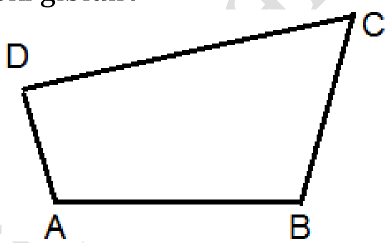
4. BÖLÜM
ÜÇGENDE ALAN

ALAN KAVRAMI

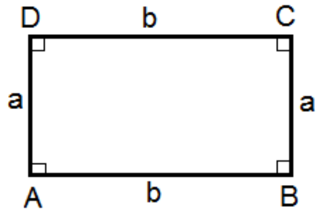
Üçgende alan kavramına geçmeden önce, ileride geniş çaplı incelenecek olan dörtgen, dikdörtgen ve kare kavramları açıklanmalıdır. Bu kavram üzerine alan tanımı verilecektir. Üçgende alan tanımını vermek için, öncelikle karenin tanımı verilmesi gerekmektedir.

4.1. Tanım: En fazla ikisi aynı doğru üzerinde bulan dört farklı noktanın birer doğru ile birleşmesinden elde edilen geometrik şekle dörtgen denir. A, B, C ve D noktalarından geçen doğruların oluşturduğu herhangi bir dörtgen aşağıdaki şekildeki gibidir.



$[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$

4.2. Tanım: Karşılıklı kenarları birbirine paralel ve bütün açıları 90^0 olan dörtgenlere dikdörtgen denir.

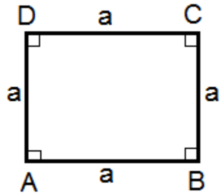


ABCD dikdörtgeninde,

$$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^0, \quad |AB| = |DC| = a, |AD| = |BC| = b$$

dir.

4.3. Tanım: Karşılıklı kenarları birbirine paralel, bütün kenarları eşit ve bütün açıları 90^0 olan dörtgenlere kare denir.

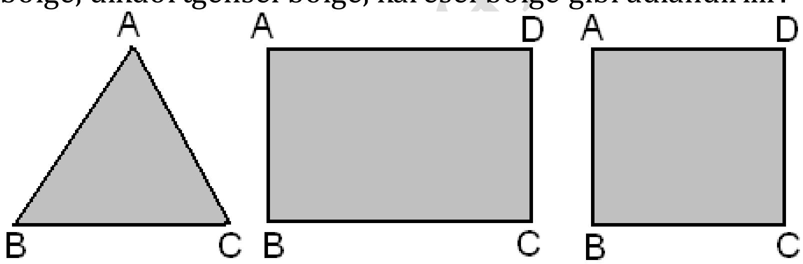


ABCD karesinde,

$m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = m(\hat{D}) = 90^0$, $|AB| = |DC| = |AD| = |BC| = a$ dir. //

Üçgenin de, dörtgenin de, karenin de veya ileride verilecek olan geometrik şekil ve geometrik şeklin iç bölgesi ile birleşimine geometrik şeklin bölgesi denilir.

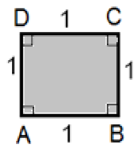
4.4. Tanım: Düzlem üzerinde tanımlı bir geometrik şekil ve o geometrik şeklin iç bölgesi ile birleşimine o geometrik şeklin bölgesi denir. Üçgensel bölge, dikdörtgensel bölge, karesel bölge gibi adlandırılır.



Şekilde bir üçgensel, dikdörtgensel ve karesel bölgeler verilmiştir.

Bu geometrik şeklin düzlem üzerinde kapladıkları bir bölge vardır. Geometrik şekil ve şeklin bu bölgeyi sayı olarak ifade edilebilir. Bulunan bu sayıya alan adı verilir.

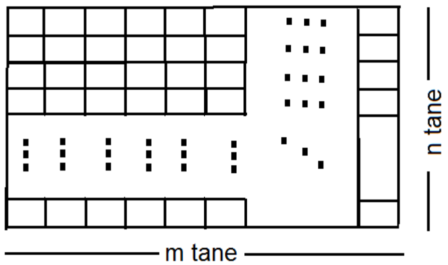
4.5. Tanım: Bir kenar uzunluğu 1 birim olan karesel bölgeye 1 birim kare denir.



$A(ABCD) = 1 \text{ br}^2$

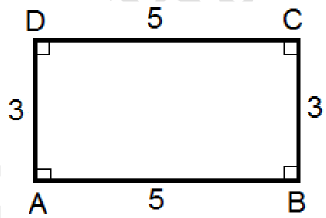
4.6. Tanım: Düzlemde geometrik bir şeklin içine yerleştirilebilen 1 br^2 lik karenin sayısına o şeklin alanı denir. Geometrik şekil santimetre türünden ise kapladığı bölgenin alanı cm^2, metre türünden ise kapladığı bölgenin alanı m^2, kilometre türünden ise kapladığı bölgenin alanı km^2 veya herhangi bir birim türünden ise br^2 (birim kare) türünden yazılır. ABCD dikdörtgeninin alanı x br^2 ise $A(ABCD) = x\ br^2$ biçiminde gösterilir.

4.1. Aksiyom: Bir dikdörtgensel bölgenin alanı, kesişen iki kenarının uzunluklarının çarpımına eşittir.



Bir kenarı m, diğer kenarı n olan dikdörtgenin alanı $m \times n$ dir.

Örnek: $|AB| = |DC| = 5$ cm ve $|AD| = |BC| = 3\ cm$ olan dikdörtgende,



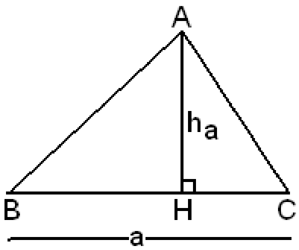
$A(ABCD) = 5 \cdot 3 = 15\ br^2$

dir. //

Bundan sonraki kısımlarda "Üçgensel bölgenin alanı" yerine "Üçgenin alanı", "Dörtgensel bölgenin alanı" yerine "Dörtgenin alanı", "Karesel bölgenin alanı" yerine "Karenin alanı" ifadesini kullanacağız.

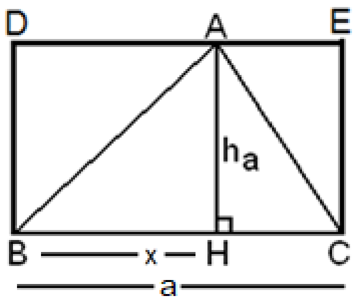
ÜÇGENİN ALANI

4.1. Teorem: Bir üçgenin alanı bir kenarı ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.



$$A(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{a\cdot h_a}{2}$$

İspat: Verilen üçgende [DB]//[EC] ve [DE]//[BC] olacak şekilde BCED dikdörtgenini çizelim. $|BH| = x$ olsun.



