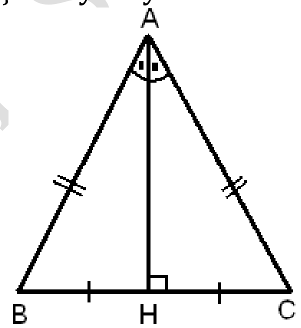
5. BÖLÜM
ÜÇGEN ÇEŞİTLERİ

Üçgen çeşitleri, 2. bölümde tanımlanmıştır. Bu bölümde açılarına göre üçgenler çeşitlerinden dik üçgen, kenarlarına göre üçgen çeşitlerinden ikizkenar ve eşkenar üçgen analiz edilecektir. İkizkenar üçgende anlatılan özelliklerin tamamı eşkenar üçgende de anlatılacaktır. Bu sebepten eşkenar üçgen ikizkenar üçgenin tüm özelliklerini taşır.

İKİZKENAR ÜÇGEN

İki kenarı eşit olan üçgenlere ikizkenar üçgen dendiğini 2.5. Tanımdan biliyoruz. Bu kısımda ikizkenara ait analizler yapılacaktır.

5.1. Teorem: İkizkenara bir üçgende, ikiz olmayan kenara (tabana) ait kenarortay, aynı zamanda açıortay ve yüksekliktir.



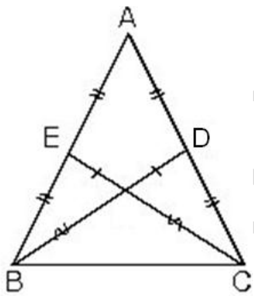
$|AH| = V_a, |BH| = |HC|, |AB| = |AC| \Leftrightarrow h_a = V_a = n_A$

İspat: $|BH| = |HC|$, $|AB| = |AC|$ ve ABH ile ACH üçgenlerinin $|AH| = V_a$ aynı olduğundan K.K.K. eşlik aksiyomundan $ABH \cong ACH$ dir. Eş üçgenlerin karşılıklı tüm açıları ve kenarları eş olduğundan $m(B\widehat{A}H) = m(C\widehat{A}H)$ dir ve [AH] açıortay olur.

Eş komşu bütünler açılardan $m(A\widehat{H}B) = m(A\widehat{H}C)$ olacağından $[BC] \perp [AH]$ olur ve [AH] yüksekliktir.

5.1. Sonuç: Bir üçgende,
a) Açıortay aynı zamanda yükseklik ise,
b) Açıortay aynı zamanda kenarortay ise,
c) Yükseklik aynı zamanda kenarortay ise
bu üçgen ikizkenar üçgendir.

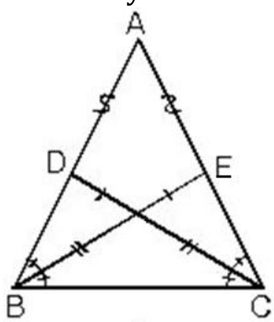
5.2. Teorem: İkizkenar bir üçgenin eş kenarlarına ait kenarortaylar birbirine eşittir. Kenarortayların kesim noktasının ayırdığı parçalar da birbirine eşittir.



$|AB| = |AC|$ ve $|AE| = |EB| = |AD| = |DC|$ ise $|BD| = |CE|$

İspat: $|EB| = |DC|$, $|BC| = |BC|$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olduğundan K.A.K. eşlik aksiyomuna göre $E\overset{\Delta}{B}C \cong D\overset{\Delta}{C}B$ dir. O halde eş üçgenlerde karşılıklı elemanlar eş olduğundan, $|BD| = |CE|$ olur.

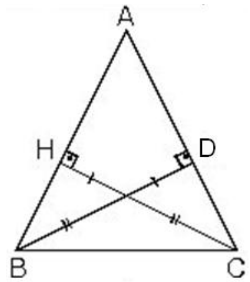
5.3. Teorem: İkizkenar bir üçgenin, eşit açılarına ait açıortaylar birbirine eşittir. Açıortaylar birbirini aynı oranda bölerler.



$|AB| = |AC|$, [BE]ve [DC] açıortay ise $|BE| = |CD|$

İspat: $m(\hat{B}) = m(\hat{C})$, $m(E\hat{B}C) = m(D\hat{C}B)$ ve iki açının eşit olduğundan üçüncü açıda eşit olacağından A.A.A. eşlik aksiyomu gereği $\overset{\Delta}{DBC} \cong \overset{\Delta}{ECB}$ dir. O halde eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olduğundan, $|BE| = |CD|$ olur.

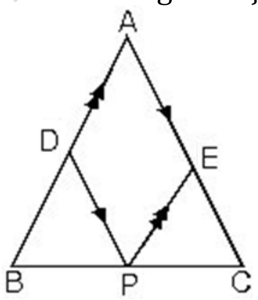
5.4. Teorem: İkizkenar bir üçgenin, eşit açılarına ait yükseklikler birbirine eşittir. Bu durumda yüksekliklerin kesim noktasının ayırdığı parçalar eşit olur.



$|AB| = |AC|$, $[BD] \perp [AC]$ ve $[HC] \perp [AB]$ ise $|BD| = |HC|$

İspat: $m(\hat{B}) = m(\hat{C})$, $m\big(B\hat{H}C\big) = m\big(C\hat{D}B\big) = 90^0$ ve iki açının eşit olduğundan üçüncü açıda eşit olacağından A.A.A. eşlik aksiyomu gereği $\overset{\Delta}{HBC} \cong \overset{\Delta}{DCB}$ dir. O halde eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olduğundan, $|BD| = |HC|$ olur.

5.5. Teorem: İkizkenar üçgende tabandan ikizkenarlara çizilen paralel doğruların toplamı, ikizkenarların uzunluğuna eşittir.



