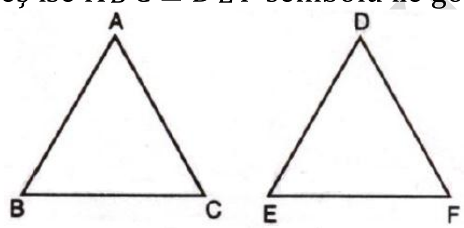
3. BÖLÜM
ÜÇGENDE EŞLİK ve BENZERLİK

ÜÇGENDE EŞLİK

3.1. Tanım: İki üçgenin karşılıklı açıları eşit ya da eşit olan açıların arasındaki kenar uzunlukları aynı ise bu üçgenlere eş üçgenler denir. Yani eş iki üçgende hem açılar hem de karşılıklı kenarlar birbirine eşittir. $A\overset{\Delta}{B}C$ ve $D\overset{\Delta}{E}F$ üçgenleri birbirlerine eş ise $A\overset{\Delta}{B}C \cong D\overset{\Delta}{E}F$ sembolü ile gösterilir.



$A\overset{\Delta}{B}C$ ve $D\overset{\Delta}{E}F$ gibi verilen iki üçgenin açıları ve kenarları arasında eşlemesi vardır. Bu eşleminin anlamı;

1. $\widehat{A}$ açısı ile $\widehat{D}$ açısı, $\widehat{B}$ açısı ile $\widehat{E}$ açısı, $\widehat{C}$ açısı ile $\widehat{F}$ açısı arasında,

2. [AB] kenarı ile [DE] kenarı, [BC] kenarı ile [EF] kenarı, [AC] kenarı ile [DF] kenarı arasında birebir karşılaştırma yapmaktır.

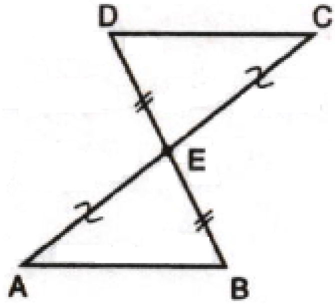
3.1. Aksiyom (K.K.K.): İki üçgen eşse, bu iki üçgenin üç kenarı eşit olan üçgenler eştir. Buna kenar kenar kenar (K.K.K.) eşliği denir.

3.2. Aksiyom (A.A.A.): İki üçgen eşse, bu iki üçgenin bütün açıları eştir. Buna açı açı açı (A.A.A.) eşliği denir.

3.3. Aksiyom (K.A.K.): İki üçgen eşse, bu iki üçgenin ikişer kenarları ve bu kenarlar arasındaki açıları eştir. Buna kenar açı kenar (K.A.K.) eşliği denir.

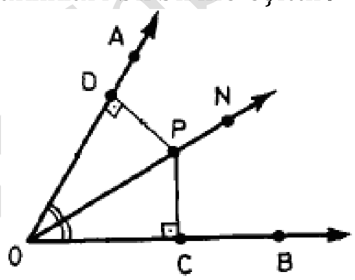
3.4. Aksiyom (A.K.A.): İki üçgen eşse, bu iki üçgenin iki açısı ve bu iki açı arasındaki kenar eştir. Buna açı kenar açı (A.K.A.) eşliği denir.

Örnek: Verilen şekilde E noktası, [AC] ve [BD] doğru parçalarının orta noktaları olduğuna göre $|AB| = |DC|$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm: $|AE| = |EC|$ ve $|BE| = |DE|$ olduğu şekilden verilmiştir. Ayrıca $m(A\hat{E}B) = m(D\hat{E}C)$ dir. Buna göre K.K.K. eşlik aksiyomuna göre, $A\overset{\Delta}{B}C \cong C\overset{\Delta}{D}E$ olacağından $|AB| = |DC|$ elde edilir.

3.1. Teorem: Bir açının açıortayı üzerindeki herhangi bir noktanın, açının kenarlarına olan uzaklıkları birbirine eşittir.



[ON, AOB açısının açıortayı ve $p \in [ON$, $[PD] \perp [OA$, $[PC] \perp [OB$ ise $|PD| = |PN|$ dir.

İspat: $m(D\hat{O}P) = m(P\hat{O}C)$ ve $m(O\hat{D}P) = m(O\hat{C}P) = 90^0$ ise $m(O\hat{P}D) = m(O\hat{P}C)$ olur. Buna göre,

$m(D\hat{O}P) = m(P\hat{O}C), m(O\hat{P}D) = m(O\hat{P}C)$ ve $|OP| = |PO|$

olacağından A.K.A eşlik aksiyomuna göre, $D\overset{\Delta}{O}P \cong C\overset{\Delta}{O}P$ dır.

Eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olduğundan,

$|PD| = |PN|$ ve $|OD| = |ON|$

bulunur.

3.2. Teorem: Eş iki üçgenin;

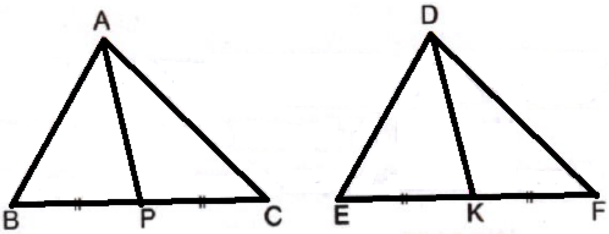
i) Karşılıklı kenarortaylarının uzunlukları,

ii) Karşılıklı açıortaylarının uzunlukları,

iii) Karşılıklı yüksekliklerinin uzunlukları,

birbirine eşittir.

İspat: i) [AP] ve [DK], üçgenlerin [BC] ve [EF] kenarlarına ait kenarortaylar olsun.



$A\overset{\Delta}{B}C \cong D\overset{\Delta}{E}F$ üçgenleri eş olduğundan,

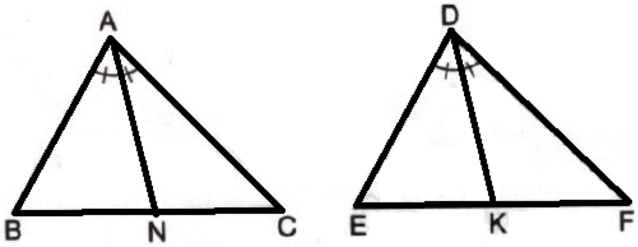
$|AB| = |DE|$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$

ve [AP] ve [DK] kenarortay olduklarından,

$|BP| = |EK|$

bulunur. Buna göre K.A.K. eşlik aksiyomu gereği $A\overset{\Delta}{B}D \cong D\overset{\Delta}{E}K$ olacağından $|AP| = |DK|$ olur.

ii) [AN] ve [DK], üçgenlerin A ve D açılarına ait açıortaylar olsun.

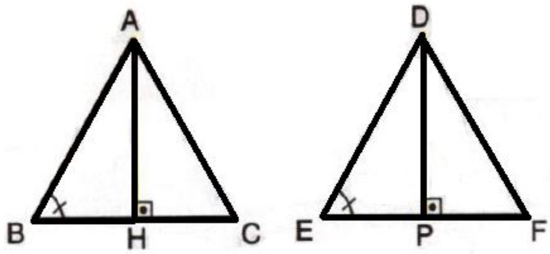


$A\overset{\Delta}{B}C \cong D\overset{\Delta}{E}F$ üçgenleri eş olduğundan,

$|AB| = |DE|$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$, $m(B\widehat{A}N) = m(E\widehat{D}K)$

bulunur. Buna göre A.K.A. eşlik aksiyomu gereği $A\overset{\Delta}{B}D \cong D\overset{\Delta}{E}K$ olacağından $|AN| = |DK|$ olur.

iii) [AH] ve [DP], üçgenlerin [BC] ve [EF] kenarlarına ait yükseklikler olsun.

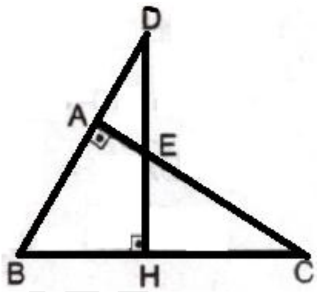


$A\overset{\Delta}{B}C \cong D\overset{\Delta}{E}F$ üçgenleri eş olduğundan,

$$|AB| = |DE|\ ,\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})\ ,\ m(B\widehat{H}A) = m(E\widehat{P}D) = 90^0$$

dir. Buna göre A.K.A. eşlik aksiyomu gereği $A\overset{\Delta}{B}D \cong D\overset{\Delta}{E}K$ olacağından $|AH| = |DP|$ olur.

