9. BÖLÜM
PARÇALI FONKSİYONLAR

Bu bölümde parçalı fonksiyonların tanımları ve ayrıntıları verildikten sonra parçalı fonksiyonlar şeklinde tanımlanan,

– Mutlak değer fonksiyonları
– Maksimum–Minimum fonksiyonlar
– **f^+ ve f^-** fonksiyonlar
– İşaret fonksiyonları
– Tam Değer fonksiyonları

incelecektir.

PARÇALI FONKSİYON KAVRAMI

9.1. Tanım: Tanım aralıkların alt aralıklarında farklı birer kuralla tanımlanan fonksiyona parçalı fonksiyon denir. Alt aralıkların bölündüğü noktalara parçalı fonksiyonun kritik noktaları denir. Alt aralıkta tanımlanan fonksiyonlara parçalı fonksiyonların dalları denir. Bu durum $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $g : A \to B, h : C \to D$ ye tanımlı fonksiyonlar için,

$$f : (A \cup C) \to (B \cup D), f(x) = \begin{cases} g(x), x \in A \\ h(x), x \in C \end{cases}$$

biçiminde parçalı fonksiyon gösterilir. Bu gösterim,

Her $x \in A$ için $g(x)$ fonksiyonu,
Her $x \in C$ için $h(x)$ fonksiyonu

geçerlidir demektir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \leq 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$ ise $f(0) + f(1) + f(2)$ yi bulunuz.

Çözüm: Bu parçalı fonksiyonda 1 noktası kritik noktadır. x, 1'den büyük ve 1'den küçük olma durumuna göre değişmektedir. Şu halde,

$x \leq 1$ ise $f(0) = 3 - 0 = 3$ ve $f(1) = 3 - 1 = 2$
$x > 1$ ise $f(2) = 2^2 + 1 = 5$
$f(0) + f(1) + f(2) = 3 + 2 + 5 = 10$

bulunur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(2x-1)=\begin{cases}3x+1, & x\le 1\\ x^2-2, & x>1\end{cases}$ biçiminde tanımlanıyor. Buna göre $f(3)+f(-5)$ değeri nedir?

Çözüm: $2x-1=3$ ise $x=2$ olduğundan $f(2x-1)=2^2-2=2$
$2x-1=-5$ ise $x=-2$ olduğundan $f(2(-2)-1)=3(-2)+1=-5$
$f(3)+f(-5)=2+(-5)=-3$

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ 3x\ , & x=0\\ 4x+1, & x>0\end{cases}$ ve $g(x)=\begin{cases}2x+2, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ ise $f+g$ yi bulunuz.

Çözüm: f ve g fonksiyonlarında 0 noktası kritik noktadır. x, 0'dan büyük 0'dan küçük olma durumuna göre değişmektedir. Buna göre;

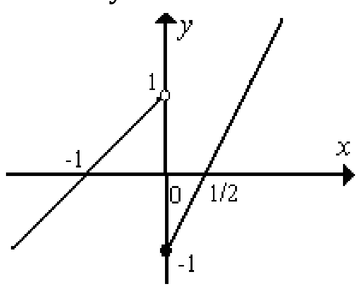
$$f(x)=\begin{cases}3x+4, & x<0\\ 5x+2, & x=0\\ 5x+2, & x>0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}3x+4, & x<0\\ 5x+2, & x\ge 0\end{cases}$$

şeklinde olur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\ge 0\\ x+1, & x<0\end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini inceleyiniz.

Çözüm: Parçalı fonksiyonun iki durumu da doğrusal fonksiyondur. Bu doğrusal fonksiyonların grafiklerini çizelim. Yalnız fonksiyonun 0 noktası kritik nokta olduğu göz önüne almalıyız.



Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1 \\ 5x-3, & x < 1 \end{cases}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 6$

fonksiyonları veriliyor. $(f \circ g)\ (x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x+6) \\ &= \begin{cases} 2(x+6)-1, & x+1 \geq 1 \\ 5(x+1)-3, & x+1 < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x+13, & x \geq 0 \\ 5x+2, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x+4, & x \geq 1 \\ 5x-3, & x < 1 \end{cases}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 3x+5, & x \geq 1 \\ 4x-6, & x < 1 \end{cases}$

ise $(f \circ g)\ (x)$ in toplamı nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \begin{cases} x+4, & x \geq 1 \\ 5x-3, & x < 1 \end{cases} \circ \begin{cases} 3x+5, & x \geq 1 \\ 4x-6, & x < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (3x+5)+4, & x \geq 1 \\ 5(4x-6)-3, & x < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3x+9, & x \geq 1 \\ 20x-33, & x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x+8, & x \geq 1 \\ 2x+6, & x < 1 \end{cases}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 4x+5, & x \geq 1 \\ x-10, & x < 1 \end{cases}$

ise $(f \circ g)(2) + (g \circ f)\ (-5)$ in toplamı nedir?

Çözüm:

$$(f \circ g)(2) = f\big(g\ (2)\big) = f(4 \cdot 2 + 5) = 3 \cdot 13 + 8 = 47$$

$$(g \circ f)(-5) = g\big(f\ (-5)\big) = g(2 \cdot (-5) + 6) = -4 - 10 = -14$$

MUTLAK DEĞER FONKSİYONU

9.2. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = |u(x)| = \begin{cases} u(x), & u(x) \geq 0 \\ -u(x), & u(x) < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan parçalı fonksiyona u fonksiyonu üzerinde mutlak değer fonksiyonu denir. Mutlak değer fonksiyonu mutlak değer özelliklerinin hepsi geçerlidir. Bu yüzden mutlak değer özellikleri burada tekrar incelenmeyecektir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |3x - 5|$ fonksiyonunda $f(0) + f(3)$ ün değerini bulunuz.

Çözüm: $f(0) = |3 \cdot 0 - 5| = |-5| = 5$ ve $f(3) = |3 \cdot 3 - 5| = 4$

$$f(0) + f(3) = 4 + 5 = 9$$

Örnek: $-3 < x < 4$ için $f(x) = \frac{3x+|x-4|}{|x+3|+5}$ fonksiyonunun eşiti nedir?

Çözüm: $-3 < x < 4$ aralığında $|x - 4| < 0$ ve $x + 3 > 0$ olduğundan,

$$f(x) = \frac{3x+|x-4|}{|x+3|+5} = \frac{3x-(x-4)}{(x+3)+5} = \frac{2x+4}{x+8}$$

bulunur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 2| + x$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaları bulunuz.

Çözüm: f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalarda $f(x) = 0$ olacağından;

$$|x^2 - 2| + x = 0$$

denklemi çözülmelidir.

$$x^2 - 2 + x = 0 \text{ ve } -x^2 + 2 + x = 0$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0 \text{ ve } (x - 2)(x + 1) = 0$$
$$x = -2 \lor x = 1 \text{ ve } x = 2 \lor x = -1$$

Ama 1 ve 2 denklemi sağlamayıp -1 ve -2 denklemi sağmaktadır.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 5| + 2x$ fonksiyonunu parçalı fonksiyona çeviriniz.

Çözüm: $x - 5 = 0$ ise $x = 5$ olduğundan

x	$-\infty$		5		∞
f(x)		−	0	+	

$$f(x)=\begin{cases} x-5+2x, & x\geq 5 \\ -(x-5)+2x, & x<5 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 3x-5, & x\geq 5 \\ x+5, & x<5 \end{cases}$$

bulunur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^2-9|$ fonksiyonunu parçalı fonksiyona çeviriniz.