$|AB| = |AC|$, $[DP]//[AC]$, $[AB]//[PE] \Leftrightarrow |AB| = |AC| = |DP| + |PE|$

İspat: Paralel doğrular arasında kalan paralel doğru parçaları eş olduğundan

$$|PE| = |AD| \qquad (1)$$

dir. Yöndeş açılardan $m(D\hat{P}B) = m(\hat{C})$ ise $m(D\hat{P}B) = m(\hat{B})$ olup

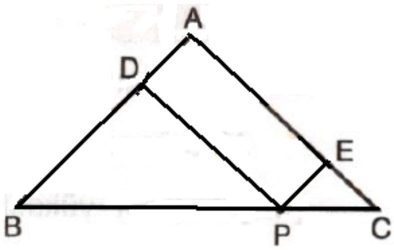
$$|DP| = |DB| \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) den,

$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AD}| + |\mathrm{DB}|$$
$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{PE}| + |\mathrm{DP}|$$

bulunur.

Örnek: $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AC}|$, $[\mathrm{DP}]//[\mathrm{AC}]$, $[\mathrm{AB}]//[\mathrm{PE}]$, $|\mathrm{AB}| + |\mathrm{AC}| = 16\ cm$ ise $|\mathrm{PE}| + |\mathrm{PE}|$ toplamı nedir?

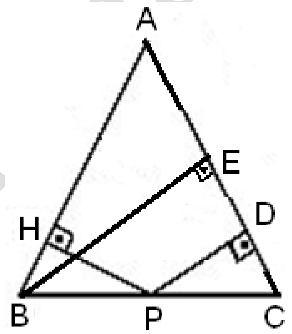


Çözüm: $|\mathrm{AB}| + |\mathrm{AC}| = 16$ cm ise $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AC}| = 8$ cm olduğundan,

$$|\mathrm{PE}| + |\mathrm{PE}| = 8 \text{ cm}$$

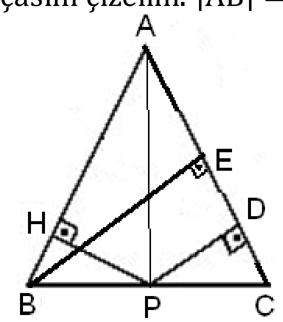
olur.

5.6. Teorem: İkizkenar üçgende ikiz olmayan kenar üzerindeki herhangi bir noktadan ikizkenarlara çizilen dikmelerin toplamı, ikizkenarlara ait yüksekliği verir.



$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AC}| \Leftrightarrow |\mathrm{BE}| = |\mathrm{HP}| + |\mathrm{PD}|$

İspat: $[\mathrm{AP}]$ doğru parçasını çizelim. $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AC}| = a$ olsun.

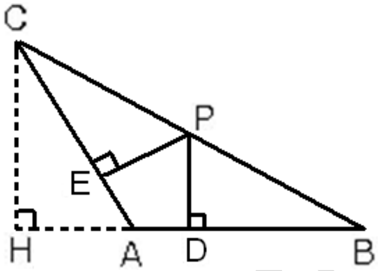


$$A(A\overset{\Delta}{B}C) = A(A\overset{\Delta}{P}B) + A(C\overset{\Delta}{P}A)$$

$$\frac{a \cdot |BE|}{2} = \frac{a \cdot |HP|}{2} + \frac{a \cdot |PD|}{2}$$

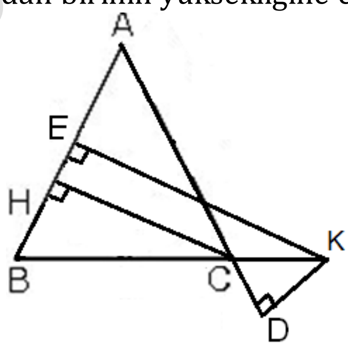
$$|BE| = |HP| + |PD|$$

Örnek: Şekilde H, A, B doğrusal noktalar $[CH] \perp [HA]$, $[PE] \perp [AC]$, $[PD] \perp [AB]$ ve $|AB| = |AC|$ dir. $|PE| = 6$ cm ve $|HC| = 10$ cm ise $|PD|$ yi bulunuz.



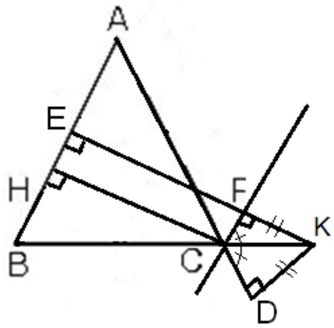
Çözüm: $|CH| = |PE| + |PD|$
$10 = 6 + |PD|$
$|PD| = 4$ cm

5.7. Teorem: İkizkenar bir üçgende taban kenarının uzantısı üzerinde alınan bir noktadan eş kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları farkının mutlak değeri, eş kenarlardan birinin yüksekliğine eşittir.



$$\big||KE| - |KD|\big| = |CH|$$

İspat: $[AB]//d$ olacak şekilde C noktasından geçen d doğrusu çizersek,



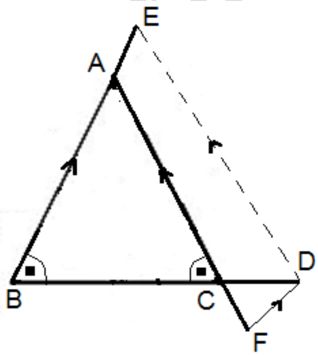
Yöndeş açılardan $m(B\hat{A}C) = m(F\hat{K}C)$
Ters açılardan $m(B\hat{C}A) = m(K\hat{C}D)$

olduğundan $\overset{\triangle}{CFK} \cong \overset{\triangle}{CDK}$ eşitliği yazılabilir. Buna göre $m(C\hat{K}F) = 90$ olduğundan $|EF| = |HC|$ dir. O halde,

$$\big||KE| - |KD|\big| = |CH|$$

bulunur.