Örnek: $|AB| = |BH|$, $|DH| = 5$ cm ve $|AE| = 2$ cm olduğuna göre $|EC|$ nedir?



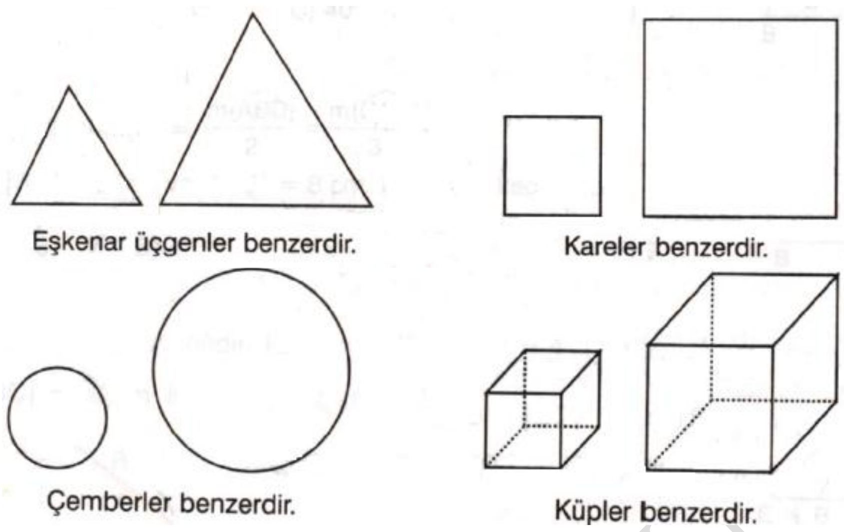
Çözüm: ABC, HBD üçgeninde $m(\widehat{B})$ ortak açı, $m(B\widehat{A}C) = m(B\widehat{H}D) = 90^0$, $|AB| = |BH|$ olduğundan A.K.A. aksiyomu sebebiyle $A\overset{\Delta}{B}D \cong H\overset{\Delta}{B}D$ dir. O halde,

$$|AC| = |DH|$$
$$|AE| + |EC| = |DH|$$
$$2 + |EC| = 5$$
$$|EC| = 3 \text{ cm}$$

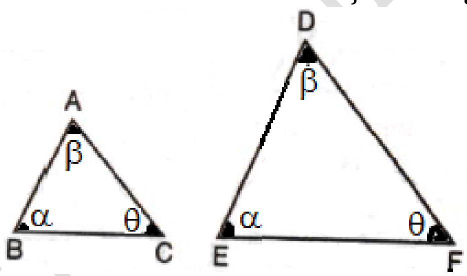
olarak bulunur.

ÜÇGENDE BENZERLİK

Ebatları aynı fakat büyüklükleri orantılı olan şekillere benzer şekiller denir. Bu izaha göre, uzayda geometrik cisimler, düzlemde de çokgenler arasında benzerlikler kurulabilir. Düzlemde iki eşkenar üçgen, iki kare, iki çember, uzayda da iki tip her zaman birbirine benzer şekillerdir.



3.2. Tanım: İki üçgenin karşılıklı açıları eşit ya da eşit olan açıların arasındaki kenar uzunlukları orantılı ise bu üçgenlere benzer üçgenler denir. ABC üçgeni DEF üçgenine benzer ise $A\overset{\Delta}{B}C \sim D\overset{\Delta}{E}F$ biçiminde gösterilir.



$A\overset{\Delta}{B}C \sim D\overset{\Delta}{E}F$ ise

i) $m(\hat{A}) = m(\hat{D}), m(\hat{B}) = m(\hat{E}), m(\hat{C}) = m(\hat{F})$

ii) $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|CA|}{|FD|} = k$

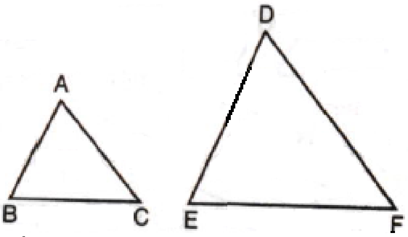
şartlarından biri gerçekleşir.

Burada k orantı sabitine benzerlik oranı denir. Benzerlik oranı, iki benzer üçgenin açıları aynı olan doğruların birbirlerine oranı eşittir.

Benzer iki üçgenin benzerlik oranı 1 ise bu iki üçgen eş üçgenlerdir.

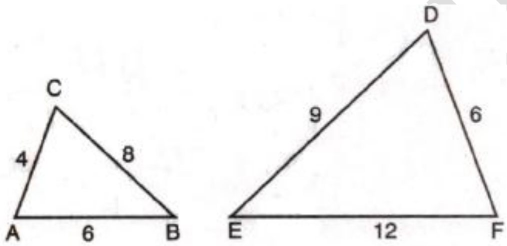
Benzer iki üçgen arasında şu üç aksiyom söz konusudur:

3.5. Aksiyom (K.K.K.): İki üçgen benzerse bu iki üçgenin kenarları birbirleriyle orantılıdır. Buna kenar kenar kenar (K.K.K.) benzerliği denir.



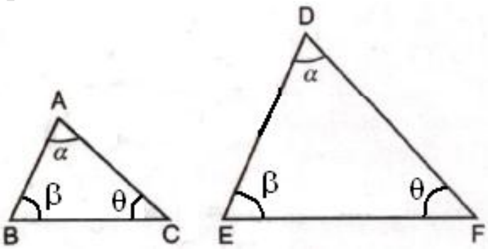
$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|} = k \text{ ise } A\overset{\Delta}{B}C \sim D\overset{\Delta}{E}F \text{ dir.}$$

Örnek: $A\overset{\Delta}{B}C \sim D\overset{\Delta}{E}F$ üçgenleri şekildeki gibi verilsin. K.K.K. benzerliğine göre,



$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|} = k$$
$$\frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} \text{ ve } k = \frac{2}{3}$$

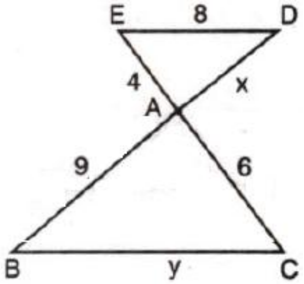
3.6. Aksiyom (A.A.A.): İki üçgen benzerse bu iki üçgenin açıları eşittir. Buna açı açı açı (A.A.A.) benzerliği denir.



$$m(\hat{A}) = m(\hat{D}), m(\hat{B}) = m(\hat{E}), m(\hat{C}) = m(\hat{F}) \text{ ise } A\overset{\Delta}{B}C \sim D\overset{\Delta}{E}F$$

Yalnız iki üçgende 2 açının birbirlerine eşit olması 3. açının da eşit olmasını gerektirdiğinden A.A.A. aksiyomunda sadece 2 açının eşit olması yeterlidir. 3. açının eşitliğine bakılmayabilir.

Örnek: Şekildeki üçgenlerde $[ED]\ //\ [BC]$, $|EA| = 4$ cm, $|Ac| = 6$ cm, $|AB| = 9$ cm ve $|ED| = 8$ cm'dir.



Buna göre $|AD| + |BC|$ uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: ADE ve ABC üçgenlerinde $m(E\widehat{A}D)$ ortak açıdır. İç ters açılardan,

$$m(E\widehat{D}B) = m(D\widehat{B}C) \text{ ve } m(D\widehat{E}C) = m(E\widehat{C}B)$$

olduğundan $A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{D}E$ üçgenleri A.A.A. benzerliği vardır. Buna göre,

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|CA|}{|EA|}$$

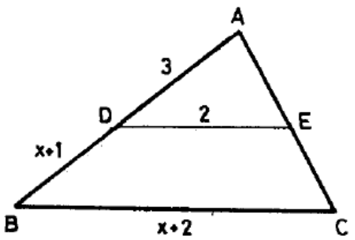
$$\frac{9}{x} = \frac{y}{8} = \frac{6}{4}$$

$$x = 6 \text{ ve } y = 12$$

$$x + y = 6 + 12 = 18 \text{ cm}$$

olur.

Örnek: Şekildeki üçgenlerde $[DE]\ //\ [BC]$, $|AD| = 3$ cm, $|DE| = 2$ cm, $|DB| = x + 1$ cm ve $|BC| = x + 2$ cm dir.



Buna göre x'in değeri nedir?

