+1}=0$$
$$\frac{2x(x+1)+x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=0$$
$$2x^2+2x+x^2-x=0$$
$$3x^2+x=0$$
$$x(3x+1)=0$$
$$x=0\ \vee x=-\frac{1}{3}$$

denklemi sağlayan değerdir.

RAYONEL KESİRLERE AYIRMA

8.10. Tanım: Polinomlar biçiminde verilen bir rasyonel ifadenin, kesirlerin toplamı biçiminde yazılması işlemine, rasyonel ifadeyi rasyonel kesirlere ayırma işlemi denir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^+$ ve $(ax+b)$, (ax^2+bx+c) iki polinomu çarpanlara ayrılmayan olmak üzere,

$$\frac{A}{(ax+b)^2} \text{ ve } \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$$

biçimindeki ifadeler, rasyonel kesirlerdir.

Örneğin; $\frac{5}{2x+1}, \frac{4}{(2x-4)^2}, \frac{2x-6}{x^2-2x+7}$ ifadeleri, birer rasyonel kesirlerdir.

//

8.7. Not: Bir rasyonel ifade, paydasının çarpan sayısı kadar, rasyonel kesirlerin toplamı biçiminde yazılabilir. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesini, çarpan sayısı rasyonel kesirlerin toplamı biçiminde yazılır.

1) der $P(x) <$ der $Q(x)$ ise;

a) Paydanın çarpanları $(ax+b)$ gibi birinci dereceden polinomlardan oluşuyorsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_3}{a_nx+b_n}$$

biçiminde yazılabilir.

Örnek: $\frac{4}{x^2-4}$ ifadesini rasyonel kesirlere ayırınız.

Çözüm:
$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$
$$= \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)}$$

elde edilir. Paydaları eşit olan iki rasyonel ifadenin payları da eşit olması gerektiğinden,

$$0 \cdot x + 4 = (A+B)x + (2A-2B)$$
$$A+B = 0, \quad 2A-2B = 4$$

denklemleri bulunur. Bu iki denklem çözülürse, $A = 1$ ve $B = -1$ bulunur. Şu halde,

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$$

olacak şekilde rasyonel kesirlere ayrılır.

Örnek: $\frac{3x-9}{x^2-x-2}$ ifadesini rasyonel kesirlere ayırınız.

Çözüm: $\frac{3x-9}{x^2-x-2}=\frac{3x-9}{(x-2)(x+1)}$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$
$$=\frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)(A+1)}$$
$$=\frac{(A+B)x+(A-2B)}{(x-2)(x+1)}$$

elde edilir. Paydaları eşit olan iki rasyonel ifadenin payları da eşit olması gerektiğinden,

$$3x-9=(A+B)x+(A-2B)$$
$$A+B=3, A-2B=-9$$

denklemleri bulunur. Bu iki denklem çözülürse, $A=-1$ ve $B=4$ bulunur. Şu halde,

$$\frac{3x-9}{x^2-x-2}=\frac{-1}{x-2}+\frac{4}{x+1}$$

olacak şekilde rasyonel kesirlere ayrılır.

8.9. Teorem: $\frac{ax+b}{(x-c)(x-d)}=\frac{A}{x-c}+\frac{B}{x-d}$, ise $A=\frac{ac+b}{c-d}$ ve $B=\frac{ad+b}{d-c}$ olur.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $\frac{3x-9}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$ ise

$$A=\frac{3x-9}{x+1}=\frac{3\cdot 2-9}{2+1}=-1$$
$$B=\frac{3x-9}{x-2}=\frac{3\cdot(-1)-9}{(-1)-2}=4$$

b) Paydanın çarpanlar arasında $(ax+b)^n$ biçiminde bir çarpan varsa,

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

biçiminde yazılabilir.

Örnek: $\frac{x+2}{(x+1)^2}$ ifadesini rasyonel kesirlere ayırınız.

Çözüm: $$\frac{x+2}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$$

elde edilir. Paydaları eşit olan iki rasyonel ifadenin payları da eşit olması gerektiğinden,

$x+2=Ax+(A+B)$

$A=1, A+B=2$

denklemleri bulunur. Bu iki denklem çözülürse, $A=1, B=1$ bulunur. Şu halde,

$$\frac{x+2}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

olacak şekilde rasyonel kesirlere ayrılır.