Çözüm: Görüldüğü gibi mutlak değer fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. Buna göre şöyle çevirebiliriz.

x^2-9 ise $x=\pm 3$ noktaları kritik noktalardır. Buna göre şu tabloyu çizebiliriz.

x	$-\infty$		-3		3		∞
f(x)		+	0	−	0	+	

$$f(x)=\begin{cases} x^2-9, & x\leq -3 \\ -x^2+9, & -3<x<3 \\ x^2-9, & x\geq 3 \end{cases}$$

bulunur.

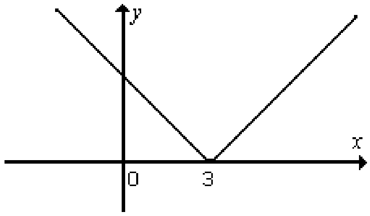
Örnek: $y=|x-3|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Verilen fonksiyonu parçalı fonksiyona çevirelim.
$x-3=0$ ise $x=3$ olacağından

x	$-\infty$		3		∞
f(x)		−	0	+	

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x\geq 3 \\ -x+3, & x<3 \end{cases}$$

bulunur. Bun parçalı fonksiyonun grafiğini çizersek aşağıdaki şekil elde edilir.



Örnek: $f(x) = |x^2 - 1|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Verilen fonksiyonu parçalı fonksiyona çevirelim.

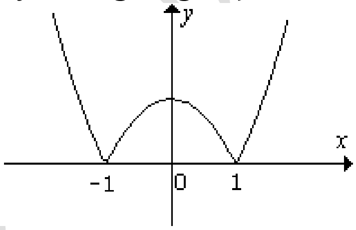
$$x^2 - 1 = 0 \text{ ise } x = \pm 1$$

bulunur. Buna göre,

x	$-\infty$		-1		1		∞
f(x)		+	0	−	0	+	

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \\ -x^2 + 1, & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

bulunur. Bun parçalı fonksiyonun grafiğini çizersek,



elde edilir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x-2|$ fonksiyonunu parçalı fonksiyona çeviriniz.

Çözüm: $x - 2 = 0$ ise $x = 2$ kritik noktadır.

$x < 2$ ise $y = x[-(x-2)] = -x^2 + 2x$

$x > 2$ ise $y = x(x-2) = x^2 - 2x$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x < 2 \\ x^2 - 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| + |x+1| - x$ fonksiyonunu parçalı fonksiyona çeviriniz.

Çözüm: $x - 1 = 0$ ise $x = 1$ ve $x + 1 = 0$ ise $x = -1$ noktaları kritik noktalardır.

x	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$

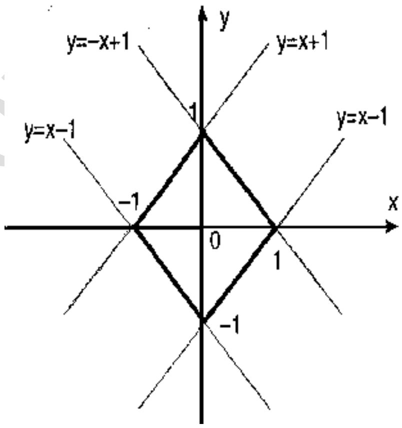
$$f(x) = \begin{cases} -(x-1) - (x+1) - x, & x < -1 \\ -(x-1) + (x+1) - x, & -1 < x < 1 \\ (x-1) + (x+1) - x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x, & x < -1 \\ -x + 2, & -1 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Örnek: $|x| + |y| = 1$ bağıntısının grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$|x| + |y| = \begin{cases} x + y = 1, & x \geq 0 \text{ veya } y \geq 0 \\ -x + y = 1, & x < 0 \text{ veya } y \geq 0 \\ -x - y = 1, & x < 0 \text{ veya } y < 0 \\ x - y = 1, & x \geq 0 \text{ veya } y < 0 \end{cases}$$



9.1. Not: Mutlak değer fonksiyonu mutlak değer özelliklerini taşıdığından, bu kısımda tekrar anlatılmayacaktır. (Bk. Mutlak değer)

MAKSİMUM – MİNİMUM FONKSİYONLARI

9.3. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun,

$$\max\,(f(x); g(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq g(x) \\ g(x), & f(x) < g(x) \end{cases}$$

biçiminde tanımlı parçalı fonksiyonuna f ile g'nin maksimum fonksiyonu denir.

9.4. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun,

$$\min\,(f(x); g(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq g(x) \\ g(x), & f(x) > g(x) \end{cases}$$

biçiminde tanımlı parçalı fonksiyonuna f ile g'nin minimum fonksiyonu denir.

Örnek: $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x$ ile $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = x^2 - 2$ ile tanımlıdır, max (f,g) fonksiyonunu parçalı biçimde yazarak belirtiniz ve grafiğini çiziniz.

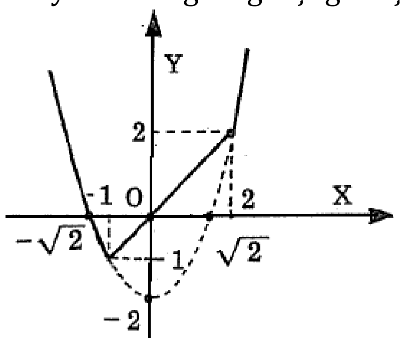
Çözüm: Her x için $g(x) \leq f(x)$

$$x^2 - 2 \leq x$$
$$x^2 - x - 2 \leq 0$$
$$(x+1)(x-2) \leq 0$$

olduğundan $-1 \leq x \leq 2$ dir. Yani $x \in [-1, 2]$ için $g(x) \leq f(x)$ dir. Buna göre $x \in \mathbb{R} - [-1,2]$ için $g(x) > f(x)$ olacaktır. Öyleyse,

$$\max\,(f(x); g(x)) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2, & x > 2 \end{cases}$$

dir. O halde max (f,g) fonksiyonunun grafiği aşağıda çizilmiştir,



Örnek: $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ ile $g: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = 4$ ile tanımlıdır, min (f; g) fonksiyonunu parçalı biçimde yazarak belirtiniz ve grafiğini çiziniz.

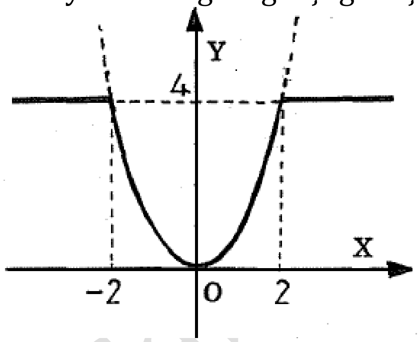
Çözüm: Her x için $f(x) \leq g(x)$

$$x^2 \leq 4$$
$$x^2 - 4 \leq 0$$
$$(x-2)(x+2) \leq 0$$

olduğundan $-2 \leq x \leq 2$ dir. Yani $x \in [-2, 2]$ için $f(x) \leq g(x)$ dir. Buna göre $x \in \mathbb{R} - [-2, 2]$ için $f(x) > g(x)$ olacaktır. Öyleyse,

$$\max(f(x); g(x)) = \begin{cases} 4, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

dir. O halde min (f; g) fonksiyonunun grafiği aşağıda çizilmiştir,



9.1. Teorem: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: A \to \mathbb{R}$ ve $g: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları veriliyor.

$$\max(f; g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$
$$\min(f; g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

dir.