Paralel doğrular ve eş açılar olduğundan $A\overset{\Delta}{B}H \cong B\overset{\Delta}{D}A$ ve $A\overset{\Delta}{H}C \cong C\overset{\Delta}{E}A$ olur.

$$A(AHBD) = A(A\overset{\Delta}{B}H) + A(B\overset{\Delta}{D}A)$$

$$x \cdot h_a = A(A\overset{\Delta}{B}H) + A(A\overset{\Delta}{B}H)$$

$$A(A\overset{\Delta}{B}H) = \frac{x\cdot h_a}{2} \qquad (1)$$

$$A(AHCE) = A(A\overset{\Delta}{H}C) + A(C\overset{\Delta}{E}A)$$

$$(a - x) \cdot h_a = A(A\overset{\Delta}{H}c) + A(A\overset{\Delta}{H}C)$$

$$A(A\overset{\Delta}{H}C) = \frac{(a-x)\cdot h_a}{2} \qquad (2)$$

(1) ve (2) eşitliğinden,

$$A(A\overset{\Delta}{B}C) = A(A\overset{\Delta}{B}H) + A(A\overset{\Delta}{H}C)$$

$$A(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{x\cdot h_a}{2} + \frac{(a-x)\cdot h_a}{2}$$

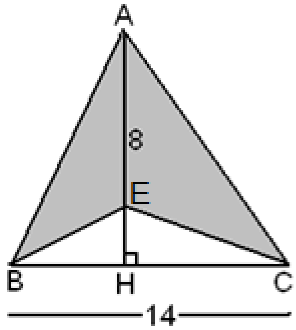
$$A(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{a\cdot h_a}{2}$$

olur.

Benzer şekilde $\frac{b\cdot h_b}{2}$ ve $\frac{c\cdot h_c}{2}$ olduğunu okuyucuya bırakılmıştır. //

Bu teoreme göre üçgenin alanını hangi tabana göre kullanırsak kullanalım sonuç aynı çıkacaktır.

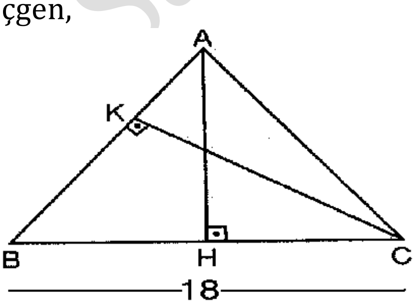
Örnek: Şekilde $[AH] \perp [BC]$, $|AE| = 8$ cm ve $|BC| = 14$ cm olduğuna göre, taralı ABEC dörtgeninin alanını bulunuz.



Çözüm:

$$A(ABEC) = A(ABC) - A(EBC)$$
$$= \frac{(8+|EH|)\cdot 14}{2} - \frac{|EH|\cdot 14}{2}$$
$$= 56 + 7 \cdot |EH| - 7 \cdot |EH|$$
$$= 56 \text{ cm}^2$$

Örnek: ABC bir üçgen,

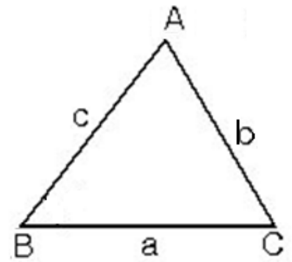


$|AH| = 6$ cm, $|KC| = 12$ cm, $|BC| = 18$ cm oluğuna göre, $|AB|$ kaç cm dir?

Çözüm: ABC üçgeninin alanından,

$$\frac{|BC|\cdot|AH|}{2} = \frac{|AB|\cdot|KC|}{2}$$
$$\frac{18\cdot 6}{2} = \frac{|AB|\cdot 12}{2}$$
$$|AB| = 9 \text{ cm}$$

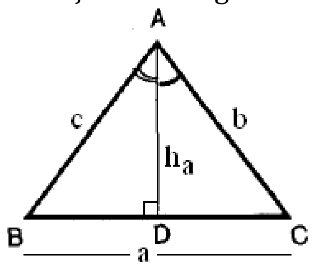
4.2. Teorem: Bir üçgenin alanı, iki kenarının uzunluğu ile bu kenarların oluşturduğu açının sinüsünün çarpımının yarısına eşittir. Bu durum, ABC üçgeninde kenarları a, b, c ise,



$$A(ABC) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$$

şeklindedir.

İspat: Üçgenimiz aşağıdaki şeklindeki gibi olsun.



Bir üçgenin alanı,

$$A(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} \qquad (1)$$

olduğunu geometriden biliyoruz. ADC üçgenine göre sinüsün değeri,

$$\sin C = \frac{h_a}{b}$$

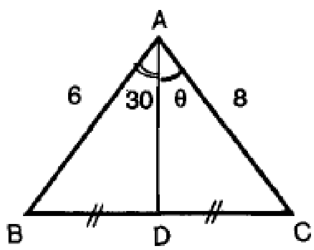
$$h_a = b \sin C \qquad (2)$$

bulunur. (2) denklemini (1) de yerine yazarsak,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$$

elde edilir.

Örnek:



$|AB| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm, $m(B\widehat{A}C) = 30^0$, $|BD| = |DC|$ ve $\theta < 90$ için $\sin\theta$ nın değeri nedir?

Çözüm: $|AD| = V_a$ kenarortay olup alanı 2 eş parçaya böler.

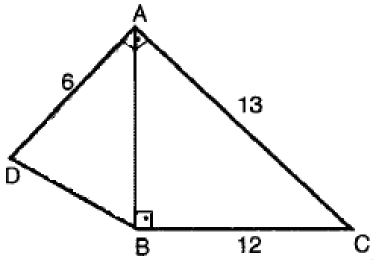
$$A(ABD) = A(ADC)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot V_a \cdot \sin 30 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot V_a \cdot \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{3}{8}$$

elde edilir.

Örnek: $|AD| = 6$ cm, $|AC| = 13$ cm, $|BC| = 12$ cm, $m(D\widehat{A}C) = 90^0$,



şekline göre alan A(ABD) yi bulunuz.

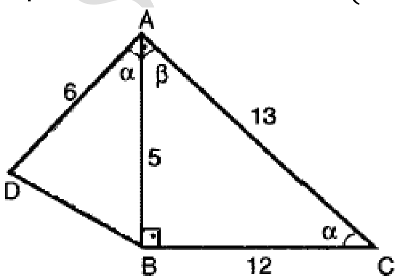
Çözüm: ABC üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$13^2 = |AB|^2 + 12^2$$

$$|AB| = 5 \text{ cm}$$

dir. Ayrıca, $m\left(D\widehat{A}C\right) = \alpha + \beta = 90^0$ kabul edilire, $m\left(A\widehat{C}B\right) = \alpha$ olur.



$$A(ABC) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

olarak bulunur. Buna göre,

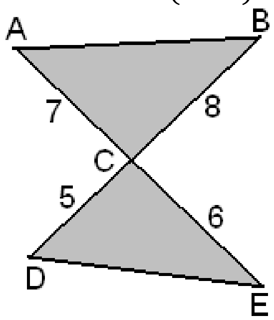
$$A(ABC) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{5}{13}$$

$$= \frac{75}{13} \text{ cm}^2$$

dir.

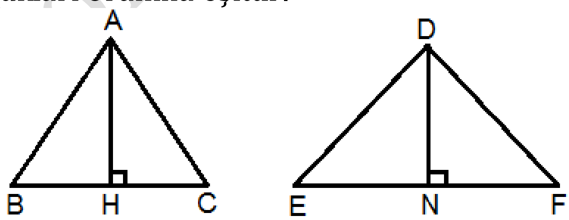
Örnek: Verilen şekilde ABC ve CDE üçgenleri için $|AC| = 7$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|DC| = 5$ cm, $|EC| = 6$ cm ise $\dfrac{A(ABC)}{A(CDE)}$ nin değerini bulunuz.