Örnek: $\frac{x^2+4x+2}{(x+1)^3}$ ifadesini rasyonel kesirlere ayırınız.

Çözüm: $$\frac{x^2+4x+2}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{A(x+1)^2}{(x+1)(x+1)^2}+\frac{B(x+1)}{(x+1)^2(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{Ax^2+2Ax+A}{(x+1)(x+1)^2}+\frac{Bx+B}{(x+1)^2(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C)}{(x+1)^3}$$

elde edilir. Paydaları eşit olan iki rasyonel ifadenin payları da eşit olması gerektiğinden,

$x^2+4x+2=Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C)$

$A=1, 2A+B=4, A+B+C=2$

$A=1, B=2, C=-1$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

denklemleri bulunur. Buna göre,

$$\frac{x^2+4x+2}{(x+1)^3}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}$$

olacak şekilde rasyonel kesirlere ayrılır.

c) Paydanın çarpanlar arasında, çarpanlara ayrılamayan ax^2+bx+c gibi polinomu varsa $(\Delta > 0)$, toplamı oluşturan ifadelerin arasında, $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ rasyonel ifadesi bulunur.

Örnek: $\frac{4}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}$ biçiminde rasyonel kesirlere ayırınız.

Çözüm:
$$\frac{4}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}$$
$$=\frac{(Ax+B)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}+\frac{C(x^2+1)}{x-1}$$
$$=\frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2+C}{(x^2+1)(x-1)}$$
$$=\frac{(A+C)x^2+(-A+B)x+(-B+C)}{(x^2+1)(x-1)}$$

elde edilir. Paydaları eşit olan iki rasyonel ifadenin payları da eşit olması gerektiğinden,

$$0\cdot x^2+0\cdot x+4=(A+C)x^2+(-A+B)x+(-B+C)$$
$$A+C=0,-A+B=0,-B+C=0$$
$$A=-2,B=-2,C=2$$

denklemleri bulunur. Buna göre,

$$\frac{4}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{-2x-2}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}$$

olacak şekilde rasyonel kesirlere ayrılır.

Örnek: $\frac{x+7}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ biçiminde rasyonel kesirlere ayırınız.

Çözüm: $$\frac{x+7}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$=\frac{A(x^2+1)}{(x+2)(x^2+1)}+\frac{(Bx+C)(x+2)}{(x^2+1)(x+2)}$$
$$=\frac{Ax^2+A+Bx^2+2Bx+Cx+2C}{(x+2)(x^2+1)}$$
$$=\frac{(A+B)x^2+Bx^2+(2B+C)x+(A+2C)}{(x+2)(x^2+1)}$$

elde edilir. Paydaları eşit olan iki rasyonel ifadenin payları da eşit olması gerektiğinden,

$$0\cdot x^2+1\cdot x+7=(A+B)x^2+(2B+C)x+(A+2C)$$
$$A+B=0,\ 2B+C=1,\ A+2C=7$$
$$A=1,\ B=-1,\ C=3$$

denklemleri bulunur. Buna göre,

$$\frac{x+7}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{1}{x+2}+\frac{-x+3}{x^2+1}$$

olacak şekilde rasyonel kesirlere ayrılır.

2. der P(x) ≥ der Q(x) ise, P(x), Q(x)’e bölünerek B(x) bölümü ve K(x) kalanı bulunur. Böylece

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=B(x)+\frac{K(x)}{Q(x)}$$

eşitliği yazılır. Daha sonra $\frac{K(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesi, rasyonel kesirlere ayrılmış biçiminde yazılır.

Örnek: $\frac{x^2+3x+5}{x+1}=x+2+\frac{3}{x+1}$

Örnek: $\frac{3x^3+3x^2-7x+7}{x^2+x-2}$ rasyonel ifadesini rasyonel kesirlere ayırınız.

Çözüm:

$$\frac{3x^3+3x^2-5x-4}{x^2+x-2}=3x+\frac{x-4}{(x+2)(x-1)}$$
$$=3x+\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$
$$=3x+\frac{Ax-A+Bx+2B}{(x+2)(x-1)}$$
$$=3x+\frac{(A+B)x+(-A+2B)}{(x+2)(x-1)}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

elde edilir. Paydaları eşit olan iki rasyonel ifadenin payları da eşit olması gerektiğinden,

$$1\cdot x-4=(A+B)x+(-A+2B)$$
$$A+B=0, -A+2B=-4$$
$$A=2, B=-1$$

denklemleri bulunur. Buna göre,

$$\frac{3x^3+3x^2-5x-4}{x^2+x-2}=3x+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-1}$$

olacak şekilde rasyonel kesirlere ayrılır.