İspat: max (f; g) ve min (f; g) fonksiyonlarının tanımından, her $x \in A$ için

$$\max(f(x); g(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq g(x) \\ g(x), & f(x) < g(x) \end{cases}$$
$$\min(f(x); g(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq g(x) \\ g(x), & f(x) > g(x) \end{cases}$$

dir. Buradan

$$\max(f(x); g(x)) + \min(f(x); g(x)) = f(x) + g(x)$$
$$\max(f(x); g(x)) - \min\big(f(x); g(x)\big) = |f(x) - g(x)|$$

olduğu görülür. Buna göre,

$$\max(f; g) + \min(f, g) = (f + g)$$

$$\max(f;g) - \min(f,g) = |f - g|$$

dir. Bu iki eşitliği taraf tarafa toplayarak ve çıkararak,

$$\max(f;\ g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

$$\min(f;\ g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

elde edilir.

f^+ ve f^- PARÇALI FONKSİYONU

9.5. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan fonksiyona f^+ ve f^- parçalı fonksiyonu denir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ ikinci dereceden fonksiyonunu f^+ parçalı fonksiyonu çeviriniz ve grafiğini çiziniz.

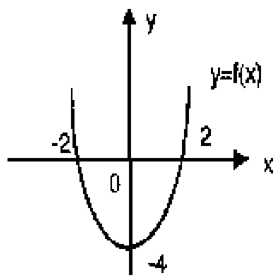
Çözüm: Önce $x^2 - 4 = 0$ denkleminin köklerini bulalım. Bunlar $x = \pm 2$ dir. Sonra bu denklemin işaretini inceleyelim.

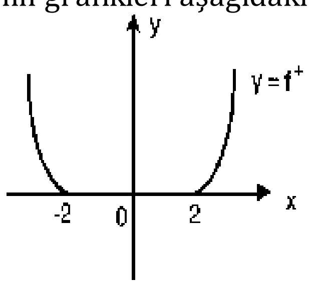
x	$-\infty$		-2		2		∞
f(x)		+	0	-	0	+	

Pozitif bölgelerde fonksiyonun kendisi, negatif bölgelerde 0 fonksiyonu alınacağından,

$$f^+(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -2 \\ 0, & -2 < x < 2 \\ x^2 - 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

bulunur. Şu halde f ve f^+ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir.





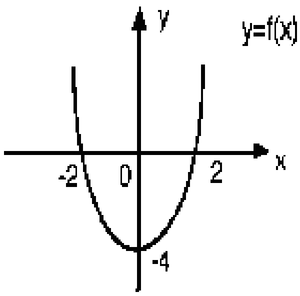
9.5. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan fonksiyona f^- parçalı fonksiyonu denir.

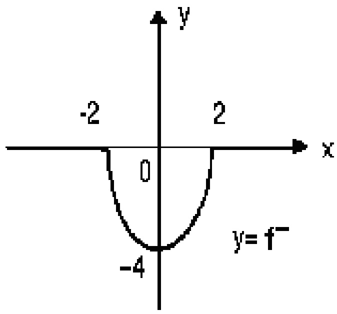
Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ ikinci dereceden fonksiyonunu f^- parçalı fonksiyonu çeviriniz ve grafiğini çiziniz.

Çözüm: Yukarıda bu örneğin analizi yapılmıştı. Negatif bölgelerde fonksiyonun kendisi, pozitif bölgelerde 0 fonksiyonu alınacağından,

$$f^+(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ x^2 - 4, & -2 < x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

bulunur. Şu halde f ve f^- fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir.





9.2. Teorem: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları veriliyor.

$$f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|) \text{ ve } f^- = \frac{1}{2}(f - |f|)$$

dir.

İspat: f^+ ve f^- fonksiyonlarının tanımından, her $x \in A$ için

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases} \text{ ve } f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

dir. Buradan

$$f^+(x) + f^-(x) = f(x) \text{ ve } f^+(x) - f^-(x) = |f(x)|$$

olduğu görülür. Buna göre,

$$f^+ + f^- = (f + g) \text{ ve } f^+ - f^- = |f - g|$$

dir. Bu iki eşitliği taraf tarafa toplayarak ve çıkararak,

$$f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|) \text{ ve } f^- = \frac{1}{2}(f - |f|)$$

elde edilir.

SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONU

9.7. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için;

$$f(x) = \operatorname{sgn} u(x) = \begin{cases} -1, & u(x) < 0 \\ 0, & u(x) = 0 \\ 1, & u(x) > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna u fonksiyonunun işaret fonksiyonu denir ve

$$f(x) = \operatorname{sgn} u(x)$$

ile gösterilir. sgn u "signum u" şeklinde okunur. İşaret fonksiyonunun değer kümesi $\{-1, 0, 1\}$ noktalarından oluşmaktadır.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(2x - 4)$ ise $f(5) + f(2) + f(0)$ ı bulunuz.

Çözüm: $f(5) = \operatorname{sgn}(2 \cdot 5 - 4) = \operatorname{sgn} 6 = 1$
$f(2) = \operatorname{sgn}(2 \cdot 2 - 4) = \operatorname{sgn} 0 = 0$
$f(0) = \operatorname{sgn}(2 \cdot 0 - 4) = \operatorname{sgn}(-4) = -1$
$f(5) + f(2) + f(0) = 1 + 0 - 1 = 0$

Örnek: $\operatorname{sgn}(4x + 3) = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\operatorname{sgn} f(x) \neq 2$ olacağından çözüm kümesi boş ($\emptyset$) kümedir.

Örnek: $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$ fonksiyonunu parçalı fonksiyonuna çeviriniz.

Çözüm: İşaret fonksiyonunun tanımından da anlaşılacağı gibi, işaret fonksiyonunun f(x) ini sıfır yapan noktalar kritik noktalardır. Buna göre,

$$x^2 - 4 = 0 \text{ ise } x = \pm 2$$

kritik noktalardır.

x		-2		2	
$x^2 - 4$	$+$		$-$		$+$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 2 < x \lor x > -2 \\ 0, & x = 2 \lor x = 2 \\ -1, & -2 < x < 2 \end{cases}$$

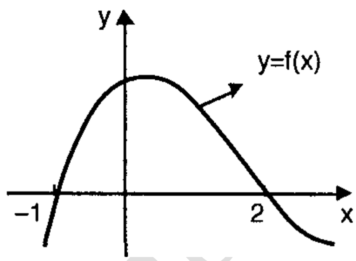
Örnek: $f(x) = \text{sgn}\,(x^2 - 3x + 2) = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\text{sgn}\,(x^2 - 3x + 2) = 1$ olması için $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ olacaktır. Bu denklemin çözüm kümesini bulursak, $x = 1$ ve $x = 2$ olmak üzere,

x	$-\infty$		1		2		∞
f(x)		+	0	−	0	+	

oluşur. Buna göre çözüm kümemiz $x < 1$ ve $2 < x$ şeklindedir.

Örnek: Grafiği verilen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f fonksiyonunu $g(x) = \text{sgn}\, f(x)$ olarak bulunuz.



Çözüm: Verilen f fonksiyonuna göre,

$x < -1$ için $g(x) = -1$

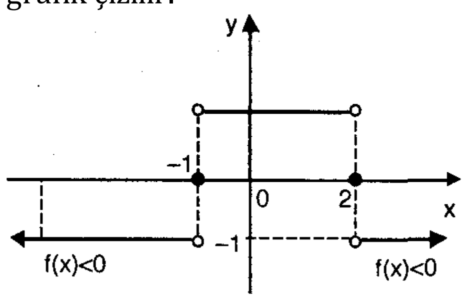
$x = -1$ için $g(x) = 0$

$-1 < x < 2$ için $g(x) = 1$

$x = 2$ için $g(x) = 0$

$2 < x$ için $g(x) = -1$

olacağından aşağıdaki grafik çizilir.