Çözüm: $m(A\hat{C}B) = m(D\hat{C}E) = \alpha$ olsun.

$$\frac{A(ABC)}{A(CDE)} = \frac{\frac{1}{2}|AC||BC|\sin\alpha}{\frac{1}{2}|DC||EC|\sin\alpha} = \frac{|AC||BC|}{|DC||EC|} = \frac{7\cdot 8}{5\cdot 6} = \frac{28}{15}\ \text{cm}^2$$

4.3. Teorem: Yükseklikleri eşit olan iki üçgenin alanları oranı, tabanlarının uzunlukları oranına eşittir.



$[AH] \perp [BC]$, $[DN] \perp [EF]$ ve $|AH| = |DN|$ ise $\dfrac{A(ABC)}{A(DEF)} = \dfrac{|BC|}{|EF|}$

İspat: 4.1. Teoremden,

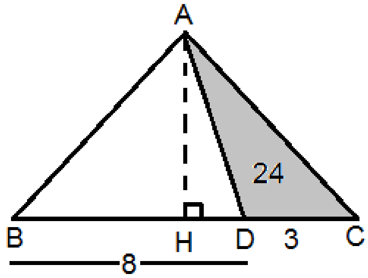
$$A(ABC) = \frac{|BC|\cdot|AH|}{2} \text{ ve } A(DEF) = \frac{|EF|\cdot|DN|}{2}$$

olur. $|AH| = |DN|$ olduğundan bu iki eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{\frac{|BC|\cdot|AH|}{2}}{\frac{|EF|\cdot|DN|}{2}} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

elde edilir.

Örnek: Şekilde $A\overset{\Delta}{B}D$ ve $A\overset{\Delta}{C}D$ üçgenleri verilmiştir. $|BD| = 8$ cm, $|ADC| = 3$ cm ve $A(ADC) = 24$ cm^2 olduğuna göre, $A\overset{\Delta}{B}D$ alanını bulunuz.



Çözüm: $A\overset{\Delta}{B}D$ ve $A\overset{\Delta}{C}D$ üçgenlerinin yükseklikleri [AH] dir. 4.3. Teoremden

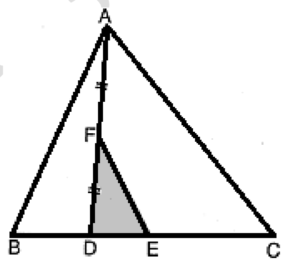
$$\frac{A(ABD)}{A(ACD)} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

$$\frac{A(ABD)}{24} = \frac{8}{3}$$

$$A(ABD) = 64 \text{ cm}^2$$

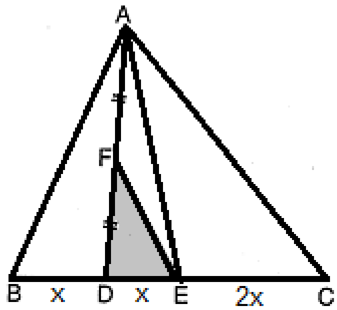
bulunur.

Örnek:



ABC bir üçgen A, F, D doğrusal $|BD| = |DE| = \frac{|EC|}{2}$, $|AF| = |DF|$ dir. Verilere göre $\frac{A(DEF)}{A(ABC)}$ oranı kaçtır?

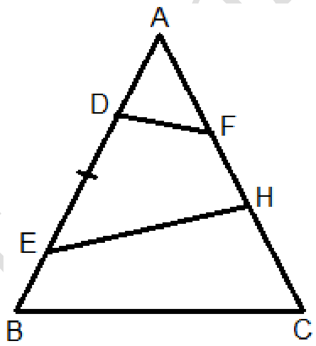
Çözüm: $|BD| = |DE| = \frac{|EC|}{2} = x$ ve $A(DEF) = s$ cm^2 olsun.



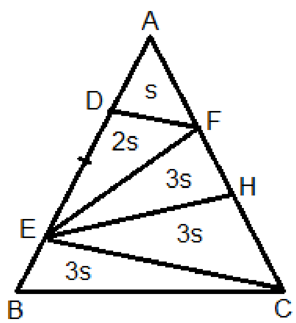
$|AF| = |DF|$ ise $A(DEF) = A(AEF) = s$ olup $A(ADE) = 2s$
$|BD| = |DE|$ ise $A(ADE) = A(ABD) = 2s$ olup $A(ABE) = 4s$
$|BE| = |EC|$ ise $A(ABE) = A(AEC) = 4s$ olup $A(ABC) = 8s$

$$\frac{A(DEF)}{A(ABC)} = \frac{8s}{s} = 8\ \text{cm}^2$$

Örnek: Şekildeki ABC üçgeninde, [AB] kenarı 4, [AC] kenarı 3 eşit parçaya bölünmüştür. $A(A\overset{\Delta}{B}C) = 120\ \text{cm}^2$ ise DEHF dörtgeninin alanını bulunuz.



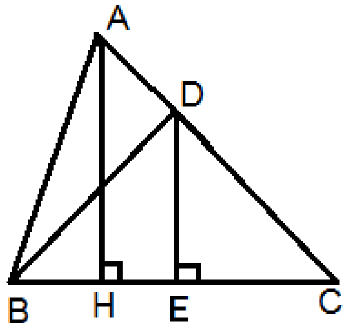
Çözüm: [EF] doğru parçasını çizelim. $A(ADF) = s$ dersek $A(DEF) = 2s$ olur.



$A(AEF) = A(ADF) + A(DEF) = 3s$
$A(EFH) = A(AEF) = A(HEC) = 3s$

$$A(EBC) = \frac{A(AEC)}{3} = \frac{9s}{3} = 3s$$
$$A(EFH) = 12s = 120$$
$$s = 10$$
$$A(DEFH) = A(DEF) + A(EFH) = 2s + 3s = 5s = 50\ cm^2$$

4.4. Teorem: Tabanları eşit olan üçgenlerin alanları oranı, bu tabanlara ait yüksekliklerin uzunlukları oranına eşittir.



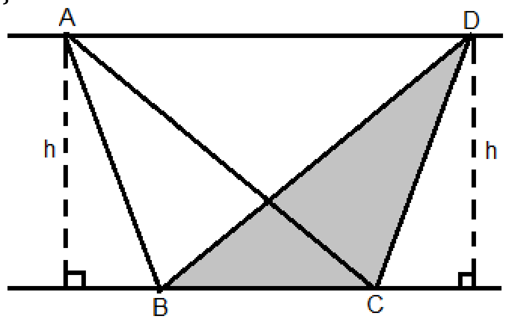
$[AH] \perp [BC]$, $[BC] \perp [ED]$ ise $\dfrac{A(ABC)}{A(DEF)} = \dfrac{|AH|}{|DE|}$

İspat: ABC ve DBC üçgenlerinin ortak tabanı [BC], yükseklikleri [AH] ve [DE] dir. Buna göre,

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{\frac{|BC|\cdot|AH|}{2}}{\frac{|BC|\cdot|DE|}{2}} = \frac{|AH|}{|DE|}$$

olur.

4.5. Teorem: Birer kenarı ve bu kenarlara ait yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları eşittir.

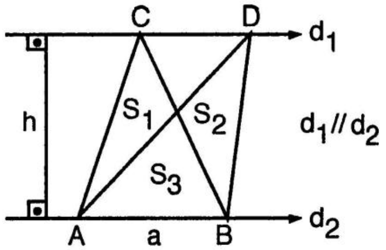


$[AD]//[BC]$ ise $A(ABC) = A(DBC)$

İspat: $\dfrac{A(ABC)}{A(DBC)} = \dfrac{\frac{|BC|\cdot h}{2}}{\frac{|BC|\cdot h}{2}} = 1$

$$A(ABC) = A(DBC)$$

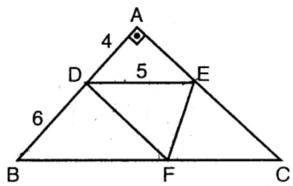
4.1. Sonuç: Paralel iki doğru arasında, taban uzunluğu sabit kalmak şartıyla; tepe noktasını diğer doğru üzerinde nerede alırsak alalım üçgenin alanı değişmez.