8.2. Sonuç: $\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+b}$ biçiminde bulunan bir ifade de A ve B sabitleri;

$$A=\frac{P(a)}{a-b} \text{ ve } B=\frac{P(b)}{a-b}$$

biçimindedir.

Örnek: $\frac{4}{x^2-4}$ rasyonel kesirlere ayırınız.

Çözüm: $\frac{4}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$ olup $a=2, b=-2, P(x)=4$ dir. Buna göre

$$A=\frac{P(a)}{a-b}=\frac{4}{2-(-2)}=1$$
$$B=\frac{P(b)}{a-b}=\frac{4}{-2-(-2)}=-1$$
$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$$

elde edilir.

Örnek: $\frac{x}{x^2-2x-3}$ rasyonel kesirlere ayırınız.

Çözüm: $\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$

denkleminde $P(x)=x, a=3, b=-1$ olacağından,

$$A=\frac{P(a)}{a-b}=\frac{3}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$$
$$B=\frac{P(b)}{a-b}=\frac{-1}{-1-3}=\frac{1}{4}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

elde edilir. Buna göre,

$$\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{3}{4(x-3)}+\frac{1}{4(x+1)}$$

elde edilir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Polinomlara Giriş

1. Aşağıdakilerden kaç tanesi bir polinomdur.

I. $P(x)=\sqrt{5}x^2+\sqrt{3}$

II. $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+7x-8$

III. $P(x)=\frac{x^2+3x-12}{5x+8}$

IV. $P(x)=4x^{n-2}+x^{n-1}, n\in\mathbb{N}$

V. $P(x)=6x^{-2}+7x^{-1}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Cevap: I ve II polinomdur. Ama III rasyonel kesirdir, ama yalnız başına polinom değildir. IV de $n=1$ de polinom özelliğini sağlamamaktadır. Yine V de -2 ve -1 kuvvetler polinom özelliğini sağlamazlar.

Cevap: B

2. $P(x)=5x^4+2x^3+x^2+3x+6$ polinomu hakkında aşağıdakilerden hangisi söylenemez.

A) der P(x)=4
B) sabit terimi 6'dır
C) katsayılar toplamı 17'dır
D) sabit polinomdur
E) $P(-1)=7$'dir

Cevap: A) x^4 olduğundan polinom 4. derecedendir.

B) $P(0)=6$ olduğundan) sabit terimi 6'dır.

C) $P(1)=5\cdot1^4+2\cdot1^3+1^2+3\cdot1+6=17$

D) Sabit polinom olması için $P(x)=c$ gibi bir değer olması gerekir. Burada değişkenler olduğundan sabit polinom değidir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

E) $P(1) = 5 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 6 = 7$

Cevap: D

3. $P(x) = (m-1)x^4 + (n+2)x^3 + (p-3)x^2 + 3x + 6$ polinomu bir doğrusal fonksiyon ise $m + n + p$ nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Verilen polinom bir doğrusal fonksiyon ise $P(x) = 3x + 6$ olacağından $m - 1 = 0, n + 2 = 0, p - 3 = 0$ olmalıdır.

$m = 1, n = -2, p = 3$

$m + n + p = 1 - 2 + 3 = 4$

Cevap: C

4. $P(x) = x^2 - 6x + 5$ ise $P(x+3)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x^2 - 4$ B) $x^2 + 2x - 4$ C) x^2 D) $x^2 - 4x$ E) $x^2 + 4$

Çözüm: $P(x+3) = (x+3)^2 - 6(x+3) + 5$

$= x^2 + 6x + 9 - 6x - 18 + 5$

$= x^2 - 4$

Cevap: A

5. $P(x) = 5x^2 + 2x^3 - 10x + 7$ polinomunun derecesi m, baş katsayı n ve sabit terimi p ise $m + n + p$ toplamı nedir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: der $P(x) = m = 3$, baş katsayısı $n = 2$ ve sabit terimi $p = 7$ dir.