Çözüm: $[ED]\ //\ [BC]$ olduğundan

$$m(A\widehat{B}C) = m(A\widehat{D}E) \text{ ve } m(A\widehat{C}B) = m(A\widehat{E}D)$$

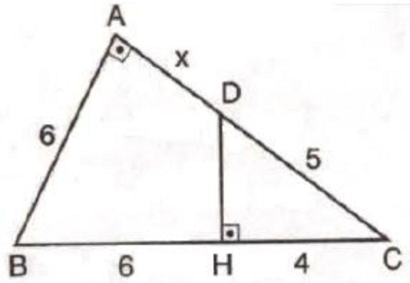
olduğundan $A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{D}E$ üçgenleri A.A.A. benzerliği vardır. Buna göre,

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

$$\frac{x+4}{3} = \frac{x+2}{2}$$
$$x = 2 \text{ cm}$$

olur.

Örnek: Şekilde $m(\widehat{A}) = m(D\widehat{H}C) = 90^0$, $|DC| = 5$ cm, $|HC| = 4$ cm ve $|AB| = |BH| = 6$ cm olduğuna göre, $|AD|$ yi bulunuz.

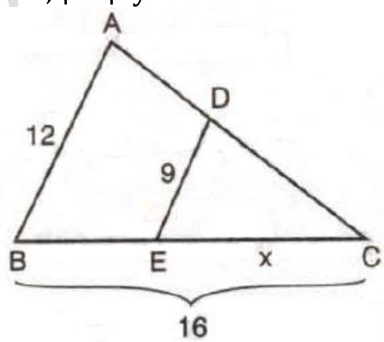


Çözüm: $m(\widehat{A}) = m(D\widehat{H}C) = 90^0$ ve ABC ve HDC üçgenlerinde $m(\widehat{C})$ ortak açı olduğundan A.A.A. benzerlik aksiyomu gereği,

$$\frac{|HC|}{|AC|} = \frac{|CD|}{|BC|}$$
$$\frac{4}{x+5} = \frac{5}{10}$$
$$x = 3 \text{ cm}$$

olur.

Örnek: Şekilde $[AB] \,//\, [DE]$, $|AB| = 12$ cm, $|DE| = 9$ cm ve $|BC| = 16$ cm olduğuna göre, $|EC|$ yi bulunuz.



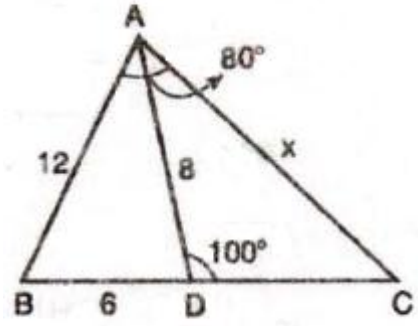
Çözüm: $[AB] \,//\, [DE]$ ise ABC ve DEC üçgenlerinde $m(\widehat{C})$ ortak açı olduğundan A.A.A. benzerlik aksiyomu gereği,

$$\frac{|CE|}{|CB|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$
$$\frac{x}{16} = \frac{9}{12}$$

$$x = 12 \text{ cm}$$

olur.

Örnek: Şekilde $m(B\hat{A}C) = 80^0$, $m(A\hat{D}C) = 100^0$, $|AD| = 8$ cm, $|AB| = 12$ cm ve $|BD| = 6$ cm olduğuna göre $|AC|$ yi bulunuz.



Çözüm: $m(B\hat{A}C) = m(A\hat{D}B) = 80$ ve $B\overset{\Delta}{A}C \sim B\overset{\Delta}{D}A$ üçgenlerinde $m(\hat{B})$ ortak açı olduğundan A.A.A. benzerliği

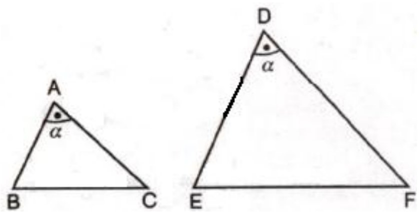
$$\frac{|BA|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|DA|}$$

$$\frac{12}{6} = \frac{x}{8}$$

$$x = 16 \text{ cm}$$

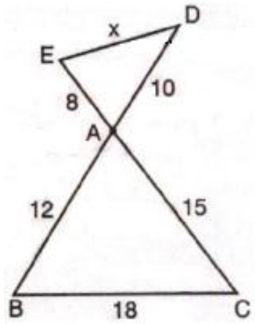
olur.

3.7. Aksiyom (K.A.K.): İki üçgen benzerse bu iki üçgenin iki kenarları birbirleriyle orantılı ve kenarları arasındaki açı eşittir. Buna kenar açı kenar (K.A.K.) benzerliği denir.



$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CA|}{|FD|} = k \text{ ve } m(\hat{A}) = m(\hat{D}) \text{ ise } A\overset{\Delta}{B}C \sim D\overset{\Delta}{E}F \text{ dir.}$$

Örnek: Şekildeki üçgenlerde $[BD] \cap [EC] = \{A\}$, $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 18$ cm, $|AC| = 15$ cm, $|AE| = 8$ cm ve $|AD| = 10$ cm dir.



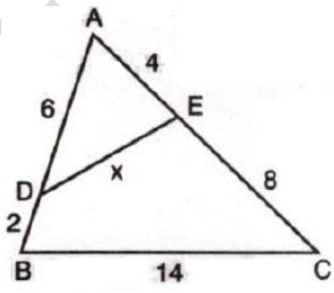
Buna göre $|ED|$ uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Ters açılardan $m(E\widehat{A}D) = m(B\widehat{A}C)$ ve $\dfrac{|AE|}{|AB|} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{|AD|}{|AC|} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$ olduğundan $A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{E}D$ üçgenleri K.A.K. benzerliği vardır. Buna göre,

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|ED|} = \frac{|CA|}{|DA|}$$
$$\frac{12}{8} = \frac{18}{x} = \frac{15}{10}$$
$$x = 12 \text{ cm}$$

olur.

Örnek: Şekildeki üçgenlerde $|AD| = 6$ cm, $|AE| = 4$ cm, $|EC| = 8$ cm, $|DB| = 2$ cm ve $|BC| = 14$ cm'dir.



Buna göre $|DE|$ uzunluğunu bulunuz.

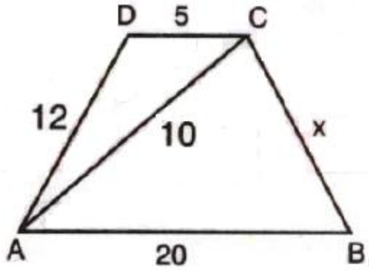
Çözüm: AED ve ABC üçgenlerinde $m(\widehat{A})$ ortak açıdır. $\dfrac{|AE|}{|AB|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{|AD|}{|AC|} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan $A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{E}D$ üçgenleri K.A.K. benzerliği vardır. Buna göre,

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|ED|} = \frac{|CA|}{|DA|}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{14}{x} = \frac{12}{6}$$
$$x = 7 \text{ cm}$$

olur.

Örnek: Şekildeki üçgenlerde $[DC] \parallel [AB]$, $|AD| = 12$ cm, $|DC| = 5$ cm, $|AC| = 10$ cm ve $|AB| = 20$ cm'dir.



Buna göre $|BC|$ uzunluğunu bulunuz.

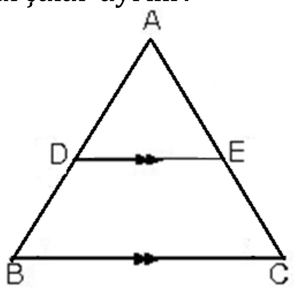
Çözüm: CAB ve DCA üçgenlerinde iç ters açılardan $m(B\widehat{A}C) = m(D\widehat{C}A)$ dir. $\frac{|DC|}{|AC|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \frac{|CA|}{|AB|} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ olduğundan $C\overset{\triangle}{A}B \sim D\overset{\triangle}{C}A$ üçgenleri K.A.K. benzerliği vardır. Buna göre,

$$\frac{|CA|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|CA|} = \frac{|BC|}{|AD|}$$
$$\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{x}{12}$$
$$x = 24 \text{ cm}$$

olur.

BENZERLİK TEOREMLERİ

3.3. Teorem (Temel Benzerlik Teoremi): Bir üçgenin bir kenarına paralel olan bir doğru, üçgenin diğer kenarlarını farklı noktalarda keserse bu kenarlar üzerinde orantılı parçalar ayrılır.