$S_1 = S_2$

Gerçekten $S_1 + S_3 = S_2 + S_3$ olacağından $S_1 = S_2$ dir.

Örnek:



BAC bir dik üçgen

[DE] // [BC]

|AD| = 4 cm

|DE| = 5 cm

|DB| = 6 cm

Verilere göre A(DEF) kaç cm^2 dir?

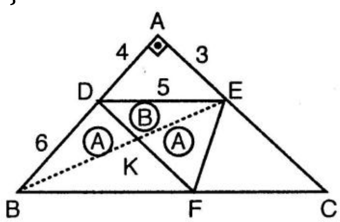
Çözüm: DAE dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa

$|DE|^2 = |AD|^2 + |AE|^2$

$5^2 = 4^2 + |AE|^2$

$|AE| = 3$

olur. [EB] doğru parçasını çizelim.

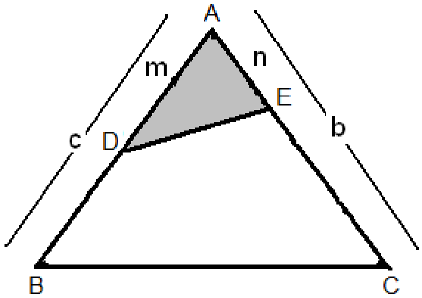


4.1. Sonuç gereği A(BDK) = A(EFK) = A dir. A(DEK) = B olarak seçelim.

A(DEF) = A + B = A(BDE)

$$A(BEF) = \frac{|BD|\cdot|AE|}{2} = \frac{6\cdot 3}{2} = 9\ \text{cm}^2$$

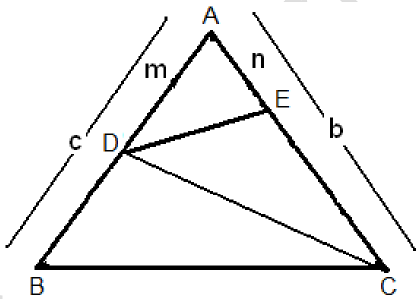
4.6. Teorem: ABC üçgeninde $|AD| = m$, $|AE| = n$, $|AB| = c$, $|AC| = b$ olmak üzere;



$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \frac{m\cdot n}{b\cdot c}$$

dir.

İspat: ABC üçgeninde $[DC]$ doğru parçasını çizelim.



4.3. teoremi gereği,

ADE ve ADC üçgenleri yükseklikleri aynı olduğundan $\frac{A(ADE)}{A(ADC)} = \frac{n}{b}$ (1)

ADC ve ABC üçgenleri yükseklikleri aynı olduğundan $\frac{A(ADC)}{A(ABC)} = \frac{m}{c}$ (2)

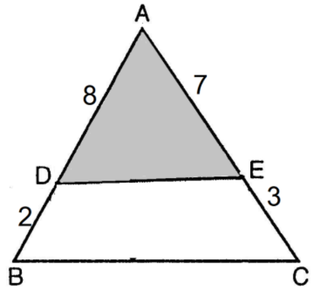
(1) ve (2) eşitliklerinden $A(ADE)\frac{n}{b} = A(ADC)$ ve $A(ADC) = \frac{m}{c}A(ABC)$ olduğundan,

$$A(ADE)\frac{n}{b} = \frac{m}{c}A(ABC)$$

$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \frac{m\cdot n}{b\cdot c}$$

elde edilir.

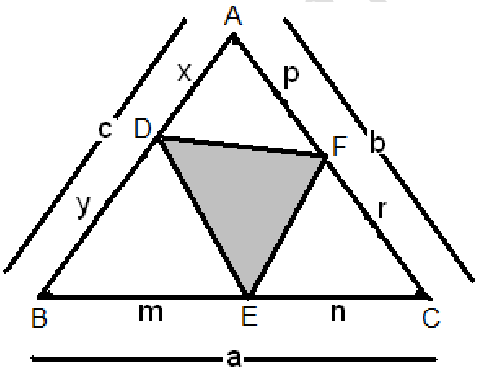
Örnek: Bir ABC üçgeninde $|AD| = 8$ cm, $|BD| = 2$ cm, $|AE| = 7$ cm, $|EC| = 3$ cm,



$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} \text{ nedir?}$$

Çözüm: $\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \frac{8 \cdot 7}{(8+2)\cdot(7+3)} = \frac{14}{25}$

4.7. Teorem: Bir ABC üçgeninde $|AD| = x$, $|BD| = y$, $|AF| = p$, $|FC| = r$, $|BE| = m$, $|EC| = n$, $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$ olmak üzere;



$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \frac{m \cdot r \cdot x + n \cdot p \cdot y}{a \cdot b \cdot c}$$

İspat: 4.5. Teoreme göre,

$$\frac{A(ADF)}{A(ABC)} = \frac{x \cdot p}{b \cdot c}, \frac{A(DBE)}{A(ABC)} = \frac{y \cdot m}{a \cdot c}, \frac{A(FEC)}{A(ABC)} = \frac{r \cdot n}{a \cdot b}$$

$$A(ADF) = \frac{x \cdot p}{b \cdot c} A(ABC), A(DBE) = \frac{y \cdot m}{a \cdot c} A(ABC), A(FEC) = \frac{r \cdot n}{a \cdot b} A(ABC)$$

dir. Ayrıca,

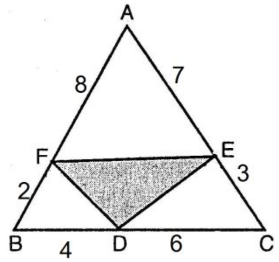
$$A(DEF) = A(ABC) - A(ADF) - A(DBE) - A(DEC)$$

$$A(DEF) = A(ABC)\left[1 - \frac{x \cdot p}{b \cdot c} - \frac{y \cdot m}{a \cdot c} - \frac{r \cdot n}{a \cdot b}\right]$$

$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \frac{m \cdot r \cdot x + n \cdot p \cdot y}{a \cdot b \cdot c}$$

olur.

Örnek: ABC bütün kenarları 10 cm olan eşkenar üçgen, $|AF| = 8$ cm, $|BF| = 2$ cm, $|BD| = 4$ cm, $|BD| = 4$ cm, $|DC| = 6$ cm, $|EC| = 3$ cm, $|AE| = 7$ cm

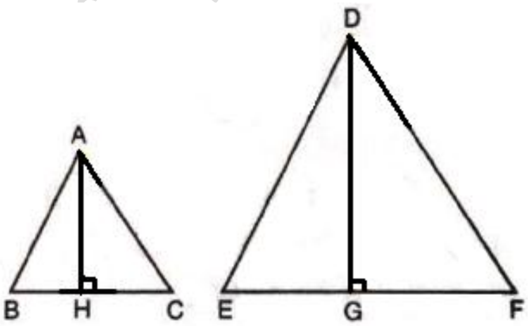


$\frac{A(ADE)}{A(ABC)}$ nedir?

Çözüm:

$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 7}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{9}{50}$$

4.8. Teorem: Benzer iki üçgenin alanları oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF} \text{ ve } \frac{|BC|}{|EF|} = k \text{ ise } \frac{A(ABC)}{A(DEF)} = k^2$$

İspat: $[AH] \perp [ED]$, $[DG] \perp [EF]$ olacak şekilde $[AH]$ ve $[DG]$ yüksekliklerini çizelim. 3.1. Sonuçtan,

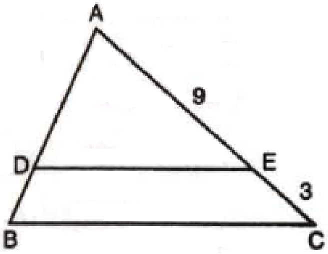
$$\frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AH|}{|DG|} = k$$

dır. Buna göre,

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{\frac{|BC|\cdot|AH|}{2}}{\frac{|EF|\cdot|DG|}{2}} = \frac{|BC|}{|EF|}\cdot\frac{|AH|}{|DG|} = k^2$$

olur.