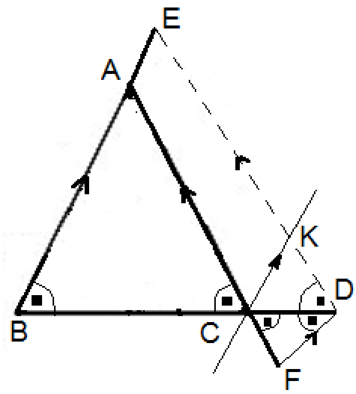
5.8. Teorem: İkizkenar bir üçgende taban kenarlarının uzantısı üzerinde alınan bir noktadan eş kenarlara çizilen paralellerin, eş kenarının uzantılarını kestikleri noktalara olan uzaklıklarının farkı, eş kenarlardan birinin uzunluğuna eşittir.



$|DE| - |DF| = |AB| = |AC|$

İspat: İç ters açılardan $m(A\hat{B}C) = m(B\hat{D}F)$
Ters açılardan $m(B\hat{C}A) = m(D\hat{C}F)$

olduğundan CDF üçgeni ikizkenar üçgendir ve $|DF| = |CF|$ olur.

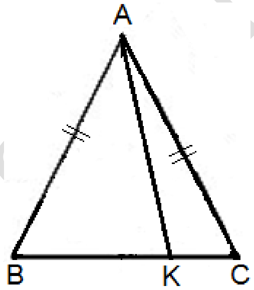


$m(A\hat{C}B) = m(E\hat{D}B)$ yöndeş açılar olduğundan EAD üçgeni de ikizkenar üçgendir. $[AB]//[KC]$ olacak şekilde çizilen $[KC]$ doğrusu için EACK bir paralelkenardır ve $|EK| = |AC|, |CF| = |KD|$ yazılabilir. Buradan,

$$|DE| - |DF| = |AB| = |AC|$$

elde edilir.

5.9. Teorem: İkizkenar bir üçgenin tabanında alınan herhangi bir nokta K olmak üzere;



$$|AB|^2 = |AC|^2 = |AK|^2 + |BK| \cdot |KC|$$

dir.

İspat: ABC ikizkenar üçgen olduğundan $|AB| = |AC|$ dir. Stewart teoreminden,

$$|AK|^2 = \frac{|AB|^2 \cdot |KC| + |AC|^2 \cdot |BK|}{|BK| + |KC|} - |BK| \cdot |KC|$$

$$|AK|^2 = \frac{|AB|^2 \cdot (|KC| + |BK|)}{|BK| + |KC|} - |BK| \cdot |KC|$$

$$|AK|^2 = |AB|^2 - |BK| \cdot |KC|$$

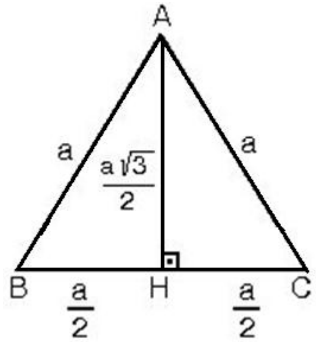
$$|AB|^2 = |AK|^2 + |BK| \cdot |KC|$$

olur.

EŞKENAR ÜÇGEN

Üç kenarı da eşit olan üçgenlere eşkenar üçgen dendiğini 2.6. Tanımdan biliyoruz. Bu kısımda eşkenar üçgenlere ait analizler yapılacaktır.

5.10. Teorem: Bir kenarının uzunluğu a birim olan ABC eşkenar üçgeninde,



i) $|AH| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ br

ii) $A(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ br²

dir.

İspat: $[BC] \perp [HA]$ olacak şekilde $[AH]$ dikmesini çizelim. 5.1. teoreme göre $[AH]$ kenarortaydır.

i) ABH dik üçgeninde $[AH]$ kenarortay olduğundan $|BH| = |HC| = \frac{a}{2}$ ise dir. Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$|AB|^2 = |BH|^2 + |AH|^2$$

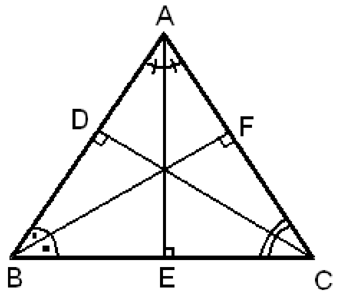
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + |HC|^2$$

$$|AH| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ br}$$

olur.

ii) $A(ABC) = \frac{|BC| \cdot |AH|}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ br²

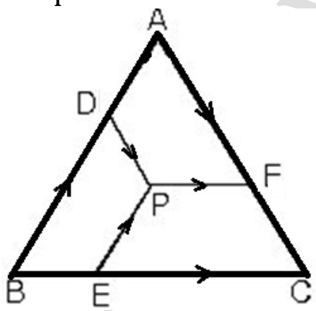
5.11. Teorem: Eşkenar üçgenin bütün kenarlarına ait, kenarortay, açıortay ve yüksekliklerinin uzunlukları eşittir.



ABC Eşkenar Üçgen $\Leftrightarrow h_a = V_a = n_A = h_b = V_b = n_B = h_c = V_c = n_C$

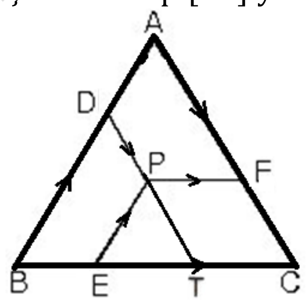
Bu teoremin ispatı 5.2. Teorem, 5.3. Teorem, 5.4. Teoremlerine benzer yöntemle yapılır.

5.12. Teorem: Eşkenar üçgenin içindeki herhangi bir noktadan kenarlara çizilen paralellerin toplamı bir kenar uzunluğuna eşittir.



