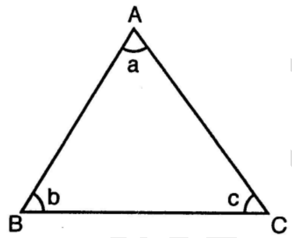
2. BÖLÜM
ÜÇGENLERE GİRİŞ ve ÜÇGENDE AÇILAR

ÜÇGEN KAVRAMI

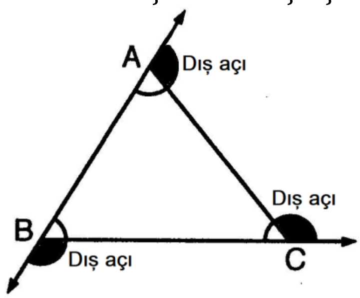
2.1. Tanım: Aynı doğru üzerinde bulunmayan üç farklı noktanın birer doğru ile birleşmesinden elde edilen geometrik şekle üçgen denir. A, B ve C noktalarından geçen doğruların oluşturduğu üçgen $\overset{\Delta}{ABC}$ sembolü ile gösterilir.



$[AB] \cup [BC] \cup [CA] = \overset{\Delta}{ABC}$

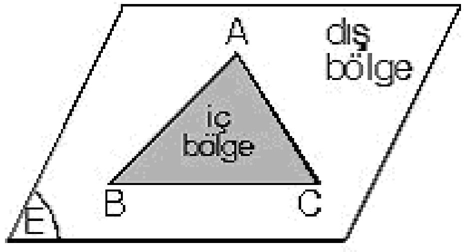
Burada A, B, C noktaları üçgenin köşeleri, $[AB], [BC], [CA]$ üçgenin kenarlarıdır. Kenarları $|AB| = c, |BC| = a, |CA| = b$ birim uzunluktadır.

2.2. Tanım: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $m(A\hat{B}C), m(B\hat{C}A)$ ve $m(C\hat{A}B)$ açılarına üçgenin iç açıları, iç açıların bütünleri açılarına dış açılar denir.



2.3. Tanım: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni bir düzlemi; üçgenin kendisi, iç bölge, dış bölge olmak üç bölgeye ayrılır. Üçgenin kendisi ve iç bölgesinin birleşimine üçgensel bölge denir.

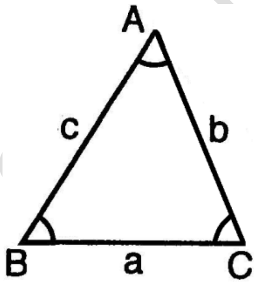
$(A\hat{B}C)$ (Üçgensel Bölge) = {ABC iç bölgesi}



ÜÇGEN ÇEŞİTLERİ

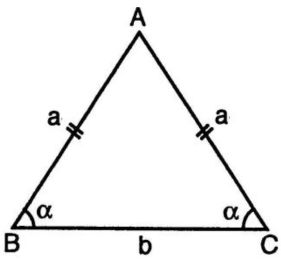
Kenarlarına Göre Üçgen Çeşitleri

2.4. Tanım (Çeşitkenar Üçgen): Üç kenarı farklı uzunlukta olan üçgenlere çeşitkenar üçgen denir.



$a \neq b \neq c$ olup ABC çeşitkenar bir üçgendir

2.5. Tanım (İkizkenar Üçgen): İki kenar uzunlukları eşit olan üçgenlere ikizkenar üçgen denir.

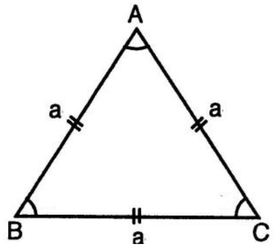


$|AB| = |AC| = a$ ve $a \neq b$ olup $A\overset{\Delta}{B}C$ ikizkenar bir üçgendir

İkizkenar üçgende uzunluğu farklı olan kenara taban, taban kenarının karşısındaki açıya tepe açısı denir.

2.1. Aksiyom: 2.5. tanıma göre; $|AB| = |AC|$ ise $m(A\hat{B}C) = m(A\hat{C}B)$ dir.

2.6. Tanım (Eşkenar Üçgen): Üç kenar uzunlukları eşit olan üçgenlere eşkenar üçgen denir. Eşkenar üçgende iç açıların tamamı birbirine eşit ve 60^0 derecedir.

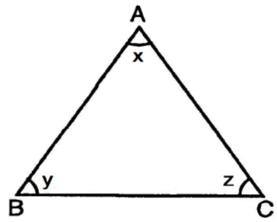


$|AB| = |BC| = |CA| = a$ olup $A\overset{\Delta}{B}C$ eşkenar bir üçgendir

2.2. Aksiyom: 2.6. tanıma göre,
$|AB| = |BC| = |CA|$ ise $m\left(A\hat{B}C\right) = m\left(A\hat{C}B\right) = m\left(B\hat{C}A\right) = 60^0$
dir.

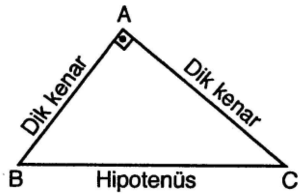
Açılarına Göre Üçgenler

2.7. Tanım (Dar Açılı Üçgen): Üç açısının ölçüsü de 90^0 den küçük olan üçgenlere dar açılı üçgen denir.



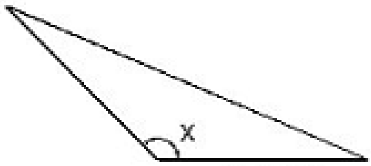
$x < 90, y < 90, z < 90$

2.8. Tanım (Dik Üçgen): Bir açısının ölçüsü 90^0 olan üçgenlere dik üçgen denir. Dik üçgende 90^0 karşısındaki kenara hipotenüs denir. Bir dik üçgen dik açının karşısındaki kenara "Hipotenüs", açının yanındaki kenara "Komşu Dik Kenar", açının karşısındaki kenara "Karşı Dik Kenar" olarak tanımlanır.



$m(\hat{C}) = 90^0$

2.9. Tanım (Geniş açılı Üçgen): Bir açısının ölçüsü de 90^0 den büyük olan üçgenlere geniş açılı üçgen denir.

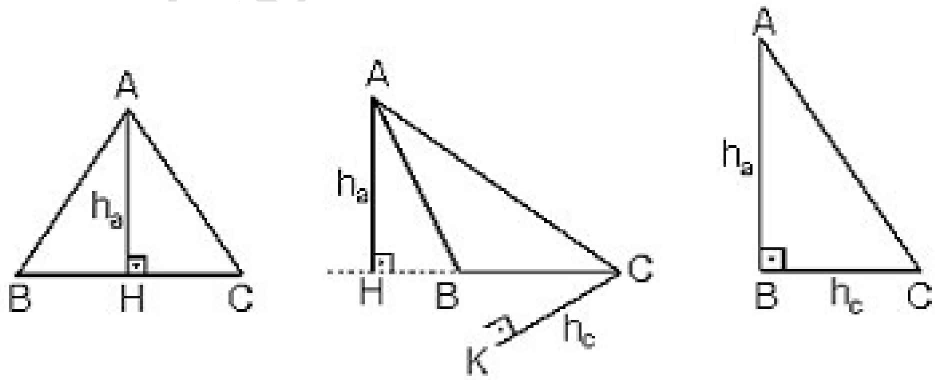


$x > 90^0$

ÜÇGENDE YARDIMCI DOĞRULAR

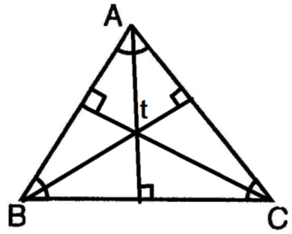
Üçgenin kenarlarına ve açılarına göre temel yardımcı doğrular vardır. Bunlar yükseklik, kenarortay ve açıortaylardır. Şimdi bunları izah edelim.

2.10. Tanım (Yükseklik): Bir köşeden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına çizilen dik doğru parçasına yükseklik denir. Yükseklikler h ile gösterilir.



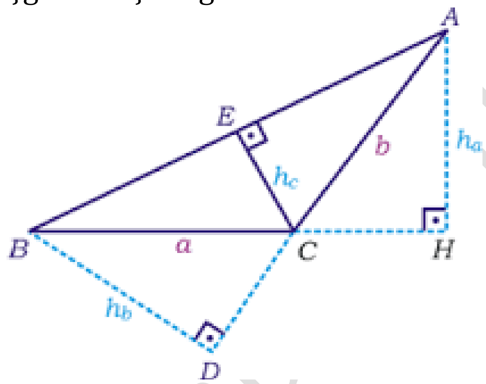
h_a , a kenarına ait yükseklik, h_c , c kenarına ait yüksekliktir.

2.11. Tanım: Yüksekliklerin kesim noktasına üçgenin diklik merkezi (Orthocenter) denir.

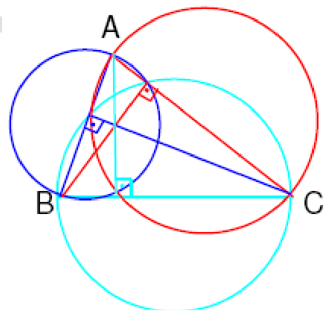


t diklik merkezidir

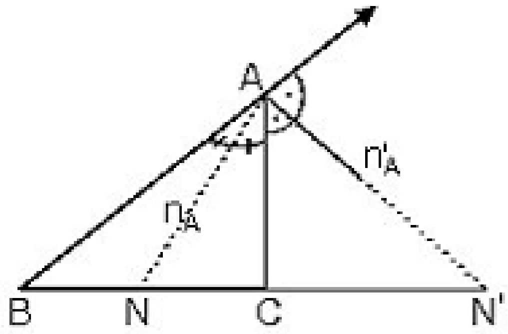
Dik üçgende diklik merkezi dik açının olduğu köşedir. Geniş açılı üçgenlerde diklik merkezi üçgenin dış bölgesindedir.



2.3. Aksiyom: Diklik merkezi, Bir üçgenin kenarını çap olarak kabul eden üç çemberin kuvvet merkezidir.

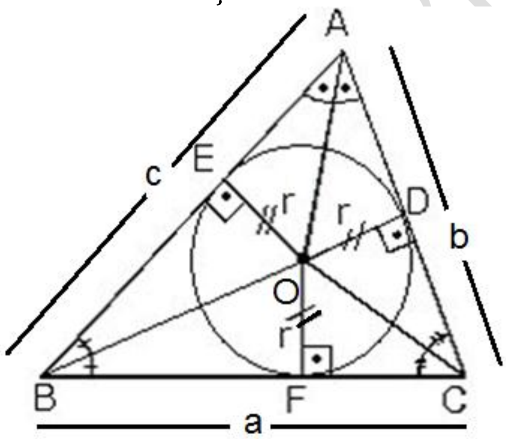


2.12. Tanım (Açıortay): Üçgenin bir köşesindeki açıyı iki eş parçaya ayıran ışına o köşenin açıortayı denir. Üçgenin iç açısını iki eş parya ayırması ına iç açıortay, dış açısını iki eş parçaya ayırmasına dış açıortay denir. n ile gö s- terilir.