Örnek: $[DE]//[BC]$, $|AE| = 9\,\text{cm}$, $|EC| = 3\,\text{cm}$ ve $A(DBCE) = 21\,\text{cm}^2$ olduğundan göre, ADE üçgeninin alanı bulunuz.



Çözüm: $[DE]//[BC]$, $\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ ve

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = k$$

olur. $\overset{\Delta}{ADE} = s$ olsun.

$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = k^2$$

$$\frac{s}{s+21} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

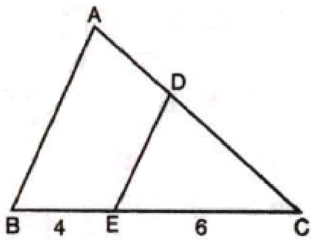
$$\frac{s}{s+21} = \frac{9}{16}$$

$$16s = 9s + 189$$

$$s = 27\ \text{cm}^2$$

olur.

Örnek: $[DE]//[BC]$, $|BE| = 4$ cm ve $|EC| = 6$ cm ise $\dfrac{A(DEC)}{A(ABC)}$ bulunuz.



Çözüm: $[DE]//[BC]$ ise $\overset{\Delta}{DEC} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ ve $\dfrac{|EC|}{|BC|} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = k$ dir.

$$\frac{A(DEC)}{A(ABC)} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} //$$

Benzerlik oranları bazı bilimlerin şekiller içinde geçerlidir.

Harita ölçümleri de benzerlik oranına göre yapılır. Harita, gerçek ölçünün küçültülmesiyle oluşur. Verilen bir ölçek o haritanın o oranda küçültüldüğünü gösterir.

Örnek: $\frac{1}{1\ 500\ 000}$ ölçekli bir haritada alanı 1 cm^2 olan dağın gerçek alanı kaç km^2 dir?

Çözüm: Dağın kendisi ile haritadaki dağın benzerlik oranı haritanın ölçeğine eşittir. Yani dağın kendisinin herhangi iki noktası A ve B, bu iki nokta arasındaki uzaklık $|AB| = p$ ve haritada bu noktalara karşılık gelen A' ve B' noktaları için $|A'B'| = k$ olmak üzere

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{p}{k} = 1\ 500\ 000$$

dir. Dağın gerçek alanı s_1, dağın haritadaki alanı s_2 olmak üzere ve "Benzer iki şeklin alanları oranı, benzerlik oranının karesine eşittir." önermesi gereğince

$$\frac{s_1}{s_2} = (1\ 500\ 000)^2$$

Problemde haritadaki gölün alanı 1 cm^2 verildiğinden s_2 yerine 1 yazıp s_1 değerini bulalım.

$$\frac{s_1}{1} = (15 \cdot 10^5)^2 = 225 \cdot 10^{10}$$

$$s_1 = 225 \cdot 10^{10}\ cm^2 = 225\ km^2$$

bulunur. Buna göre gölün alanı 225 km^2 dir.

Örnek: Manyas gölünün gerçek alanı 160 km^2 dir. Bir haritada Manyas gölünün 13 cm^2 alanında ise bu haritanın ölçeğini bulunuz.

Çözüm: Gölün gerçek alanı $s_1 = 160\ km^2 = 16 \cdot 10^{11}\ cm^2$ dir. Haritadaki alan ise $s_2 = 13\ cm^2$ olacağından;

$$\frac{s_1}{s_2} = k^2$$

$$k^2 = \frac{16 \cdot 10^{11}}{13} = 1230 \cdot 10^8$$

$$k = 35 \cdot 10^4 = 350\ 000$$

bulunur. Buna göre haritanın ölçeği $\frac{1}{350\,000}$ dir.

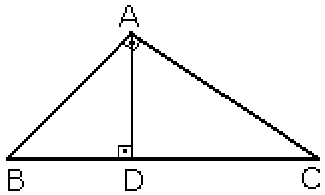
4.2. Sonuç: Benzer üçgenlerin alanları oranı yüksekliklerin oranlarının karelerine eşittir.

$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c, yükseklikleri sırasıyla h_a, h_b, h_c ile $\overset{\Delta}{DFE}$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla d, e ve f, yükseklikleri sırasıyla h_d, h_e, h_f ise,

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{h_a^2}{h_d^2} = \frac{h_b^2}{h_e^2} = \frac{h_c^2}{h_f^2} = k^2$$

dir.

Örnek:



Şekildeki dik üçgende $A(ABD) = 4\ cm^2$, $A(ABC) = 16\ cm^2$ $|AD| = 10\ cm$ dir. Buna göre $|AC|$ kaç cm dir?

Çözüm: "Benzer iki üçgenin alanları oranı yükseklikleri oranlarının karesine eşittir." ABD ~ CBA olduğundan

$$\frac{A(ABD)}{A(ABC)} = \left(\frac{|AD|}{|AC|}\right)^2$$

$$\frac{4}{16} = \frac{100}{|AC|^2}$$

$$|AC| = 20\ cm$$

bulunur.

4.3. Sonuç: Benzer üçgenlerin alanları oranı açıortayların oranlarının karelerine eşittir.

$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c, kenarortayları sırasıyla n_a, n_b, n_c ile $\overset{\Delta}{DFE}$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla d, e ve f, yükseklikleri sırasıyla n_d, n_e, n_f ise,

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{n_a^2}{n_d^2} = \frac{n_b^2}{n_e^2} = \frac{n_c^2}{n_f^2} = k^2$$

dir.

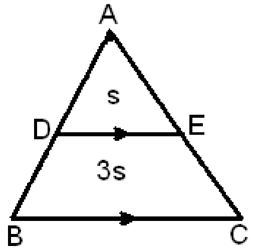
4.4. Sonuç: Benzer üçgenlerin alanları oranı kenarortayların oranlarının karelerine eşittir.

$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c, kenarortayları sırasıyla V_a, V_b, V_c ile $\overset{\Delta}{DFE}$ üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla d, e ve f, yükseklikleri sırasıyla V_d, V_e, V_f ise,

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{V_a^2}{V_d^2} = \frac{V_b^2}{V_e^2} = \frac{V_c^2}{V_f^2} = k^2$$

dir.

4.9. Teorem: Bir üçgende herhangi bir orta taban üçgeni, alanları oranı $\frac{1}{3}$ olan bir üçgeni bir yamuğa ayırır. (Yamuk ileride verilecek, DBCE biçimindeki şekillere denir.)



$[DE]//[BC]$ ise $3A(ADE) = A(DBCE)$

İspat: $[DE]$ orta taban $|DE| = \frac{|BC|}{2}$ ve $[DE]//[BC]$ dir. A.A.A. benzerlik aksiyomu ve 4.8. teoremden,

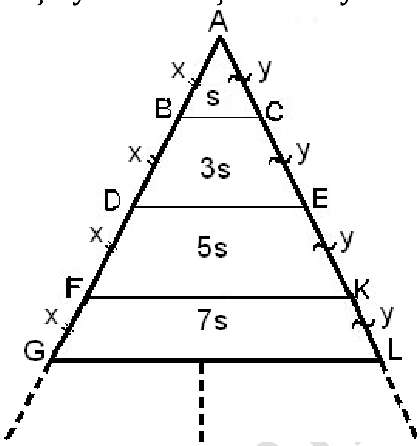
$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \left(\frac{|AE|}{|AC|}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$A(ABC) = 4 \cdot A(ADE)$$

bulunur. Buradan, $A(ADE) = s$ ise $A(ABC) = 4s$ ve $A(DBCE) = 3s$ bulunur.

