10. BÖLÜM
FONKSİYONLARIN İRDELENMESİ

Bu bölümde buraya kadar tanımlanan fonksiyonların,

- Fonksiyonların tanım kümelerinin bulunması,
- Fonksiyonların sınırlılığı,
- Fonksiyonların artan ve azalan değerlerinin bulunması,
- Fonksiyonların simetriliği,
- Fonksiyonların ötelenmesi,
- Fonksiyonların döndürülmesi,
- Fonksiyonların tekliği ve çiftliği,
- Fonksiyonların periyodu

konuları açıklanacak ve analizi yapılacaktır. Daha sonraki konularda tanımlanan fonksiyonlar ise, kendi konuları içinde anlatılacaktır.

FONKSİYONLARIN TANIM KÜMESİNİN BULUNUŞU

10.1. Tanım: Değer kümesi $y = f(x)$ biçiminde verilmiş herhangi bir f fonksiyonu için, görüntüleri bir reel sayı olan tüm x değerlerinin kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi denir.

Tanım kümesinin bulunuşu fonksiyonların yapılarına göre değişir. Şimdi yapıları değişik fonksiyonların tanım kümelerinin bulunuşunu gösterelim.

1. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ biçimindeki polinom fonksiyonlar her reel sayı için tanımlıdır. Tanım kümesi $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ dır.

2. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ biçimindeki fonksiyonlar $h(x) = 0$ eşitliğini sağlayan $x \in \mathbb{R}$ değerleri için tanımsız $h(x) \neq 0$ eşitsizliği için tanımlıdır.

3. $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\sqrt[2n]{f(x)}$ biçimindeki irrasyonel fonksiyonlar, $f(x) \geq 0$ için tanımlı $f(x) < 0$ için tanımsızdır.

4. $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\sqrt[2n-1]{f(x)}$ biçimindeki irrasyonel fonksiyonlar, f(x) in tanımlı olduğu her yerde tanımlıdır. Tek dereceli kökler tanımlı olmayı etkilemez.

Örnek: $f(x) = \frac{x^4-3x^2+6}{x^2-x-2}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: 2. özellikten dolayı f(x), $x^2 - x - 2 = 0$ için tanımsızdır. Şu halde tanımsız olduğu noktalar $x_1 = 2, x_2 = -1$ dir. Buna göre f(x) in tanımlı olduğu küme $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ olur.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ fonksiyonunun tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: 3. özellikten dolayı bu fonksiyonun tanım aralığı $x - \frac{1}{x} \geq 0$ ile mümkündür. Buna göre $x = \pm 1, x = 0$ dır. Burada aşağıdaki tabloyu çizilir.

x	−∞	−1	0	1	∞
f(x)	−	∘ +	−	∘ +	

$Ç = \{x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x < 0 \ \vee 1 \leq x < \infty\} = [-1, 0) \cup [1, \infty)$

Örnek: $f(x) = \sqrt{5 - |x-2|}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: 3. özellikten dolayı bu fonksiyonun $5 - |x - 2| \geq 0$ için tanımlıdır.

$$|x - 2| \leq 5$$
$$-5 \leq x - 2 \leq 5$$
$$-3 \leq x \leq 7$$

olduğundan f(x) in tanım kümesi $[-3, 7]$ dir.

Örnek: $f : A \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-mx+3m-5}$ fonksiyonunun tüm reel sayılarda tanımlı olması için m hangi aralığın elemanı olmalıdır?

Çözüm: f fonksiyonunun her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlı olması için paydasının kökleri olmalıdır. Buna göre $x^2 - mx + 3m - 5 = 0$ denkleminde $\Delta < 0$ olmalıdır.

$\Delta = m^2 - 4(3m - 5) < 0$
$m^2 - 12m + 20 < 0$

m	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$m^2 - 12m + 20$		$+$	0	$-$	0	$+$	

tablosu oluşturulacağından $m \in (2, 10)$ olmalıdır. //

Şimdi 5.12 tanım gereği aşağıdaki aksiyom yazılabilir.

10.1. Aksiyom: f fonksiyonunun tanım kümesi A_1 , g fonksiyonunun tanım kümesi A_2 ise $f + g, f - g, f \cdot g, f/g$ fonksiyonlarının tanım kümeleri $A_1 \cap A_2$ dir.

Örnek: $f : A_1 \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$
$g : A_2 \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{x+1}$
olduğuna göre $f \cdot g$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $A_1 \cap A_2$ yi bulmalıyız. f fonksiyonu $x^2 - x > 0$ için tanımlı olup işareti incelenirse aşağıdaki tablo çizilir.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bu tablodan $A_1 = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ olduğu gözüküyor. Yine $g(x) = \frac{x}{x+1}$ fonksiyonu $x + 1 \neq 0$ için tanımlıdır. $x + 1 \neq 0$ ise $x \neq -1$ olmalıdır. O halde,
$x \in \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
olup
$A_2 = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
dir. Buna göre,
$$A_1 \cap A_2 = [(-\infty, 0) \cup (1, \infty)] \cap [(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)]$$
$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, \infty)]$$
olarak bulunur.

SINIRLI FONKSİYONLAR

10.2. Tanım: $A \subset \mathbb{R}, f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için $f(x) \geq m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{R}$ varsa f fonksiyonuna alttan sınırlı fonksiyon denir, m sayısına fonksiyonun alttan sınırı denir. Yani bir fonksiyonun tüm terimleri bir reel (gerçel) sayıdan daha büyük ise bu fonksiyon alttan sınırlıdır. Bir fonksiyon alttan sınırı sonsuz sayıdadır. Alttan sınırların en küçüğüne fonksiyonun infumumu denir, $\inf f$ biçiminde gösterilir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$ fonksiyonunun alttan sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $x\in\mathbb{R}$ için $x^2+1\geq 1$ dir. O halde f fonksiyonu alttan sınırlıdır ve fonksiyonun en küçük değeri $\inf f=1$ dir.

10.3. Tanım: $A\subset\mathbb{R}, f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in A$ için $f(x)\leq M$ olacak şekilde $M\in\mathbb{R}$ varsa f fonksiyonuna üstten sınırlı fonksiyon denir, M sayısına fonksiyonun üstten sınırı denir. Yani bir fonksiyonun tüm terimleri bir reel (gerçel) sayıdan daha küçük ise bu fonksiyon üstten sınırlıdır. Bir fonksiyon üstten sınırı sonsuz sayıdadır. Üstten sınırların en büyüğüne fonksiyonun maksimumu denir, $\sup f$ biçiminde gösterilir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^2$ fonksiyonunun üstten sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $x\in\mathbb{R}$ için $1-x^2\leq 1$ dir. O halde f fonksiyonu alttan sınırlıdır ve fonksiyonun en küçük değeri $\sup f=1$ dir.

10.4. Tanım: $A\subset\mathbb{R}, f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in A$ için $m\leq f(x)\leq M$ olacak şekilde $m, M\in\mathbb{R}$ varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir. Yani sınırlı fonksiyon hem alttan hem de üsten sınırlıdır.

Örnek: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $x\in\mathbb{R}$ için

$$\sqrt{1-x^2}\leq 1$$
$$-1\leq 1-x^2\leq 1$$

olduğundan f fonksiyonu hem alttan hem de üstten sınırlıdır. Şu halde f sınırlı fonksiyondur. Buna göre,

$$\inf f=-1 \text{ ve } \sup f=1$$

dir.

10.5. Tanım: $A \subset \mathbb{R}, f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için $m \leq f(x) \leq M$ olacak şekilde $m, M \notin \mathbb{R}$ ise f fonksiyonuna sınırsız fonksiyon denir. Yani sınırlı fonksiyon hem alttan hem de üsten sınırı yoktur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunun sınırsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $x \in \mathbb{R}$ için $-\infty < f(x) < +\infty$ olduğundan f fonksiyonu hem alttan hem de üstten sınırı yoktur. Şu halde f sınırsızdır.

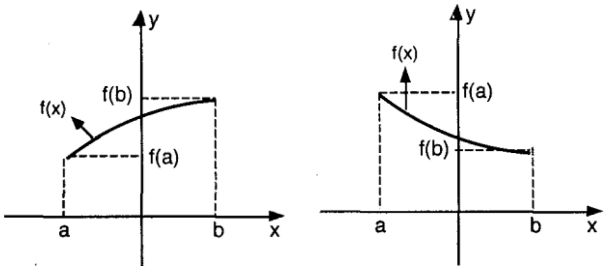
MONOTON FONKSİYONLAR

10.6. Tanım: $A \subset \mathbb{R}, f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ için,

(i) $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonuna artan fonksiyon,
(i) $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonuna azalan fonksiyon,
(iii) $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna monoton artan (artmayan) fonksiyon,
(iv) $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna monoton azalan (artmayan) fonksiyon denir.