Örnek: f ve g reel sayılar üzerinde

$f(x) = x^2, g(x) = \text{sgn}\, x$

şeklinde fonksiyonlar olsunlar. Bu takdirde,

$$(g \circ f)(x) \text{ ve } (f \circ g)(x)$$
fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \text{sgn } x^2 = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \begin{cases} (-1)^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1^2, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Örnek: $|x+1| = \text{sgn } (x+1)$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

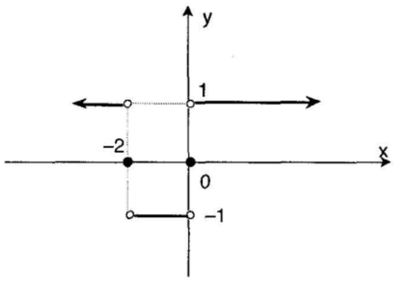
Çözüm: $|x+1| \geq 0$ olduğundan $\text{sgn } (x+1) \geq 0$ olur.
1. $\text{sgn } (x+1) = 0$ ise $x = -1$ ve $|x+1| = 0$ ise $x = -1$
2. $\text{sgn } (x+1) = 1$ ise $x > -1$ ve $|x+1| = 1$ ise
$$x + 1 = 1, -(x+1) = 1$$
$$x = 0, \ x = -2$$
dir. $x = -2$ değeri $x > -1$ şartına uymadığı için kök olamaz. Şu halde çözüm kümesi,
$$Ç = \{-1, 0\}$$
şeklindedir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \text{sgn } (x^2 + 2x)$ fonksiyonunu inceleyiniz.

Çözüm: $x^2 + 2x$ ifadesini inceleyelim.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x^2 + 2x$		+	o	−		+	
$\text{sgn}(x^2+2x)$		+1	o	−1	o	+1	

$$f(x) = \begin{cases} +1, & x < -2 \lor x > 0 \\ 0, & x = -2 \lor x = 0 \\ -1 & -2 < x < 0 \end{cases}$$
bulunur. Buna göre bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki paraboldür.



TAM DEĞER ve FONKSİYONU

9.8. Tanım: $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, x'ten büyük olmayan en büyük tamsayıya, x'in tam değeri denir ve $[\![\ ]\!]$ sembolü ile gösterilir. Buna göre $a \in \mathbb{Z}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$a \leq x < a + 1 \text{ ise } [\![x]\!] = a$$

dır. $t = x - [\![x]\!]$ olarak alınırsa $t \in [0, 1)$ dir. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [\![x]\!] =$ fonksiyonuna da tam değer fonksiyonu denir.

Örnek: $[\![3{,}2]\!] = 3$
$[\![-2{,}95]\!] = -3$
$[\![9{,}9999]\!] = 10$
$[\![5{,}\overline{9}]\!] = 6$ (Devirli sayı)

9.1. Sonuç: $k \in \mathbb{R}$ için $k[\![x]\!] \neq [\![kx]\!]$ dir.

Örnek: $2[\![3{,}64]\!] \neq [\![2 \cdot 3{,}64]\!]$
$2 \cdot 3 \neq [\![7{,}28]\!]$
$6 \neq 7$

Örnek: $[\![x - 9]\!] = 13$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $[\![x - 9]\!] = 13$
$13 \leq x - 9 < 14$
$13 + 9 \leq x - 9 + 9 < 14 + 9$
$22 \leq x < 23$

Örnek: $2x - [\![x-1]\!] = 7$ denklemini sağlayan x değerlerini bulunuz.

Çözüm: $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $[\![x-1]\!] = a$ olsun. Buna göre;

$$a \leq x - 1 < a + 1$$
$$a + 1 \leq x < a + 2$$
$$2a + 2 \leq 2x < 2a + 4$$
$$2a + 2 - a \leq 2x - a < 2a + 4 - a$$
$$a + 2 \leq 2x - a < a + 4$$
$$a + 2 \leq 7 \text{ ve } 7 < a + 4$$
$$a \leq 5 \text{ ve } 3 < a$$
$$3 < a \leq 5$$

bulunur.

9.2. Teorem: $m \in \mathbb{Z}$, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$[\![m + x]\!] = m + [\![x]\!]$$

dir.

İspat: $x = [\![x]\!] + t,\ t \in [0,1)$

olduğundan bu ifadenin her iki tarafına m ilave edersek,

$$m + x = m + [\![x]\!] + t\ ,\ t \in [0,1) \qquad (1)$$

bulunur. Ayrıca tanımdan,

$$m + x = [\![m + x]\!] + t\ ,\ t \in [0,1) \qquad (2)$$

yazılabilir. (1) ve (2) denklemlerinden

$$[\![m + x]\!] = m + [\![x]\!]$$

elde edilir.

Örnek: $[\![x + [\![x+5]\!]]\!] = 15$ denklemin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $[\![x + [\![x+5]\!]]\!] = 15$

$$[\![x]\!] + [\![x+5]\!] = 15$$
$$[\![x]\!] + [\![x]\!] + 5 = 15$$
$$2[\![x]\!] = 10$$
$$[\![x]\!] = 5$$
$$5 \leq x \leq 6$$

9.3. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$[\![x + y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$$

dir.

İspat: $x = [\![x]\!] + t_1\ ,\ t_1 \in [0,1)$

$$y = [\![y]\!] + t_2\ ,\ t_2 \in [0,1)$$

yazılabilir. Buna göre

$$x + y = [\![x]\!] + [\![y]\!] + t_1 + t_2 \ \ , t_1 + t_2 \in [0, 2)$$

elde ederiz.

i) Eğer $0 \leq t_1 + t_2 < 1$ ise $x + y = [\![x]\!] + [\![y]\!] + t_1 + t_2$ eşitliği tanımdan dolayı,

$$[\![x + y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!] \qquad (1)$$

olur.

ii) Eğer $1 \leq t_1 + t_2 < 2$ ise $x + y = [\![x]\!] + [\![y]\!] + t_1 + t_2$ eşitliği tanımdan dolayı,

$$[\![x + y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!] + 1$$
$$[\![x + y]\!] > [\![x]\!] + [\![y]\!] \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) denklemlerinden

$$[\![x + y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$$

bulunur.

Örnek: $\left[\!\!\left[\frac{x-1}{x}\right]\!\!\right] = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $1 \leq \frac{x-1}{x} < 2$

$1 \leq \frac{x-1}{x}$ ve $\frac{x-1}{x} < 2$

$\frac{x-1}{x} - 1 \geq 0$ ve $\frac{x-1}{x} - 2 < 0$

$-\frac{1}{x} \geq 0$ ve $\frac{x+1}{x} > 0$

x		0	
1/x	−		+

x		-1		0	
x	−		−		+
x + 1	−		+		+
	+		−		+

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = (-\infty;\ 0) \cap [(-\infty; -1) \cup [0;\ \infty)] = (-\infty; -1)$

Örnek: $[\![2x]\!] = [\![x]\!]$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $x = [\![x]\!] + t\ , t \in [0, 1)$ olduğundan,

$2x = 2[\![x]\!] + t\ , t \in [0, 1)$

$2x = 2[\![x]\!] + t\ , t \in [0, 2)$

yazılabilir.

i) Eğer $0 \le t < 1$ ise $[\![2x]\!] = 2[\![x]\!]$ dir. $2[\![x]\!] = [\![x]\!]$ ise $[\![x]\!] = 0$ olacağından

$$x = 0 + t\,,\, t \in [0;\ 1/2)$$

bulunur. O halde $x \in [0;\ 1/2)$ olduğundan $Ç_1 \in [0;\ 1/2)$ dir.

ii) Eğer $1 \le 2t < 2$ ise $0 \le 2t - 1 < 1$ olduğundan

$$2x = 2[\![x]\!] + 2t = 2[\![x]\!] + 1 + (2t - 1)\,,$$

$$[\![2x]\!] = 2[\![x]\!] + 1\,,$$

yazılabilir. Burada $[\![2x]\!] = [\![x]\!]$ olduğundan

$$[\![x]\!] = 2[\![x]\!] + 1\,,$$

$$[\![x]\!] = -1\,,$$

bulunur. Buna göre $x = 0 + t, t \in [0;\ 1/2)$ olduğundan,

$$x = -1 + t \text{ ve } \frac{1}{2} \le t < 1$$

$$-1 + \frac{1}{2} \le -1 + t < -1 + 1$$

$$-\frac{1}{2} \le x < 0$$

olur. O halde $Ç_2 \in [-1/2; 0)$ dir. Şu halde genel çözüm;

$$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \left(-\tfrac{1}{2};\ 0\right) \cup \left[0;\tfrac{1}{2}\right] = [-1/2;\ 1/2)$$

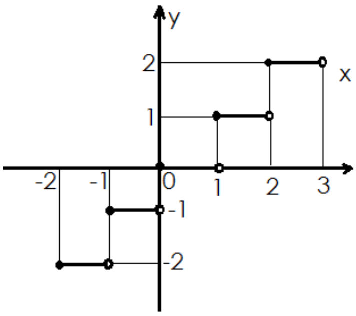
dir.