4.10. Teorem: Bir ABC üçgeninin herhangi bir kenarına, eşit aralıklı bir takım paralel doğru parçaları çizilirse, oluşan ardışık şekillerin alanları, köşeden itibaren 1 den başlayarak ardışık tek sayılarla orantılıdır.



İspat: $A(ABC) = s$ olmak üzere 4.5. Teoremden,

$$\frac{A(ABC)}{A(ADE)} = \frac{x}{2x} \cdot \frac{y}{2y} = \frac{1}{4} \text{ ise } A(BCDE) = 3s$$

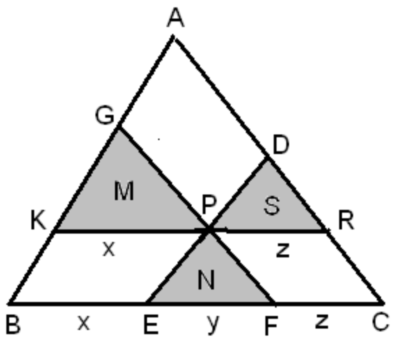
$$\frac{A(ADE)}{A(AFK)} = \frac{2x}{3x} \cdot \frac{2y}{3y} = \frac{4}{9} \text{ ise } A(DEFK) = 5s$$

$$\frac{A(AFK)}{A(AGL)} = \frac{3x}{4x} \cdot \frac{3y}{4y} = \frac{9}{16} \text{ ise } A(FKGL) = 7s$$

...

elde edilir.

4.11. Teorem: Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde alınan herhangi bir noktadan, üçgenin kenarlarına çizilen paralel doğru parçaların oluşturduğu üçgenin alanlarının karekökleri toplamı, ABC üçgenin alanının kareköküne eşittir.



[KR]//[BC], [GF]//[AC], [DE]//[AB] ve $A(GKP) = M$, $A(DPR) = S$, $A(PEF) = N$ ise

$$\sqrt{A(ABC)} = \sqrt{M} + \sqrt{s} + \sqrt{N}$$

dir.

İspat: $|KP| = |BE| = x$, $|EF| = y$, $|PR| = |FC| = z$, $|BC| = a = x + y + z$ olsun. A.A.A. benzerlik aksiyomu ve 4.8. Teorem gereği,

$$G\overset{\Delta}{K}P \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

$$\frac{A(GKP)}{A(ABC)} = \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{A(ABC)}} = \frac{x}{a} \qquad (1)$$

$$P\overset{\Delta}{E}F \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

$$\frac{A(EFP)}{A(ABC)} = \left(\frac{y}{a}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{A(ABC)}} = \frac{y}{a} \qquad (2)$$

$$D\overset{\Delta}{P}R \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

$$\frac{A(DPR)}{A(ABC)} = \left(\frac{z}{a}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{A(ABC)}} = \frac{z}{a} \qquad (3)$$

(1), (2) ve (3) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{A(ABC)}} + \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{A(ABC)}} + \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{A(ABC)}} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a}$$

$$\frac{\sqrt{M}+\sqrt{N}+\sqrt{S}}{\sqrt{A(ABC)}} = \frac{x+y+z}{a} = 1$$

$$\sqrt{A(ABC)} = \sqrt{M} + \sqrt{s} + \sqrt{N}$$

bulunur.

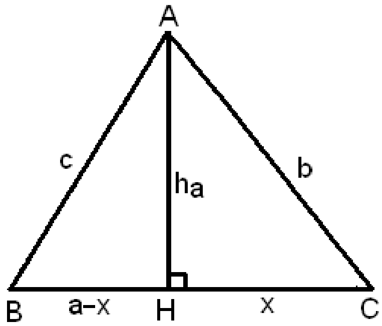
İskenderiyeli Heron, Yunan Asıllı
(M.S. 10 İskenderiye, Mısır – M.S. 75 İskenderiye, Mısır)

4.13. Teorem (Heron Formülü): Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları a, b, c ve çevresi $2u = a + b + c$ olmak üzere,

$$A(ABC) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

dir.

İspat: $[AH] \perp [BC]$ olacak şekilde $[AH]$ yüksekliğini çizelim.



ABH ve ACH üçgenlerinde Pisagor teoreminden;

$$b^2 = h_a^2 + x^2 \qquad (1)$$
$$c^2 = h_a^2 + (a-x)^2$$

olur. Bu iki eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$c^2 - b^2 = (a-x)^2 - x^2$$
$$c^2 - b^2 = a^2 - 2ax + x^2 - x^2$$
$$x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} \qquad (2)$$

bulunur. $2u = a + b + c$ olmak üzere,

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2u - 2c$$
$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2u - 2a$$
$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2u - 2b$$

bulunur. (2) denklemini (1) de yerine yazılırsa,

$$b^2 = h_a^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$$
$$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$$
$$h_a^2 = \left(b - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)$$
$$h_a^2 = \left(\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2a}\right)$$
$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2)$$
$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$$
$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}(2u-2a)(2u-2b)(2u-2c)(2u)$$
$$h_a^2 = \frac{16}{4a^2}u(u-a)(u-b)(u-c)$$
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$
$$\frac{a \cdot h_a}{2} = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$
$$A(ABC) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

bulunur.

Örnek: Kenar uzunlukları $a = 9$ cm, $b = 8$ cm ve $c = 7$ cm olan ABC üçgeninin alanını bulunuz.

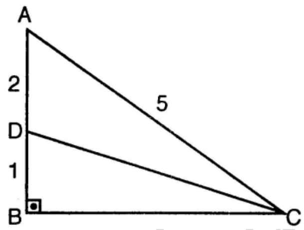
Çözüm: $2u = 9 + 8 + 7$ ise $u = 12$

$$A(ABC) = \sqrt{12(12-9)(12-8)(12-7)} = 12\sqrt{5}\ \text{cm}^2$$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Üçgende Alan Kavramı ve Teoremleri

1.



ABC bir dik üçgen

$|AD| = 2$ cm

$|DB| = 1$ cm

$|AC| = 5$ cm

Verilere göre ADC üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Pisagor teoreminden

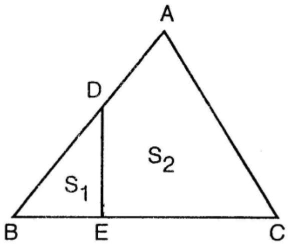
$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$
$$5^2 = 3^2 + |BC|^2$$
$$|BC| = 4$$

bulunur.

$$A(ADC) = A(ABC) - A(DBC)$$
$$= \frac{4 \cdot 3}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2}$$
$$= 4\ \text{cm}^2$$

Cevap: C

2.