Ayrıca her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) = f(x_2)$ ise f sabit fonksiyon olduğu açıktır.

Örnek: Aşağıda şekilde verilenlerin 1. artan, 2. Azalan fonksiyonlardır.



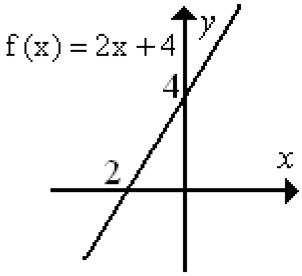
Örnek: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 4$ fonksiyonunun artan-azalanlığını hesaplayınız.

Çözüm: Her $x_1 < x_2$ için,

$$2x_1 < 2x_2$$

$2x_1 + 4 < 2x_2 + 4$
$f(x_1) < f(x_2)$

olduğundan f fonksiyonu artan fonksiyondur.

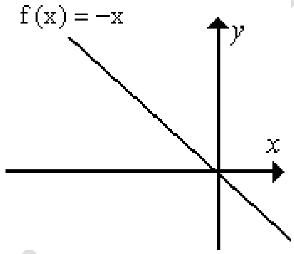


Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x$ fonksiyonunun artan-azalanlığını hesaplayınız.

Çözüm: Her $x_1 < x_2$ için,

$-x_1 > -x_2$
$f(x_1) > f(x_2)$

olduğundan f fonksiyonu azalan fonksiyondur.



Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm:

i) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ için,

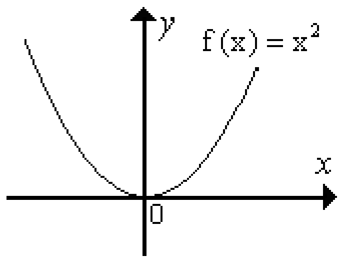
$x_1 < x_2$
$x_1^2 < x_2^2$
$f(x_1) < f(x_2)$

olup $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ olduğunda artandır.

ii) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$ için,

$x_1 < x_2$
$x_1^2 > x_2^2$
$f(x_1) > f(x_2)$

olup $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$ olduğunda azalandır.



10.1. Teorem: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x)$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun.
i) f artan $\Leftrightarrow f^{-1}$ artandır
ii) f azalan $\Leftrightarrow f^{-1}$ azalandır.

İspat: f birebir ve örten bir fonksiyon olmak üzere,

i) f artan bir fonksiyon olmak üzere,
$x_1 < x_2$ ise $f(x_1) < f(x_2)$
$y_1 < y_2$ ise $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$
yazılır. Şu halde f^{-1} artandır.

ii) i – ye benzer şekilde yapılır.

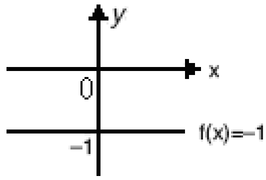
10.1. Sonuç: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonu için;
i) $a > 0$ ise f artandır.
ii) $a < 0$ ise f azalandır.

10.2. Sonuç: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünde tepe noktasının apsisi $r = -\dfrac{b}{2a}$ olmak üzere;
i) $a > 0$ ise $(-\infty, r)$ aralığında f azalan ve $(r, +\infty)$ aralığında f artandır.
ii) $a < 0$ ise $(-\infty, r)$ aralığında f artan ve $(r, +\infty)$ aralığında f azalandır.

10.3. Sonuç: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ fonksiyonu sabit fonksiyonu ne artan nede azalandır.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -1$ fonksiyonunun arta veya azalan olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = 1 \vee f(x_2) = 1$

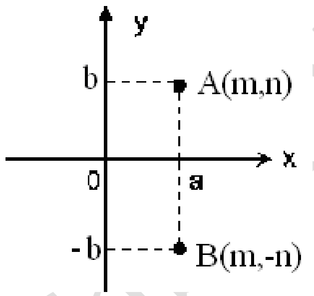


olup f fonksiyonu artan ve azalan değildir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 1$ olduğundan f fonksiyonu sabit bir fonksiyondur.

FONKSİYONLARDA SİMETRİ (YANSIMA)

1. x Eksenine Göre Simetriler

10.2. Aksiyom: $A(m, n)$ noktasının x eksenine göre simetriği $B(m, -n)$ noktasıdır.



Örnek: $A(4, 3)$ noktasının x eksenine göre simetriği $B(4, -3)$ dir.

10.2. Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonunun x eksenine göre simetriği

$$y = -f(x)$$

fonksiyonudur.

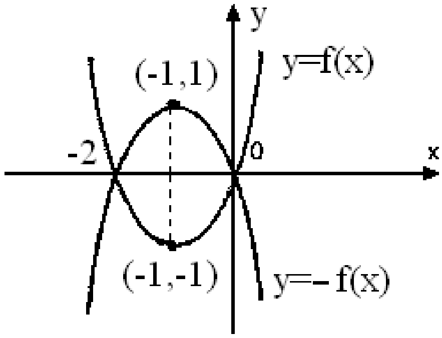
İspat: 10.2. Aksiyoma göre $A(m, n)$ noktasının x eksenine göre simetriği $B(m, -n)$ noktasıdır. $f(x)$ fonksiyonunda her (x, y) noktasının simetriği alındığında her (x, y) noktası yerine $(x, -y)$ olacağından $y = f(x)$ fonksiyonun simetriği,

$$-y = f(x)$$
$$y = -f(x)$$

bulunur.

Örnek: $y = f(x) = x^2 + 2x$ ile $y = -f(x) = -x^2 - 2x$ fonksiyonunun x eksenine göre simetrik olduklarını gösteriniz.

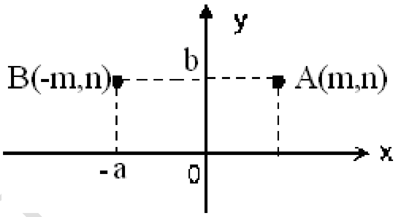
Çözüm: Verilen fonksiyonların grafikleri çizilirse aşağıdaki şekil elde edilir.



Burada $y = f(x)$ fonksiyonu ile $y = -f(x)$ fonksiyonu x eksenine göre simetriktir.

2. y Eksenine Göre Simetriler

10.3. Aksiyom: $A(m, n)$ noktasının y eksenine göre simetriği $B(-m, n)$ noktasıdır.



Örnek: $A(4, 3)$ noktasının y eksenine göre simetriği $B(-4, 3)$ dir.

10.3. Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonu y eksenine göre simetriği

$$y = f(-x)$$

fonksiyonudur.

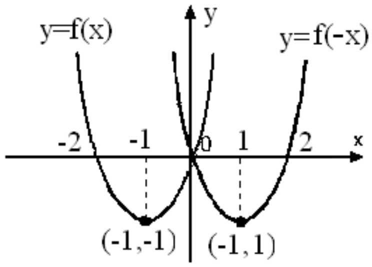
İspat: 10.3. Aksiyoma göre $A(m, n)$ noktasının y eksenine göre simetriği $B(-m, n)$ noktasıdır. $f(x)$ fonksiyonunda her (x, y) noktasının simetriği alındığında her (x, y) noktası yerine $(-x, y)$ yazılırsa $y = f(x)$ fonksiyonun simetriği

$$y = f(-x)$$

olur.

Örnek: $y = f(x) = x^2 + 2x$ ile $y = f(-x) = x^2 - 2x$ fonksiyonunun y eksenine göre simetrik olduklarını gösteriniz.

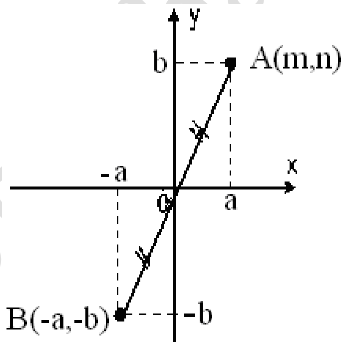
Çözüm: Verilen fonksiyonların grafikleri çizilirse aşağıdaki şekil elde edilir.



şekli elde edilir. Burada $y = f(x)$ fonksiyonu ile $y = f(-x)$ fonksiyonu y eksenine göre simetriktir.