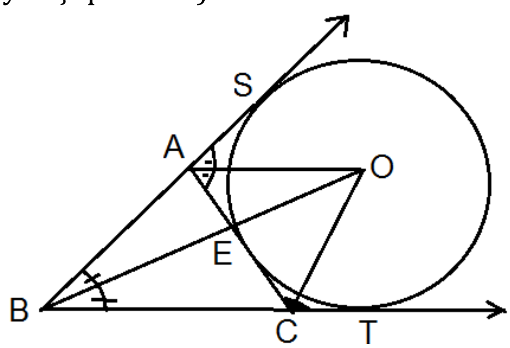
n_A, $m(B\widehat{A}C)$ açısının açıortayı (iç açıortayı), n'_A ya dış açı açıortayıdır.

2.13. Tanım: Üçgenin iç açıortayları bir noktada kesişirler. Bu noktaya üçgenin iç teğet çemberinin merkezi denir. Bir üçgende herhangi iki dış açıortay ile diğer köşedeki iç açıortay bir noktada kesişirler. Bu noktaya da üçgenin dış teğet çemberinin merkezi denir. Çember konusu ileride işlenecektir.



[AO], [BO], [CO] iç açıortaylar
r iç açıortayların oluşturduğu çemberin yarıçapı

(Açıortayların kesiştiği noktadan kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları eşittir. Çünkü çemberin yarıçaplarıdır.)

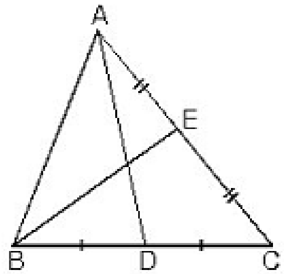


[OA] ile [CO] dış açıortay

[BO] ise iç açıortay

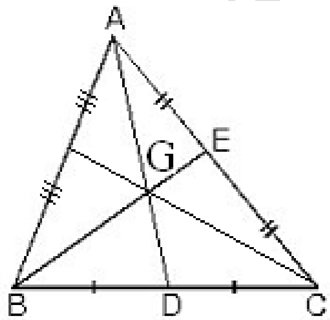
Bir üçgenin toplam üç tane dış teğet çemberi vardır.

2.14. Tanım (Kenarortay): Üçgenin bir kenarının orta noktasını karşısındaki köşe ile birleştiren doğru parçasına o kenara ait kenarortay denir. V ile gösterilir.



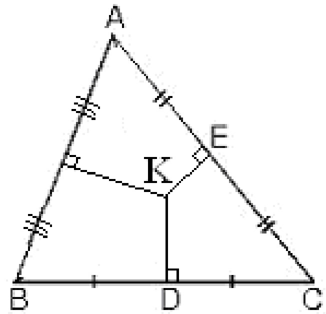
$|AD| = V_a$, $|BC|$ doğrusuna ve $m(B\widehat{A}C)$ açısına ait kenarortay,
$|BE| = V_b$, $|AC|$ doğrusuna ve $m(A\widehat{B}C)$ açısına ait kenarortaydır.

2.15. Tanım: Kenarortayların kesiştiği noktaya ağırlık merkezi denir.

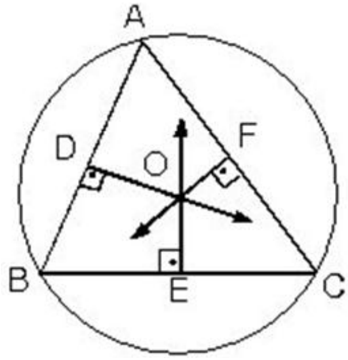


G ağırlık merkezidir

2.16. Tanım: Herhangi bir üçgenin kenarlarına, orta noktalarında dik olan doğrulara, üçgenin kenar orta dikmesi denir.



2.17. Tanım: Üçgenin kenar orta dikmelerinin kesiştiği noktaya, o üçgenin çevrel çemberinin merkezini denir. Çevrel çember, üçgenin köşelerinden geçen çemberdir. İleride çember konusunda tekrar ele alınacaktır.



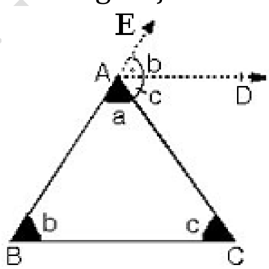
[EO, a kenarının, [FO, b kenarının, [DO, c kenarının orta dikmeleridir.

ÜÇGENDE AÇI ÖZELLİKLERİ

2.1. Teorem: Bir üçgenin iç açılar toplamı 180^0 dir.

$A\overset{\Delta}{B}C$ bir üçgen $\Leftrightarrow m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 180^0$

İspat: ABC üçgenini şekildeki gibi çizelim. $|BC|//|AD|$ olsun.



Yöndeş açılardan $m(C\hat{B}A) = m(D\hat{A}E) = b$

İç ters açılardan $m(B\hat{C}A) = m(C\hat{A}D) = c$

olduğundan $a + b + c = 180^0$ dir. Buna göre ABC üçgenin iç açılar toplamı 180^0 dir.

Örnek: Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri 2, 3, 4 sayıları ile orantılı olduğuna göre iç açları bulunuz.

Çözüm: ABC üçgenin iç açıları,

$$\frac{m(\hat{A})}{2} = \frac{m(\hat{B})}{3} = \frac{m(\hat{C})}{4} = k$$

orantılı olsun. Bu takdirde,

$$m(\hat{A}) = 2k, m(\hat{B}) = 3k, m(\hat{C}) = 4k$$

dir. Ayrıca,

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^0$$

olduğundan,

$$2k + 3k + 4k = 180^0 \text{ ise } k = 20$$

$$m(\hat{A}) = 40, m(\hat{B}) = 60, m(\hat{C}) = 80$$

bulunur.

Örnek: Bir üçgende $\hat{A} = 50^0, \hat{B} - \hat{C} = 30^0$ olduğuna göre, $\hat{B}$ açısının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$

$$50 + \hat{B} + \hat{C} = 180$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 130$$

dir. Ayrıca $\hat{B} - \hat{C} = 30^0$ olduğuna göre taraf tarafa toplarsak

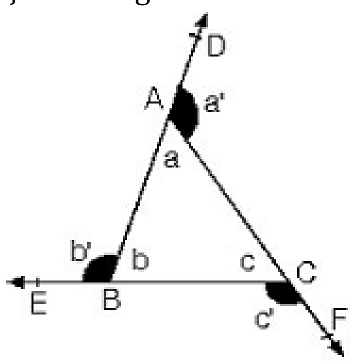
$$2\hat{B} = 160^0 \text{ ise } \hat{B} = 80^0$$

bulunur.

2.2. Teorem: Bir üçgenin dış açılar toplamı 360^0 dir.

$A\overset{\Delta}{B}C$ bir üçgen $\Leftrightarrow m(D\hat{A}C) + m(A\hat{B}E) + m(F\hat{C}B) = 360^0$

İspat: ABC üçgenini şekildeki gibi olsun.



$$a + a' = 180, b + b' = 180, c + c' = 180$$

Her üç denklemi taraf tarafa toplarsak

$(a + b + c) + (a' + b' + c') = 540$

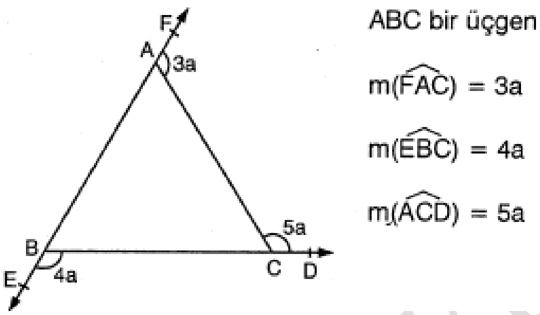
bulunur. 2.1. teorem gereği,

$180 + (a' + b' + c') = 540$

$a' + b' + c' = 360$

elde edilir.

Örnek:



Yukarıdaki verilere göre a kaç derecedir?

Çözüm: Dış açılar toplamı 360^0 olduğuna göre,

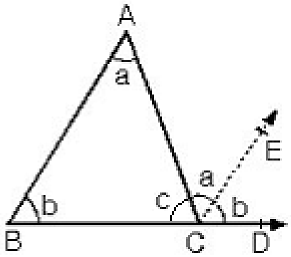
$$3a + 4a + 5a = 360$$
$$a = 30^0$$

dir.

2.3. Teorem (Dış Açı Teoremi): Üçgende bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

$\overset{\Delta}{ABC}$ bir üçgen $\Leftrightarrow m(A\hat{C}D)m(B\hat{A}C) + m(A\hat{B}C)$

İspat: ABC üçgenini şekildeki gibi ve |AB| // |CE| olsun.



Yöndeş açılardan $m(A\hat{B}C) = m(A\hat{E}D) = b$

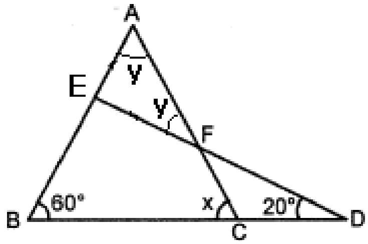
İç ters açılardan $m(B\hat{A}C) = m(A\hat{C}E) = a$

olduğundan,

$$m(A\hat{C}D) = m(B\hat{A}C) + m(A\hat{B}C)$$

dir.

Örnek:



Verilen üçgene göre x'in değeri nedir?

Çözüm: İç açılar toplamından

$$x + y + 60 = 180$$
$$x + y = 120$$

dir. Ayrıca ters açılardan $m(A\hat{F}E) = m(C\hat{F}D) = y$ ve dış açı teoremine göre

$$x = y + 20$$

dir. Bulunan iki denkleme çözülürse,

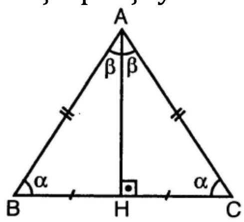
$$y + 20 + y = 120$$
$$y = 50^0$$

ve

$$x = y + 20 = 50 + 20 = 70^0$$

olur.

2.1. Aksiyom: İkizkenar üçgende tepe noktasından tabana indirilen dikme, tabanı ve tepe açısını iki eşit parçaya böler.



Burada [AH]; hem yükseklik, hem açıortay, hem de kenarortaydır.

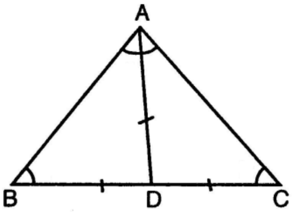
i) Eğer [AH]; hem yükseklik, hem açıortaysa yine üçgen ikizkenar üçgen olup [AH] aynı zamanda kenarortaydır.

ii) Eğer [AH]; hem açıortay, hem de kenarortay ise bu üçgen ikizkenar üçgen olup [AH] aynı zamanda yüksekliktir.