ABC bir üçgen

$|BD| = 2|AD|$

$|EC| = 3|BE|$

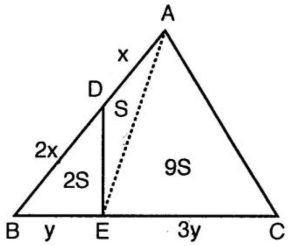
$A(BDE) = S_1$

$A(ADEC) = S_2$

Verilere göre $\frac{S_2}{S_1}$ oranı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

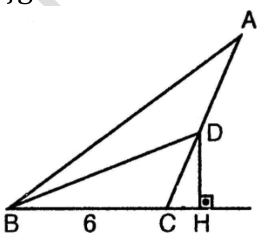
Çözüm: $|AD| = x$ olsun $|BD| = 2x$ olur. $|BE| = y$ olsun $|EC| = 3y$ olur. 4.3. teorem gereği;



$|AD| = x$ ve $A(ADE) = s$ alınırsa $|BD| = 2x$ olup $A(BDE) = 2s$
$|BE| = y$ ve $A(ABE) = 3s$ ise $|EC| = 3y$ ve $A(AEC) = 9s$
$\frac{s_2}{s_1} = \frac{10s}{2s} = 5$
olur.

Cevap: D

3. ABC bir üçgen



$[DH] \perp [HB]$

$|AD| = 2|DC|$

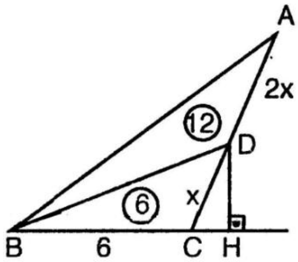
$|BC| = 6$ cm

$A(ABD) = 12\ cm^2$

Verilere göre $|DH|$ kaç cm dir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $|DC| = x$ olsun $|AD| = 2x$ olur. 4.3. teorem gereği;



$|AD| = 2x$ ve $A(ABD) = 12$ alınırsa $|DC| = x$ olup $A(BDE) = 6\ cm^2$ dır

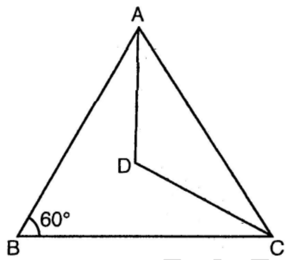
$A(BDE) = 6$

$\frac{6 \cdot |DH|}{2} = 6$

$|DH| = 2\ cm$

Cevap: A

4.



ABC bir üçgen

D, içteğet çemberin merkezi

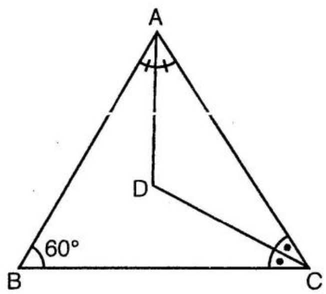
$|AD| = \sqrt{3}$ cm

$|DC| = 4$ cm

Verilere göre A(AED) kaç cm^2 dir? $\left(\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm: D, içteğet çemberin merkezi olduğundan [AD] ve [CD] açıortaylardır.



İki iç açıortayın oluşturduğu açı;

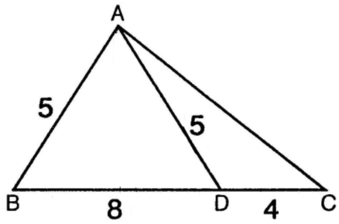
$$m(A\widehat{D}C) = 90 + \frac{m(\widehat{B})}{2} = 90 + \frac{60}{2} = 120^0$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

bulunur.

Cevap: E

5.



ABC bir üçen

IABI = IADI = 5 cm

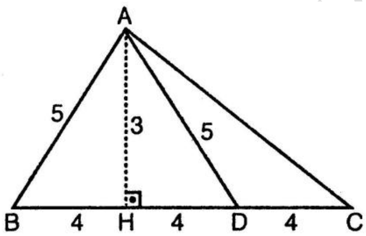
IBDI = 8 cm

IDCI = 4 cm

Verilere göre ADC üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $|AH|$ yükseklik çizgisini çizelim. ABD ikizkenar üçgen olduğundan yükseklik aynı zamanda kenarortaydır. $|BH| = |HD| = 4$



Pisagor teoreminden

$$|AB|^2 = |BH|^2 + |HA|^2$$
$$5^2 = 4^2 + |HA|^2$$
$$|HA| = 3$$

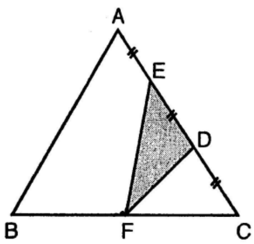
bulunur. ADC üçgeninde yüksekliği $|HA| = 3$ olacağından

$$\frac{|DC| \cdot |AH|}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

olur.

Cevap: E

6.



ABC bir üçgen

IAEI = IEDI = IDCI

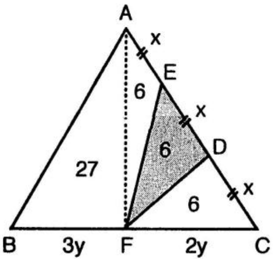
2IBFI = 3IFCI

A(DEF) = 6 cm^2

Verilere göre ABC üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

A) 42 B) 45 C) 48 D) 51 E) 54

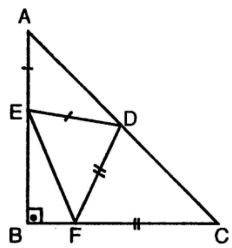
Çözüm: A ile F noktalarını birleştiren doğru parçası çizelim. 4.3. teorem gereği;



$|AE| = |ED| = |DC| = x$, $A(EFD) = 6$ ise $A(AFE) = A(DFC) = 6\ cm^2$
$|BF| = 3y, |FC| = 2y$, $A(AFC) = 18$ ise $A(ABF) = 27\ cm^2$
$A(ADE) = 18 + 27 = 45\ cm^2$

Cevap: B

7.



ABC bir dik üçgen

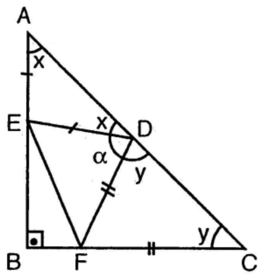
IAEI = IEDI = 2 cm

IDFI = IFCI = 3 cm

Verilere göre A(DEF) kaç cm^2 dir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: AED ve DFC ikizkenar üçgen olduğundan taban açılarına x ve y diyelim. $m(E\widehat{D}F) = \alpha$ diyelim.



ABC üçgeninde iç açılar toplamı:

$x + y + 90 = 180$

$x + y = 90^0$

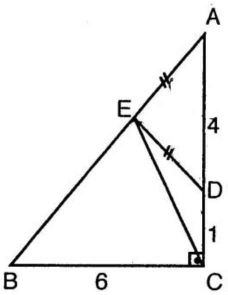
$\alpha = 90^0$

dir. O halde DEF dik üçgendir.

$$A(E\widehat{D}F) = \frac{|ED|\cdot|DF|}{2} = \frac{2\cdot 3}{2} = 3\ \text{cm}^2$$

Cevap: A

8.