3. Orijine Göre Simetriler

10.4. Aksiyom: $A(m, n)$ noktasının $O(0, 0)$ noktasına göre simetriği $B(-m, -n)$ noktasıdır.



Örnek: $A(4, 3)$ noktasının $O(0, 0)$ noktasına göre simetriği $B(-4, -3)$ dir.

10.4. Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonu $O(0, 0)$ noktasına göre simetriği

$$y = -f(-x)$$

fonksiyonudur.

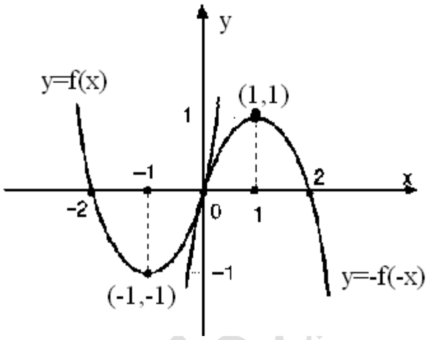
İspat: 10.4. Aksiyoma göre $A(m, n)$ noktasının $O(0, 0)$ noktasına göre simetriği $B(-m, -n)$ noktasıdır. $f(x)$ fonksiyonunda her (x, y) noktasının simetriği alındığında her (x, y) noktası yerine $(-x, -y)$ yazılırsa $y = f(x)$ fonksiyonunun simetriği

$$-y = f(-x)$$
$$y = -f(-x)$$

olur.

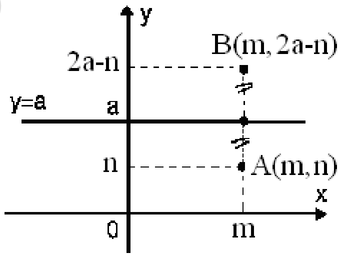
Örnek: $y = f(x) = x^2 + 2x$ ile $y = -f(-x) = -x^2 + 2x$ fonksiyonunun $O(0, 0)$ noktasına göre simetrik olduklarını gösteriniz.

Çözüm: Verilen fonksiyonların grafikleri çizilirse aşağıdaki şekil elde edilir.



4. y = a Doğrusuna Göre Simetriler

10.5. Aksiyom: $A(m, n)$ noktasının $y = a$ doğrusuna göre simetriği $B(m, 2a - n)$ noktasıdır.



Örnek: $A(4, 3)$ noktasının $y = 2$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz.

Çözüm: $A(4, 3)$ noktasının $y = 2$ doğrusuna göre simetriği,

$$B(4, 2 \cdot 2 - 3) = B(4, 1)$$

dir.

10.5. Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonunun $y = a$ doğrusuna göre simetriği,

$$y = -f(x) + 2a$$

fonksiyonudur.

İspat: 10.5. Aksiyoma göre $A(m, n)$ noktasının $y = a$ doğrusuna göre simetriği $B(m, 2a - n)$ noktasıdır. $f(x)$ fonksiyonunda her (x, y) noktasının simetriği alındığında her (x, y) noktası yerine $(x, 2a - y)$ yazılırsa $y = f(x)$ fonksiyonun simetriği

$$2a - y = f(x)$$
$$y = -f(x) + 2a$$

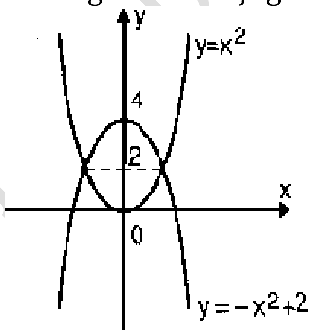
olur.

Örnek: $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun $y = 2$ doğrusuna göre simetriği olan fonksiyonu bulunuz.

Çözüm: $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun $y = 2$ doğrusuna göre simetriği,

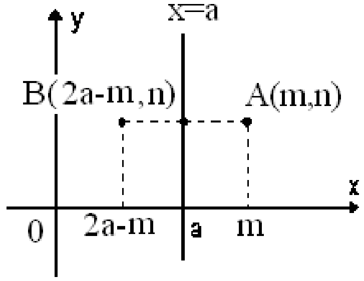
$$2 \cdot 2 - y = x^2$$
$$y = -x^2 + 4$$

olarak bulunur. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



5. x = a Doğrusuna Göre Simetriler

10.6. Aksiyom: $A(m, n)$ noktasının $x = a$ doğrusuna göre simetriği $B(2a - m, n)$ noktasıdır.



10.6. Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ doğrusuna göre simetriği,

$$y = f(2a - x)$$

fonksiyonudur.

İspat: 10.6. Aksiyoma göre $A(m, n)$ noktasının $x = a$ doğrusuna göre simetriği $B(2a - m, n)$ noktasıdır. $f(x)$ fonksiyonunda her (x, y) noktasının simetriği alındığından her (x, y) noktası yerine $(2a - x, y)$ yazılırsa $y = f(x)$ fonksiyonunun simetriği

$$y = f(2a - x)$$

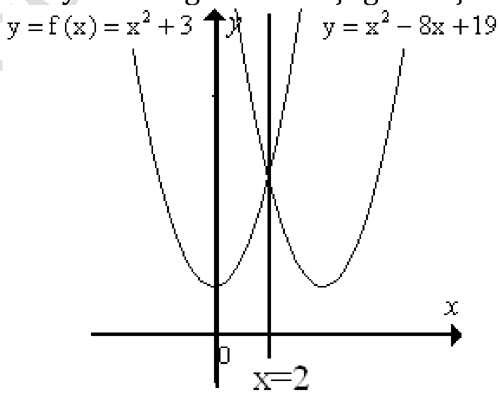
olur.

Örnek: $y = f(x) = x^2 + 3x$ fonksiyonunun $x = 2$ doğrusuna göre simetriği olan fonksiyonu bulunuz.

Çözüm: $y = f(x) = x^2 + 3$ fonksiyonunun $x = 2$ doğrusuna göre simetriği,

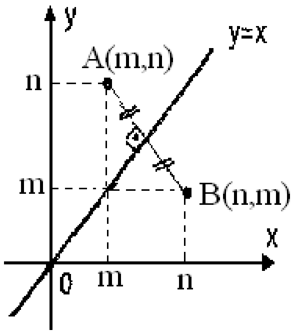
$$y = f(2 \cdot 2 - x) = (4 - x)^2 + 3 = x^2 - 8x + 19$$

olarak bulunur. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



6. $y = x$ Doğrusuna Göre Simetriler

10.7. Aksiyom: $A(m,n)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $B(n,m)$ noktasıdır.



Örnek: $A(2,3)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $B(3,2)$ noktasıdır.

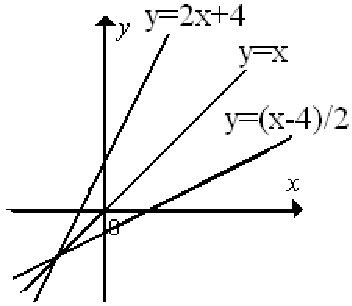
10.7. Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriği $x = f(y)$ dir. (Bu durum fonksiyonun $y = x$ simetriği o fonksiyonun tersi olduğunu gösterir, yani $y = f(x)$ ise $y = f^{-1}(x)$)

İspat: 10.7. Aksiyoma göre $A(m,n)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $B(n,m)$ noktasıdır. $f(x)$ fonksiyonunda her (x,y) noktasının simetriği alındığında her (x,y) noktası yerine (y,x) yazılırsa $y = f(x)$ fonksiyonun simetriği

$$x = f(y)$$

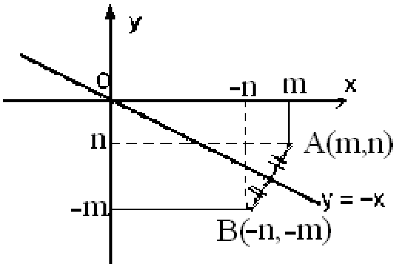
olur.

Örnek: $y = f(x) = 2x + 4$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan fonksiyon $y = f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$ dir. (Ayrıca verilen fonksiyon 1–1 ve örtendir.) Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



7. y = –x Doğrusuna Göre Simetriler

10.8. Aksiyom: $A(m, n)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $B(-n, -m)$ noktasıdır.



10.8. Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonunun $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $x = -f(-x)$ dir. (Bu durum ters fonksiyon türünden yazarılırsa $y = -f^{-1}(-x)$ biçiminde olur.)