$[DE] \,//\, [BC]$ ise $\dfrac{|AD|}{|BD|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$

İspat: $\overset{\Delta}{ADE}$ ve $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $m(\hat{A})$ ortak, $m(\hat{B}) = m(\hat{D})$ ve $m(\hat{C}) = m(\hat{E})$ olduğundan A.A.A. aksiyomu gereği $\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ dir. Buna göre,

$\dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{|DE|}{|BC|} = \dfrac{|AE|}{|AC|}$, $|AB| = |AD| + |DB|$ ve $|AC| = |AE| + |EC|$

olduğundan,

$$\frac{|AD|}{|AD|+|DB|} = \frac{|AE|}{|AE|+|EC|}$$

$$|AD|(|AE| + |EC|) = |AE|(|AD| + |DB|)$$

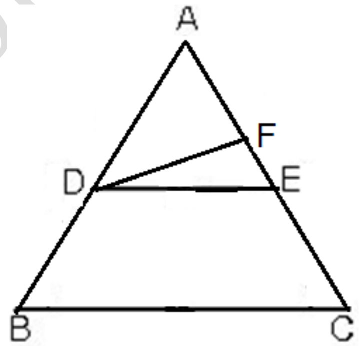
$$|AD||AE| + |AD||EC| = |AE||AD| + |AE||DB|$$

$$|AD||EC| = |AE||DB|$$

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

elde edilir.

3.4. Teorem (Temel Benzerlik Karşıt Teoremi): Bir doğru bir üçgenin iki kenarını faklı noktalarda keser ve üzerinde orantılı parçalar ayırırsa, üçüncü kenara paraleldir.



$\dfrac{|AD|}{|BD|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$ ise $[DE] \,//\, [BC]$

İspat: Kabul edelim ki $\overset{\Delta}{ADE}$ ve $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde [DF] doğrusu [BC] doğrusuna paralel olsun. 3.3. Teoremden (Temel benzerlik teoreminden),

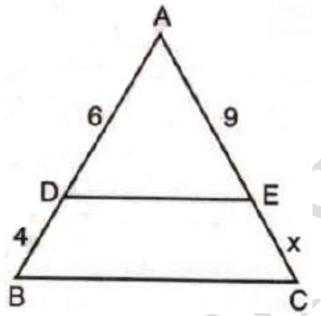
$$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AF|}{|FC|} \text{ olacağından } |AF|=\frac{|AD|}{|BD|}\cdot|FC| \qquad (1)$$

ve yine hipotezden

$$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AE|}{|EC|} \text{ olduğundan, } |AE|=\frac{|AD|}{|BD|}\cdot|FC| \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) den $|AF|=|AE|$ olur ki F noktası ile E noktası çakışık olduğunu gösterir. Öyleyse $[DE] \parallel [BC]$ dir.

Örnek: $[DE] \parallel [BC]$, $|AB|=6$ cm, $|AE|=9$ cm ve $|DB|=4$ cm olduğuna göre, $|EC|$ yi bulunuz.



Çözüm: Temel benzerlik teoreminden,

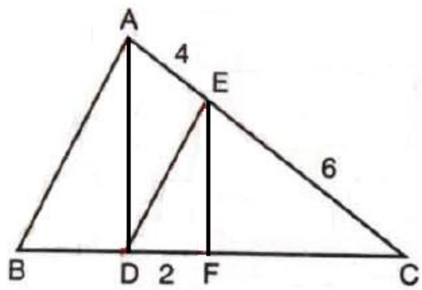
$$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AE|}{|EC|}$$

$$\frac{6}{4}=\frac{9}{x}$$

$$x=6 \text{ cm}$$

bulunur.

Örnek: $[AB] \parallel [DE]$, $[AD] \parallel [EF]$, $|AE|=4$ cm, $|DF|=2$ cm olduğuna göre $|BD|$ ve $|FC|$ yi bulunuz.



Çözüm: Temel benzerlik teoreminden,

$$\frac{|CE|}{|AE|}=\frac{|FC|}{|FD|}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{|FC|}{2}$$
$$|FC| = 3 \text{ cm}$$

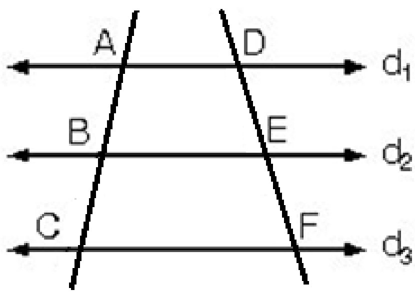
ve

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|CD|}{|BD|}$$
$$\frac{6}{4} = \frac{5}{|BD|}$$
$$|BD| = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

bulunur.

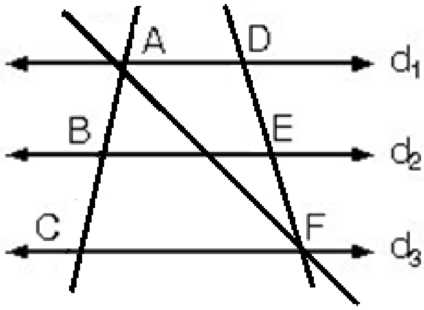
Miletli Thales
(M.Ö. 624, Söke, Aydın – M.Ö. 546, Söke, Aydın)

3.5. Teorem (1. Thales Teoremi): Birbirilerine paralel olan doğruları kesen iki doğrunun paralel iki doğru üzerinde ayrıldıkları parçanın uzunlukları orantılıdır.



$d_1 // d_2 // d_3$ olmak üzere, $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|DE|}{|EF|}$ dir.

İspat: Verilen şekilde AF doğrusunu çizelim. $[BD] \cap [AF] = \{K\}$ olsun.



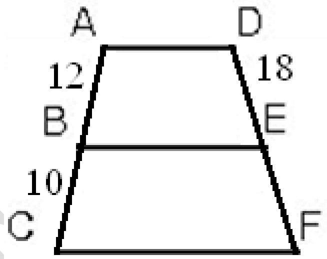
Temel benzerlik teoreminden,

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|AK|}{|KF|} \text{ ve } \frac{|DE|}{|EF|}=\frac{|AK|}{|KF|} \text{ ise } \frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|DE|}{|EF|}$$

elde edilir. //

Benzer şekilde $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|DE|}{|DF|}$ orantısının varlığı da gösterilir.

Örnek: Şekilde [AD] // [BE] // [CF], $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|DE| = 18$ cm olduğuna göre $|EF|$ yi bulunuz.



Çözüm: 1. Thales Teoremi gereği,

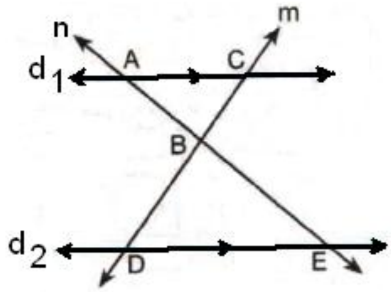
$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|DE|}{|EF|}$$

$$\frac{12}{10}=\frac{18}{|EF|}$$

$$|EF| = 15 \text{ cm}$$

olur.

3.6. Teorem (2. Thales Teoremi): Kesişen iki doğru, paralel iki doğru ile kesildiğinde, oluşan iki üçgenin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır.



$d_1//d_2$ ve $n \cap m = \{B\}$ olmak üzere, $\dfrac{|AB|}{|BE|} = \dfrac{|BC|}{|BD|} = \dfrac{|AC|}{|DE|}$ dir.

İspat: İç ters açılardan

$$m(B\hat{A}C) = m(B\hat{E}D) \text{ ve } m(B\hat{C}A) = m(B\hat{D}E)$$

ve ters açılardan

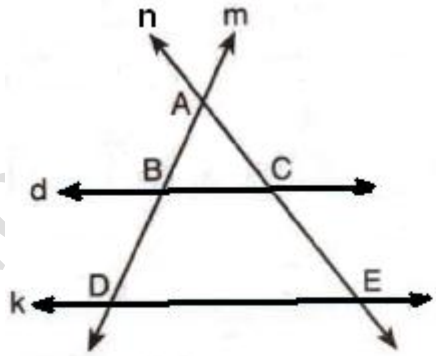
$$m(A\hat{B}C) = m(D\hat{B}E)$$

yazılabilir. A.A.A. benzerlik aksiyomundan $A\overset{\Delta}{B}C \sim E\overset{\Delta}{B}D$

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|DE|}$$

olur. //

2. Thales teoreminden aşağıdaki şekilde de ispatlanır.

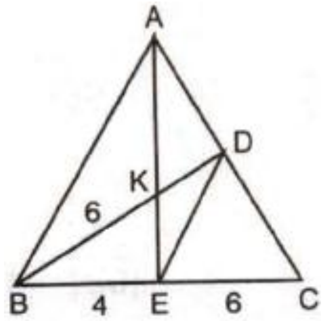


Kesişen ve paralel doğrular, şekildeki gibi olması durumunda,

$A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{D}E$ ve $\dfrac{|AB|}{|AD|} = \dfrac{|AC|}{|AE|} = \dfrac{|BC|}{|DE|}$

olur.