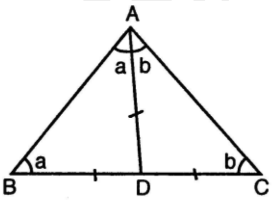
iii) Eğer [AH]; yükseklik ve kenarortay ise bu üçgen ikizkenar üçgen olup [AH] aynı zamanda açıortaydır.

2.2. Aksiyom: Eşkenar üçgende bütün açıortay, kenarortay ve yükseklik birbirlerine eşittir. (İkizkenar üçgende olduğu gibi eşkenar üçgende de yardımcı doğrulardan herhangi biri olması durumunda diğer ikisi de vardır. Mesela, eşkenar üçgende yükseklik doğrusu, aynı zamanda kenarortay ve açıortaydır.)

2.4. Teorem (Muhteşem üçlü): Bir ABC üçgeninde, $|\mathbf{BD}| = |\mathbf{DC}| = |\mathbf{AD}|$ olacak şekilde [AD] doğru parçası varsa, $\mathbf{m(B\hat{D}C) = 90^0}$ dir. Bu teoremin tersi de doğrudur.

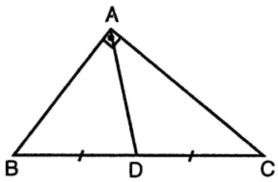


İspat: ABC bir üçgen $|\mathbf{BD}| = |\mathbf{DC}| = |\mathbf{AD}|$ ise $\mathbf{m(A\hat{B}D) = m(B\hat{A}D) = a}$, $\mathbf{m(D\hat{A}C) = m(A\hat{C}D) = b}$ olacak şekilde yazılabilir.

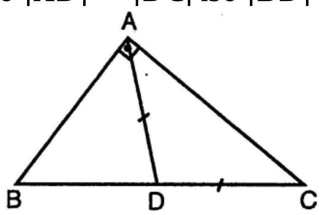


Üçgenin iç açılar toplamından $\mathbf{2a + 2b = 180}$ olup $\mathbf{m(B\hat{A}C) = 90^0}$ olur. //

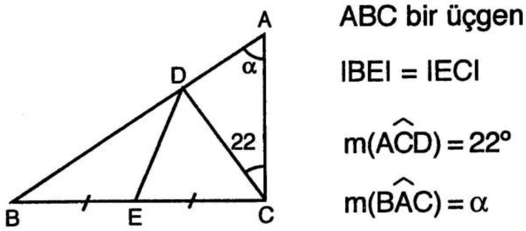
i) BAC dik üçgeninde $|\mathbf{BD}| = |\mathbf{DC}|$ ise $|\mathbf{BD}| = |\mathbf{DC}| = |\mathbf{AD}|$ dir.



ii) BAC dik üçgeninde $|\mathbf{AD}| = |\mathbf{DC}|$ ise $|\mathbf{BD}| = |\mathbf{DC}| = |\mathbf{AD}|$ dir.



Örnek:



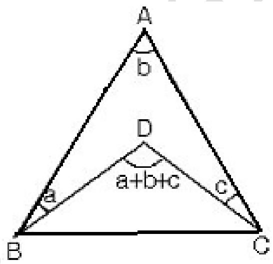
Verilere göre α kaç derecedir?

Çözüm: Muhteşem üçlü teoreminden $\mathbf{m(B\hat{D}C) = m(A\hat{D}C) = 90^0}$ olur. ADC üçgeninin iç açılar toplamından,

$$\boldsymbol{\alpha + 22 + 90 = 180}$$
$$\boldsymbol{\alpha = 68^0}$$

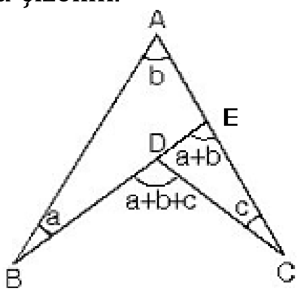
olur.

2.5. Teorem: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni şekildeki gibi içinde BDC üçgeni var ise $m(B\hat{D}C) = a + b + c$



dir.

İspat: |DE| doğrusunu çizelim.

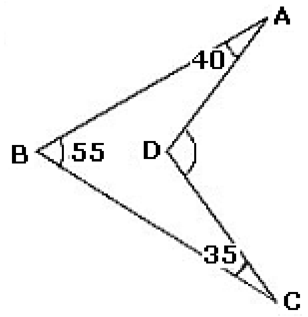


dış açı göre,

$$m(D\hat{E}C) = m(A\hat{B}E) + m(B\hat{A}E) = a + b$$
$$m(B\hat{D}C) = m(D\hat{E}C) + m(E\hat{C}D) = a + b + c$$

dir.

Örnek:



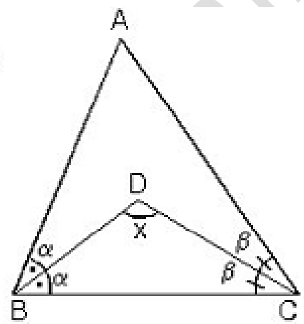
Şekle göre $m(A\widehat{D}C)$ nedir?

Çözüm: 2.4. teorem gereği,

$$m(A\widehat{D}C) = 55 + 40 + 35 = 130^0$$

dir.

2.6. Teorem: Bir üçgenin iki iç açıortayının kesim noktasındaki açı, üçüncü açının yarısından 90^0 fazladır.



$$x = 90 + \frac{m(\hat{A})}{2}$$

İspat: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $2\alpha + 2\beta + m(\hat{A}) = 180^0$

$\overset{\Delta}{BDC}$ üçgeninde $\alpha + \beta + x = 180^0$

bulunur. Bu iki eşitlikten,

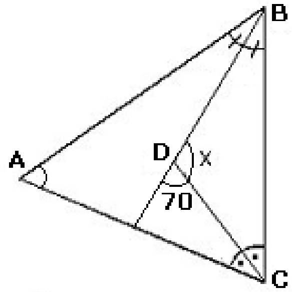
$2(\alpha + \beta) + m(\hat{A}) = 180$ ve $\alpha + \beta = 180 - x$

$2(180 - x) + m(\hat{A}) = 180$

$$x = 90 + \frac{m(\hat{A})}{2}$$

elde edilir.

Örnek: $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninin iç açıortaylarından $B\overset{\Delta}{D}C$ üçgeni olsun.



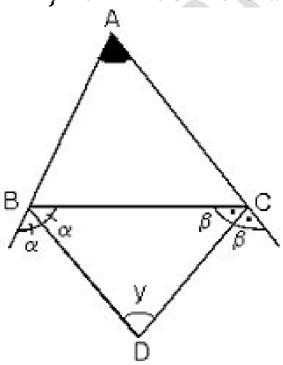
Yukarıdaki verilere göre $m(\hat{A})$ in değeri nedir?

Çözüm: $m(B\hat{D}C) = 180 - 70 = 110$

$$110 = 90 + \frac{m(\hat{A})}{2}$$

$$m(\hat{A}) = 40^0$$

2.7. Teorem: Bir üçgenin iki dış açıortayın oluşturduğu açının ölçüsü, 90^0 den üçüncü açının yarısının çıkarılması ile elde edilir.



$$y = 90 - \frac{m(\hat{A})}{2}$$

İspat: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$ (1)

$\alpha + \beta + y = 180$ (2)

$\hat{B} + 2\alpha = 180$ (3)

$\hat{C} + 2\beta = 180$ (4)

denklemleri elde edilir. (3) ve (4) denklem taraf tarafa toplanırsa,

$\hat{B} + \hat{C} + 2\alpha + 2\beta = 360$ (5)

bulunur. (2) denklemi (5) de yazarak,

$$\hat{B} + \hat{C} + 2(\alpha + \beta) = 360$$

$$\hat{B} + \hat{C} + 2(180 - y) = 360$$

$\hat{B} + \hat{C} = 2y$ (6)

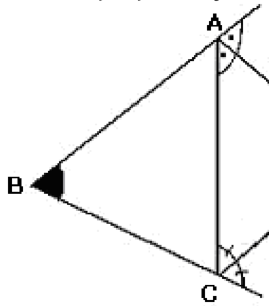
dir. (6) denklemi (1) de yazarak,

$$\hat{A} + 2y = 180$$

$$y = 90 - \frac{m(\hat{A})}{2}$$

elde edilir.

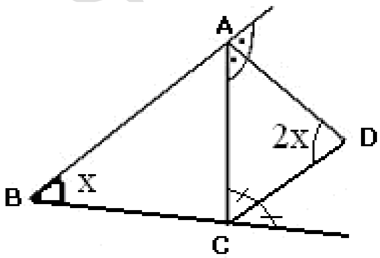
Örnek: $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninin dış açıortaylarından $A\overset{\Delta}{D}C$ üçgeni olsun.



Yukarıdaki verilere göre $m(\hat{A})$ in değeri nedir?

Çözüm: $80 = 90 - \frac{m(\hat{A})}{2}$ ise $m(\hat{A}) = 20^0$ dir.

Örnek: $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninin dış açıortaylarından $A\overset{\Delta}{D}C$ üçgeni olsun.



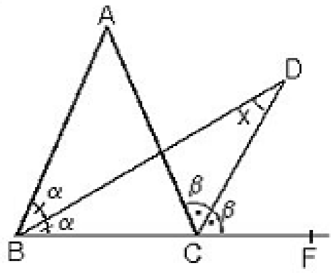
Yukarıdaki verilere göre x açısı nedir?

Çözüm: 2.6. teorem gereği,

$$2x = 90 - \frac{x}{2} \text{ ise } x = 36^0$$

dir.

2.8. Teorem: Bir üçgende bir iç açıortay ile bir dış açıortayın oluşturduğu açı, üçüncü açının yarısına eşittir.



$$x = \frac{m(\hat{A})}{2}$$

İspat: 2.3. teoremden

$A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninde $2\beta = 2\alpha + m(\hat{A})$ ise $\beta - \alpha = \frac{m(\hat{A})}{2}$

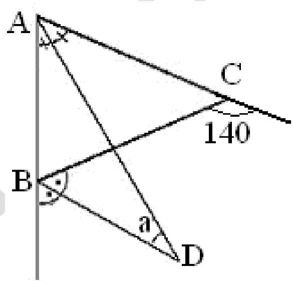
$B\overset{\Delta}{D}C$ üçgeninde $\beta = \alpha + x$

bulunur. Her iki eşitlikten,

$$x = \frac{m(\hat{A})}{2}$$

elde edilir.