Cevap: E

6. $P(x) = (3a-9)x^3 - 6x^2 + 2bx + 5$ ve $Q(x) = 2cx^2 + d$ polinomları veriliyor. $P(x) = Q(x)$ ise $a + b + c + d$ ifadesi neye eşittir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

Çözüm: $3a - 9 = 0,\ -6 = 2c, 2b = 0, 5 = d$

$a = 3,\ c = -3, b = 0, d = 5$

$a + b + c + d = 3 + (-3) + 0 + 5 = 5$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Cevap: A

7. $P(x) = 2x^{n/12} + \cdots$ bir polinom olduğuna göre der $P(x)$ aşağıdakilerden hangisi olamaz.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 8

Çözüm: $\frac{n}{12} \in \mathbb{N}$ sayısı olacağından 12'nin bölenleri olacaktır. Buna göre $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ kümesinin elemanlarından biridir.

Cevap: E

8. $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinomdur. $P^3(x)Q^2(x) = 14$ ve $\frac{P(x)}{Q(x)} = 4$ ise der $P(x)$ in değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $P(x) = a, Q(x) = b$ olsun.
der $[P^3(x)Q^2(x)] = 3a + 2b = 16$
der $\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = a - b = 2$
Bu iki bilinmeyenli iki denklem çözülürse, der $P(x) = 4$ olur.

Cevap: D

9. $P(x) = x^2 - 3x + 2$ ve $Q(x) = 5x^4 - 4x^2 + 12$ polinomları veriliyor. $(Q \circ P)(1)$ işleminin sonucu nedir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

Çözüm: $P(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$
$Q(0) = 5 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^2 + 12 = 12$

Cevap: C

10. $P(2x - 3) = x^2 + 4x + 5$ olduğuna göre, $P(2x + 1)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + 8x + 12$ B) $x^2 + 8x + 15$ C) $x^2 + 8x + 17$
D) $x^2 + 6x + 10$ E) $x^2 - 8x + 16$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm:
$2x-3$ iken $2x+1$
$2x$ iken $2x+4$
x iken $x+2$
gelmelidir.
$P(2(x+2)-3)=(x+2)^2+4(x+2)+5$
$P(2x+1)=x^2+4x+4+4x+8+5$
$P(2x+1)=x^2+8x+17$

Cevap: C

11. $P(x-2)=x^2+2x-4$ olduğuna göre, $P(2x+1)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $4x^2+16x+8$ B) $x^2+16x+8$ C) $4x^2+4x+8$
D) $4x^2-16x-8$ E) $x^2+16x-8$

Çözüm:
$x-2$ iken $2x+1$
x iken $2x+3$
alınmalıdır.
$P(2x+3-2)=(2x+3)^2+2(2x+3)-4$
$P(2x+1)=4x^2+16x+8$

Cevap: A

12. $P(x-2)=x^3-4x-k$ polinomu veriliyor. $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı 5 olduğuna göre, $p(x)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) -12 B) -10 C) 0 D) 3 E) 7

Çözüm: $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı 5 ise $P(1)=7$ dir.
$x=3$ için $P(3-2)=3^3-4\cdot 3-k=5$ ise $k=10$
$x=2$ için $P(2-2)=2^3-4\cdot 2-10=-10$

Cevap: B

13. $P(x)=x^2-1$ bir polinom olmak üzere, $P(P(x))=0$ eşitliğini sağlayan polinomun kökler toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 2

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $P(x) = x^2 - 1$

$(P \circ P)(x) = (x^2 - 1) \circ (x^2 - 1)$

$P(P(x)) = (x-1)^2 - 1$

$P\big(P(x)\big) = x^2 - 2x$

polimonun kökleri $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$ yani $x = 0$ ve $x = 2$ dir.