Örnek: Şekilde $[AB]//[DE]$, $|BE| = 4$ cm, $|EC| = 6$ cm ve $|BK| = 6$ cm olduğuna göre $|KD|$ yi bulunuz.



Çözüm: [AB]//[DE] ise 2. Thales teoreminden;

$$\frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

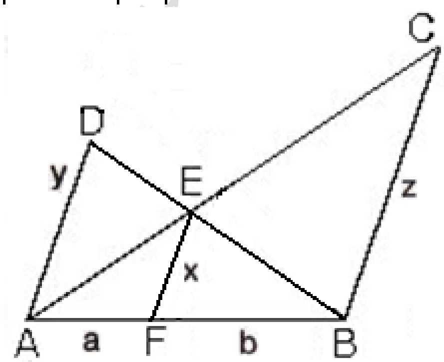
ve

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|KD|}{|KB|}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{|KD|}{6}$$

$$|KD| = \frac{18}{5} \text{ cm}$$

3.7. Teorem (Kelebek Özelliği): Şekildeki [AD]//[EF]//[BC], $|EF| = x$, $|AD| = y$, $|BC| = z$, $|AF| = a$ ve $|FB| = b$ ise



i) $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

ii) $\frac{a}{b} = \frac{y}{z}$

dir.

İspat: [EF]//[BC] ise 2. Thales teoreminden $A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{F}E$ olduğundan,

$$\frac{a}{a+b}=\frac{x}{z} \qquad (1)$$

yine [AD]//[EF] ise 2. Thales teoreminden $D\overset{\Delta}{E}F \sim B\overset{\Delta}{D}A$ olduğundan,

$$\frac{b}{a+b}=\frac{x}{y} \qquad (2)$$

olur.

i) (1) ve (2) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{a+b}{a+b}=\frac{x}{y}+\frac{x}{z}$$

$$1=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

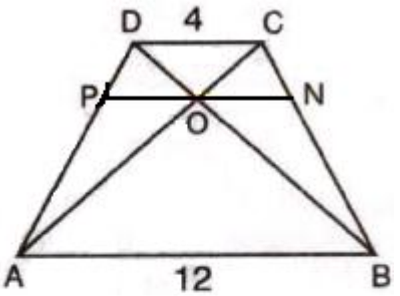
ii) (1) ve (2) eşitliklerini taraf tarafa bölersek;

$$\frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}}=\frac{\frac{x}{z}}{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{y}{z}$$

bulunur.

Örnek: Şekilde [AB]//[DC]//[PN], |DC| = 4 cm, |AB| = 12 cm veriliyor.



|PO| = x cm in değerini bulunuz.

Çözüm: 3.7. Teoreme göre,

$$\frac{1}{|PO|}=\frac{1}{|DC|}+\frac{1}{|AB|}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}$$

$$x = 3 \text{ cm}$$

olur.

3.8. Teorem: Benzer iki üçgenin;

i) Karşılıklı yüksekliklerinin uzunlukları oranı,

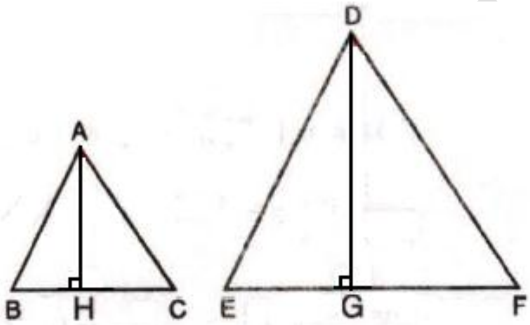
ii) Karşılıklı kenarortaylarının uzunlukları oranı,

iii) Karşılıklı açıortaylarının uzunlukları oranı,

birbirine eşittir.

İspat: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$ ve $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|CA|}{|FD|} = k$

i) [AH] ve [DG] yüksekliklerini çizelim.



Bu üçgenlerde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ve $m(B\widehat{H}A) = m(E\widehat{G}D) = 90^0$ olduğundan A.A.A. benzerlik aksiyomu gereği $\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{DEG}$ dir. O halde,

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AH|}{|DG|} = k$$

olur.

Benzer yolla ii ve iii şıkları da ispatlanır. //

3.1. Sonuç: Benzer iki üçgenin yüksekliklerin oranı benzerlik oranına eşittir.

$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c, yükseklikleri sırasıyla h_a, h_b, h_c ile $\overset{\triangle}{DFE}$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla d, e ve f, yükseklikleri sırasıyla h_d, h_e, h_f ise,

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k \text{ ve } \frac{h_a}{h_d} = \frac{h_b}{h_e} = \frac{h_c}{h_f} = k$$

dir.

3.2. Sonuç: Benzer iki üçgenin açıortayların uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir.

$A\overset{\Delta}{B}C$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c, açıortay uzunlukları sırasıyla n_A, n_B, n_C ile $D\overset{\Delta}{F}E$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla d, e ve f, açıortay uzunlukları sırasıyla n_D, n_E, n_F ise,

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k \text{ ve } \frac{n_A}{n_D} = \frac{n_B}{n_E} = \frac{n_C}{n_F} = k$$

dir.

3.3. Sonuç: Benzer iki üçgenin kenarortayların uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir.

$A\overset{\Delta}{B}C$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c, kenarortay uzunlukları sırasıyla V_a, V_b, V_c ile $D\overset{\Delta}{F}E$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla d, e ve f, açıortay uzunlukları sırasıyla V_d, V_e, V_f ise,

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k \text{ ve } \frac{V_a}{V_d} = \frac{V_b}{V_e} = \frac{V_c}{V_f} = k$$

dir.

3.4. Sonuç: Benzer iki üçgenin çevrelerinin oranı benzerlik oranına eşittir.

$A\overset{\Delta}{B}C$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c, ise,

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k \text{ ve } \frac{a+b+c}{d+e+f} = \frac{Ç(ABC)}{Ç(DEF)} = k$$

dir.

Örnek: $A\overset{\Delta}{B}C \sim D\overset{\Delta}{E}F$ veriliyor. ABC üçgeninin kenarları $a = 7$ cm, $b = 8$ cm, $c = 9$ cm ise ve benzerlik oranı $k = \frac{2}{3}$ ise DEF üçgenin çevresinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{Ç(ABC)}{Ç(DEF)} = k$

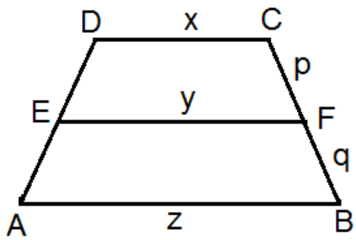
$$\frac{24}{Ç(DEF)} = \frac{2}{3}$$

$$Ç(DEF) = 36 \text{ cm}$$

3.9. Teorem: $[AB]//[CD]//[EF]$ olmak üzere;

$$|AB| = z, |EF| = y, |CD| = x, |CF| = p, |FB| = q$$

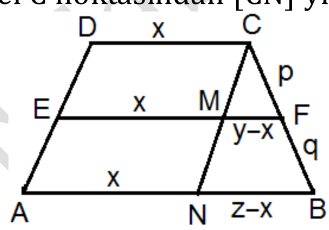
ise



$$\frac{p}{q} = \frac{y-x}{z-y}$$

dir.

İspat: $[AD]$ ye paralel C noktasından $[CN]$ yi çizelim.



Buna göre $|FM| = y - x$, $|BN| = z - x$ olur. $[CD]//[EF]$ olduğundan $\overset{\Delta}{CMF} \sim \overset{\Delta}{CNB}$ olur. A.A.A. aksiyomundan,

$$\frac{p}{p+q} = \frac{y-x}{z-x}$$

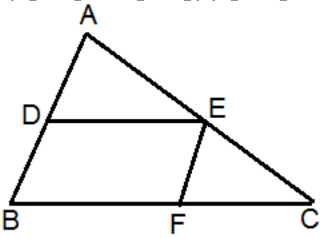
$$pz - px = py - px + qy - qx$$

$$pz - py = qy - qx$$

$$\frac{p}{q} = \frac{y-x}{z-y}$$

bulunur.