Örnek: $f : [-2;\ 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Tam değerin tanımından dolayı,

$$[\![x]\!] = \begin{cases} -2, & -2 \le x \le -1 \\ -1, & -1 \le x \le 0 \\ 0, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \\ 2, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

yazılabilir. Buna göre grafik çizilir.



9.2. Sonuç: $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

i) $[\![x]\!] + [\![y]\!] \leq [\![x+y]\!] \leq [\![x]\!] + [\![y]\!] + 1$

ii) Eğer $x \in \mathbb{Z}$ ise $[\![x]\!] + [\![-x]\!] = 0$

Eğer $x \notin \mathbb{Z}$ ise $[\![x]\!] + [\![-x]\!] = -1$

iii) $-[\![-x]\!]$ sayısı x'ten küçük olmayan en küçük tam sayıdır.

iv) Eğer $x > 0$ ve $x \in \mathbb{N}$ ise $\left[\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\right]$, n'nin x'ten büyük olmayan pozitif katları sayısına eşittir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIMALAR

Parçalı Fonksiyonların Tanımı

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \text{ çift sayı} \\ 2x, & x \text{ tek sayı} \end{cases}$ ise $(f \circ f)(4)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 18 B) 17 C) 16 D) 15 E) 14

Çözüm:

$(f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(2 \cdot 4 + 1) = 2 \cdot 9 = 18$

Cevap: A

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(2x-1) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlanıyor. Buna göre, $f(-3) + f(5)$ değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:

$x = -1 < 0$ alınırsa $f(2(-1) - 1) = 2(-1) + 1 = -1$

$x = 3 < 0$ alınırsa $f(2 \cdot 3 - 1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f(-3) + f(5) = -1 + 2 = 1$

Cevap: B

3. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ x^2 - 1, & x < 1 \end{cases}$ biçiminde tanımlanıyor. $g(x) = x - 3$ biçiminde tanımlı f ve g fonksiyonları için $(f \circ g^{-1})(5)$ nedir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: g fonksiyonun tersi $g^{-1}(x) = x + 3$ olduğu görülmektedir.

$$\begin{aligned}(f \circ g^{-1})(5) &= f(g^{-1}(5)\\ &= f(5+3)\\ &= 2 \cdot 5 + 1\\ &= 11\end{aligned}$$

Cevap: D

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 8, & x \geq 1 \\ x + 4, & x < 1 \end{cases}$ biçiminde tanımlı fonksiyonu için $f(x) > 0$ şartını sağlayan kaç tane x tamsayısı vardır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm:

i) $x < 1$ için $x + 4 > 0$ ise $x > -4$

ii) $x \geq 1$ için $-x + 8 > 0$ ise $x < 8$

Buna göre $-4 < x < 8$ olmalı. Şu halde $7 - (-3) = 10$ tane tamsayı vardır.

Cevap: E

5. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ ve $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 2x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ise f(x) fonksiyonu nedir?

A) $3x - 1$ B) $2x + 1$ C) $2x - 1$ D) $3x + 1$ E) $2x$

Çözüm: Bir fonksiyonun tersini bulurken x gördüğümüz yere y, y gördüğümüz yere x yazılıyor. Bu durum parçalı fonksiyonda her alt aralıklar içinde aynı işlem yapılır. Buna göre g fonksiyonu için bu işlem gerçekleştirirsek,

$x < 0$ için $x = y + 1$ olup $g^{-1}(x) = x - 1$

$x \geq 0$ için $x = y^2$ olup $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

olur. Buna göre;

$$\begin{aligned} f(x) &= ((f \circ g) \circ g^{-1})(x) \\ &= \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 2x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2(x - 1) + 1, & x < 0 \\ 2\sqrt{x}^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ 2x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$
$$= 2x - 1$$

Cevap: C

6. $f(x) = \begin{cases} 4x + 1, & x < 0 \\ 5x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} 4x + 5, & x < 0 \\ 3x - 7, & x \geq 0 \end{cases}$ olduğuna göre, $(f + g)(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $7x - 5$ B) $8x + 1$ C) $8x + 6$ D) $9x + 5$ E) $10x$

Çözüm:
$f(x) = \begin{cases} 4x + 1, & x < 0 \\ 5x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} 4x + 5, & x < 0 \\ 3x - 7, & x \geq 0 \end{cases}$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} 8x + 6, & x < 0 \\ 8x + 6, & x \geq 0 \end{cases}$$
$$= 8x + 6$$

Cevap: C

7. $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,
$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x, & x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \equiv 0 \pmod 2 \\ 2x, & x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$
Buna göre, $g(f(8))$ değeri kaçtır?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 25 E) 26

Çözüm: 8 çift sayı olduğundan $f(8) = 8 - 1 = 7$ dir.
7 tek sayı olduğundan $g(7) = 3 \cdot 7 - 1 = 20$ dir.

Cevap: E

Mutlak Değer Fonksiyonları

8. $f(x) = |x + 4| + |x - 2|$ olduğuna göre, $f(-1) + f(0) + f(1)$ toplamı kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 15 D) 16 E) 18

Çözüm:
$f(-1) = |-1 + 4| + |-1 - 2| = 6$
$f(0) = |0 + 4| + |0 - 2| = 6$

$f(1) = |1+4| + |1-2| = 6$
$f(-1) + f(0) + f(1) = 6 + 6 + 6 = 18$

Cevap: E

9. $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{4 - |2x - 10|}$ fonksiyonun tanım kümesini nedir?

A) $[3, 7]$ B) $(3, 7]$ C) $[3, 7)$ D) $[3, 7]$ E) $(3, 7)$

Çözüm: Kareköklü bir ifadenin içi tanımlı olması için sıfır veya pozitif olmalıdır.

$4 - |2x - 10| \geq 0$
$|2x - 10| \leq 4$
$-4 \leq 2x - 10 \leq 4$
$-4 + 10 \leq 2x - 10 + 10 \leq 4 + 10$
$6 \leq 2x \leq 14$
$3 \leq x \leq 7$

Cevap: D

10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2|x|$ fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi ile ifade edilir.