Örnek:

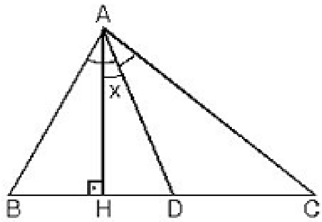


Yukarıda verilere göre, $m(B\hat{D}A) = a$ kaç derecedir?

Çözüm: $m(A\hat{C}B) = 180 - 140 = 40$

$$a = \frac{m(A\hat{C}B)}{2} = 20^0$$

2.9. Teorem: Açıortay ile yükseklik arasında kalan açı; $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninde [AD], A açısına ait açıortay ve [AH] yüksekliktir.



Açıortay ile yükseklik arasındaki açıya $m(H\widehat{A}D) = x$ dersek,

$$x = \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})|}{2}$$

olur.

İspat: [AD] doğru parçası $m(C\widehat{A}B)$ açısının açıortayı olmak üzere

$$m(B\widehat{A}C) = m(D\widehat{A}C) = \frac{m(\widehat{A})}{2}$$

dir. $C\overset{\Delta}{A}H$ üçgeninde $m(C\widehat{A}H) = 90 - m(\widehat{C})$ dir. Ayrıca $m(C\widehat{A}H) - x = \frac{m(\widehat{A})}{2}$ yazılabilir.

$A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninde $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^0$ olduğundan

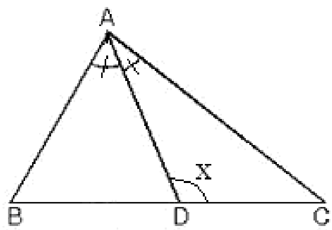
$$m(\widehat{A}) = 180 - [m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})]$$

$$2[90 - m(\widehat{C}) - x] = 180 - [m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})]$$

$$x = \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})|}{2}$$

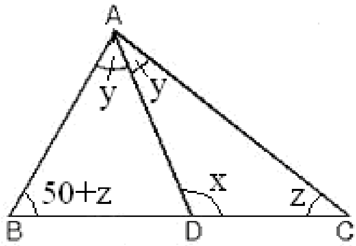
dir.

Örnek:



$A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninde [AD] iç açıortay, $m(\widehat{B}) - m(\widehat{C}) = 50^0$ olduğuna göre $m(A\widehat{D}C) = x$ kaç derecedir.

Çözüm: $\frac{m(\widehat{A})}{2} = y$ ve $m(\widehat{C}) = z$ olsun. Öyleyse $m(A\widehat{B}C) = 50 + z$ dir.



$\overset{\Delta}{ABD}$ üçgeninde dış açı x'dir, 2.3. teoremden

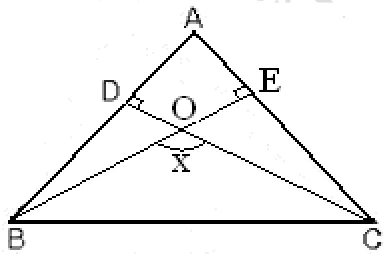
$$x = 50 + y + z$$

dir. $\overset{\Delta}{ADC}$ üçgeninde iç açılar toplamından

$$x + y + z = 180$$
$$x + (x - 50) = 180$$
$$x = 115$$

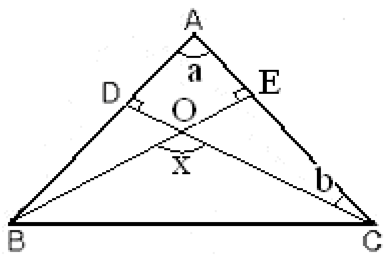
bulunur.

2.10. Teorem: Bir üçgende herhangi bir köşeden çizilen yükseklikler arasında kalan açı, köşelere ait iç açıların toplamına eşittir.



$$m(B\hat{O}C) = x = m(\hat{B}) + m(\hat{C})$$

İspat: $m(B\hat{A}C) = a, m(A\hat{C}D) = b$ olsun.



$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $a + b + 90 = 180$ olduğundan $b = 90 - a$ dır.

$\overset{\Delta}{EOC}$ üçgeninde x dış açı olduğundan $x = b + 90$ dır.

Bu iki denklemden

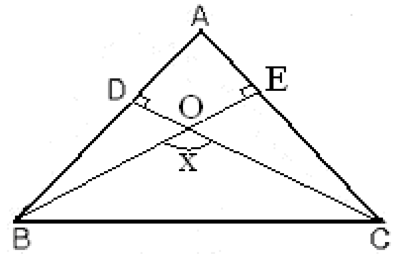
$$x = b + 90 = 90 - a + 90 = 180 - a$$
$$a = 180 - x$$

bulunur. $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninde $m(\widehat{A})+m(\widehat{B})+m(\widehat{C})=180^0$ olduğuna göre,

$$180-x+m(\widehat{B})+m(\widehat{C})=180$$
$$x=m(\widehat{B})+m(\widehat{C})$$

dir.

Örnek:

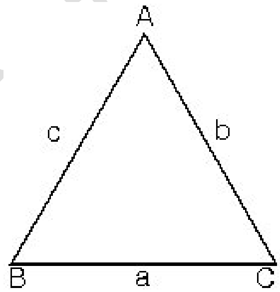


$m(\widehat{B})=m(\widehat{C})=50$ olarak verildiğine göre x açısının değeri nedir?

Çözüm: $x=m(\widehat{B})+m(\widehat{C})=50+50=100^0$

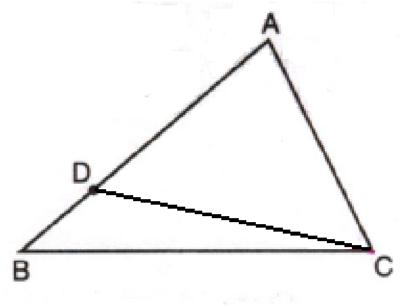
ÜÇGENDE AÇI KENAR İLİŞKİLERİ

2.11. Teorem: Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar, küçük açı karşısında küçük kenar bulunur. Bu teoremin tersi de doğrudur.



$$m(\widehat{A})>m(\widehat{B})>m(\widehat{C})\Leftrightarrow a>b>c$$

İspat: Bu teoremin ispatı için $|AB|>|AC|\Leftrightarrow m(A\widehat{C}B)>m(A\widehat{B}C)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $|AB|>|AC|$ olsun. Bu $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninde, $|AD|=|AC|$ olacak şekilde [AB] üzerinde bir D noktası alalım.



$\overset{\Delta}{AdC}$ ikizkenar üçgen olduğundan

$$m(A\hat{D}C) > m(A\hat{C}D) \qquad (1)$$

bulunur. Buradan

$$m(A\hat{C}B) = m(A\hat{C}D) + m(D\hat{C}B)$$
$$m(A\hat{C}B) > m(A\hat{C}D) \qquad (2)$$

elde edilir. 2.3. Teoremden

$$m(A\hat{D}C) = m(\hat{B}) + m(D\hat{C}B)$$
$$m(A\hat{D}C) > m(\hat{B}) \qquad (3)$$

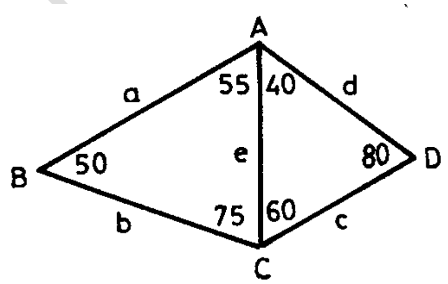
(2) ve (3) den

$$m(A\hat{C}B) > m(A\hat{C}D) > m(\hat{B})$$
$$m(\hat{C}) > m(\hat{B})$$

olur.

Bu teoremin tersinin doğruluğu benzer yolla yapılır.

Örnek:



Şekildeki $\overset{\Delta}{ABC}$ ve $\overset{\Delta}{ACD}$ üçgeni veriliyor. Bu iki üçgenden en uzun kenar hangisidir?

Çözüm: $\overset{\Delta}{ACD}$ üçgenine göre,

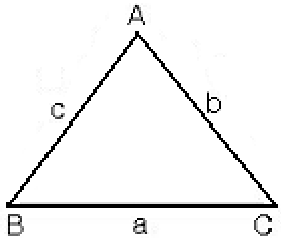
$$40 < 60 < 80$$
$$c < d < e$$

$A\overset{\Delta}{B}C$ üçgenine göre,

$$50 < 55 < 75$$
$$e < b < a$$

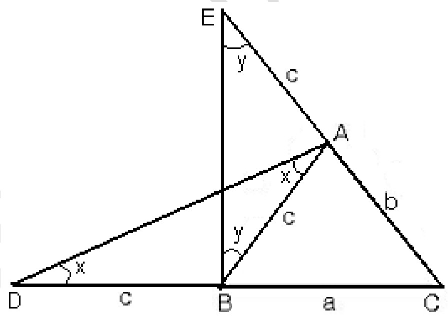
olur. $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgenine göre en uzun kenar e kenarı ama $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgenine göre e kenarından daha büyük b ve b'den daha büyük a kenarı vardır.

2.11. Teorem (Üçgen Eşitsizliği): Bir üçgende bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, iki kenarın uzunlukları farkının mutlak değerinden büyüktür.



$$|b-c| < a < b+c,\ |a-c| < b < a+c,\ |a-b| < c < a+b$$

İspat: [BC] doğrusu parçası üzerinde [DB] doğru parçasını ve [AC] doğrusu parçası üzerinde [AE] doğru parçasını çizelim.



2.10. Teoremden;

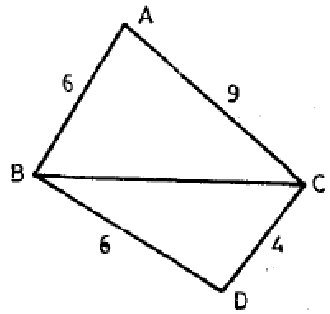
1. $m(A\hat{D}C) < m(D\hat{A}C)$ ise $b < a + c$ olup $b - c < a$
2. $m(B\hat{E}C) < m(E\hat{B}C)$ ise $a < b + c$

olur. 1 ve 2 den,

$$|b-c| < a < b+c$$

bulunur.

Örnek: $A\overset{\Delta}{B}C$ ve $B\overset{\Delta}{C}D$ üçgenleri şekildeki gibi verilsin.



$|BC|$ uzunluğunun aralığını bulunuz.

Çözüm: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenine göre,

$$9 - 6 < |BC| < 9 + 6 \text{ ise } 3 < |BC| < 15 \quad (1)$$

$\overset{\Delta}{BCD}$ üçgenine göre,

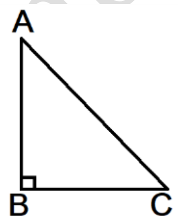
$$6 - 4 < |BC| < 6 + 4 \text{ ise } 2 < |BC| < 10 \quad (2)$$

olur. (1) ve (2) den,

$$3 < |BC| < 10$$

olarak bulunur.