3.10. Teorem: [AB]//[EF] ve [BC]//[DE] olmak üzere;



$$\frac{|DE|}{|BC|} + \frac{|EF|}{|AB|} = 1$$

dir.

İspat: $|AE| = x, |EC| = y$ olsun. [AB]//[EF] olduğundan $A\overset{\Delta}{D}E \sim A\overset{\Delta}{B}C$ olur.

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{x}{x+y} \qquad (1)$$

[BD]//[EF] olduğundan $A\overset{\Delta}{D}E \sim A\overset{\Delta}{B}C$ olur.

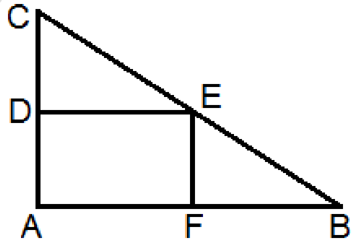
$$\frac{|EF|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|AC|} = \frac{y}{x+y} \qquad (2)$$

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{|DE|}{|BC|} + \frac{|EF|}{|AB|} = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1$$

bulunur.

3.11. Teorem: ABC bir dik üçgen olmak üzere, [AB]//[DE] ve [AC]//[EF], $|AB| = c, |AC| = b$ ise, karenin bir kenarına uzunluğu,



$$x = \frac{bc}{b+c}$$

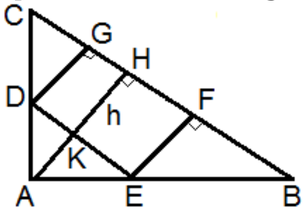
dir.

İspat: [AB]//[DE] olduğundan $C\overset{\Delta}{D}E \sim C\overset{\Delta}{A}B$ dir.

$$\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

$$\frac{c-b}{b}=\frac{x}{c}$$
$$x=\frac{bc}{b+c}$$

3.12. Teorem: ABC üçgeni bir dik üçgen ve [DE]//[CB] olmak üzere, hipotenüse ait yükseklik h, hipotenüsün uzunluğu a ve $|DG|=|DE|=x$ ise,



$$x=\frac{ah}{a+h}$$

dir.

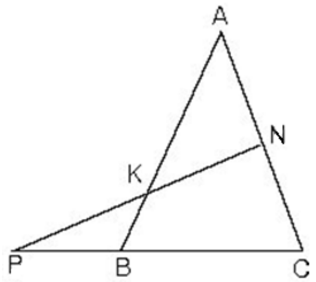
İspat: [DE]//[CB] olduğundan $\overset{\Delta}{AED} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ dir.

$$\frac{|CD|}{|CB|}=\frac{|AK|}{|AH|}$$
$$\frac{x}{a}=\frac{h-x}{h}$$
$$x=\frac{ah}{a+h}$$

MENELAUS ve CEVA TEOREMLERİ

Menelaus
(M.S. 70, İskenderiye, Mısır – M.S. 140, Roma, İtalya)

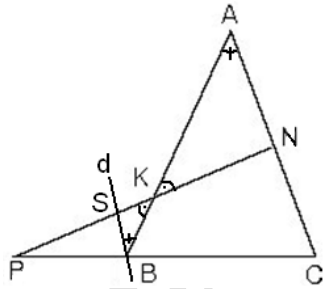
3.13. Teorem (Menelaus Teoremi): Bir d doğrusu herhangi bir ABC üçgeninin [BC], [AB], [AC] kenarlarını (veya uzantılarını) sırasıyla P, K ve N noktalarında kesiyor ise



$$\frac{|PB|}{|PC|}\cdot\frac{|CN|}{|NA|}\cdot\frac{|AK|}{|KB|}=1$$

dir.

İspat: [AC] kenarına paralel B noktasından geçen bir k doğrusu çizelim ve $k \cap d = \{S\}$ olsun.



$[AC]//d$ olduğundan $m(S\widehat{B}K) = m(K\widehat{A}C)$ dir ve ayrıca iç ters açılardan $m(A\widehat{K}N) = m(S\widehat{K}B)$ olur. A.A.A. benzerlik aksiyomundan $B\overset{\Delta}{K}S \sim A\overset{\Delta}{K}N$ olur.

$$\frac{|KB|}{|AK|}=\frac{|BS|}{|NA|} \qquad (1)$$

Yine $[AC]//d$ olduğundan A.A.A. benzerlik aksiyomundan $P\overset{\Delta}{B}S \sim P\overset{\Delta}{C}N$ dir.

$$\frac{|PB|}{|PC|}=\frac{|BS|}{|CN|} \qquad (2)$$

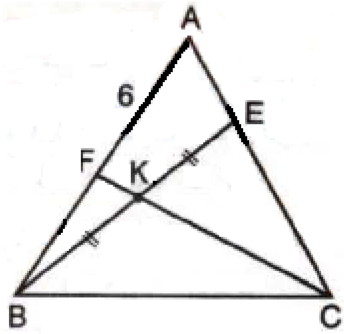
(2) yi (1) ile taraf tarafa oranlama yapılırsa,

$$\frac{|PB|}{|PC|}\cdot\frac{|AK|}{|KB|}=\frac{|NA|}{|CN|}$$

$$\frac{|PB|}{|PC|}\cdot\frac{|CN|}{|NA|}\cdot\frac{|AK|}{|KB|}=1$$

olur.

Örnek: Şekilde $|EC| = 2|AE|$, $|BK| = |KE|$ ve $|AF| = 6$ cm ise $|FB|$ yi bulunuz.



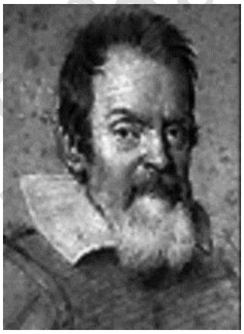
Çözüm: ABC üçgeninde [AF], [FC] ve [AC] yi [BE] sırasıyla B, K ve E noktalarında kestiğinden bu üçgende C noktasına göre Menelaus teoremini uygulayalım.

$$\frac{|CE|}{|CA|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BK|}{|KE|}=1$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{|FB|}\cdot\frac{1}{1}=1$$

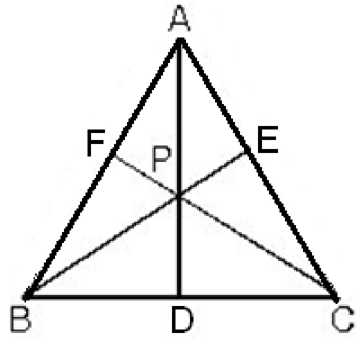
$$|FB|=4\text{ cm}$$

olur.



Giovanni Ceva (Covanni Seva)
(7 Aralık 1647, Milano, İtalya - 15 Haziran 1734, Mantova, İtalya)

3.14. Teorem (Ceva Teoremi): Bir ABC üçgeninin içinde alınan bir P noktasını köşelere birleştiren doğruların [BC], [AC] ve [AB] kenarlarını kestiği noktalar sırasıyla D, E ve F ise;



$$\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}=1$$

dir.

İspat: $A\overset{\Delta}{D}C$ üçgeninde Menelaus teoreminden,

$$\frac{|BD|}{|BC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}\cdot\frac{|AP|}{|PD|}=1 \qquad (1)$$

$A\overset{\Delta}{B}D$ üçgeninde Menelaus teoreminden,

$$\frac{|DC|}{|BC|}\cdot\frac{|FB|}{|AF|}\cdot\frac{|AP|}{|PD|}=1 \qquad (2)$$

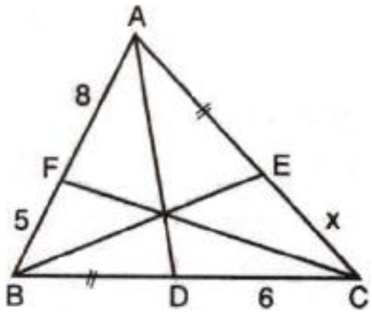
(1) ve (2) taraf tarafa bölünürse,

$$\frac{|BD|}{|BC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}\cdot\frac{|AP|}{|PD|}\cdot\frac{|BC|}{|DC|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|PD|}{|AP|}=1$$

$$\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}=1$$

bulunur.

Örnek: Şekilde $|AE|=|BD|$, $|FB|=5$ cm, $|DC|=6$ cm ve $|AF|=8$ cm ise $|EC|=x$ cm yi bulunuz.