[PF]//[BC], [DP]//[AC] ve [PE]//[AB] $\Leftrightarrow$ $|BC| = |PD| + |PE| + |PF|$

İspat: [PD] doğru parçasını uzatıp [BC] yi T noktasında keselim.



ABC eşkenar üçgen olduğundan yöndeş açılar kullanılarak PET ve DBT eşkenar üçgenleri elde edilir.

PET eşkenar üçgen olduğundan $|PT| = |PE|$ (1)

DBT eşkenar üçgen olduğundan $|BT| = |DT|$ (2)

dir. (1) ve (2) eşitliğinden,

$|BT| = |PD| + |PT| = |PD| + |PE|$ (3)

dir. Paralel doğruların arasında kalan paralel doğru parçaları eş olduğundan

$|PF| = |TC|$ (4)

dir. (3) ve (4) eşitliklerinden,

$|BC| = |BT| + |TC| = |PD| + |PE| + |PF|$

bulunur.

Örnek: ABC eşkenar üçgeninde [PF]//[BC], [PD]//[AC] ve [PE]//[AB] dir. $|PE| = 6$ cm, $|PF| = 5$ cm ve ABC üçgeninin uzunluğu 45 cm ise $|PD|$ yi bulunuz.

Çözüm: $Ç = 3|AB|$

$45 = 3|AB|$

$|AB| = 15$ cm

olur. 5.12. Teorem gereğince,

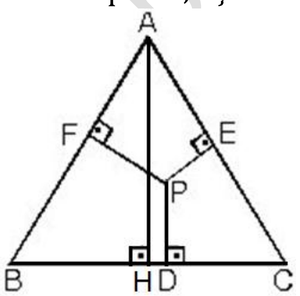
$|BC| = |PD| + |PE| + |PF|$

$15 = |PD| + 5 + 6$

$|PD| = 4$ cm

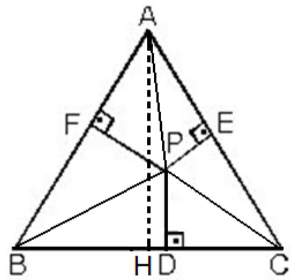
bulunur.

5.13. Teorem: Eşkenar üçgenin içindeki herhangi bir noktadan kenarlara çizilen dik uzunlukların toplamı, eşkenar üçgene ait yüksekliği verir.



$[PF] \perp [AB], [PD] \perp [BC]$ ve $[PE] \perp [AC]$ ise $|AH| = |PD| + |PE| + |PF|$

İspat: Eşkenar üçgenin bir kenarı a birim olsun. [AP], [PC], [BP] doğru parçalarını çizelim.

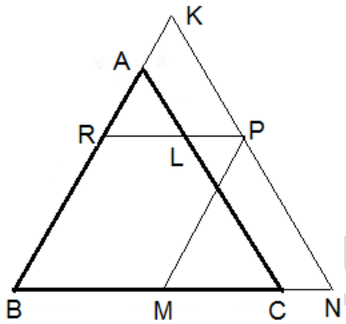


$A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{APB}) + A(\overset{\triangle}{BPC}) + A(\overset{\triangle}{CPA})$

$$\frac{a\cdot|AH|}{2}=\frac{a\cdot|PF|}{2}+\frac{a\cdot|PD|}{2}+\frac{a\cdot|PE|}{2}$$

$$|AH| = |PF| + |PD| + |PE|$$

5.14. Teorem: Bir eşkenar üçgenin dış bölgesinde alınan herhangi bir P noktasından üçgenin kenarlarına çizilen paralel doğrular için;



$$a = |PK| + |PM| - |PL|$$

dir.

İspat: P noktasından çizilen paralellerin kesişimi ile elde edilen üçgenlerin her biri eşkenar üçgendir. BMPR paralelkenarından;

$$|BM| = |PR| = |PK|$$

CNPL paralelkenarından $|PL| = |CN|$ yazılabilir. PMN eşkenar üçgeninden;

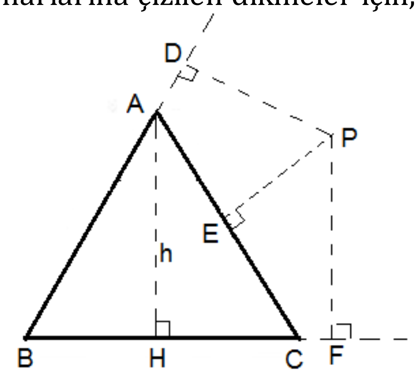
$$|CM| = |MN| - |CN|$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikler yardımıyla;

$$\begin{aligned} a &= |PK| + |MN| - |CN| \\ &= |PK| + |MN| - |PL| \end{aligned}$$

bulunur.

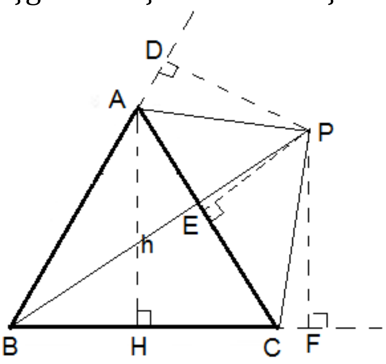
5.15. Teorem: Bir eşkenar üçgenin dış bölgesinde alınan herhangi bir P noktasından üçgenin kenarlarına çizilen dikmeler için,



$$h = |PD| + |PF| - |PE|$$

olur.