İspat: 10.8. Aksiyoma göre $A(m, n)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $B(-n, -m)$ noktasıdır. $f(x)$ fonksiyonunda her (x, y) noktasının simetriği alındığında her (x, y) noktası yerine (y, x) yazılırsa $y = f(x)$ fonksiyonunun simetriği

$$-x = f(-y)$$
$$x = -f(-y)$$

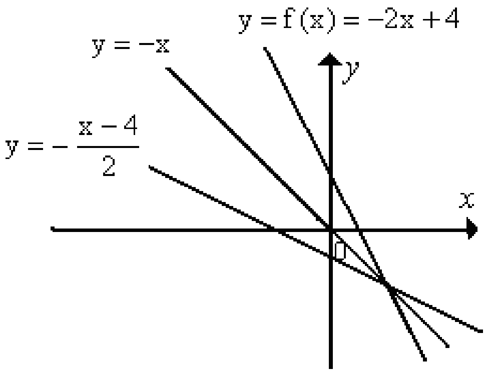
olur.

Örnek: $y = f(x) = -2x + 4$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan fonksiyonu bulunuz.

Çözüm: $f(x) = -2x + 4$ fonksiyonu

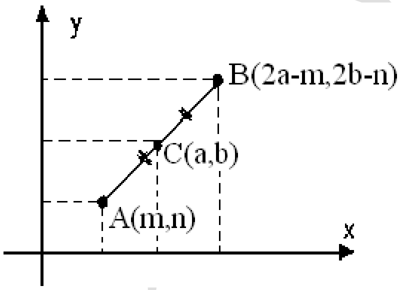
$$f^{-1}(x) = \frac{-x+4}{2}$$
$$f^{-1}(-x) = \frac{-(-x)+4}{2}$$
$$-f^{-1}(-x) = -\left(\frac{x+4}{2}\right) = \frac{-x-4}{2}$$

dir. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki şekilde gibidir.



8. A(m, n) Noktasının C(a, b) Noktasına Göre Simetriği

10.9. Aksiyom: $\mathrm{A}(\mathrm{m},\mathrm{n})$ noktasının $\mathrm{C}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ noktasına göre simetriği
$$\mathrm{B}(2\mathrm{a}-\mathrm{m},2\mathrm{b}-\mathrm{n})$$
noktasıdır.



Örnek: $\mathrm{A}(1,2)$ noktasının $\mathrm{C}(3,4)$ noktasına göre simetriği
$$\mathrm{B}(2\cdot 3-1,2\cdot 4-2)=\mathrm{B}(5,6)$$
noktasıdır.

10.9. Teorem: $\mathrm{y}=\mathrm{f}(\mathrm{x})$ fonksiyonunun $\mathrm{C}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ noktasına göre simetriği,
$$\mathrm{y}=-\mathrm{f}(2\mathrm{a}-\mathrm{x})+2\mathrm{b}$$
fonksiyonudur.

İspat: 10.9. Aksiyoma göre $\mathrm{A}(\mathrm{m},\mathrm{n})$ noktasının $\mathrm{C}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ noktasına göre simetriği
$$\mathrm{B}(2\mathrm{a}-\mathrm{m},2\mathrm{b}-\mathrm{n})$$
noktasıdır. $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ fonksiyonunda her (x,y) noktasının simetriği alındığında her (x,y) noktası yerine $(2\mathrm{a}-\mathrm{x},2\mathrm{b}-\mathrm{y})$ yazılırsa $\mathrm{y}=\mathrm{f}(\mathrm{x})$ fonksiyonun simetriği
$$2\mathrm{b}-\mathrm{y}=\mathrm{f}(2\mathrm{a}-\mathrm{x})$$
$$\mathrm{y}=-\mathrm{f}(2\mathrm{a}-\mathrm{x})+2\mathrm{b}$$

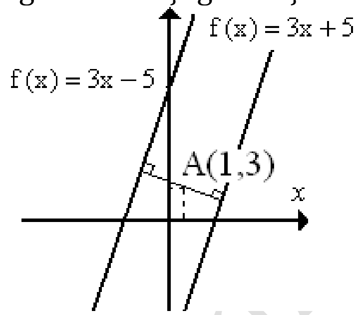
dir.

Örnek: $f(x) = 3x + 5$ fonksiyonunun $A(1,3)$ noktasına göre simetriği olan fonksiyonu bulunuz.

Çözüm: $f(x) = 3x + 5$ fonksiyonuna göre,

$$\begin{aligned} y &= -f(2\cdot 1 - x) + 2\cdot 3 \\ &= -f(2 - x) + 6 \\ &= -3\cdot(2 - x) - 5 + 6 \\ &= 3x - 5 \end{aligned}$$

bulunur. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



10.1. Not: Simetriler çok farklı durumda olabilir. Bu gibi işlemler çeşitli çözümlemelerle yapılabilir.

Örnek: $A(3,2)$ noktasının $y = x - 5$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatları nedir?

Çözüm: Verilen doğrunun eğimi $m_1 = 1$ dir. $A(3,2)$ noktasının verilen doğruya dik olarak $H(m,n)$ noktasında kesin. AH doğrusunun eğimi m_2 alırsak,

$$\begin{aligned} m_1\cdot m_2 &= -1 \\ 1\cdot m_2 &= -1 \\ m_2 &= -1 \end{aligned}$$

olur. Bir noktası ve bir eğimi bilinen doğrunun denklemi;

$$\begin{aligned} y - 2 &= -1(x - 3) \\ y &= -x + 5 \end{aligned}$$

şeklindedir. Elde edilen doğru ile verilen doğrunun çözüm değerleri iki doğrunun kesim noktalarını yani $H(m,n)$ noktasının koordinatını verir.

$$y = -x + 5 \text{ ve } y = x - 5$$
$$x = 5, y = 0$$

olacağından $H(5,0)$ dır.

$A(3,2)$ noktasının $H(5,0)$ noktasına göre simetriği alınırsa $B(7,-2)$ olarak bulunur. //

Noktaların ve fonksiyonların simetriği şu şekilde özetleyebiliriz.

$A(m,n)$ noktasının;

x eksenine göre simetriği	$B(m,-n)$ noktasıdır
y eksenine göre simetriği	$B(-m,n)$ noktasıdır
$O(0,0)$ noktasına simetriği	$B(-m,-n)$ noktasıdır
$y=a$ doğrusuna simetriği	$B(m,2a-n)$ noktasıdır
$x=a$ doğrusuna simetriği	$B(2a-m,n)$ noktasıdır
$y=x$ doğrusuna simetriği	$B(n,m)$ noktasıdır
$y=-x$ doğrusuna simetriği	$B(-n,-m)$ noktasıdır
$C(a,b)$ noktasına simetriği	$B(2a-m,2b-n)$ noktasıdır

$y=f(x)$ fonksiyonunun;

x eksenine simetriği	$y=-f(x)$ noktasıdır
y eksenine simetriği	$y=f(-x)$ noktasıdır
$O(0,0)$ noktasına simetriği	$y=-f(-x)$ noktasıdır
$y=a$ doğrusuna simetriği	$y=-f(x)+2a$ noktasıdır
$x=a$ doğrusuna simetriği	$y=f(2a-x)$ noktasıdır
$y=x$ doğrusuna simetriği	$y=f^{-1}(x)$ noktasıdır
$y=-x$ doğrusuna simetriği	$y=-f^{-1}(-x)$ noktasıdır
$C(a,b)$ noktasına simetriği	$y=-f(2a-x)+2b$ noktasıdır

9. Parabolde Simetriler

Bir parabolün tepe noktasının sağı veya solu, yine ters fonksiyonda altı ve üstü birbirlerine göre simetriktir. Bu cümle dikkate alınarak ilgili problemler çözülür.

Örnek: $f(x)=x^2-(5m+4)x+9$ fonksiyonunun simetri ekseni $x=6$ doğrusu olduğuna göre fonksiyonun x eksenini kestiği noktaların apsisler toplamı nedir?

Çözüm: Verilen fonksiyon bir paraboldür. Parabolün simetri ekseni tepe noktasından geçen $x=-\frac{b}{2a}$ doğrusudur.

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{5m+4}{4} = 6$ olup $m = 4$ olur.
$f(x) = x^2 - 24x + 9$
$x_1 + x_2 = 24$

Örnek: $f(x) = x^2 - 3x - 5$ parabolünün $(2, -1)$ noktasına göre simetrik denklemi nedir?

Çözüm: $(2, -1)$ noktasına göre sağındaki simetriği (a, b) ve solundaki simetriği (x, y) noktaları olsun.