Çözüm: $|AE|=|BD|=y$ olsun Ceva teoreminden,

$$\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}=1$$

$$\frac{y}{6} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{8}{5} = 1$$

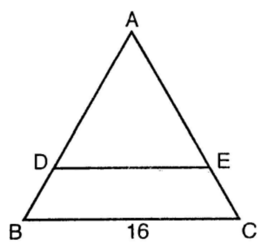
$$x = \frac{15}{4} \text{ cm}$$

olur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Benzerlik Kavramı

1.



ABC bir üçgen

[DE] // [BC]

|AE| = 3|EC|

|BC| = 16 cm

Verilere göre |DE| kaç cm'dir?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm: [DE]//[BC] olduğuna göre, ADE ile ABC üçgeni benzerdir.
$|EC| = x$ alınırsa $|AE| = 3x$ olur.

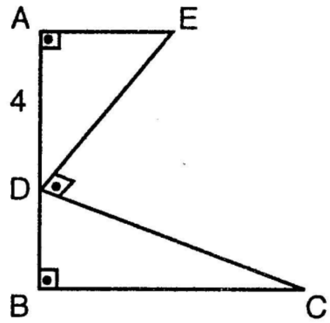
$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

$$\frac{3x}{4x} = \frac{|DE|}{16}$$

$$|DE| = 12 \text{ cm}$$

Cevap: B

2.



[EA] ⊥ [AB]

[AB] ⊥ [BC]

[ED] ⊥ [DC]

3|DE| = 2|DC|

|AD| = 4 cm

Verilere göre |BC| kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $3|DE| = 2|DC|$ eşitliğinde $|DE| = 2x$ alınırsa $|DC| = 3x$ olur.

A.A.A. özelliğinden $A\overset{\Delta}{E}D \sim B\overset{\Delta}{C}D$ dir. O halde,

$$\frac{|DE|}{|DC|} = \frac{|AD|}{|BC|}$$

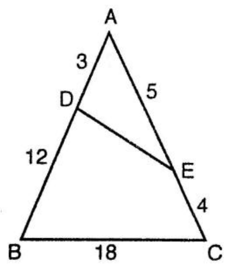
$$\frac{2x}{3x} = \frac{4}{|BC|}$$

$$|BC| = 6 \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: C

3.



ABC bir üçgen

|AD| = 3 cm

|AE| = 5 cm

|EC| = 4 cm

|DB| = 12 cm

|BC| = 18 cm

Verilere göre |DE| kaç cm'dir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: BAC ve EAD üçgeninde $m(\widehat{A})$ ortak açıdır.

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AB|} = k$$

$$\frac{3}{9} = \frac{5}{15} = k = \frac{1}{3}$$

dir. O halde K.A.K. benzerliği $B\overset{\Delta}{A}C \sim E\overset{\Delta}{A}D$ dir.

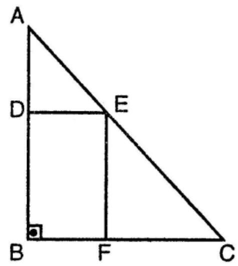
$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AC|}$$

$$\frac{|DE|}{18} = \frac{3}{9}$$

$$|DE| = 6 \text{ cm}$$

Cevap: E

4.



ABC bir dik üçgen

BDEF dikdörtgen

|AB| = 8 cm

|BC| = 4 cm

|AC| = 4|AE|

Verilere göre $|DE| + |EF|$ kaç cm'dir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: $|AE| = x$ alınırsa $|AC| = 4x$ ve $|EC| = 3x$ olur. Temel orantı teoreminden

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

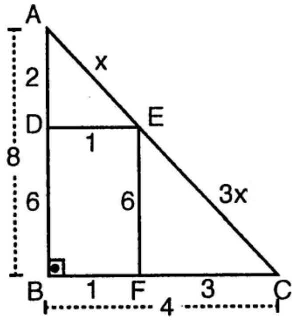
$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} = k$$

olur. O halde, $|AD| = 2$ cm ve $|DB| = |EF| = 6$ cm olur.

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{1}{3}$$

$$|BF| = |DE| = 1 \text{ cm ve } |FC| = 3 \text{ cm}$$

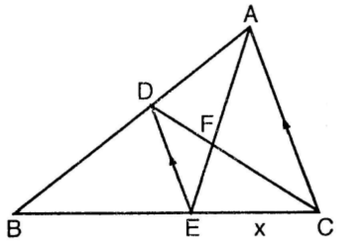
olur.



$|DE| + |EF| = 1 + 6 = 7$ cm

Cevap: D

5.



ABC bir üçgen

[DE] // [AC]

5|EF| = 3|AF|

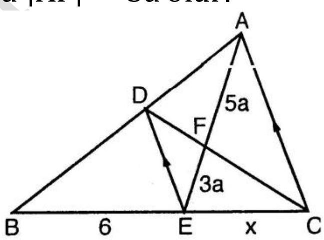
|BE| = 6 cm

|EC| = x

Verilere göre $|EC| = x$ kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $[DE]//[AC]$ olduğundan $D\overset{\triangle}{B}E \sim A\overset{\triangle}{B}C$ ve $D\overset{\triangle}{E}F \sim C\overset{\triangle}{A}E$ benzerdir. Ayrıca $|EF| = 3a$ alınırsa $|AF| = 5a$ olur.



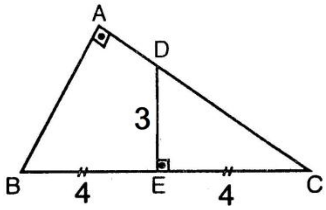
$$\frac{|EF|}{|AF|} = \frac{|DE|}{|AC|} = \frac{3}{5} \text{ ve } \frac{|DE|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|BC|}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{6+x}$$

$|EC| = x = 4$ cm

Cevap: A

6.



BAC bir dik üçgen

[DE] ⊥ [BC]

|DE| = 3 cm

|BE| = |EC| = 4 cm

Verilere göre |AD| kaç cm'dir?

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{5}$

Çözüm: Pisagor teoreminden,

$$|DC|^2 = |DE|^2 + |EC|^2$$
$$|DC|^2 = 3^2 + 4^2$$
$$|DC| = 5$$

olur. $m(\widehat{A})$ ortak açı olduğundan $m(E\widehat{D}C) = m(A\widehat{B}C)$ dir. A.A.A. benzerliği gereği,

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \frac{|DC|}{|BC|}$$
$$\frac{4}{|AC|} = \frac{5}{8}$$
$$|AC| = \frac{32}{5}$$

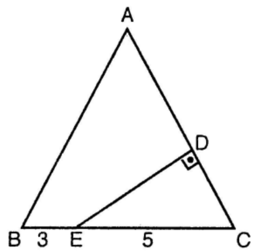
olur. Buna göre;

$$|AD| = |AC| - |DC| = \frac{32}{5} - 5 = \frac{7}{5}$$

bulunur.

Cevap: E

7.



ABC bir ikizkenar üçgen

|AB| = |AC| = 10 cm

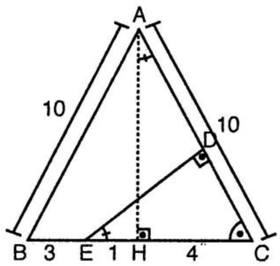
|BE| = 3 cm

|EC| = 5 cm

Verilere göre |DC| kaç cm'dir?

A) 4 B) 3,5 C) 3 D) 2,5 E) 2

Çözüm: A noktasından [BC] ye [AH] dikmesini çizelim. Bu takdirde |BH| = |HC| = 4 cm olur.



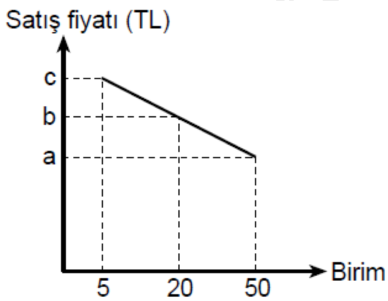
$E\overset{\Delta}{D}C \sim A\overset{\Delta}{H}C$ benzerdir.

$$\frac{|DC|}{|HC|} = \frac{|EC|}{|AC|}$$
$$\frac{|DC|}{4} = \frac{5}{10}$$
$$|DC| = 2 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: E

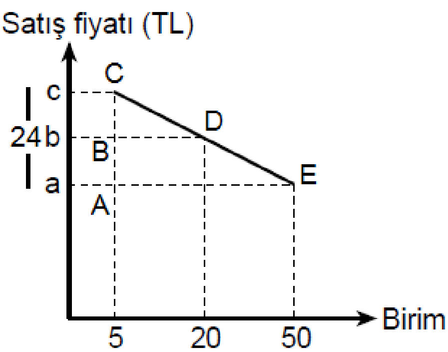
8.