İspat: P noktasını üçgenin köşelerine birleştirirsek ABC üçgeni için;



$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = A(\overset{\Delta}{ABP}) + A(\overset{\Delta}{BCP}) - A(\overset{\Delta}{ACP})$$

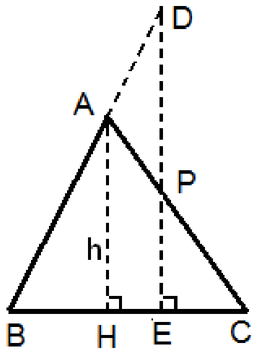
$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{|AB| \cdot |PD|}{2} + \frac{|BC| \cdot |PF|}{2} - \frac{|AC| \cdot |PE|}{2}$$

$$ah = a \cdot |PF| + a \cdot |PD| - a \cdot |PE|$$

$$h = |PD| + |PF| - |PE|$$

elde edilir.

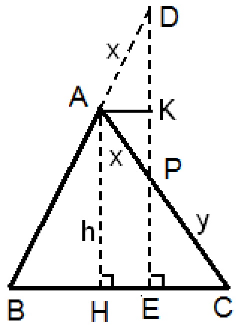
5.16. Teorem: Eşkenar bir üçgenin kenarlarından biri üzerinde alınan herhangi bir P noktasından kenarlardan birine çizilen dikme için;



$$|PE| + |DE| = 2h$$

olur.

İspat: $[DE] \perp [AK]$ olacak şekilde $[AK]$ çizilirse;



$$m(E\widehat{P}C) = m(A\widehat{P}K) = m(A\widehat{D}K) = 30^0$$

olur. $|AP| = x, |PE| = y$ dersek,

$$|KP| = \frac{x\sqrt{3}}{2}, |PE| = \frac{y\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. APD ikizkenar üçgen olduğundan;

$$|DK| = |KP| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

olacaktır. Buna göre,

$$|AH| = h = |KP| + |PE| = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}$$

$$|KP| + |PE| = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}$$

dir. Ayrıca,

$$|DE| = |DK| + |KP| + |PE|$$

$$|PE| + |DE| = |PE| + |DK| + |KP| + |PE|$$

$$|PE| + |DE| = \frac{y\sqrt{3}}{2} + \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}$$

$$|PE| + |DE| = 2h$$

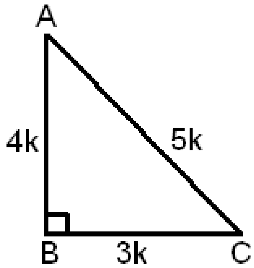
olur.

DİK ÜÇGEN

Bir açısının ölçüsü 90^0 olan üçgenlere dik üçgen ve dik üçgende 90^0 karşısındaki kenara hipotenüs dendiğini 2.8 tanımda görmüştük. Bu kısımda dik üçgene ait analizler yapılacak. Dik üçgen kavramı Pisagor teoremi, Öklid teoremi ve Muhteşem üçlü kavramları arasındaki ilişkilerden oluşur. Şimdi bunların izahına geçelim.

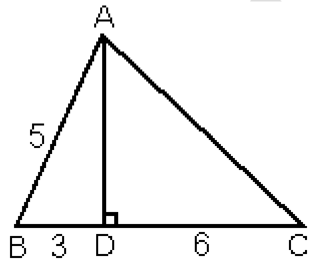
Pisagor teoremi 2. Bölüm 2.14. teoremde izah edildi. Şimdi bu teoreme ait sonuçlar verilecektir.

5.2. Sonuç (3–4–5 Üçgeni): Kenar uzunlukları 3–4–5 ile orantılı olan üçgenler dik üçgendir.



Mesela 6–8–10; 9–12–15; 12–16–20 üçgenleri gibi…

Örnek: Bir ABC üçgeninde $[BC] \perp [AD]$, $|AB| = 5$ cm, $|BD| = 3$ cm, $|DC| = 6$ cm ise $|AC|$ kaç cm'dir?



Çözüm: ABD üçgeninde 3–4–5 üçgeninden $|AD| = 4$ cm'dir. Pisagor teoreminden ADC üçgeninde,

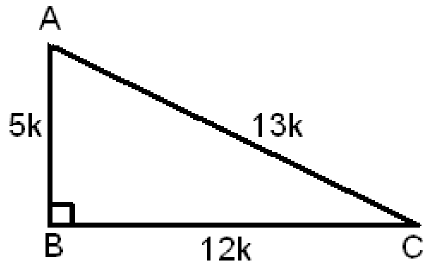
$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2$$

$$|AC|^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$|AC| = 2\sqrt{13}$$

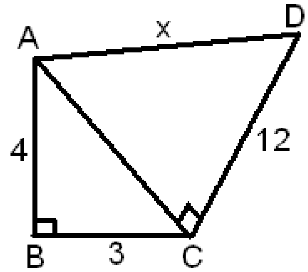
dir.

5.3. Sonuç (5–12–13 Üçgeni): Kenar uzunlukları 5–12–13 ile orantılı olan üçgenler dik üçgendir.



Mesela 10–24–26; 15–36–39; 20–48–52 üçgenleri gibi…

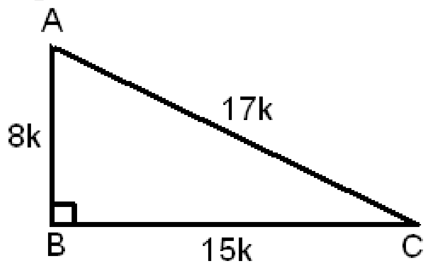
Örnek: ABC ve ACD bir üçgen [BC] ⊥ [AB], [AC] ⊥ [CD], |AB| = 4 cm, |BC| = 3 cm, |DC| = 12 cm ise |AD| kaç cm'dir?



Çözüm: ABC üçgeninde 3–4–5 üçgeninden |AC| = 5 cm'dir.

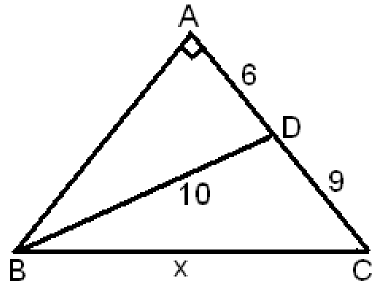
ACD üçgeni 5–12–13 üçgeni gereği |AD| = 13 cm'dir.