Cevap: E

Polinomlarda İşlemler

14. $P(x) = 4x^2 + 2x - 5$ ve $Q(x) = -x^2 + 6x + 8$ polinomları veriliyor. $3P(x) + 2Q(x)$ polinomu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $5x^2 + 18x + 1$ B) $10x^2 + 18x + 1$ C) $10x^2 - 18x + 12$
D) $10x^2 + 6x + 1$ E) $4x^2 - 18x + 1$

Çözüm:

$$\begin{aligned} 3P(x) + 2Q(x) &= 3(4x^2 + 2x - 5) + 2(-x^2 + 6x + 8) \\ &= 12x^2 + 6x - 15 - 2x^2 + 12x + 16 \\ &= 10x^2 + 18x + 1 \end{aligned}$$

Cevap: B

15. $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x - 6$ ve $Q(x) = x^2 - x + 3$ polinomları veriliyor. $P(x) \cdot Q(x)$ polinomundaki x^3 lü terimin katsayısı nedir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm:

$P(x) \cdot Q(x) = \cdots + 2x^3 + 4x^2(-x) + +5x \cdot x^2 + \cdots = \cdots + 3x^3 + \cdots$

Cevap: A

16. $(x+1)P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + c$ olduğuna göre c'nin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $(x+1)P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + c$ olduğuna göre $P(x)$ polinomu $(x+1)$ ile kalansız bölünmektedir. Buna göre $x + 1 = 0$ olduğundan $x = -1$ yazılmalıdır.

$(-1+1)P(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 + 5(-1) + c$

$0 = -1 + 4 - 5 + c$

$2 = c$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Cevap: B

17. $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + 7x + 8$ ve $Q(x) = 4x^3 + 5x^2 - x - 4$ polinomları veriliyor. $M(x) = 4P(x-2) - 2Q(x+1)$ olduğuna göre $M(x)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Katsayılar toplamı için $M(1)$ bulunmalıdır.

$$\begin{aligned} M(1) &= 4P(1-2) - 2Q(1+1) \\ &= 4P(-1) - 2Q(2) \\ &= 4(3(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 8) - 2(4 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 1 - 4) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Cevap: D

18. $P(x-3) = x^2 + 8x + 10$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 25 B) 26 C) 27 D) 28 E) 30

Çözüm: $x - 2 = 0$ için $x = 2$ olur.
$P(2-3) = 2^2 + 8 \cdot 2 + 10 = 30$

Cevap: E

19. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının, $x - 2$ ile bölümünden kalan sırasıyla 3 ve 5 dür. Buna göre $(x+3)P(x) - (x-1)Q(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan nedir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

Çözüm: $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının, $x - 2$ ile bölümünden kalan sırasıyla 3 ve 4 ise $P(2) = 3$ ve $Q(2) = 5$ dür.
$(2+3)P(2) + (2-1)Q(2) = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 10$

Cevap: C

20. $P(x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden bölüm $Q(x)$ ve kalan 5'dir. $Q(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan 6'dır. $P(x)$ polinomunun $x^2 - 1$ ile bölümünden kalan nedir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

A) $3x+13$ B) $8x+9$ C) $5x+12$
D) $6x+11$ E) $7x+8$

Çözüm: $P(x)=(x-1)Q(x)+5$ ve $Q(x)=(x+1)R(x)+6$ olacak şekilde $R(x)$ vardır.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)[(x+1)R(x)+6]+5 \\ &= (x-1)(x+1)R(x)+(x+1)\cdot 6+5 \\ &= (x-1)(x+1)R(x)+(6x+11) \end{aligned}$$

Buna göre $P(x)$ polinomunun x^2-1 ile bölümünden kalan $6x+11$ dir.

Cevap: D

21. $P(2x-1)+P(3x+1)=10x-8$ ise $P(x)$ polinomu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x-4$ B) $2x+4$ C) $2x+6$ D) $2x+8$ E) $2x+9$

Çözüm: $P(x)=ax+b$ olsun.

$$P(2x-1)=a(2x-1)+b$$
$$P(3x+1)=a(3x+1)+b$$

olacağından

$$P(2x-1)+P(3x+1)=10x-8$$
$$a(2x-1)+b+a(3x+1)+b=10x-8$$
$$5ax+2b=10x-8$$
$$5a=10 \text{ ve } 2b=-8$$
$$a=2 \text{ ve } b=-4$$
$$P(x)=2x-4$$

Cevap: A

22. $P(x)=x^4+x^2+1$ polinomu $Q(x)=x^2+x+1$ ile bölündüğünde kalan nedir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $x^2+x+1=0$ olmasından $x^2=-x-1$ yazılır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= (-x-1)^2+(-x-1)+1 \\ &= x^2+2x+1-x \\ &= (-x-1)+x+1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cevap: B

Ögr. Gör. Şaban YILMAZ

23. $P(x) = 3x^3 - 9x^2 + kx + 1$ polinomu $x - 1$ ile tam bölündüğüne göre k'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Verilen polinom $x - 1$ ile tam bölündüğüne göre polinomda $x - 1 = 0$ için $x = 1$ alınmalıdır.