Bir malın miktarlarla bağlı olarak değişen birim satış fiyatı yukarıdaki doğrusal grafikte gösterilmiştir. $c = 48, a = 24$ olduğuna göre, b'nin değeri nedir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm:



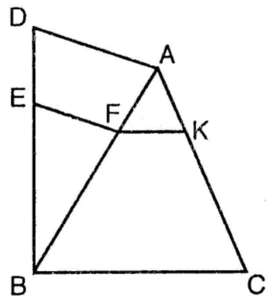
DBC ve EAC üçgenleri dik üçgen olup A.A.A. aksiyomu gereği $D\overset{\Delta}{B}C \sim E\overset{\Delta}{A}C$ dir.

$$\frac{|DB|}{|EA|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$
$$\frac{20-5}{50-5} = \frac{c-b}{c-a}$$
$$\frac{15}{45} = \frac{48-b}{48-24}$$
$$b = 8$$

Cevap: A

Benzerlik Teoremleri

9.



ABC ve ABD birer üçgen

[EF] // [DA]

[FK] // [BC]

|KC| = 4|AK|

|EF| = 2 cm

Verilere göre |AD| kaç cm'dir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: [EF]//[DA] ise $B\overset{\Delta}{E}F \sim B\overset{\Delta}{D}A$ ve [FK]//[BC] ise $A\overset{\Delta}{F}K \sim A\overset{\Delta}{B}C$ dir.

$|AK| = x$ alınırsa $|KC| = 4x$ olur. Temel orantı teoreminden,

$$\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{x}{4x}$$

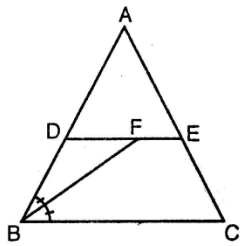
olur. $B\overset{\Delta}{E}F \sim B\overset{\Delta}{D}A$ olduğundan

$$\frac{|BF|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|AD|} = \frac{4x}{x+4x}$$
$$\frac{4}{|AD|} = \frac{4}{5}$$
$$|AD| = 5 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: A

10.



ABC bir üçgen

[DE] // [BC]

[BE] açıortay

5|AE| = 3|AC|

|AB| = 5 cm

Verilere göre |DF| kaç cm'dir?

A) 4,5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: [DE]//[BC] olduğundan $A\overset{\Delta}{D}E \sim A\overset{\Delta}{B}C$ dir.

$5|AE| = 3|AC|$ eşitliğinde $|AE| = 3x$ alınırsa $|AC| = 5x$ ve $|EC| = 2x$ olur.

İçters açılardan $m(B\hat{F}D) = m(F\hat{B}C)$ olur. Burada $|BD| = |DF| = 2y$ alınırsa, temel orantıdan

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

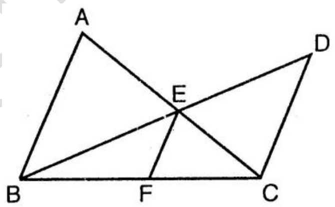
$$\frac{|AD|}{2y} = \frac{3x}{2x}$$

$$|AD| = 3y$$

olur. $|AB| = 5y = 5$ cm ise $y = 1$ cm olup $|DF| = 2$ cm olur.

Cevap: D

11.



ABC ve BCD birer üçgen

[AB] // [EF] // [DC]

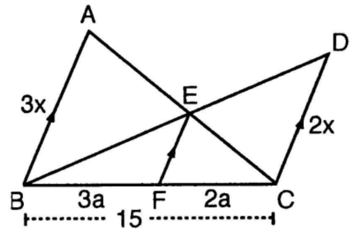
2|AB| = 3|DC|

|BC| = 15 cm

Verilere göre |BF| kaç cm'dir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: $|AB| = 3x$ alınırsa $|DC| = 2x$ olur. Kelebek özelliği ii den $|BF| = 3a$ alınırsa $|FC| = 2a$ olur.

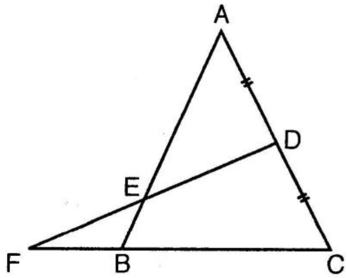


$5a = 15$ ise $a = 3$ olup $|BF| = 9$ cm olur.

Cevap: B

Menelaus ve Ceva Teoremleri

12.



ABC ve CDF birer üçgen

$|AD| = |DC|$

$|BC| = 3|FB|$

$|FE| = 2$ cm

Verilere göre $|ED|$ kaç cm'dir?

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

Çözüm: $|FB| = x$ alınırsa $|BC| = 3x$ dir. Yine $|AD| = y$ alınırsa $|AC| = 2y$ dir. A noktasına göre Menelaus teoremi uygulanırsa;

$$\frac{|AD|}{|AC|} \cdot \frac{|CB|}{|BF|} \cdot \frac{|FE|}{|ED|} = 1$$

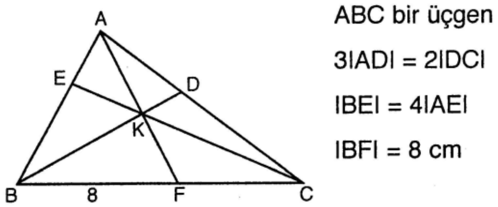
$$\frac{y}{2y} \cdot \frac{3x}{x} \cdot \frac{2}{|ED|} = 1$$

$$|ED| = 2 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: C

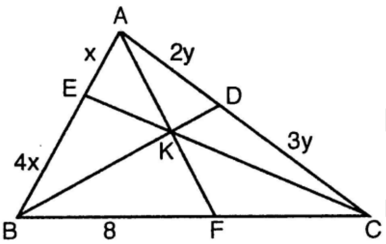
13.



Verilere göre |FC| kaç cm'dir?

A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 4

Çözüm: $|AE| = x$ alınırsa $|BE| = 4x$ dir. Yine $|AD| = 2x$ alınırsa $|DC| = 3y$ dir.



Ceva teoreminden;

$$\frac{|AE|}{|EB|} \cdot \frac{|BF|}{|FC|} \cdot \frac{|CD|}{|DA|} = 1$$

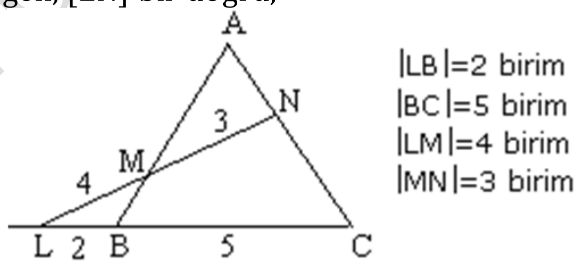
$$\frac{x}{4x} \cdot \frac{8}{|FC|} \cdot \frac{3y}{2y} = 1$$

$$|ED| = 3 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: D

14. ABC üçgen, [LN] bir doğru,



$|AN| = 3$ birim ise |NC| kaç birimdir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

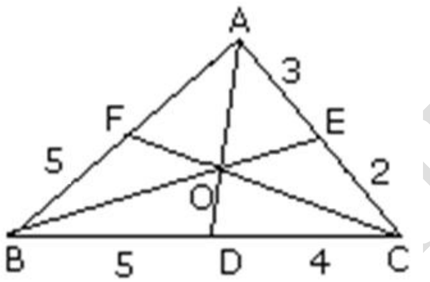
Çözüm: A noktasına göre Menelaus uygulanırsa,

$$\frac{|AN|}{|AC|}\cdot\frac{|CB|}{|BL|}\cdot\frac{|LM|}{|MN|}=1$$
$$\frac{3}{|AC|}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}=1$$
$$|AC|=10$$
$$|NC|=|AC|-|AN|=10-3=7 \text{ birim}$$

olur.

Cevap: B

15.



Verilere göre $|AB|$ kaç birimdir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: Ceva teoremine göre,

$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1$$
$$\frac{|AF|}{5}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}=1$$
$$|AF|=6$$
$$|AB|=|AF|+|FB|=6+5=11 \text{ birim}$$

dir.

Cevap: E

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.

5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.