5.4. Sonuç (8–15–17 Üçgeni): Kenar uzunlukları 8–15–18 ile orantılı olan üçgenler dik üçgendir.



Mesela 16–30–34; 24–45–51; 32–60–68 üçgenleri gibi…

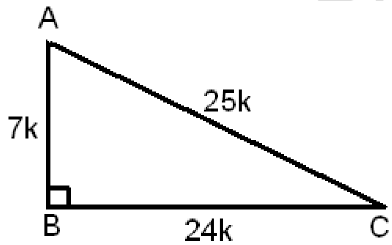
Örnek: ABC bir üçgen [AC] ⊥ [AB], |AD| = 6 cm, |DC| = 9 cm, |BD| = 10 cm ise |BC| kaç cm'dir?



Çözüm: ABD üçgeninde 3–4–5 üçgeninden $|AB| = 8$ cm dir.

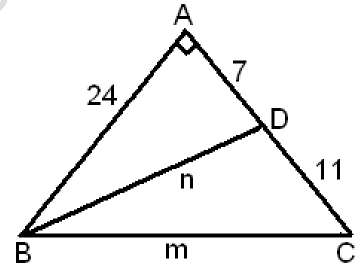
ABC üçgeninde $|AC| = 6 + 9 = 15$ cm olup 8–15–17 üçgeninden $|BC| = 17$ cm'dir.

5.5. Sonuç (7–24–25 Üçgeni): Kenar uzunlukları 7–24–25 ile orantılı olan üçgenler dik üçgendir.



Mesela 14–48–50; 21–72–75; 28–96–100 üçgenleri gibi…

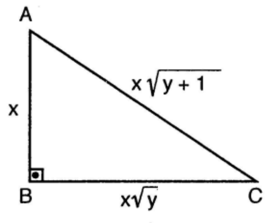
Örnek: ABC bir üçgen $[AC] \perp [AB]$, $|AD| = 7$ cm, $|DC| = 11$ cm, $|BD| = 24$ cm ise $|BC|$ kaç cm'dir?



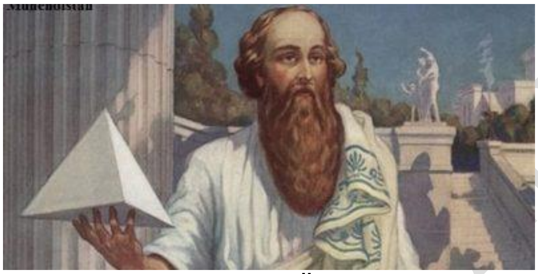
Çözüm: ABD üçgeninde 7–24–25 üçgeninden $n = 25$ cm'dir.

ABC üçgeninde $|AC| = 18$ cm olup 3–4–5 üçgeninden 18–24–30 ifadesi için $m = 30$ cm'dir.

5.6.. Sonuç: Bir dik üçgende bir dik kenar x, diğer dik kenar $\sqrt{y}$ ise hipotenüs $x\sqrt{y+1}$ dir.

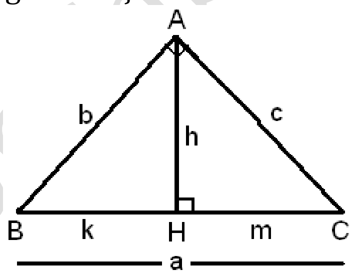


//



Euclides (Öklid)
(M.Ö. 330, İskenderiye, Mısır – M.Ö. 275, Yunanistan)

5.17. Teorem (Öklid Teoremi): Bir ABC dik üçgeni ve bu dik üçgen üzerindeki uzunlukları aşağıdaki biçimde olsun.



i) $h^2 = k \cdot m$
ii) $b^2 = k \cdot a = k(k+m)$
iii) $c^2 = m \cdot a = m(k+m)$
iv) $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

dir.

İspat: $m(B\hat{A}H) = \alpha$, $m(H\hat{A}C) = \beta$ alınırsa, $\alpha + \beta = 90^0$ olacağından $m(A\hat{B}C) = \beta$ ve $m(A\hat{C}H) = \alpha$ olur.

i) $A\overset{\Delta}{B}H \sim C\overset{\Delta}{A}H$ olduğundan

$$\frac{|AB|}{|CA|}=\frac{|BH|}{|AH|}=\frac{|HA|}{|HC|}$$

$$\frac{b}{c}=\frac{k}{h}=\frac{h}{m}$$

$$h^2=k\cdot m$$

olur.

ii) $\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{CBA}$ olduğundan

$$\frac{|AB|}{|CB|}=\frac{|BH|}{|BA|}=\frac{|HA|}{|HC|}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{k}{b}=\frac{h}{c}$$

$$b^2=k\cdot a=k(k+m)$$

olur.

iii) $\overset{\triangle}{CAH}\sim\overset{\triangle}{CBA}$ olduğundan

$$\frac{|CA|}{|CB|}=\frac{|AH|}{|BA|}=\frac{|HC|}{|AC|}$$

$$\frac{c}{a}=\frac{h}{b}=\frac{m}{c}$$

$$c^2=m\cdot a=m(k+m)$$

olur.

iv) ABC üçgeninin alanından $\frac{a\cdot h}{2}=\frac{b\cdot c}{2}$ yazılır.

$$h=\frac{b\cdot c}{a}$$

$$h^2=\left(\frac{b\cdot c}{a}\right)^2$$

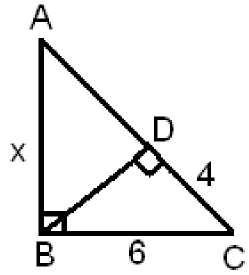
$$\frac{1}{h^2}=\frac{a^2}{b^2c^2}$$

olur. Pisagor teoremine göre $a^2=b^2+c^2$ olduğundan

$$\frac{1}{h^2}=\frac{c^2+b^2}{b^2c^2}=\frac{c^2}{b^2c^2}+\frac{b^2}{b^2c^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

bulunur.