2.13. Teorem: Bir dik üçgende hipotenüs daima dik kenarlardan uzundur.



$$|BC| < |AC| \text{ ve } |AB| < |AC|$$

İspat: $\overset{\Delta}{ABC}$ dik üçgende $m(\hat{B}) = 90^0$ olduğundan $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 90^0$ dir. 2.11. Teoremden,

$$m(\hat{A}) < m(\hat{B}) \text{ ise } |BC| < |AC|$$
$$m(\hat{C}) < m(\hat{B}) \text{ ise } |AB| < |AC|$$

olur.

2.14. Teorem: Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde; kenarlar a, b, c ise;

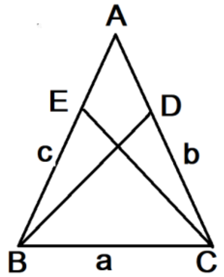
i) $m(\hat{A}) < 90^0$ ise $a^2 < b^2 + c^2$

ii) $m(\hat{A}) > 90^0$ ise $a^2 > b^2 + c^2$

iii) $m(\hat{A}) = 90^0$ ise $a^2 = b^2 + c^2$ (Pisagor teoremi)

olur.

İspat: a) $m(\hat{A}) < 90^0$ ise aşağıdaki şekil çizilir.



$|BC| = |BD| = |CE| = a$

olacak şekilde [BD] ve [CE] doğru parçaları çizilir. Üçgen eşitsizliğine göre;

$m(\hat{A}) < m(\hat{B})$ ise $a < b$

$m(\hat{A}) < m(\hat{C})$ ise $a < c$

olur. Bu eşitsizliklerden

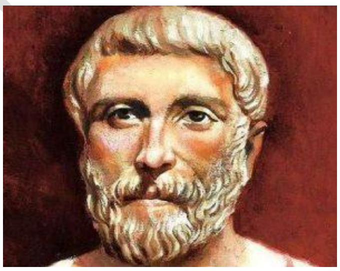
$a^2 < b^2$ ve $a^2 < c^2$

$2a^2 < b^2 + c^2$

$a^2 < b^2 + c^2$

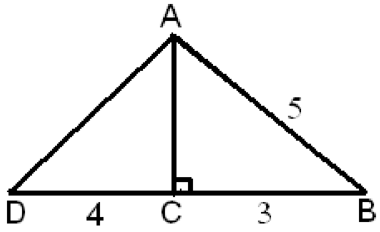
elde edilir.

Benzer şekilde $m(\hat{A}) > 90^0$ ise $a^2 > b^2 + c^2$ olduğu gözükür. Buna göre (i) ve (ii) özelliğinden $m(\hat{A}) = 90^0$ ise $a^2 = b^2 + c^2$ olduğu ortaya çıkar. Bu iii özelliğe Pisagor teoremi adı verilir.



Pythagoras (Pisagor)
(M.Ö. 570 Sisam, Yunanistan - M.Ö. 495 Metaponto, İtalya)

Örnek: Şekildeki $\overset{\Delta}{ABC}$ ve $\overset{\Delta}{ADC}$ üçgenlerinde $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|DC| = 4$ cm ise $|AD|$ kaç cm dir?



Çözüm: $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanırsa,

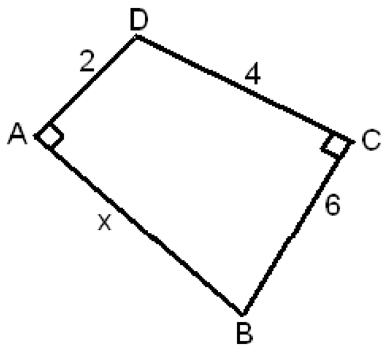
$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2$
$5^2 = |AC|^2 + 3^2$
$|AC| = 4$

Yine $A\overset{\Delta}{D}C$ üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanırsa,

$|AD|^2 = |AC|^2 + |DC|^2$
$|AD|^2 = 4^2 + 4^2$
$|AD| = 4\sqrt{2}$

bulunur.

Örnek: ABCD dörtgeninde $[AD] \perp [AB]$, $[DC] \perp [BC]$, $|AD| = 2$ cm, $|DC| = 4$ cm, $|BC| = 6$ cm ise $|AB|$ kaç cm dir?



Çözüm: [DB] doğru parçasını çizelim. Oluşan $D\overset{\Delta}{C}B$ üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanırsa,

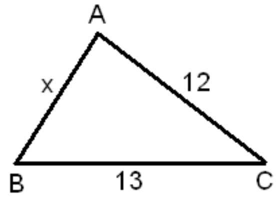
$|BD|^2 = |DC|^2 + |CB|^2$
$|BD|^2 = 6^2 + 4^2$
$|BD| = 2\sqrt{13}$

Yine $A\overset{\Delta}{B}D$ üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanırsa,

$|DB|^2 = |AD|^2 + |AB|^2$
$(2\sqrt{13})^2 = 2^2 + |AB|^2$
$|AB| = 4\sqrt{3}$

bulunur.

Örnek: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $m(\widehat{A}) > 90^0$, $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 13$ cm ise $|AB|$ nin çözüm aralığını bulunuz.



Çözüm: "Bir kenar diğer iki kenarın toplamından küçük farkından büyüktür." teoremine göre,

$$13 - 12 < x < 13 + 12$$
$$1 < x < 25$$

2.13. teorem ii gereği,

$$|BC|^2 > |AB|^2 + |AC|^2$$
$$13^2 > x^2 + 12^2$$
$$x < 5$$

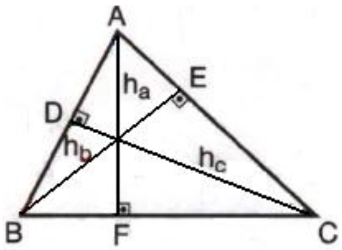
bulunur. Her iki eşitsizlikten,

$$1 < x < 5$$

elde edilir.

BAZI AÇI-KENAR TEOREMLERİ

2.15. Teorem: Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde; a, b, c kenarlarına ait yükseklikler sırasıyla; h_a, h_b, h_c ise



$$h_a + h_b + h_c < a + b + c$$

dir.

İspat: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $|AF| = h_a, |BE| = h_b, |CD| = h_c$ olsun. 2.12. Teoremden,

$\overset{\Delta}{EBC}$ üçgeninde $|BE| < |BC|$ ise $h_b < a$ (1)

$D\overset{\Delta}{C}A$ üçgeninde $|DC| < |AC|$ ise $h_c < b$ (2)

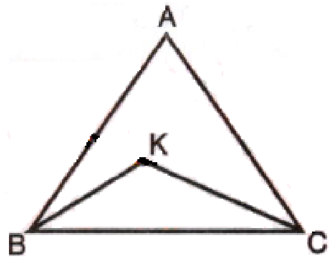
$A\overset{\Delta}{B}F$ üçgeninde $|AF| < |AB|$ ise $h_a < c$ (3)

bulunur. (1), (2) ve (3) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$h_a + h_b + h_c < a + b + c$$

olur.

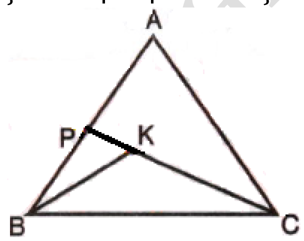
2.16. Teorem: Bir üçgenin iç bölgesindeki bir nokta K ise;



$$|KB| + |KC| < |AB| + |AC|$$

eşitsizliği vardır.

İspat: [CK] doğru parçasına |KP| olacak şekilde bir doğru çizelim.



Üçgen eşitsizliğinden,

$P\overset{\Delta}{B}K$ üçgeninde; $|BK| < |KP| + |PB|$ (1)

$A\overset{\Delta}{P}C$ üçgeninde; $|KP| + |KC| < |AP| + |AC|$ (2)

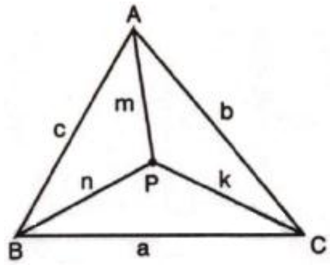
(1) ve (2) eşitsizliğini taraf tarafa toplarsak ve $|PB| + |AP| = |AB|$ olduğundan,

$$|BK| + |KP| + |KC| < |KP| + |PB| + |AP| + |AC|$$

$$|BK| + |KC| < |AB| + |AC|$$

bulunur.

2.17. Teorem: Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde alınan bir P noktasının, köşelere olan uzaklıkları toplamı üçgenin çevre uzunluğunun yarısından büyük, çevre uzunluğundan küçüktür.



$$\frac{a+b+c}{2} < k + m + n < a + b + c$$

İspat: $|PA| = m, |PB| = n$ ve $|PC| = k$ diyelim.

$P\overset{\Delta}{B}C$, $P\overset{\Delta}{C}A$ ve $P\overset{\Delta}{A}B$ üçgeninde;

$a < n + k, b < m + k$ ve $c < m + n$

eşitsizlikleri yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplarsak,

$$a + b + c < 2k + 2m + 2n = 2(k + m + n)$$

$$\frac{a+b+c}{2} < k + m + n \qquad (1)$$

bulunur. 2.15. Teoremden;

$k + n < b + c, m + n < a + b$ ve $m + k < a + b$

eşitsizlikleri yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplarsak,

$$2(k + n + m) < 2(a + b + c)$$

$$k + n + m < a + b + c \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitsizliklerinden

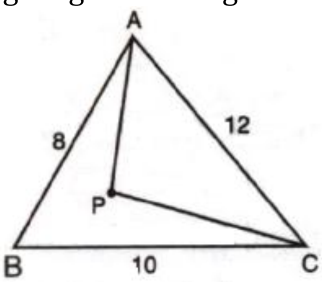
$$\frac{a+b+c}{2} < k + m + n < a + b + c$$

elde edilir.

Örnek: Bir ABC üçgeninin içindeki P noktası verilsin.

$|AB| = 8$ cm, $|AC| = 12$ cm ve $|BC| = 10$ cm

ise $|PC| + |PA|$ nın alabileceği değerler aralığını bulunuz.



Çözüm: 2.15. Teoremden;

$$|PC| + |PA| < 8 + 10 = 18 \qquad (1)$$

$\overset{\Delta}{APC}$ üçgeninde üçgen eşitsizliğinden;

$$|PC| + |PA| > 12 \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) den;

$$12 < |PC| + |PA| < 18$$

olur.

TRİGOMETRİ KAVRAMI

Trigonometri konusu geniş bir şekilde, ayrı bir konu olarak incelenecektir. Ama geometride bazen kullanılan bazı kavramları ihtiyacıma binaen kısaca, ihtiyacımız doğrultusunda bahsedeceğiz.