A) $f(x) = -|x|$ B) $f(x) = |x|^2$ C) $f(x) = |x|$
D) $f(x) = -1$ E) $f(x) = |x|^3$

Çözüm:
$x > 0$ ise $|x| = x$ olduğundan $f(x) = x^2 \cdot x = x^3$
$x < 0$ ise $|x| = -x$ olduğundan $f(x) = x^2 \cdot (-x) = -x^3$

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$
$$= |x^3|$$
$$= |x|^3$$

Cevap: E

11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|+2}{|x|+1}$ biçiminde tanımlanıyor. Buna göre, $(-3, 1]$ aralığının f fonksiyonu altındaki görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2, 5]$ B) $(2, 5)$ C) $(2, 5]$ D) $(-5, 5]$ E) $(-2, 5)$

Çözüm: $(-3, 1]$ aralığında mutlak değer $0 \leq x < 3$ değerlerini alır.

$$x = 0 \text{ için } f(0) = \frac{|0|+5}{|0|+1} = 5$$

$$x = 3 \text{ için } f(3) = \frac{|3|+5}{|3|+1} = 2$$

Görüntü kümesi $(2,5]$ olur.

Cevap: C

12. Aşağıdakilerden hangisi $f(x) = |x^2 - 1|$fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyon $x \in \mathbb{R} - (-1;1)$ aralığında denklemi ne olur?

A) $x^2 + 1$ B) $x^2 - 1$ C) $-x^2 - 1$ D) $-x^2 + 1$ E) x^2

Çözüm: Önce verilen mutlak değer fonksiyonu parçalı fonksiyona çevirelim.

$x^2 - 1 = 0$ ise $x = \pm 1$ noktaları kritik noktalardır.

x	$-\infty$		-1		1		∞
f(x)		-	o	+	o	-	

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \\ -x^2 + 1, & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 1, & x \in \mathbb{R} - (-1;1) \\ -x^2 + 1, & x \in (-1;1) \end{cases}$$

Cevap: B

13. $f(x) = x + |x + 3|$ fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\begin{cases} 2x + 3, & x \geq 3 \\ -2x + 3, & x < 3 \end{cases}$ B) $\begin{cases} 2x + 3, & x \geq 3 \\ 0, & x < 3 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 2x + 3, & x \geq 3 \\ -3, & x < 3 \end{cases}$ D) $\begin{cases} 2x, & x \geq 3 \\ -3, & x < 3 \end{cases}$

E) $\begin{cases} 2x + 3, & x \geq 3 \\ -1, & x < 3 \end{cases}$

Çözüm:

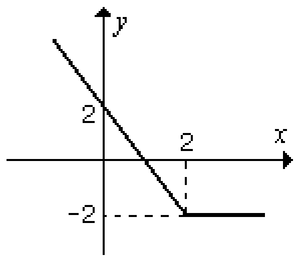
$x \geq 3$ ise $f(x) = x + (x + 3) = 2x + 3$

$x < 3$ ise $f(x) = x - (x + 3) = -3$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \geq 3 \\ -3, & x < 3 \end{cases}$$

Cevap: C

14.



Verilen grafiğin denklemi nedir?

A) $|2 + x| - x$ B) $|2 - x|$ C) $|2 + x|$ D) $|2 - x| - x$ E) $|2 - x| + x$

Çözüm: $x \geq 2$ için $A(0,2)$ ve $B(2,-2)$ noktalarından geçen doğru olduğundan

$$\frac{y-2}{x-0} = \frac{-2-2}{2-0} \text{ ise } f(x) = -2x + 2$$

olur. $x < 2$ için $f(x) = -2$ olduğundan

$$f(x) = |2 - x| - x = \begin{cases} -2x + 2, & x \geq 2 \\ 2, & x < 2 \end{cases}$$

yazılır.

15. $f(x) = \big||x - 3| - 4\big|$ fonksiyonu ile $g(x) = 2$ fonksiyonunun kesim noktaları aşağıdakilerden hangisi değildir?

A) -3 B) 1 C) 5 D) 8 E) 9

Çözüm: $\big||x - 3| - 4\big| = 2$

$|x - 3| - 4 = 2 \lor |x - 3| - 4 = -2$

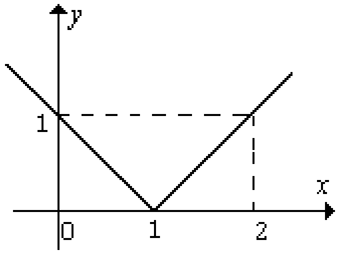
$|x - 3| = 6 \lor |x - 3| = 2$

$x - 3 = 6 \lor x - 3 = -6 \lor x - 3 = 2 \lor x - 3 = -2$

$x = 9 \lor x = -3 \lor x = 5 \lor x = 1$

Cevap: D

16.



Şekilde verilen grafiğin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = |x| + 1$ B) $y = |x + 1|$ C) $y = |x - 1|$
D) $y = |x| - 1$ E) $y = |-x - 1|$

Çözüm: 1 noktası kritik noktadır.

(i) $x \geq 1$ için $A(2,1)$ve $B(1,0)$ noktası verilmiş bu noktalardan geçen doğrunun denklemi,

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{1-0}{2-1} \text{ ise } y = x - 1$$

şeklindedir.

(ii) $x < 1$ için $C(0,1)$ $B(1,0)$ noktası verilmiş bu noktalardan geçen doğrunun denklemi,

$$\frac{y-0}{x-1} = \frac{1-0}{0-1} \text{ ise } y = -(x - 1)$$

şeklindedir. (i) ve (ii) den $y = |x - 1|$ elde edilir.

Cevap: C

17. $x \in \mathbb{R}$, $x < 1$ olmak şartıyla, $f(x) = 2 - \big|x - |2 - x|\big|$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur.

A) $f(x) = 2x$ B) $f(x) = x$ C) $f(x) = 2x + 2$ D) $f(x) = 1$ E) $f(x) = 2$

Çözüm: $x < 1$ olmak şartıyla, $|2 - x| = 2 - x$ dir.
$\big|x - |2 - x|\big| = |x - (2 - x)| = |2x - 2| = -(2x - 2) = -2x + 2$
$f(x) = 2 - \big|x - |2 - x|\big| = 2 - (-2x + 2) = 2x$

Cevap: A

18. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 4, g(x) = 2x + 1$ fonksiyonları veriliyor. $(g \circ f)\ (x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2|x| + 7$ B) $2|x| - 7$ C) $|x| - 7$ D) $|x| + 7$ E) $2|x|$

Çözüm: $(g \circ f)(x) = (2x + 1) \circ (|x| - x)$
$= 2(|x| - 4) + 1$
$= 2|x| - 7$

Cevap: B

19. $f(x) = |4x - 8|, g(x) = |x + 1|$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre, $(g \circ f)(x) = 4$ eşitliğini sağlayan x değerlerin toplamıdır?

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm: Bileşke fonksiyon tanımı gereği,
$(g \circ f)(x) = |4x - 8| \circ |x + 1| = |4|x + 1| - 8|$
$|4|x + 1| - 8| = 4$
$4|x + 1| - 8 = 4 \ \vee \ 4|x + 1| - 8 = -4$
$|x + 1| = 3 \ \vee \ |x + 1| = 1$
$x + 1 = 3 \ \vee x + 1 = -3 \ \vee \ x + 1 = 1 \ \vee x + 1 = -1$
$x = 2 \ \vee x = -4 \ \vee \ x = 0 \ \vee x = -2$
$2 - 4 + 0 - 2 = -4$
elde edilir.