ACB bir dik üçgen

|AE| = |ED|

|AD| = 4 cm

|DC| = 1 cm

|BC| = 6 cm

Verilere göre A(BEC) kaç cm^2 dir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

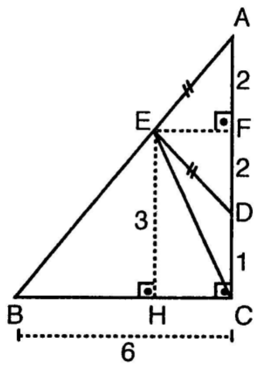
Çözüm: AED ikizkenar üçgen olduğundan [EF] dikmesini çizelim.

$$|AF| = |FD| = 2\ \text{cm}$$

olur. E noktasından [EH] dikmesini çizelim.

$$|EH| = |FC| = 3\ \text{cm}$$

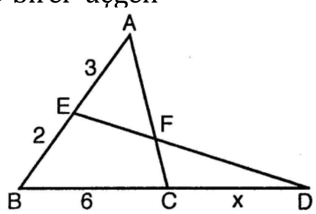
olur.



$$A(BEC) = \frac{|BC|\cdot|EH|}{2} = \frac{6\cdot 3}{2} = 9\ \text{cm}^2$$

Cevap: E

9. ABC ve BED birer üçgen



|AE| = 3 cm

|BE| = 2 cm

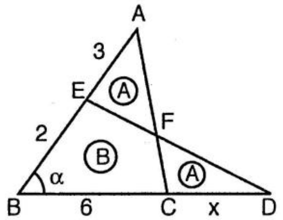
|BC| = 6 cm

|CD| = x

Verilere göre A(AEF) = A(FCD) olduğuna göre |CD| = x kaç cm dir?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Çözüm: A(AEF) = A(FCD) = A ve A(BCFE) = B olsun. A(ABC) = A(BDE)



$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin\alpha$ ve $A(BDE) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (6 + x) \cdot \sin\alpha$

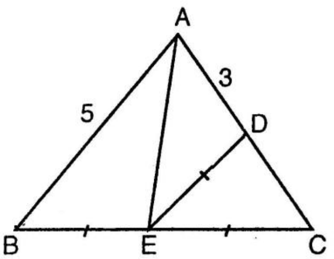
$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (6 + x) \cdot \sin\alpha$

$|CD| = x = 9$ cm

bulunur.

Cevap: C

10.



ABC bir üçgen

[AB] // [DE]

|BE| = |EC| = |ED|

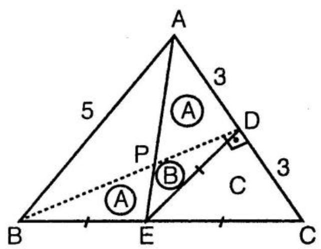
|AB| = 5 cm

|AD| = 3 cm

Verilere göre A(AEC) kaç cm² dir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: B ile D noktalarını birleştirelim. Muhteşem üçlü $[BD] \perp [AC]$ olarak oluşur. ABD dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa $|BD| = 4$ olur. (Neden?)



[AB]//[DE] ve |BE| = |EC| den |AD| = |DC| = 3 cm dir. 4.1. Sonuçtan A(APD) = A(BEP) = A dir. A(ADE) = B ve A(EDC) = C olarak seçelim.

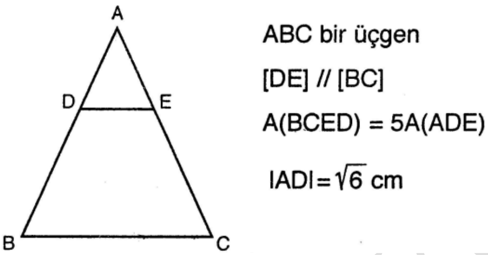
$A(AEC) = A + B + C = A(BDC)$

$A(BDC) = \frac{|BD| \cdot |DC|}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\ cm^2$

Cevap: B

Üçgende Alanda Benzerlik Teoremleri

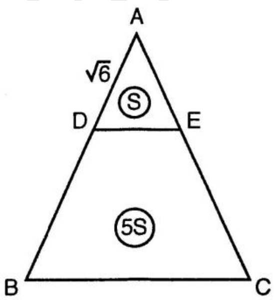
11.



Verilere göre |AB| kaç cm dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: [DE]//[BC] olduğundan $\overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ dir. $A(ABE) = S$ alırsak $A(BCED) = 5A$ olur.



$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \frac{S}{6S} = k^2$ ise $k = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{|AD|}{|AB|}$ olup $\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{|AB|}$ ise $|AB| = 6$ cm

Cevap: C

12. Benzerlik oranı 5 olan iki üçgenin alanları toplamı 52 cm² olduğuna göre, bu iki üçgenin alanları farkı kaç cm² dir?

A) 44 B) 45 C) 46 D) 48 E) 50

Çözüm: İki üçgenin benzerlik oranı $k = 5$ ise alanları oranı 25'dir. Yani üçgenin birinin alanı S ise diğerinin alanı 25S dir. Alanları toplamı 52 cm^2 olduğuna göre;

$$S + 25S = 52 \text{ ise } S = 2$$

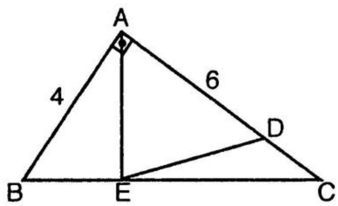
olur. Buna göre bir üçgenin alanı $S = 2$ cm^2, diğeri $25S = 50$ cm^2 dir. Alanları farkı ise;

$$25S - S = 50 - 2 = 48 \text{ cm}^2$$

dir.

Cevap: D

13.



BAC bir dik üçgen

$|EC| = 3|BE|$

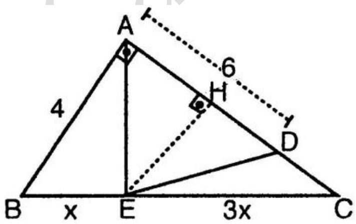
$|AB| = 4$ cm

$|AD| = 6$ cm

Verilere göre A(AED) kaç cm^2 dir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $|BE| = x$ alınırsa $|EC| = 3x$ olur. E noktasından [EH] dikmesini çizelim.



$\overset{\triangle}{HEC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ dir. O halde;

$$\frac{|EH|}{|AB|} = \frac{|EC|}{|BC|}$$

$$\frac{|EH|}{4} = \frac{3x}{4x}$$

$$|EH| = 3 \text{ cm}$$

olur. Buna göre AED üçgenin alanı;

$$A(AED) = \frac{|AD| \cdot |EH|}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$$

olarak bulunur.

Cevap: E

14. Bir A üçgeninin alan ölçüsü 32 br^2, B üçgeninin alan ölçüsü 512 br^2 dir. Buna göre, B üçgeni A üçgeninin kaç katıdır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

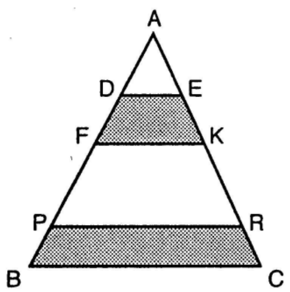
Çözüm: 4.8. teoremine göre,

$$B = k \cdot A$$
$$B^2 = k^2 \cdot A^2$$
$$512 = k^2 \cdot 32$$
$$k = 4$$

dir.

Cevap: B

15.



ABC bir üçgen

[DE]//[FK]//[PR]//[BC]

|AD| = 3 cm

|DF| = 2 cm

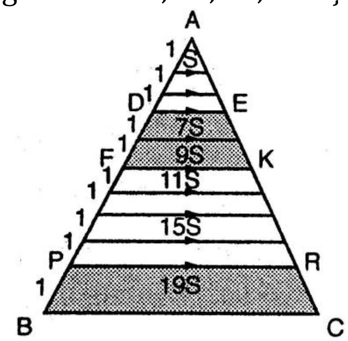
|FP| = 4 cm

|BP| = 1 cm

Taralı bölgenin alanı 70 cm^2 ise A(ABC) kaç cm^2 dir?

A) 170 B) 180 C) 190 D) 200 E) 210

Çözüm: AB kenarını eşit parçalara bölerek, tabana paralel doğrular çizelim. 4.10. teorem gereği alanları S, 3S, 5S, ... biçiminde olur.



Taralı alanların toplamı $7S + 9S + 19S = 70$ ise $S = 2$ olur.

$$A(ABC) = 100S = 200 \text{ cm}^2$$

elde edilir.

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.