$\frac{a+x}{2} = 2$ ve $\frac{b+y}{2} = -1$
$a = 4 - x$ ve $b = -2 - y$
(a, b) noktası simetri denklemini sağlayacağından
$-2 - y = (4 - x)^2 - 3(4 - x) - 5$
$y = -x^2 + 5x - 1$
parabolü elde edilir.

FONKSİYONLARIN ÖTELENMESİ

10.7. Tanım: Bir fonksiyonun yönü ve boyutu değişmeden elde edilen yeni fonksiyona o fonksiyonun ötelenmesi denir.

10.9. Aksiyom: Noktanın a birim sağa ötelenmesi x koordinatının a birim artacağını, sola ötelenmesi x koordinatının a birim azalacağını belirtir.

Noktanın a birim yukarı ötelenmesi y koordinatının a birim artacağını, aşağı ötelenmesi y koordinatının a birim azalacağını belirtir.

Örnek: $A(0, 5)$ ve $B(1, 4)$ noktalarının y ekseni boyunca 2 birim aşağı ötelenmesini bulunuz.

Çözüm: Üçgen y ekseni boyunca aşağı ötelenmeceğinden x (apsis) değişmez. $A(0, 5)$ ve $B(1, 4)$ noktalarının ordinatı 2 azalırsa $A'(0, 3)$ ve $B'(1, 2)$ olur.

Örnek: $A(5, 2)$ noktasını 2 birim sola, 4 birim yukarı ötelenmesini bulunuz.

Çözüm: 2 birim sola ötelenmesi x eksenini 2 birim azalmansı, 4 birim yukarı ötelenmesi y eknenini 4 birim artması demektir. $A(5,2)$ noktası 2 birim sola, 4 birim yukarı ötelenirse $A'(5-2, 2+4) = A'(3,6)$ olur.

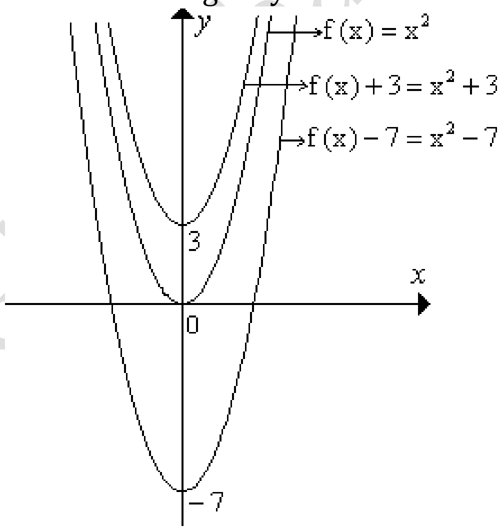
10.10. Aksiyom: Bir f fonksiyonu verilsin. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

a) $y = f(x) + a$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonuna göre y ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenmelisidir.

b) $y = f(x) - b$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonuna göre y ekseni boyunca negatif yönde b birim ötelenmelisidir.

Örnek: $f(x) = x^2$ fonksiyonunu y ekseni üzerinde 3 birim pozitif yönde 7 birim negatif yönde öteleyiniz.

Çözüm:
y ekseni üzerinde 3 birim pozitif yönde ötelenirse $f(x) + 3 = x^2 + 3$
y ekseni üzerinde 7 birim negatif yönde ötelenirse $f(x) - 7 = x^2 - 7$



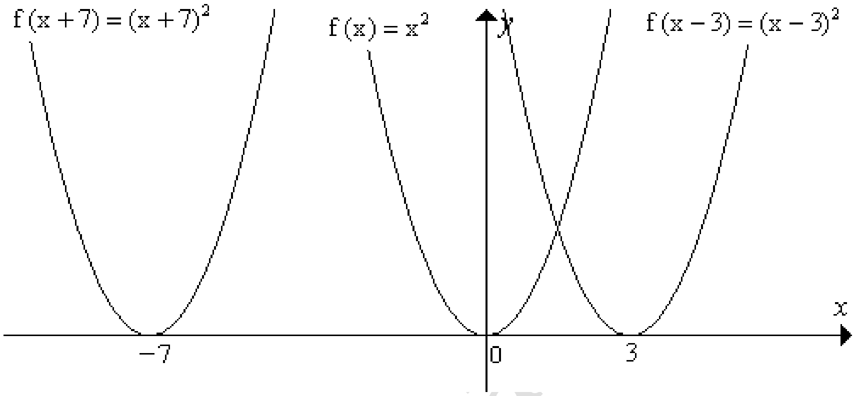
10.11. Aksiyom: Bir f fonksiyonu verilsin. $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

a) $y = f(x - a)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonuna göre x ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenmelisidir.

b) $y = f(x + a)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonuna göre x ekseni boyunca negatif yönde a birim ötelenmelisidir.

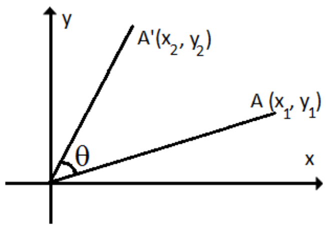
Örnek: $f(x) = x^2$ fonksiyonunu x ekseni üzerinde 3 birim pozitif yönde 7 birim negatif yönde öteleyiniz.

Çözüm:
x ekseni üzerinde 3 birim pozitif yönde ötelenirse $f(x - 3) = (x - 3)^2$
x ekseni üzerinde 7 birim negatif yönde ötelenirse $f(x + 7) = (x + 7)^2$



FONKSİYONLARIN DÖNDÜRÜLMESİ

10.8. Tanım: Bir f fonksiyonun, orijin etrafında θ açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen yeni fonksiyona fonksiyonların döndürülmesi denir. Bu döndürülmede keyfi A noktası θ kadar döndürüldüğünde A' noktası gibi bir nokta elde edilir.



Yapılan dönüşüme dönme dönşümü, O noktasına da dönme merkezi denir.

Koordinat düzleminde pozitif yönte (saat yönünün tersi) dönme hareketleri farkı noktaları oluştutur. Bunlara örnek; $A(x, y)$ noktasının;
90^0 dönmesi ile $A'(-y, x)$
180^0 dönmesi ile $A'(-y, -x)$

270^0 dönmesi ile $A'(y,-x)$
360^0 dönmesi ile $A'(y,x)$
noktalarıdır.

Örnek: Köşe noktalarının koordinatırı $A(1,6), B(5,4)$ ve $C(6,8)$ olan üçgenin orijin etrafında saat yönünde 90^0 döndürülmesi ile oluşan yeni şeklin koordinatları nedir?

Çözüm: $A(1,6), B(5,4)$ ve $C(6,8)$ noktaları 90^0 döndürülürse $A'(-6,1), B'(-4,5)$ ve $C'(-8,6)$ noktaları elde edilir.

TEK ve ÇİFT FONKSİYONLAR

10.9. Tanım: $f : A \longrightarrow B, f(x) = y$ fonksiyonu verilsin. Her $x \in A$ için
i) $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna çift fonksiyon,
ii) $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ fonksiyonunu,
$$f(-x) = -2x = -f(x)$$
olduğundan tek fonksiyondur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonunu,
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$
olduğundan çift fonksiyondur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift fonksiyon olduğunu bulunuz.
a) $f(x) = x^7 - 2x$
b) $g(x) = x^2 + 5$
c) $h(x) = x^2 - x$

Çözüm: a) $f(-x) = (-x)^7 - 2(-x) = -(x^7 - 2x) = -f(x)$ olup tek fonksiyondur.

b) $g(-x) = (-x)^2 + 5 = x^2 + 5 = g(x)$ olup çift fonksiyondur.

c) $h(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x \neq x^2 - x = h(x)$ olduğundan $h(-x) \neq h(x)$ ve $h(-x) \neq -h(x)$ olduğundan $h(x)$ fonksiyonu ne tek ne de çift fonksiyondur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 0$ sıfır fonksiyonu hem çift ve hem de tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
$f(x) = 0$ ve $f(-x)$ olduğundan $f(x) = f(-x)$ olup çift fonksiyondur.
$f(-x) = 0$ ve $-f(x)$ olduğundan $f(-x) = -f(x)$ olup tek fonksiyondur.

10.10. Teorem: $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon,
i) $f(x) = [u(x) - u(-x)]$
biçiminde tanımlanan f fonksiyonu tek fonksiyondur.
ii) $g(x) = [u(x) + u(-x)]$
biçiminde tanımlanan g fonksiyonu çift fonksiyondur.