$P(1) = 3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + k \cdot 1 + 1 = 0$

$k = 5$

Cevap: E

24. $(x - 3)^n + (x - 2)^n - 1$ polinomunun $(x-3)(x-2)$ ile tam bölünebilmesi için n hakkında ne söylenebilir?

A) Pozitif çift B) Negatif çift C) Pozitif tek
D) Negatif tek E) Sadece pozitif sayı

Çözüm: Verilen polinom tam bölünüyorsa

$$P(3) = 0 \text{ ve } P(2) = 0$$

oluyor demektir. Bu durumda,

$$P(3) = (3 - 3)^n + (3 - 2)^n - 1 = 0$$
$$0^n + 1^n - 1 = 0$$

olup n hakkında herhangi bir şey denilemez. Çünkü n'nin tek ve çift her iki durumunda da denklem sağlanır. Ama

$$P(2) = (2 - 3)^n + (2 - 2)^n - 1 = 0$$
$$(-1)^n + 0^n - 1 = 0$$

olması için n'nin poazitif çift sayı olması ile mümkündür.

Cevap: A

25. $P(x) = 5x^9 - 3x^6 - 8$ polinomunun $x^3 - 3$ e bölümündeki kalan nedir?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

Çözüm: $x^3 - 3 = 0$ ise $x^3 = 3$

$$\begin{aligned} P(x) &= 5(x^3)^3 - 3(x^3)^2 - 8 \\ &= 5 \cdot (3)^3 - 3 \cdot (3)^2 - 8 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Cevap: E

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

26. $\frac{P(x+1)}{Q(x)} = x^2 + x - 4$ bağıntısı veriliyor. Q(x) polinomunun $(x-2)$ ile bölümündeki kalan 5 olduğuna göre P(3) in değeri kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm: Q(x) polinomunun $(x-2)$ ile bölümündeki kalan 5 olduğuna göre $Q(2) = 5$ dür.

$$\frac{P(2+1)}{Q(2)} = 2^2 + 2 - 4$$
$$\frac{P(3)}{5} = 2$$
$$P(3) = 10$$

Cevap: D

27. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 2$ polinomunun çarpanlarından biri x olduğuna göre, kalan ne olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Bir polinomun çarpanlarından birinin x olması, bu polinom x ile bölünmesi demektir. Bölümlerden biri x olduğuna göre P(x) polinomu $(x-0)$ ile bölünmesi anlamına gelir. Buna göre,

$$P(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 2 = 2$$

elde edilir.

Cevap: C

28. Bir P(x) polinomun $(x-3)^2$ ile bölümünden kalan $5x + 4$ olduğuna göre bu polinomun $x - 3$ ile bölümünden kalan nedir?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

Çözüm: $P(x) = (x-3)^3 + 5x + 4$

P(x) in $x - 3$ ile bölümünden kalan P(3) olur.

$P(3) = (3-3)^3 + 5 \cdot 3 + 4 = 19$

Cevap: B

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

29. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının $x-2$ ile bölümünden kalanlar sırası ile 6 ve 3 olmak üzere $2P(x)-k \cdot Q(x)$ polinomu $x-2$ ile tam olarak bölünmesi için k ne olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $P(x) = (x-2)K(x)+6$ ise $P(2) = (2-2)K(2)+6 = 6$

$Q(x) = (x-2)L(x)+3$ ise $Q(2) = (2-2)L(2)+3 = 3$

$2P(2)-k \cdot Q(2) = 0$

$2 \cdot 6 - k \cdot 3 = 0$

$k = 4$

Cevap: D

30. $P(x-1) = (x^2-8)Q(x)+2$ eşitliği verilmiştir. $P(x)$ polinomunun $(x-2)$ ile bölümünden kalan 10 olduğuna göre, $Q(x)$ polinomunun $(x-3)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $P(x)$ polinomunun $(x-2)$ ile bölümünden kalan 10 ise $P(2) = 10$ dir.

$P(2)$ olması için $x = 3$ almalıyız.