2.18. Tanım: $0^0 < \alpha < 90^0$ olmak üzere,

$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Komşu Dik Kenar}}, \quad \cot\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$$

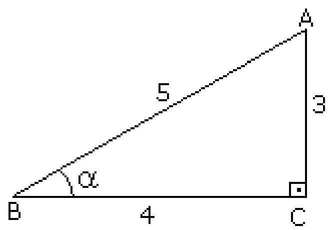
$$\sec\alpha = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Komşu Dik Kenar}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$$

dir.

$90^0 < \alpha \leq 360^0$ için trigometrik değerler trigonometri konusunda incelenecektir.

Örnek: $0^0 < \alpha < 90^0$ olmak üzere $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ise $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha, \sec\alpha$ ve $\csc\alpha$ yı bulunuz.

Çözüm: Sinüsün tanımı gereğince karşı dik kenar uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna eşittir. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ olduğundan Pisagor teoremi gereğince komşu dik kenar 4 olarak bulunur



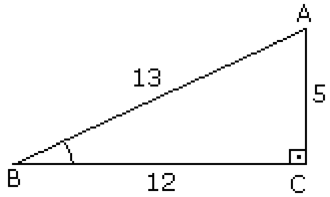
Bu üçgene göre,

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \tan\alpha = \frac{3}{4}, \cot\alpha = \frac{4}{3}, \sec\alpha = \frac{5}{4}, \csc\alpha = \frac{5}{3}$$

elde edilir.

Örnek: $0^0 < x < 90^0$ olmak üzere $\tan x = \frac{5}{12}$ ise $\sin x + \cos x$ i bulunuz.

Çözüm: Tanjantın tanımı karşı dik kenarın uzunluğunun komşu dik kenarın uzunluğuna oranıydı. Buna göre

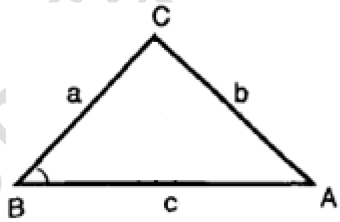


bulunur. Şu halde;

$$\sin x + \cos x = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{17}{13}$$

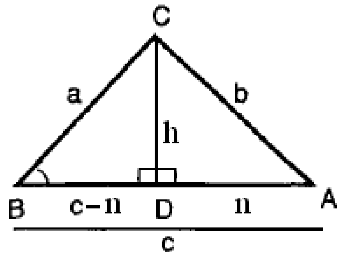
dir.

2.17. Teorem: Bir üçgende bir kenarın karesi, diğer iki kenarın kareleri toplamından, bu iki kenar ile bu kenarlar arasındaki açının kosinüsü çarpımının iki katı eksiğine eşittir.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

İspat: i) $m(\hat{A}) < 90^0$ ise aşağıdaki şekil çizilebilir.



Pisagor teoremine göre,

$$a^2 = (c-n)^2 + h^2, b^2 = n^2 + h^2$$

dir. Bu iki eşitlikten,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn \qquad (1)$$

bulunur. CAD üçgeninde

$$\cos A = \frac{n}{b} \text{ ise } n = b\cos A \qquad (2)$$

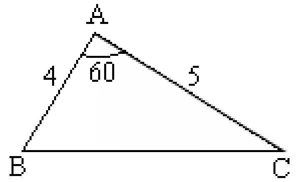
dir. (2) eşitliğini (1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

elde edilir.

ii) $m(\hat{A}) > 90^0$ durumunun ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: ABC üçgenin de $m(\hat{A}) = 60^0$, $|AB| = 4\ cm$, $|AC| = 5\ cm$ ise;



$|BC|$ uzunluğunu bulunuz.

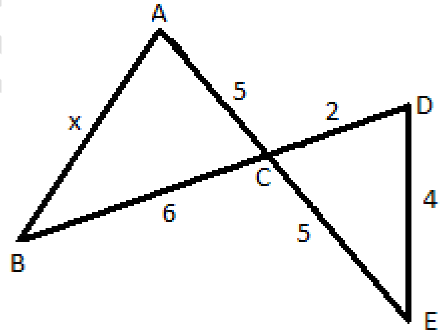
Çözüm: $|BD| = a$ denirse, $\cos 60 = \frac{1}{2}$ olduğundan

$$a^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cos 60 = 21$$

$$a = \sqrt{21}$$

dir.

Örnek: $A\hat{B}C$ üçgeninde $|AC| = 5\ cm$, $|BC| = 6\ cm$ ve $D\hat{C}E$ üçgeninde $|DC| = 2\ cm$, $|CE| = 5\ cm$, $|DE| = 4\ cm$ ise $|AB|$ kaç cm'dir?



Çözüm: $D\hat{C}E$ üçgenine cosünüs teoremini uygularsak,

$4^2 = 5^2 + 2^2 - 2\cdot 5\cdot 2\cos\alpha$ eşitliğinden $\cos\alpha = \frac{13}{20}$

bulunur. Bunu $A\hat{B}C$ üçgenine uygularsak,

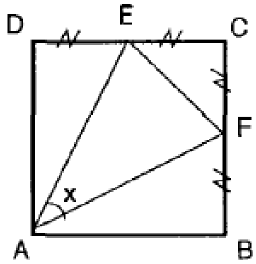
$$x^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cos\alpha$$

$$x^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{13}{20}$$

$$x = \sqrt{22}\ \text{cm}$$

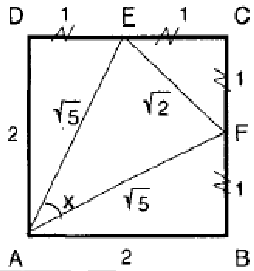
elde edilir.

Örnek: Şekilde verilen ABCD karesinde; E, F orta noktalardır.



cos x in değerini bulunuz.

Çözüm: Verilere göre bir kenarı 2 birim olsun. Buna göre şekilde aşağıdaki değerler bulunur.



Buna göre AEF'de kosinüs teoremi uygulanırsa;

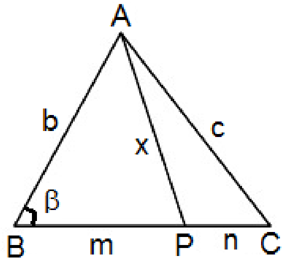
$$\sqrt{2}^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}\cos\alpha$$

$$\cos x = \frac{4}{5}$$

olarak bulunur.

Ian Nicholas Stewart
24 Eylül 1945 (Doğum Tarihi), İngiltere

2.18. Teorem (Stewart Teoremi): Bir $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninde içindeki $|AP|$ doğrusunun uzunluğu ile üçgenin kenarları arasında,



$$x^2 = \frac{b^2n+c^2m}{m+n} - mn$$

bağıntısı vardır.

İspat: $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgenine Kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$c^2 = b^2 + (m+n)^2 - 2b(m+n)\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{b^2+(m+n)^2-c^2}{2b(m+n)} \qquad (1)$$

bulunur. Yine ABP üçgenine Kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$x^2 = b^2 + m^2 - 2bm\cos\beta \qquad (2)$$

elde edilir. (2) eşitliğini (1) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$x^2 = b^2 + m^2 - 2bm\left(\frac{b^2+(m+n)^2-c^2}{2b(m+n)}\right)$$

$$x^2 = b^2 + m^2 - \left(\frac{b^2m+(m+n)^2m-c^2m}{m+n}\right)$$

$$x^2 = \frac{(b^2m+b^2n+m^3+m^2n)-(b^2m+m^3+2m^2n+n^2m-c^2m)}{m+n}$$

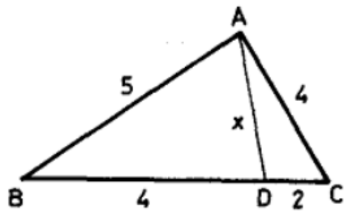
$$x^2 = \frac{b^2n+c^2m-m^2n-n^2m}{m+n}$$

$$x^2 = \frac{b^2n+c^2m-mn(m+n)}{m+n}$$

$$x^2 = \frac{b^2n+c^2m}{m+n} - mn$$

olur.

Örnek:



Verilere göre $|AD| = x$ uzunluğu ne kadardır?

Çözüm: $b = 5, c = 4, m = 4, n = 2$ olmak üzere Stewart teoremi kullanılırsa;

$$x^2 = \frac{5^2 2 + 4^2 4}{4+2} - 4 \cdot 2$$

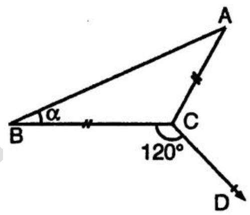
$$x = \sqrt{11}$$

olur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Üçgende Açılar

1.

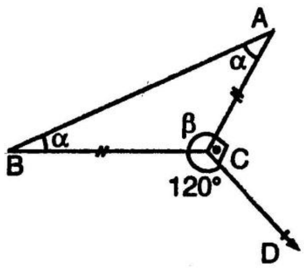


ABC bir üçgen
$|AC| = |BC|$
$[AC] \perp [CD]$
$m(\widehat{BCD}) = 120°$
$m(\widehat{ABC}) = \alpha$

Verilere göre $m(\widehat{B}) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Çözüm: ABC ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ACB}) = \beta$ diyelim.

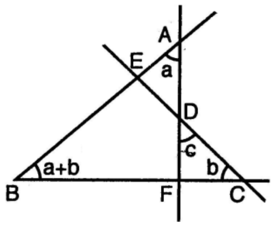


Tam açıdan $\beta + 90 + 120 = 360$ ise $\beta = 150$ dir.

İç açılar toplamından $2\alpha + 150 = 180$ ise $\alpha = 15^0$ dir.

Cevap: A

2.



$m(B\widehat{A}F) = a$

$m(E\widehat{C}B) = b$

$m(C\widehat{D}F) = c$

$m(A\widehat{B}C) = a + b$

$a + b = 68°$

Verilere göre $m(F\widehat{D}C) = c$ kaç derecedir?

A) 40 B) 42 C) 44 D) 46 E) 48

Çözüm: ABF üçgenine göre $m(D\widehat{F}C)$ bir dış açıdır.

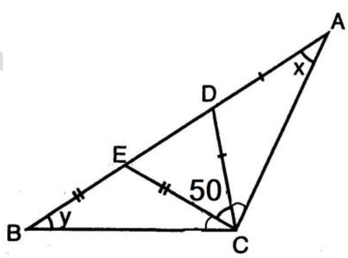
$$m(D\widehat{F}C) = a + b + a = 2a + b$$

olur. DFC üçgeninden iç açılar toplamından,

$$2a + b + b + c = 180$$
$$2(a + b) + c = 180$$
$$2 \cdot 68 + c = 180$$
$$c = 44$$

Cevap: C

3.



ABC bir üçgen

$|AD| = |DC|$

$|BE| = |EC|$

$m(B\widehat{A}C) = x$

$m(A\widehat{B}C) = y$

$m(E\widehat{C}D) = 50^0$

Yukarıdaki verilere göre, $m(A\widehat{C}B)$ kaç derecedir?