İspat:
a) $f(x) = [u(x) - u(-x)]$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} f(x) &= [u(x) - u(-x)] \\ &= [u(-x) - u(x)] \\ &= -[u(x) - u(-x)] \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu tek fonksiyondur.

b) $g(x) = [f(x) + f(-x)]$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} g(x) &= [u(x) + u(-x)] \\ &= [u(-x) + u(x)] \\ &= [u(-x) + u(-(-x))] \\ &= g(-x) \end{aligned}$$

olduğundan g fonksiyonu çift fonksiyondur.

Örnek: $u(x) = x^2 + 3x$ fonksiyonu tek fonksiyonuna ve çift fonksiyonuna çeviriniz.

Çözüm: $u(x) = x^2 + 3x$ ve $u(-x) = x^2 - 3x$ olduğundan

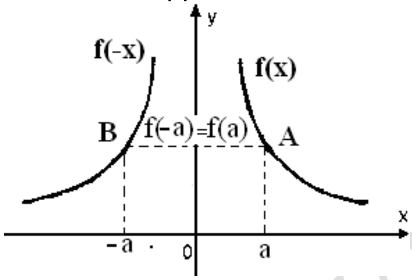
a) $f(x) = x^2 + 3x - x^2 + 3x = 6x$ tek fonksiyonu bulunur.
b) $g(x) = x^2 + 3x + x^2 - 3x = 2x^2$ çift fonksiyonu bulunur.

10.11. Teorem: $f : A \rightarrow B, f(x) = y$ fonksiyonu verilsin. Her $x \in A$ için f çift fonksiyon yani $f(-x) = f(x)$ ise $f(x)$ ve $f(-x)$ fonksiyonlarının grafikleri $x = 0$ doğrusuna simetriktir.

İspat: 10.5. teoremde $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a = 0$ doğrusuna göre simetriği

$$y = f(2a - x) = f(-x)$$

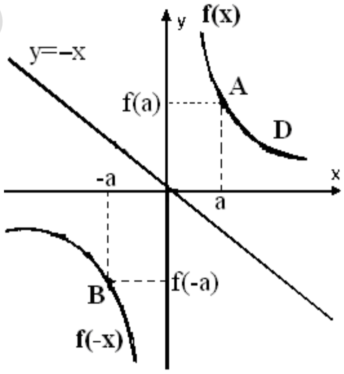
olduğu gözükür. Çift fonksiyonun tanımına göre $f(-x) = f(x)$ ise bu fonksiyonlar $x = 0$ doğrusuna simetriktir. //



Verilen grafik çift fonksiyona bir örnektir. Şekle göre çift fonksiyon $x = 0$ fonksiyonuna yani y eksenine simetriktir.

10.12. Teorem: $f : A \rightarrow B, f(x) = y$ fonksiyonu verilsin. Her $x \in A$ için f tek fonksiyon yani $f(-x) = -f(x)$ ise $f(x)$ ve $f(-x)$ fonksiyonlarının grafikleri $y = -x$ doğrusuna simetriktir.

İspat: 10.7. teoremde $y = f(x)$ fonksiyonunun $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $y = -f^{-1}(-x)$ olduğu gösterilmiştir. Tek fonksiyonun tanımına göre $f(-x) = -f(x)$ ise bu fonksiyonlar $y = -x$ doğrusuna simetriktir. //



Verilen grafik tek fonksiyona bir örnektir. Şekle göre tek fonksiyon $y = -x$ fonksiyonuna simetriktir.

10.13. Teorem:

i) İki tek fonksiyonun toplamı veya çıkarması tek fonksiyondur.

ii) İki çift fonksiyonun toplamı veya çıkarması çift fonksiyondur.
iii) İki çift fonksiyonun çarpımı veya bölümü çift fonksiyondur.
iv) Biri tek diğeri çift iki fonksiyonun çarpımı veya bölümü çift fonksiyondur.
v) Çift fonksiyonların tamsayı kuvvetleri çift fonksiyondur.
vi) Tek fonksiyonların tek tamsayı kuvvetleri tek; çift tamsayı kuvvetleri çift fonksiyondur.
vii) f ve g den biri çift fonksiyon ise $(f \circ g)$ ve $(g \circ f)$ fonksiyonları çifttir.
viii) f tek fonksiyon ise $(f \circ f)$ tek fonksiyon, f çift fonksiyon ise $(f \circ f)$ çift fonksiyondur.

İspat: $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere,

i) f ve g tek fonksiyonlar ise $f(-x) = -f(x)$ ve $g(-x) = -g(x)$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x)\\ &= -f(x) - g(x)\\ &= -(f(x) + g(x))\\ &= -(f+g)(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f-g)(-x) &= f(-x) - g(-x)\\ &= -f(x) + g(x)\\ &= -(f(x) - g(x))\\ &= -(f-g)(x)\end{aligned}$$

olup iki tek fonksiyonun toplamı veya çıkarması tek fonksiyon olduğunu gösterir.

ii) f ve g çift fonksiyonlar ise $f(-x) = f(x)$ ve $g(-x) = g(x)$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x)\\ &= f(x) + g(x)\\ &= (f+g)(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f-g)(-x) &= f(-x) - g(-x)\\ &= f(x) - g(x)\\ &= (f-g)(x)\end{aligned}$$

olup iki çift fonksiyonun toplamı veya çıkarması çift fonksiyon olduğunu gösterir.

Diğer şıklar benzer yolla yapılır.

FONKSİYONLARIN PERİYODU

10.10. Tanım: $A \subset \mathbb{R}, f : A \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonunda $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$f(x) = f(x+t) = f(x+2t) = \cdots = f(x+nt)$$

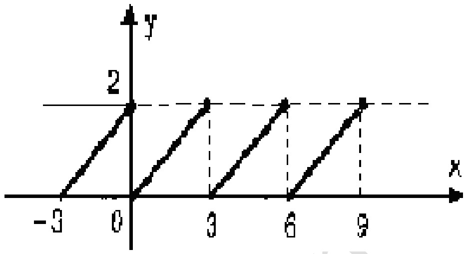
eşitliğini sağlayan $t \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa f fonksiyona periyodik fonksiyon denir. $f(x) = f(x+t)$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif t reel sayısına da f fonksiyonun periyodu denir.

f fonksiyonu periyodik bir fonksiyon ise

i) $f(x+t) = f(x)$ ise $f(x) - f(x+t) = 0$

ii) $(x+t) - x = t$

biçimindedir.



Şekilde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı $f(x)$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon mudur? Periyodik ise periyodunu ve görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonların görüntü kümesi, $f(\mathbb{R}) = (0,2]$ olduğu şekilde verilen grafikte görülmektedir.

i) $f(x) = f(x+3) = f(x+2\cdot3) = \cdots = f(x+n\cdot3)$

ii) $(x+6) - (x-3) = t$ ise $t = 3$

olduğundan fonksiyonun periyodu 3 dür. Gerçekten;

$-3 < x \leq 0$ ise $f((-3,0]) = (0,2]$

$0 < x \leq 3$ ise $f((0,3]) = (0,2]$

$3 < x \leq 6$ ise $f((3,6]) = (0,2]$

$f(x+3) - f(x) = (0,2] - (0,2] = 0$

dir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periyodik bir fonksiyon ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

$f(x) = f(x+6) = f(x+12) = \cdots = f(x+n\cdot6)$ ve $g(x) = f\left(\frac{2}{3}x + 10\right)$

biçiminde tanımlansınlar. Bu takdirde g(x) fonksiyonu da periyodik fonksiyon olduğuna göre periyodunu bulunuz.

Çözüm: $f(x) = f(x+6)$ olduğundan $t = 6$ dir.

$g(x) = g(x+6)$

$f\left(\frac{2}{3}x + 10\right) = f\left(\frac{2}{3}(x+t) + 10\right)$

$$f\left(\frac{2}{3}x+10\right)=f\left(\frac{2}{3}x+10+\frac{2}{3}t\right)$$
$$\frac{2}{3}t = 6$$
$$t=9$$

g fonksiyonunu periyodik ve periyodu 9 olduğunu verir.