$P(3-1) = (3 \cdot 2^2 - 8)Q(3)+2$

$10 = 4Q(3)+2$

$Q(3) = 2$

Şu halde $Q(x)$ polinomunun $(x-3)$ ile bölümünden kalan 2 dir.

Cevap: C

31. Baş katsayısı 1 olan üçüncü dereceden $P(x)$ polinomunda

$$P(1) = P(2) = P(4) = 10$$

eşitliklerini sağlıyor. Buna göre, $P(3)$ ün değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $P(x) = 1 \cdot (x-1)(x-2)(x-3)+10$

$P(0) = 1 \cdot (0-1)(0-2)(0-3)+10 = 4$

Cevap: D

32. Baş katsayısı 1 olan 4. dereceden bir $P(x)$ polinomu her x reel sayısı için

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$P(x) = P(-x)$$
eşitliğini sağlamaktadır.
$$P(2) = P(5) = 0$$
olduğuna göre, bu $P(x)$ polinomunun sabit terimi nedir?

A) 72 B) 81 C) 84 D) 90 E) 100

Çözüm: $P(x) = P(-x)$ ise,
$P(2) = P(-2)$ ve $P(5) = P(-5)$
dir. Buna göre baş katsayısı 1 olan 4. dereceden polinom;
$P(x) = 1 \cdot (x-2)(x+2)(x-5)(x+5)$
biçimindedir. O halde;
$P(0) = 1 \cdot (0-2)(0+2)(0-5)(0+5) = 100$
olarak bulunur.

Cevap: E

33. $P(x)$ bir polinom ve
$$x^3 + kx^2 + 2x - 16 = (x-2)P(x)$$
olduğuna göre, $P(4)$ nin değeri kaçtır?

A) 28 B) 32 C) 36 D) 40 E) 42

Çözüm: $Q(x) = x^3 + kx^2 + 2x - 16$ polinomu olsun. $Q(x)$ polinomu $(x-2)$ ile kalansız bölündüğünden $Q(2) = 0$ olur.
$Q(2) = 2^3 + k \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 16 = 0$ ise $k = 1$
$Q(x) = x^3 + x^2 + 2x - 16$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 + 2x - 16 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{\pm x^3 \mp 2x^2 } & x^2 + 3x + 8 \\ 3x^2 + 2x - 16 & \\ \underline{\pm 3x^2 \mp 6x } & \\ 8x - 16 & \\ \underline{\pm 8x \mp 16} & \\ 0 & \end{array}$$

$P(x) = x^2 + 3x + 8$
$P(4) = 4^2 + 3 \cdot 4 + 8 = 36$

Cevap: C

Rasyonel Kesirlere Ayırma

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

34. $\dfrac{20x-10}{x^2-4x-5} = \dfrac{A}{x-5} + \dfrac{B}{x+1}$, A'nın değeri nedir?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm:

$$\frac{20x-10}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-5B}{(x-5)(x+1)} = \frac{(A+B)x+(A-5B)}{(x-5)(x+1)}$$

$$20x - 10 = (A + B)x + (A - 5B)$$

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 20 \\ A - 5B = -10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 20A + 20B = 100 \\ A - 5B = -10 \end{array}\right\} A = 15,\ B = 5$$

Cevap: B

35. $\dfrac{2x-8}{x^2-2x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2}$ ise $A - B$ nın değeri nedir?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Çözüm: Bu sorunun cevabını 8.9. Teoremini kullanarak yapalım. Kökler 0 ve 2 dir.

$$A = \frac{2x-8}{x-2} = \frac{2\cdot 0-8}{0-2} = 4$$
$$B = \frac{2x-8}{x} = \frac{2\cdot 2-8}{2} = -2$$
$$A + B = 4 - (-2) = 6$$

Cevap: A

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

6. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Zühtü ÖZEL, Arif SABUNCUOĞLU, Soyut Matematik, 5. Baskı, 2020.
7. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
8. Doç. Dr. Mustafa Bayraktar, Atatürk Üniversitesi, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, 1988, ERZURUM.
9. Halil İbrahim KARAKAŞ, Başkent Üniversitesi, Soyut Cebir, 2010, ANKARA.
10. Prof. Dr. Said HALICIOĞLU, Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR, Soyut Cebir, Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2018, ANKARA.
11. Prof. Dr. Şehmus YARDIMCI Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2018, ANKARA.
12. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