A) 110 B) 115 C) 120 D) 125 E) 130

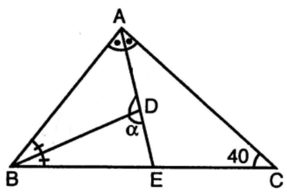
Çözüm:

$|EB| = |EC|$ olduğundan $m(E\widehat{B}C) = m(E\widehat{C}B) = y$ dir.

$|AD| = |DC|$ olduğundan $m(C\hat{A}D) = m(A\hat{C}D) = x$ dir.
ABC üçgeninin iç açılar toplamı;
$50 + x + x + y + y = 180$
$2(x + y) = 130$
$x + y = 65$
$m(A\hat{C}B) = 65 + 50 = 115^0$

Cevap: B

4.



ABC bir üçgen
[AE] ve [BD] açıortaylar
$m(A\widehat{C}B) = 40°$
$m(B\widehat{D}E) = \alpha$

Verilere göre α kaç derecedir?

A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

Çözüm: İki iç açının oluşturduğu açı 2.6. teoreme göre

$$m(A\hat{D}B) = 90 + \frac{m(\hat{A})}{2} = 90 + 20 = 110$$

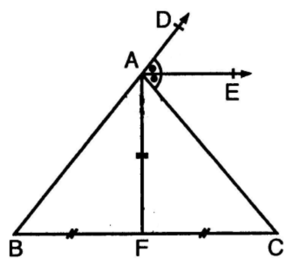
olur. Bütünler açılardan,

$110 + \alpha = 180$
$\alpha = 70^0$

bulunur.

Cevap: D

5.



ABC bir üçgen
[AE], dış açıortay
|AF| = |BF| = |FC|

Verilere göre EAD açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 65 B) 60 C) 55 D) 50 E) 45

Çözüm:

$|AF| = |BF|$ olduğundan $m(A\hat{B}F) = m(B\hat{A}F) = x$

$|AF| = |CF|$ olduğundan $m(A\hat{C}F) = m(C\hat{A}F) = y$

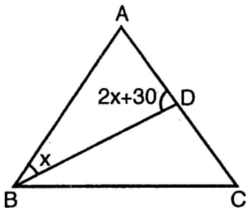
alınırsa, ABC üçgeninde iç açılar toplamından $x + y = 90$ sonucu elde edilir. Ayrıca $m(C\hat{A}E) + m(E\hat{A}D) = z$ alınırsa D doğrusunda bütünler açılardan,

$$90 + m(C\hat{A}E) + m(E\hat{A}D) = 180$$
$$90 + z + z = 180$$
$$z = 45^0$$

bulunur.

Cevap: E

6.



ABC eşkenar üçgen

$m(A\widehat{B}D) = x$

$m(A\widehat{D}B) = 2x + 30^o$

Verilere göre, x kaç derecedir?

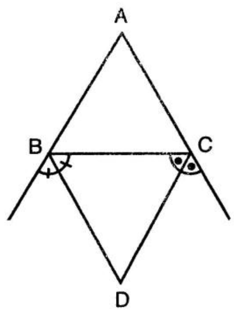
A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Çözüm: ABC eşkenar üçgen olduğundan $m(\hat{A}) = 60^0$ dir. ABD üçgenin iç açılarından,

$$x + 2x + 30 + 60 = 180$$
$$x = 30^0$$

Cevap: B

7.



ABC bir üçgen

[BD] ve [CD],

dış açıortaylar.

$m(B\widehat{D}C) = 2m(B\widehat{A}C)$

Verilere göre $m(\hat{A})$ kaç derecedir?

A) 28 B) 30 C) 32 D) 36 E) 40

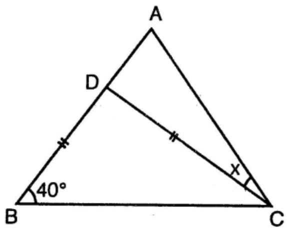
Çözüm: $m(\widehat{A}) = x$ diyelim. $m(B\widehat{D}C) = 2m(B\widehat{A}C)$ olduğundan $m(B\widehat{D}C) = 2x$ olur. 2.7. teoreme göre;

$$m(B\widehat{D}C) = 90 - \frac{m(B\widehat{A}C)}{2}$$
$$2x = 90 - \frac{x}{2}$$
$$x = 36^0$$

olur.

Cevap: D

8.



ABC bir üçgen
|AC| = |BC|
|BD| = |DC|
$m(A\widehat{B}C) = 40°$
$m(A\widehat{C}D) = x$

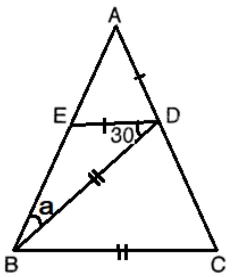
Verilere göre, x kaç derecedir?

A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

Çözüm:
$|AC| = |BC|$ olduğundan $m(A\widehat{B}C) = m(B\widehat{A}C) = 40$
$|BD| = |DC|$ olduğundan $m(A\widehat{B}C) = m(B\widehat{C}D) = 40$
dış açı teoremi gereği $m(A\widehat{D}C) = 40 + 40 = 80$ dir. ADC üçgeninden,
$$80 + 40 + x = 180$$
$$x = 60^0$$
olur.

Cevap: E

9.

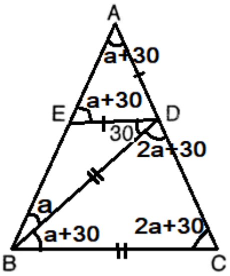


ABC bir ikizkenar üçgen
|AB| = |AC|
|AD| = |DE|
|BC| = |BD|
$m(B\widehat{D}E) = 30°$
$m(A\widehat{B}D) = a$

Verilere göre, a kaç derecedir?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 25

Çözüm:



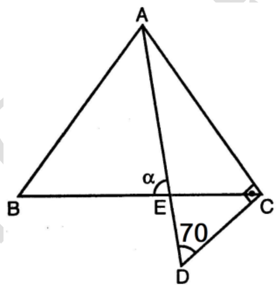
BED üçgenine göre dış açı kuralından $m(D\hat{E}A) = 30 + a$ dır.
$|AD| = |DE|$ olduğundan $m(E\hat{A}D) = m(D\hat{E}A) = 30 + a$ dır.
AED üçgenine göre dış açı kuralından $m(B\hat{D}C) = 2a + 30$ dır.
$|BD| = |BC|$ olduğundan $m(B\hat{D}C) = m(B\hat{C}D) = 2a + 30$ dır.
$|AB| = |AC|$ olduğundan $m(A\hat{B}C) = m(A\hat{C}B) = a + 30$ dır.
ABC üçgenin iç açı toplamı;

$$30 + a + a + a + 30 + 2a + 30 = 180$$
$$a = 18^0$$

olur.

Cevap: A

10.



ABC bir eşkenar üçgen

ACD bir dik üçgen

$m(A\hat{D}C) = 70°$

$m(A\hat{E}B) = \alpha$

Verilere göre α kaç derecedir?

A) 70 B) 75 C) 80 D) 85 E) 90

Çözüm: ACD dik üçgeninin iç açılar toplamından,

$$70 + 90 + m(D\hat{A}C) = 180$$
$$m(D\hat{A}C) = 20$$

ABC eşkenar üçgen olduğundan,

$$m(A\hat{B}D)60 - m(D\hat{A}C) = 60 - 20 = 40$$

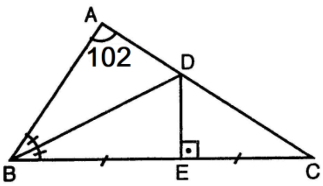
olur. ABE üçgeninin iç açılar toplamından,

$$60 + 40 + \alpha = 180$$
$$\alpha = 80^0$$

bulunur.

Cevap: C

11.

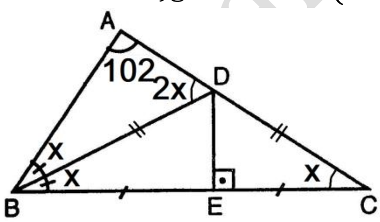


ABC bir üçgen
[BD], açıortay
$[DE] \perp [BC]$
$m(\widehat{BAC}) = 102°$
$|BE| = |EC|$

Verilere göre $m(\widehat{ADB})$ kaç derecedir?

A) 48 B) 50 C) 52 D) 54 E) 56

Çözüm: 2.1. Aksiyom gereği, D noktasından indirilen dikme tabanı ikiye böldüğünden dolayı BDC ikizkenar üçgen olur. $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCB})$



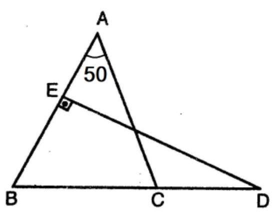
$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCB}) = x$ alınırsa dış açı teoremi gereği $m(\widehat{ADB}) = 2x$ olur.

$$x + 2x + 102 = 180$$
$$x = 26$$
$$m(\widehat{ADB}) = 2x = 2 \cdot 26 = 52^0$$

dir.

Cevap: C

12.



ABC bir ikizkenar üçgen
BED bir dik üçgen
$|AB| = |AC|$
$[DE] \perp [AB]$
$m(\widehat{BAC}) = 50°$

Verilere göre $m(\widehat{EDB})$ kaç derecedir?

A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

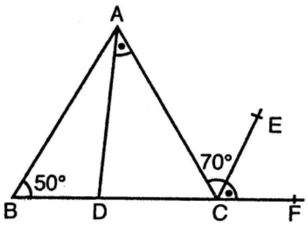
Çözüm: ABC ikizkenar üçgen olduğundan $m(A\hat{B}C) = \frac{180-50}{2} = 65^0$dir. EBD üçgeninin iç açılar toplamından

$$65 + 90 + m(E\hat{D}B) = 180$$
$$m(E\hat{D}B) = 25^0$$

bulunur.

Cevap: A

13.



ABC bir üçgen

B, C ve F doğrusal

$m(D\widehat{A}C) = m(E\widehat{C}F)$

$m(A\widehat{B}C) = 50°$

$m(A\widehat{C}E) = 70°$

Verilere göre $m(B\hat{A}D)$ kaç derecedir?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

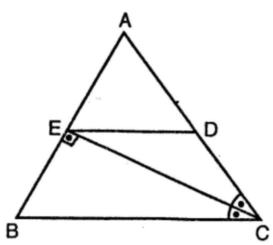
Çözüm: $m(A\hat{B}D) = y$ ve $m(D\hat{A}C) = m(EFB) = x$ alınırsa ABC üçgeninin dış açı teoremi gereği;

$$x + y + 50 = 70 + x$$
$$y = 20^0$$

olur.

Cevap: B

14.