Örnek: f fonksiyonu t periyodlu bir periyodik fonksiyon ise $f(ax+b)$, $(a>0)$ fonksiyonunun $\frac{t}{a}$ periyodlu bir periyodik fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: f fonksiyonunun periyodu t olduğundan,

$$f\left(a(x+\frac{t}{a})+b\right)=f\big((ax+b)+t\big)=f(ax+b)$$

olur. Ayrıca $f(a(x+t_1)+b)=f(ax+b)$ eşitliğini sağlayan bir pozitif sayı t_1 olsun. f fonksiyonun tanım kümesinden keyfi bir x noktası alalım. $x'=\frac{x-b}{a}$ diyelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
f(ax'+b) &= f\left(a\frac{x-b}{a}+b\right)\\
&= f(x)\\
&= f(a(x'+t_1)+b)\\
&= f(ax'+b+at_1)\\
&= f(a\frac{x-b}{a}+b+at_1)\\
&= f(x+at_1)
\end{aligned}$$

yani

$$f(x)=f(x+at_1)$$

dir. t, f 'nin periyodu olduğuna göre $t\le at_1$ yani $t_1\ge\frac{t}{a}$ dır. O halde $f(ax+b)$ fonksiyonunun periyodu $\frac{t}{a}$ dır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Fonksiyonların Tanım Kümesinin Bulunması

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ fonksiyonunun tanım cümlesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1 \leq x \leq 1$ B) $-1 < x \leq 1$ C) $0 \leq x \leq 1$
D) $-1 \leq x \leq 0$ E) $0 < x \leq 1$

Çözüm: Verilen fonksiyonun tanım kümesi karekökün non–negatif (sıfır ya da pozitif) olmasıyla mümkündür.

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliği çözersek,

x	$-\infty$		-1		1		∞
f(x)		$-$	o	$+$	|	$-$	

bulunur. Buna göre çözüm kümesi $-1 < x \leq 1$ dir.

Cevap: B

2. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} - \sqrt{x^2 + 5x}$ fonksiyonun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $0 \leq x \leq 3$ B) $-3 \leq x \leq 3$ C) $0 \leq x \leq 5$
D) $-3 \leq x \leq 5$ E) $3 \leq x \leq 5$

Çözüm: $9 - x^2 \geq 0$ ve $x^2 + 5x \geq 0$ olmalıdır.
$9 - x^2 = 0$ ve $x^2 + 5x = 0$
$x = -3, x = 3, x = 0, x = -4$

x	$-\infty$	-5		-3		0		3		$+\infty$
$9 - x^2$	$-$		$-$	o	$+$		$+$	o	$-$	
$x^2 + 5x$	$+$	o	$-$		$-$	o	$+$		$+$	

En geniş tanım kümesi $0 \leq x \leq 3$ aralığıdır.

Cevap: A

3. $f(x) = \sqrt{|x+1| - 2}$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir?

A) $-3 \leq x < 1$ B) $-3 < x \leq 1$ C) $-3 \leq x \leq 1$
D) $-3 \leq x \leq 0$ E) $0 < x \leq 1$

Çözüm: Verilen fonksiyonun tanım kümesi karekökün non–negatif olmasıyla mümkündür.

$$|x+1| \leq 2$$
$$-2 \leq x+1 \leq 2$$
$$-3 \leq x \leq 1$$

elde edilir.

Cevap: C

4. $f(x) = \sqrt{-x^2+2x-1}$ fonksiyonunun tanım cümlesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1 \leq x < 1$ B) $-1 < x \leq 1$ C) $-1 \leq x \leq 1$
D) $\{1\}$ E) $\varnothing$

Çözüm: Verilen fonksiyonun tanım kümesi karekökün non–negatif olmasıyla mümkündür.

$$-x^2+2x-1 \geq 0$$
$$x^2-2x+1 \leq 0$$
$$(x-1)^2 \leq 0$$

eşitsizliğinin tablosu,

x	$-\infty$		1		∞
f(x)		+	0	+	

olduğuna göre tanım kümesi {1} dir.

Cevap: D

5. $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \geq 5 \\ -x+13, & x < 5 \end{cases}$ fonksiyonu örten olduğuna göre, fonksiyonun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[3, \infty)$ B) $[5, \infty)$ C) $[3, 8]$ D) $(-\infty, 8)$ E) $[8, +\infty)$

Çözüm: f fonksiyonu örten olduğuna göre,

$$x \geq 5$$
$$x+3 \geq 8$$

ve

$$x < 5$$
$$-x > -5$$

$$-x + 13 > 8$$

buna göre, tanım kümesi $[8, +\infty)$ olur.

Cevap: E

6. $f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığı $[3,\ 9)$ ise $f\left(\frac{x}{3} + 2\right)$ fonksiyonunun tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[5, \infty)$ B) $[3, \infty)$ C) $[3, 5]$ D) $(-3, 5)$ E) $[3, 5)$

Çözüm: $3 \le x < 9$

$$1 \le \frac{x}{3} < 3$$

$$3 \le \frac{x}{3} + 2 < 5$$

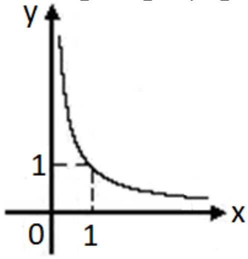
Cevap: E

Fonksiyonların Monotonluğu ve Sınırlılığı

7. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunda x artarken değerler alırken y nasıl değişir?

A) Sabit kalır B) Azalır C) Artar
D) Azalmayan olur E) Sonsuza gider

Çözüm: Verilen fonksiyonun grafiği aşağıda çizilmiştir.



$x_1 < x_2$ için $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$ ise $f(x_2) < f(x_1)$ olur. Buna göre y değerleri azalır.

Cevap: B

8. $f(x) = x^3$ fonksiyonunda monotonluğu hakkında ne denir?

A) Artmayan B) Azalan C) Azalmayan D) Sabit fonksiyon E) $\varnothing$

Çözüm: $x_1 \leq x_2$ için $x_1^2 < x_2^2$ olacağından $f(x_1) \leq f(x_2)$ olur. Buna göre x değeri monoton artandır yani azalmayandır.

Cevap: C

9. $f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonu hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\sup f = 1$ B) $\sup f = 0$ C) $\sup f = -1$ D) $\inf f = 1$ E) $\inf f = 0$

Çözüm: Her x için $1 - x^2 \leq 1$ olacağından $\sup f = 1$ olur.

Cevap: A

Fonksiyonların Simetriliği

10. $A(3, -5), B(-1, 7)$ noktaları veriliyor. A noktasının B noktasına göre simetriği olan nokta aşağıdakilerden hangisidir?

A) (0, 1) B) (1, 1) C) (1, 2) D) (1, 3) E) (2, 3)

Çözüm: İstenilen simetrik nokta C(a, b) olsun. |AB| = |BC| olacağına göre,

$$a = \frac{3+(-)1}{2} = 1 \text{ ve } b = \frac{(-5)+7}{2} = 1$$

şeklindedir. Buna göre C(1, 1) dür.

Cevap: C

11. A(2, 5) noktasının $y = x$ 'e göre simetriği B noktası ise, B noktasının $x = -1$ e göre simetriği olan C noktasının nedir?

A) (−7, 2) B) (1, 2) C) (2, 3) D) (4, 7) E) (3, 8)

Çözüm:

A(2, 5) noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği B(5, 2) dir.

B(5, 2) noktasının $x = -1$ doğrusuna göre arasında $5 - (-1) = 6$ olduğundan $C(-1 - 6, 2) = C(-7, 2)$ olur.

Cevap: A

12. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $P(-a, -b)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriğinin koordinatları nelerdir?

A) $R(a, b)$ B) $R(b, a)$ C) $R(-b, -a)$ D) $R(a + b, a - b)$ E) $R(a, 0)$

Çözüm: $A(m, n)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $B(-n, -m)$ dir. Buna göre $P(-a, -b)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $R(b, a)$ dir.

Cevap: B

13. $A(0, 4)$ noktasının $B(2, 0)$ noktasına göre simetriği C'dir. C noktasının koordinatları nedir?

A) (4,–3) B) (3, –4) C) (3, –3) D) (4, –4) E) (3, –2)

Çözüm: $C(a, b)$ olsun. $|AB| = |BC|$ olacağına göre,

$$\frac{0+a}{2} = 2 \text{ ve } \frac{4+b}{2} = 0$$

$$a = 4 \text{ ve } b = -4$$

olur.

Cevap: D

14. $f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonun x eksenine göre simetriği $g(x)$ olduğuna göre $g(-5)$ kaçtır?

A) 120 B) 121 C) 122 D) 124 E) 125

Çözüm: 10.2. teoreme göre $f(x)$ fonksiyonunun x eksenine göre simetriği $-f(x)$ olduğundan,

$$g(x) = -f(x) = -x^3 - 1$$

dir. Şu halde $g(-5) = -(-5)^3 - 1 = 124$ olur.