Cevap: A

Maksimum–Minimum Fonksiyonlar

20. $\mathbf{f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$,
$\mathbf{f(x;\ y) = max\ (3x, 5y) = 15}$ biçiminde tanımlanıyor. x ve y hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur

A) $\mathbf{x = 5}$ B) $\mathbf{x = 5 \ \vee y = 3}$ C) $\mathbf{x = 5 \ \wedge y = 3}$ D) $\mathbf{y = 3}$ E) $\varnothing$

Çözüm:
$\max\ (3x;\ 5y) = 15$ ise $x = 5 \ \vee y = 3$

Cevap: B

21. $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$f(x;\ y) = \max\ (x^2 + 1, xy + 2)$ ve $g(x; y) = \min\ (x + y;\ x - y)$

biçiminde f ve g fonksiyonları tanımlanıyor. Buna göre, $f(3;\ 1) - g(-1;\ 4)$ değeri kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm:
$f(3,1) = \max\,(3^2 + 1;\ 3 \cdot 1 + 2) = \max\,(10;5) = 10$
$g(-1;4) = \min\,(-1 + 4;\ -1 - 4) = \min\,(3;\ -5) = -5$
$f(3;\ 1) - g(-1;\ 4) = 10 - (-5) = 15$

Cevap: D

22. $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$f(x;\ y) = \max\,(3x, 2y)$ ve $g(x;y) = \min\,(-2x;\ -3y)$
ise $f(f(3;4), g(4;3))$ nin değeri ne olur?

A) 27 B) 28 C) 30 D) 32 E) 35

Çözüm:
$f(3;\ 4) = \max\,(3 \cdot 3;\ 2 \cdot 4) = \max(9;8) = 9$
$g(4;\ 3) = \min\,(-2 \cdot 4;\ -3 \cdot 3) = \min\,(-8;-9) = -9$
olduğundan
$\big(f(3;4), g(4;3)\big) = f(9;-9) = \max\,(3 \cdot 9, 2 \cdot (-9)) = \max\,(27, -18) = 27$
bulunur.

Cevap: A

f^+ ve f^- Fonksiyonlar

23. $f^+, f^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^+(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x \geq 4 \\ 0, & x < 4 \end{cases}$ ve $f^-(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 4 \\ -x + 2, & x < 4 \end{cases}$
biçiminde f^+ ve f^- fonksiyonları tanımlanıyor. Buna göre, $3f^+(5) - 4f^-(3)$ değeri kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm:
$3f^+(5) - 4f^-(3) = 3(2 \cdot 5 - 6) - 4(-3 + 2) = 16$

Cevap: E

24. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 10$ ise $f^+(5) + f^-(1)$ nin değeri ne olur?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm:

$$f^+(x) = \begin{cases} 5x - 10, & 5x - 10 \geq 0 \\ 0, & 5x - 10 < 0 \end{cases} \text{ ve } f^-(x) = \begin{cases} 0, & 5x - 10 \geq 0 \\ 5x - 10, & 5x - 10 < 0 \end{cases}$$

$$f^+(x) = \begin{cases} 5x - 10, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases} \text{ ve } f^-(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 2 \\ 5x - 10, & x < 2 \end{cases}$$

$$f^+(5) + f^-(1) = 5 \cdot 5 - 10 + 5 \cdot 1 - 10 = 10$$

Cevap: A

İşaret Fonksiyonu

25. $\operatorname{sgn}(x + 4) + \operatorname{sgn}(8 - x) = 2$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

A) $[-4,8]$ B) $[4,8]$ C) $[-8,4]$ D) $[-8,-4]$ E) $(-4,8)$

Çözüm: Bu durum $\operatorname{sgn}(x + 4) = 1, \operatorname{sgn}(8 - x) = 1$ olmasıyla mümkündür.

$x + 4 > 0$ ve $8 - x > 0$
$x > -4$ ve $8 > x$
$-4 < x < 8$

Cevap: E

26. $\operatorname{sgn}(x^2 - x - 6) = -1$ denklemini sağlayan kaç tane tamsayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\operatorname{sgn}(x^2 - x - 6) = -1$ ise $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) < 0$ dir.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$(x+2)(x-3)$	+		−	+

Buna göre bu şartı sağlayan tamsayıların kümesi {-1, 0, 1, 2} olup 4 tanedir.

Cevap: D

27. $x^2 - 5x + 6 \cdot \operatorname{sgn} x = 0$ denkleminin çözüm kümesinin elemanları toplamı nedir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm:
$x > 0$ ise $\text{sgn } x = 1$ olacağından $x^2 - 5x + 6 = 0$ olup $x = 3, x = 2$ dir.
$x < 0$ ise $\text{sgn } x = -1$ olacağından $x^2 - 5x - 6 = 0$ olup $x = 6, x = -1$ dir. Ama 6 denklemi sağlamadığından kök olamıyor.
$x = 0$ ise $\text{sgn } x = 0$ olacağından $x^2 - 5x = 0$ olup $x = 0$ dir.
$Ç = \{-1, 0, 2, 3\}$

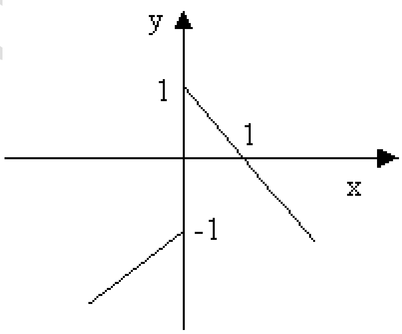
Cevap: B

28. $\text{sgn}\,(x - 3) < \text{sgn}\,(x + 5)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

A) $[-5,3]$ B) $[3,5]$ C) $[-3,5)$ D) $(-3,5]$ E) $(-5,3)$

Çözüm:
i) $\text{sgn}\,(x - 3) = -1 \vee \text{sgn}\,(x + 5) = 1$ ise $x - 3 < 0 \vee x + 5 > 0$ olup $-5 < x < 3$ dür.
ii) $\text{sgn}\,(x - 3) = 0 \vee \text{sgn}\,(x + 5) = 1$ ise $x - 3 = 0 \vee x + 5 > 0$ olup $x = 3$ dür.
iii) $\text{sgn}\,(x - 3) = -1 \vee \text{sgn}\,(x + 5) = 0$ ise $x - 3 < 0 \vee x + 5 = 0$ olup $x = -5$ dir.
$-5 \leq x \leq 3$

29.



Verilen şekil aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin grafiğidir?

A) $f(x) = |x| + \text{sgn } x$ B) $f(x) = \text{sgn } x$ C) $f(x) = x + \text{sgn } x$
D) $f(x) = |x| - \text{sgn } x$ E) $f(x) = -|x| + \text{sgn } x$

Çözüm: Grafiğe bakılınca $x = 0$ noktası kritik noktadır.
$x > 0$ ise $|x| = x$, $\text{sgn } x = 1$ olduğundan $f(x) = -|x| + \text{sgn } x = -x + 1$

$x < 0$ ise $|x| = -x, \text{sgn}\, x = -1$ olduğundan $f(x) = -|x| + \text{sgn}\, x = x - 1$ elde edilen bu veriler grafiği verir.

Cevap: E

30. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|\text{sgn}\, x$ fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine eşittir?

A) $f(x) = |x| + \text{sgn}\, x$ B) $f(x) = \text{sgn}\, x$ C) $f(x) = x + \text{sgn}\, x$
D) $f(x) = x^2$ E) $f(x) = x^2 + \text{sgn}\, x$

Çözüm:

$$f(x) = x|x|\text{sgn}\, x$$
$$= \begin{cases} x(-x)(-1), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x(+x)(+1), & x > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^2, & x = 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$
$$= x^2$$

Cevap: D

31. $A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{2}{1 - \text{sgn}\,(x^2 - 5x + 6)}$$

fonksiyonun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) [1, 4] B) [2, 3] C) [2, 5] D) [3, 6] E) (3, 6)

Çözüm: Paydayı sıfır yapan değerler, bu fonksiyonu tanımsız yapar.

$$1 - \text{sgn}(x^2 - 5x + 6) = 0$$
$$\text{sgn}(x^2 - 5x + 6) = 1$$
$$x^2 - 5x + 6 > 0$$
$$(x - 2)(x - 3) > 0$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
(x−2)(x−3)	+	−	+	

$(-\infty, 2)(3, +\infty)$ aralığında $\text{sgn}(x^2 - 5x + 6)$ değeri 1 olduğuna göre, f(x) fonksiyonunun çözüm kümesi [2, 3] aralığıdır.