ABC bir üçgen

[CE] açıortay

[CE] ⊥[AB]

[ED] // [BC]

$4m(D\widehat{E}C) = m(A\widehat{B}C)$

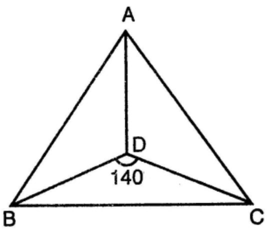
Verilere göre $m(D\hat{E}C)$ kaç derecedir?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm: $m(D\hat{E}C) = x$ alınırsa $m(A\hat{B}C) = 4x$ olur.
Yöndeş açılardan $m(A\hat{E}D) = 4x$
Bütünler açılardan $m(A\hat{E}C) = 4x + x = 90$ olup $x = 18^0$ dir.

Cevap: D

15.



ABC bir üçgen

$|AD| = |DC| = |BD|$

$m(B\hat{D}C) = 140^o$

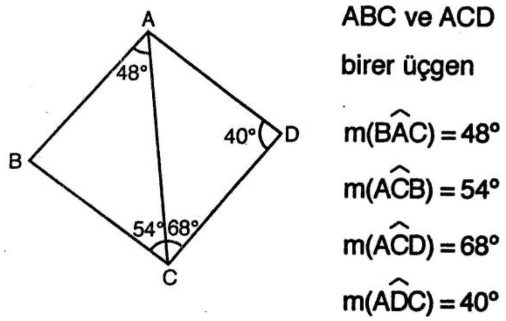
Verilere göre $m(B\hat{A}C)$ kaç derecedir?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm: $|AD| = |DC| = |BD|$ olduğundan ADB, BDC ve CDA birer ikizkenar üçgendir.
$m(A\hat{B}D) = m(B\hat{A}D) = x$ ve $m(A\hat{C}D) = m(C\hat{A}D) = y$
alınırsa, ADB ve ADC üçgenlerinin iç açılar toplamından
$m(A\hat{D}B) = 180 - 2x$ ve $m(A\hat{D}C) = 180 - 2y$
olur. Buna göre;
$180 - 2x + 180 - 2y + 140 = 360$
$x + y = 70$
$m(B\hat{A}D) + m(C\hat{A}D) = 70^0$
olur.

Üçgen Açı-Kenar İlişkileri

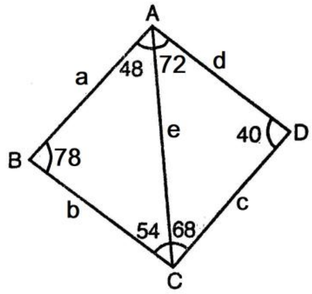
16.



Verilere göre en uzun kenar nedir?

A) a B) b C) c D) d E) e

Çözüm: Verilere göre aşağıdaki şekil oluşur.

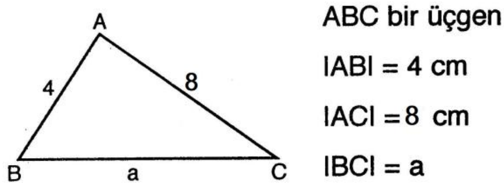


ABC üçgeninde $48 < 54 < 78$ açılarının karşısındaki kenar $b < a < e$ dir.
ADC üçgeninde $40 < 68 < 72$ açılarının karşısındaki kenar $e < d < c$ dir.

ABC üçgenine göre en büyük kenar e'dir. Ama ADC üçgenine göre e'den daha büyük c kenarı vardır.

Cevap: C

17.



$a \in \mathbb{Z}$, $m(\hat{A}) > m(\hat{B})$ şartını sağlayan kaç üçgen çizilebilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

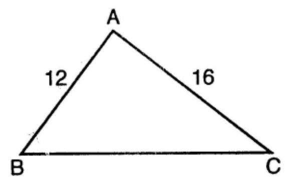
Çözüm: $|8 - 4| < a < 8 + 4$
$4 < a < 12$
olur. $m(\hat{A}) > m(\hat{B})$ şartı olduğundan $a > 8$ olmalıdır.

$$8 < a < 12$$

Bu şartı sağlayan $a \in \{9, 10, 11\}$ olup 3 tane üçgen çizilebilir.

Cevap: B

18.



ABC bir üçgen
$|AB| = 12$ cm
$|AC| = 16$ cm
$m(\widehat{BAC}) > 90°$

Verilere göre $|BC| = x$ değerinin en küçük tamsayı değeri nedir?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

Çözüm: $|16 - 12| < a < 16 + 12$

$$4 < x < 26$$

olur. Ayrıca,

$$x^2 > 16^2 + 12^2 = 400$$
$$x > 20$$

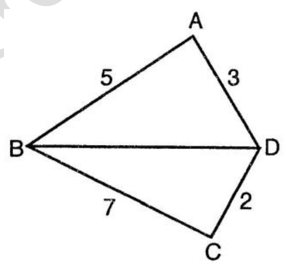
olacağından

$$20 < x < 26$$

olur. En küçük tamsayı $x = 21$ dir.

Cevap: E

19. ABD ve BCD birer üçgen



$|AB| = 5$ cm
$|AD| = 3$ cm
$|BC| = 7$ cm
$|CD| = 2$ cm

Verilere göre $|BD| = x$ değerinin en küçük tamsayı değeri nedir?

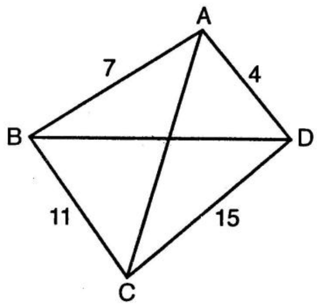
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm:
ABD üçgenine göre $|5 - 3| < x < 5 + 3$ yani $2 < x < 8$ dir.
BCD üçgenine göre $|7 - 2| < x < 7 + 2$ yani $5 < x < 9$ dir.

Buna göre $5 < x < 8$ dır. En küçük tamsayı değeri $x = 7$ dir.

Cevap: D

20.



ABCD bir dörtgen

IABI = 7 cm

IADI = 4 cm

IBCI = 11 cm

ICDI = 15 cm

Verilere göre $|AC| + |BD|$ değerini aşağıdakilerden hangisi olamaz.

A) 15 B) 17 C) 19 D) 22 E) 25

Çözüm:

ABC üçgenine göre $|11 - 7| < |AC| < 11 + 7$ yani $4 < x < 18$ dir.

ADC üçgenine göre $|15 - 4| < |AC| < 15 + 4$ yani $11 < x < 19$ dir.

Buna göre $11 < |AC| < 18$ dır.

ABD üçgenine göre $|7 - 4| < |BD| < 7 + 4$ yani $3 < x < 11$ dir.

BDC üçgenine göre $|15 - 11| < |BD| < 15 + 11$ yani $4 < x < 26$ dir.

Buna göre $4 < |AC| < 11$ dır.

$11 + 4 < |AC| + |BD| < 18 + 11$

$15 < |AC| + |BD| < 29$

Cevap: A

21. Bir ABC üçgeninin kenar uzunluklarının ikişer ikişer toplamı 9 cm, 12 cm ve 13 cm'dir. Buna göre en uzun kenar ile en kısa kenarın farkı nedir?

A) 40 B) 48 C) 52 D) 56 E) 60

Çözüm: ABC üçgeninin kenarları a, b ve c olsun.

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 9 \\ b + c &= 12 \\ c + a &= 13 \end{aligned}\right\} 2a + 2b + 2c = 9 + 12 + 13$$

$a + b + c = 17$

$a + 12 = 17, b + 13 = 17, c + 9 = 17$

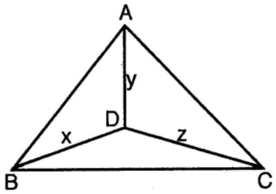
$a = 5, b = 4, c = 8$

$c^2 - b^2 = 8^2 - 4^2 = 48$

olur.

Cevap: B

22.



ABC bir üçgen

Ç(ABC) = 16 cm

|BD| = x

|AD| = y

|CD| = z

D, üçgen içinde bir nokta olmak üzere, $x + y + z$ toplamını sağlayan tamsayı sayısı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $\frac{16}{2} < x + y + z < 16$

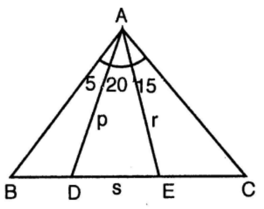
$8 < x + y + z < 16$

$x + y + z \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

7 tane sayı bu denklemi sağlar.

Cevap: D

23.



ABC bir ikizkenar üçgen

|AB| = |AC|

$m(\widehat{BAD}) = 5°$

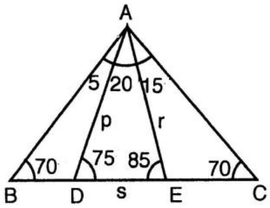
$m(\widehat{DAE}) = 20°$

$m(\widehat{EAC}) = 15°$

Verilere göre p, r ve s hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) p en büyüktür B) s en büyüktür C) r en büyüktür
D) $p < r$ E) $p < s$

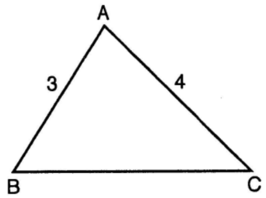
Çözüm: ABC ikizkenar üçgen, $|AC| = |BD|$ ise $m(A\hat{B}D) = m(A\hat{C}E) = 70^0$ dir. Ayrıca dış açı teoreminden $m(A\hat{D}E) = 75^0, m(A\hat{E}D) = 85^0$ dir.



$s < r < p$

Cevap: A

24.



ABC bir üçgen

|BC|, tamsayı

$m(B\widehat{A}C) < 90°$

|AB| = 3 cm

|AC| = 4 cm

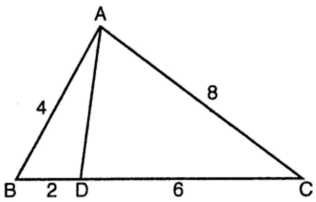
Yukarıdaki verilere göre kaç tane ikizkenar üçgen çizilebilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $m(B\widehat{A}C) < 90$ ise $|BC|^2 < 3^2 + 4^2 = 25$ olup$|BD| < 5$ dir.
Yine $4 - 3 < |BC| < 4 + 3$ yani $1 < |BC| < 7$ dir.
Bu iki eşitsizlikten $1 < |BC| < 5$ olur. $|BC|$ uzunluğu 3 ve 4 değerleri alması halinde bu iki üçgen ikizkenar üçgen olur.

Cevap: C

25.



ABC bir üçgen

|AB| = 4 cm

|BD| = 2 cm

|AC| = 8 cm

|DC| = 6 cm

Verilere göre, $|AD|$ kaç cm dir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm: Stewart teoreminden,

$$|AD|^2 = \frac{|AC|^2 \cdot |BD| + |AB|^2 \cdot |DC|}{|BD| + |DC|} - |BD| \cdot |DC|$$

$$|AD|^2 = \frac{8^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 6}{2+6} - 2 \cdot 6 = 16$$
$$|AD| = 4 \text{ cm}$$

olur.

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.