Örnek: ABC üçgeninde $[BC]\perp[AB]$, $|DC|=4$ cm, $|BC|=6$ cm ise $|AB|$ kaç cm'dir?



Çözüm: ABC üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa,

$$|BC|^2=|CD|\cdot|CA|$$
$$6^2=4\cdot|CA|$$
$$|CA|=9 \text{ cm}$$

bulunur. Buna göre,

$$|AC|=|AD|+|DC|$$
$$9=|AD|+4$$
$$|AD|=5$$

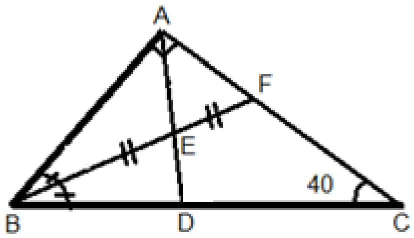
dir. Yine Öklid teoremi uygulanırsa,

$$|AB|^2=|AD|\cdot|CA|$$
$$x^2=9\cdot5$$
$$x=3\sqrt{5} \text{ cm}$$

olur. //

Dik üçgene ait Muhteşem üçlü teoremini 2. bölüm 2.4. teoremde anlatılmıştı. Şimdi burada Muhteşem üçlü teoremine ait bir örnek ve bir teorem verilecektir.

Örnek: ABC dik üçgeninde, [BF], B açısının açıortayıdır. $|BE|=|EF|$ ve $m(\hat{C})=40^0$ ise AEB açısının ölçüsünü bulunuz.

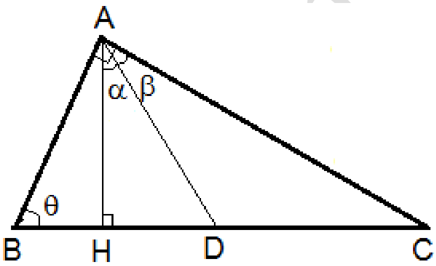


Çözüm: $m(\hat{C}) = 40^0$ ise $m(\hat{B}) = 50^0$ ve $m(A\hat{B}F) = m(F\hat{B}C) = \frac{50}{2} = 25^0$ dir. ABF üçgeni dik üçgen olduğundan $|BE| = |EF| = |AE|$ olup $m(B\hat{A}D) = 50^0$ dir.

$$m(A\hat{E}B) = 180 - m(A\hat{E}B) - m(A\hat{B}E)$$
$$m(A\hat{E}B) = 180 - 25 - 50 = 105^0$$

bulunur.

5.18. Teorem: Bir ABC dik üçgeninde hipotenüse ait kenarortay ile yükseklik arasında kalan açının ölçüsü, diğer iki açı arasındaki farkın mutlak değerine eşittir.



$$\alpha = m(H\hat{A}D) = |m(\hat{B}) - m(\hat{C})|$$

İspat: Dik üçgende muhteşem üçlü teoremine göre “Hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit” olacağından, ADC ikizkenar üçgendir.

$\beta = m(D\hat{A}C) = m(A\hat{C}D)$

ABH dik üçgeninde $m(B\hat{A}H) = \theta$

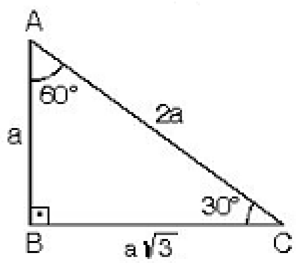
AHC dik üçgeninde $m(H\hat{A}C) = \alpha + \beta$

olur. Buradan $\alpha = \theta - \beta$ bulunur. Ancak $\theta > \beta$ olabileceğinden;

$$\alpha = m(H\hat{A}D) = |m(\hat{B}) - m(\hat{C})|$$

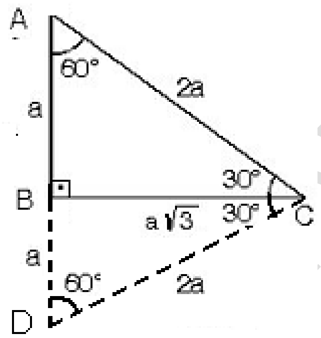
elde edilir.

5.19. Teorem (30–60–90 Üçgeni): Bir dik üçgenin iç açıları 30 ve 60 derece ise 30^0 nin karşısındaki kenar hipotenüsün yarısına, 60^0nin karşısındaki kenar hipotenüsün yarısının $\sqrt{3}$ katına eşittir.



$$|AC| = 2a \Leftrightarrow |AB| = a \text{ ve } |BC| = a\sqrt{3}$$

İspat: ABC üçgenine eş DBC üçgenini çizelim. Çizilen yeni büyük ADC üçgeni eşkenar üçgendir. Bu sebepten $|AC| = |AD| = |DC| = 2a$ alınırsa, A.A.A. eşlik aksiyomu gereği $|AB| = |BD| = a$ olur.

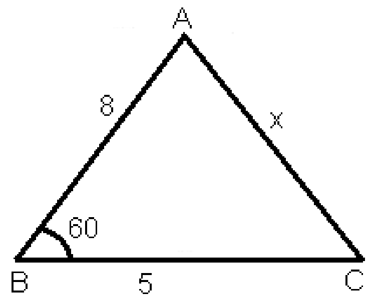


Pisagor teoreminden,

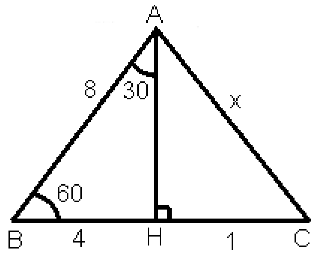
$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$
$$a^2 + |BC|^2 = (2a)^2$$
$$|BC| = a\sqrt{3}$$

bulunur.