Cevap: B

32. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = x + \dfrac{x}{\text{sgn } x}$ fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi ile ifade edilir.

A) $f(x) = |x| + \text{sgn } x$ B) $f(x) = \text{sgn } x$ C) $f(x) = |x|$
D) $f(x) = -\text{sgn } |x|$ E) $f(x) = -\text{sgn } x$

Çözüm: Değer kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere;

$$f(x) = x + \frac{x}{\text{sgn } x} = \begin{cases} -x + \dfrac{x}{-1}, & x < 0 \\ x + \dfrac{x}{+1}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases} = |x|$$

olur.

Cevap: C

Tam Değer fonksiyonları

33. $\left[\!\left[\frac{x}{3} - 2\right]\!\right] = 1$ denklemini sağlayan $x \in \mathbb{R}$ hangi aralıktadır?

A) $[7, 10)$ B) $[8, 11)$ C) $[9, 12)$ D) $[10, 13)$ E) $[11, 14)$

Çözüm: Tam değer fonksiyonun tanımından,

$$1 \le \frac{x}{3} - 2 < 2$$
$$3 \le \frac{x}{3} < 4$$
$$9 \le x < 12$$

elde edilir.

Cevap: C

34. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + [\![x]\!]$
fonksiyonu veriliyor. $[4, 6)$ aralığında fonksiyon aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?

A) $\begin{cases} x-4, & [4,5) \in x \\ x-5, & [5,6) \in x \end{cases}$ B) $\begin{cases} -x+4, & [4,5) \in x \\ -x+5, & [5,6) \in x \end{cases}$

C) $\begin{cases} -x-4, & [4,5) \in x \\ -x-5, & [5,6) \in x \end{cases}$ D) $\begin{cases} x+4, & [4,5) \in x \\ x+5, & [5,6) \in x \end{cases}$

E) $\begin{cases} x-4, & [4,5) \in x \\ x+5, & [5,6) \in x \end{cases}$

Çözüm: $[4,6) \in x$ için $|x| = x$ dir.

$[4,5) \in x$ için $[\![x]\!] = 4$

$[6,6) \in x$ için $[\![x]\!] = 5$

$fx) = \begin{cases} x+4, & [4,5) \in x \\ x+5, & [5,6) \in x \end{cases}$

Cevap: D

35. $[\![\sqrt{x}]\!] = 4$ denkleminin çözüm kümesini sağlayan tamsayılar kaç tanedir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $[\![\sqrt{x}]\!] = 4$

$4 \leq \sqrt{x} < 5$

$16 \leq x < 25$

Ç={16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24}

9 tane x tamsayı denklemi sağlar.

Cevap: E

36. $\left[\!\left[\frac{1}{x+3}\right]\!\right] = 1$ denkleminin çözüm kümesinin elemanıdır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $\left[\!\left[\frac{1}{x+3}\right]\!\right] = 1$

$1 \leq \frac{1}{x+3} < 2$

$1 \leq \frac{1}{x+3} < 2$

$\frac{1}{2} < x+3 \leq 1$

$1 < 2x+6 \leq 2$

$-5 < 2x \leq -4$

$$-\frac{5}{2} < x \leq -2$$

Cevap: A

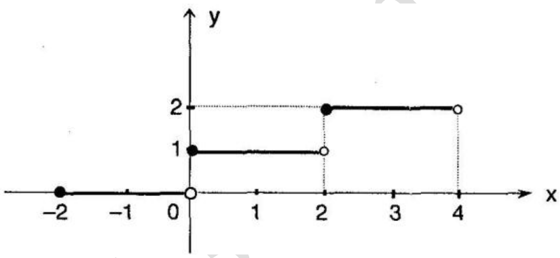
37. $[\![x]\!]^2 - 5[\![x]\!] + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesinindaki tam sayıların toplamı nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:
$[\![x]\!]^2 - 5[\![x]\!] + 4 = 0$
$([\![x]\!] - 1)([\![x]\!] - 4) = 0$
$[\![x]\!] = 1 \lor [\![x]\!] = 4$
$1 \leq x < 2 \lor 4 \leq x < 5$
Ç=$\{1, 4\}$
Tamsayıların toplamı $1 + 4 = 5$ olur.

Cevap: E

38.



Grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] - 1$ B) $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] - 2$ C) $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] + 2$
D) $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] + 1$ E) $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]$

Çözüm: Verilere göre;
$f(x) = 0$ için $x \in [-2, 0)$ ise $\frac{x}{2} \in [-1, 0)$ olup $\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] = -1$
$f(x) = 1$ için $x \in [0, 2)$ ise $\frac{x}{2} \in [0, 1)$ olup $\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] = 0$
$f(x) = 2$ için $x \in [2, 4)$ ise $\frac{x}{2} \in [1, 2)$ olup $\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] = 1$
denklemleri $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] + 1$ olmasıyla mümkün olur.

Cevap: D

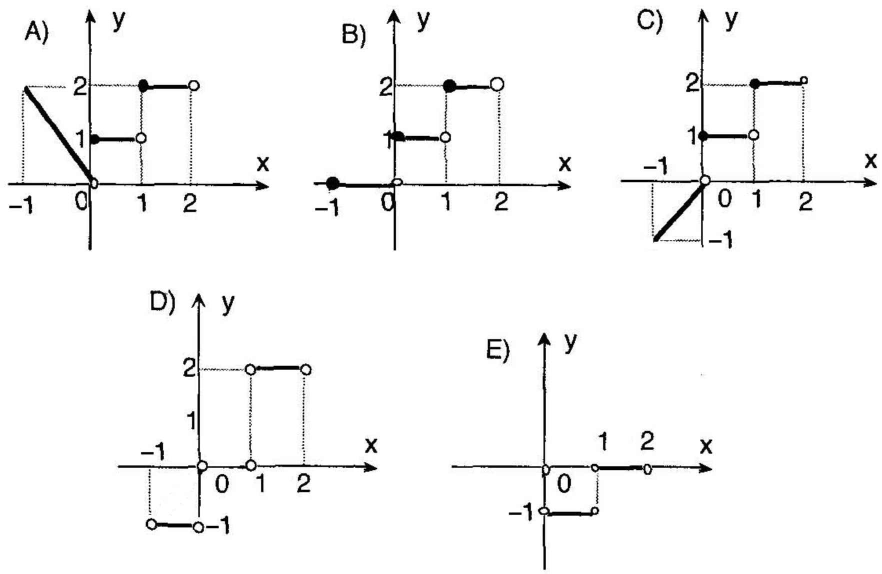
39. $(2[\![x]\!]! - 1)^2 = 121$ denkleminin çözümünü sağlayan tamsayı nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:
$(2[\![x]\!]! - 1)^2 = 121$
$2[\![x]\!]! - 1 = 11 \lor 2[\![x]\!]! - 1 = -11$
$2[\![x]\!]! = 12 \lor 2[\![x]\!]! = -10$
$[\![x]\!]! = 6 \lor [\![x]\!]! = -5$
$x = 3$

Cevap: C

40. $f : [-1,2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!] + 1$ fonksiyonun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



Çözüm:
$x \in [-1,0)$ için $[\![x]\!] = -1$ olup $f(x) = [\![x]\!] + 1 = 0$
$x \in [0,1)$ için $[\![x]\!] = 0$ olup $f(x) = [\![x]\!] + 1 = 1$
$x \in [1,2)$ için $[\![x]\!] = 1$ olup $f(x) = [\![x]\!] + 1 = 2$

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.

3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.