Cevap: D

15. $f(x) = x^2 + 3x + 4$ fonksiyonunun $A(1, 1)$ noktasına göre simetriği $g(x)$ olduğuna göre $g(2)$ nin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 7 E) 8

Çözüm: 10.9. teoremine göre

$$g(x) = -f(2 \cdot 1 - x) + 2 \cdot 1$$
$$= -(2-x)^2 + 3(2-x) + 4$$
$$= -x^2 + x + 6$$
$$g(2) = -2^2 + 2 + 6 = 4$$

olur.

Cevap: C

16. $f(x) = x^2 + 2x + 5$ fonksiyonunun y eksenine göre simetrik $g(x)$ ise $g(1)$'in değeri nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: 10.3. teoreme göre $f(x)$ fonksiyonunun y eksenine göre simetriği $g(x) = f(-x)$ olduğundan,

$$g(x) = f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 5 = x^2 - 2x + 5$$
$$g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$$

Cevap: E

17. $f(x) = x^3 + 2$ fonksiyonunun $y = 3$ doğrusuna göre simetriği $g(x)$ ise $g(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-x^3 + 4$ B) $x^3 + 4$ C) $-2x^3 + 4$
D) $-x^3 - 4$ E) $-2x^3 - 4$

Çözüm: 10.6. teoreme göre $f(x)$ fonksiyonunun $y = 3$ doğrusuna göre simetriği

$$g(x) = -f(x) + 2 \cdot 3 = -(x^3 + 2) + 2 \cdot 3 = -x^3 + 4$$

Cevap: A

18. $f(x) = 3(x - r)^2$ fonksiyonunda, $f(3 + x) = f(3 - x)$ eşitliği vardır. Buna göre bu fonksiyonun grafiğinin tepe noktası katır?

A) -3 B) 0 C) 1 D) 3 E) 6

Çözüm: Parabolde $f(3 + x) = f(3 - x)$ olduğundan $x = r = 3$ simetri ekseni olur.

Cevap: D

19. Dik koordinat sisteminde $y = mx + 2$ doğrusunun y–eksenine göre simetriği x–eksenini $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$ noktasında kesmektedir. Buna göre m kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 10

Çözüm: 10.3 teoremine göre $y = mx + 2$ doğrusunun y–eksenine göre simetriği x–eksenini $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$ noktasında kesiyorsa, $y = mx + 2$ doğrusunun kendisi $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ noktasında keser. Bu nokta denklemi sağlayacağından,

$$0 = -m\frac{1}{5} + 2$$
$$m = 10$$

bulunur.

Cevap: E

20. $y = x + 4$ doğrusunun $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x + 4$ B) $y = 2x$ C) $y = x - 4$ D) $y = -x + 4$ E) $y = 4x$

Çözüm: 10.7 Aksiyom gereğince $A(m, n)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $B(n, m)$ noktasıdır. $y = x + 4$ doğrusu $y = 0$ için $x = -4$ olduğundan $A(-4, 0)$ ve $B(0, -4)$ dir. Bu doğrunun eğimi $m = 1$ olduğundan,

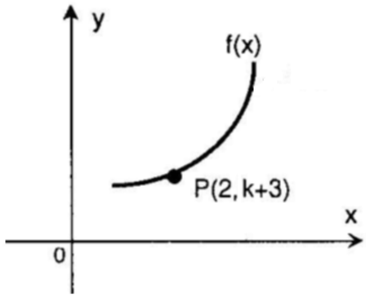
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-4) = 1(x - 0)$$
$$y = x - 4$$

simetri doğrusu oluşur.

Cevap: C

Fonksiyonların Tekliği ve Çiftliği

21.



f bir tek fonksiyon ve $f(-2) = -5$ olduğu bilindiğine göre P(2, k+3) noktasındaki k'nın değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: P noktası f fonksiyonu üzerindedir.
$f(2) = -f(-2) = -(-5) = 5$
olduğundan $k + 3 = 5$ olup $k = 2$ dir.

Cevap: B

22. $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 5$ fonksiyonu hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur.

A) Her noktada monoton artandır
B) Her noktada monoton azalandır
C) Tek fonksiyondur
D) Çift fonksiyondur
E) Sabit fonksiyondur

Çözüm: Her x için

$$f(-x) = -(-x)^4 + 3(-x)^2 - 5$$
$$= -x^4 + 3x^2 - 5$$
$$= f(x)$$

Cevap: C

23. g bir tek fonksiyon, h bir çift fonksiyon olmak üzere;

$$f(x-1) = g(x-3) + h(x+1)$$

şeklinde veriliyor. $g(1) = 2, h(-3) = 3$ olduğuna göre f(1) in değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Özel olarak x=2 alınırsa,

$$f(2-1) = g(2-3) + h(2+1)$$

$$f(1) = g(-1) + h(3)$$
olur. g tek fonksiyon ve h çift fonksiyon olduğundan
$$g(-1) = -g(1) = -2 \text{ ve } h(3) = h(-3) = 3$$
dir. Buna göre
$$f(1) = g(-1) + h(3) = -2 + 3 = 1$$
bulunur.

Cevap: A

24. $f(x) = [\![x-2]\!] + [\![2-x]\!]$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Doğrusal fonksiyondur
B) Ne tek ne çift fonksiyondur
C) Tek fonksiyondur
D) Çift fonksiyondur
E) Sabit fonksiyondur

Çözüm: Tam değer fonksiyonu özellikleri gereğince,
$$\begin{aligned} f(x) &= [\![x-2]\!] + [\![2-x]\!] \\ &= [\![x]\!] - 2 + 2 + [\![-x]\!] \\ &= [\![x]\!] + [\![-x]\!] \\ &= [\![-x]\!] + [\![x]\!] \\ &= [\![-x]\!] + [\![-(-x)]\!] \\ &= f(-x) \end{aligned}$$
olur.

Cevap: D

25. $f(x) = |x| + 2$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) f fonksiyonu görüntü kümesi negatif değer alamaz
B) $f(-2) = 0$
C) Çift fonksiyondur
D) f fonksiyonda $x = 0$ noktası simetri eksenidir
E) Tek fonksiyondur

Çözüm:
$$f(-x) = |-x| + 2 \neq -|x| + 2 = f(x)$$
olduğundan tek fonksiyon değildir.

Fonksiyonların Ötelenmesi ve Periyodu

26. $f(x) = x^2 + 2$ fonksiyonu 3 birim x ekseni boyunca sağa ötelenirse f(5)'in değeri nedir?

A) 0 B) 5 C) 12 D) 22 E) 27

Çözüm: f fonksiyonu 3 birim x ekseni boyunca sağa ötelenirse

$$f(x+3) = (x+3)^2 + 2$$
$$f(2+3) = (2+3)^2 + 2$$
$$f(5) = 27$$

olur.

Cevap: E

27. $f(x) = 3x + 5$ fonksiyonu 2 birim y ekseninde yukarı doğru ötelenirse yeni denklem nasıl olur.

A) $3x + 3$ B) $3x$ C) $3x - 7$ D) $3x + 7$ E) $3x - 3$

Çözüm: $f(x) + 2 = 3x + 5 + 2 = 3x + 7$

Cevap: D

28. $f(x) = x^2 + 4$ fonksiyonunun grafiği a birim sola ve b birim yukarı ötelenerek $g(x) = x^2 + 2x - 5$ fonksiyonunu elde ediliyor. Buna göre b'nin değeri nedir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: f fonksiyonu a birim sağa ve b birim aşağı ötelenirse,

$$f(x+a) - b = g(x)$$
$$(x+a)^2 + 4 - b = x^2 + 2x - 5$$
$$x^2 + 2ax + a^2 + 4 - b = x^2 + 2x - 5$$

bulunur. Polinomlarda eşitlik gereği,

$$2a = 2 \text{ ve } a^2 + 4 - b = -5$$
$$a = 1 \text{ ve } b = 10$$

olur.

Cevap: C

29. f bir fonksiyon olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için

i) $f(x) = x - 1$

ii) $f(x) = f(x + 10)$
özelliğini sağladığına göre, f(55) değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 9

Çözüm: $f(x) = f(x + 10)$ peryodik fonksiyon olduğundan,
$f(55) = f(45) = f(35) = f(25) = f(15) = f(5) = 5 - 1 = 4$

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
5. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
6. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
7. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
8. ÖSS-ÖYS Matematik, Komisyon, Zafer Yayınları Lise 1, 2, 3, Ankara, 2006.