Örnek: ABC üçgeninde $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 5$ cm ve $m(A\widehat{B}C) = 60^0$ ise $|AC|$ kaç cm'dir?



Çözüm: A noktasının yüksekliği olarak $|AH|$ doğrusunu çizelim. $m(A\widehat{B}H) = 30^0$ olur.

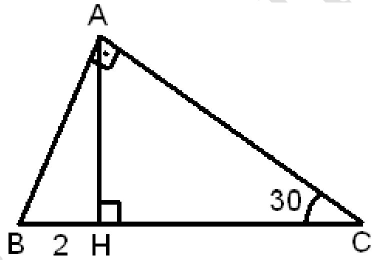


ABH üçgenin göre $|AB| = 8$ cm ve 30^0 nin karşısındaki kenar hipotenüsün yarısına eşit olduğundan $|BH| = 4$ cm'dir. 60^0 nin karşısındaki kenar hipotenüsün yarısının $\sqrt{3}$ katına eşit olduğundan $|AH| = 4\sqrt{3}$ cm'dir. Pisagor teoreminden,

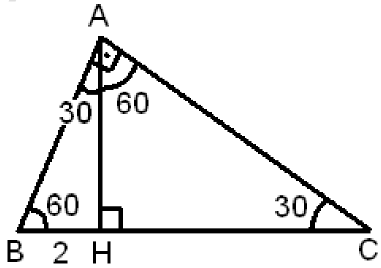
$$|AH|^2 + |HC|^2 = |AC|^2$$
$$(4\sqrt{3})^2 + 1^2 = |AC|^2$$
$$|AC| = 7 \text{ cm}$$

bulunur.

Örnek: Şekilde $[AB] \perp [AC]$, $[AH] \perp [BC]$ dir. $m(\hat{C}) = 30^0$ ve $|BH| = 2$ cm ise $|HC|$ yi bulunuz.



Çözüm:



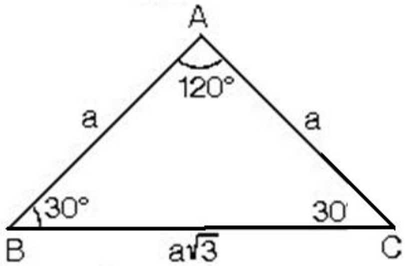
$m(\hat{C}) = 30^0$ ise $m(\hat{B}) = 60^0$, $m(H\hat{A}C) = 60^0$, $m(B\hat{A}H) = 30^0$

ABH üçgeninde $|AH| = 2|BH| = 4$ cm

ABC üçgeninde $|BC| = 2|AB| = 8$ cm

$$|BC| = |BH| + |HC|$$
$$8 = 2 + |HC|$$
$$|HC| = 6 \text{ cm}$$

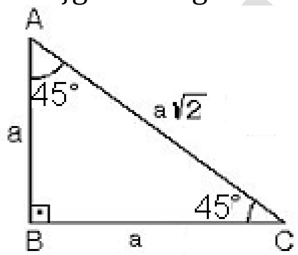
5.6. Sonuç (30–30–120 Üçgeni): 30–30–120 üçgeninde uzun kenar kısa eşit iki kenarın $\sqrt{3}$ katına eşittir.



İki tane 30–60–90 üçgeninden bu sonuçlar elde edilir.

5.20. Teorem (45–45–90 Üçgeni–İkizkenar Dik Üçgen): Bir dik üçgenin iç açıları 45–45–90 derece ise hipotenüs dik kenarlarının uzunluklarının $\sqrt{2}$ katına eşittir.

İspat: ABC ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AB| = |BC| = a$

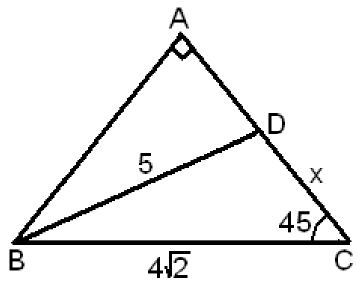


Pisagor teoreminden,

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$
$$a^2 + a^2 = |AC|^2$$
$$|AC| = a\sqrt{2}$$

bulunur.

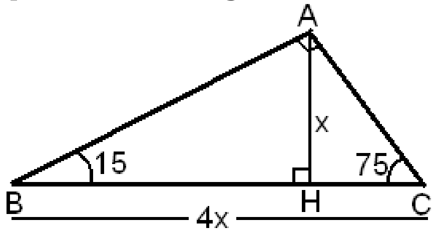
Örnek: ABC üçgeninde $[AC] \perp [AB]$, $|BD| = 5$ cm, $|BC| = 4\sqrt{2}$ cm ve $m(B\hat{C}D) = 45^0$ ise $|DC|$ kaç cm'dir?



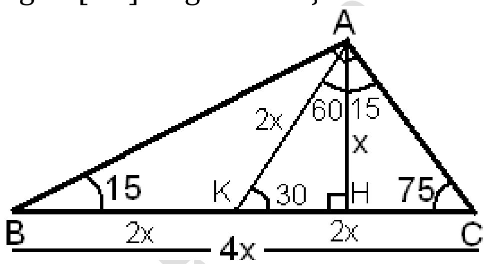
Çözüm: ABC üçgeni 45–45–90 üçgeni olduğundan $|AB| = 5$ cm ve $|AC| = 4$ cm'dir. ABD dik üçgeninde 3–4–5 kuralı geçerli olduğundan $|AD| = 3$ cm'dir.

$$|AC| = |AD| + |DC|$$
$$4 = 3 + |DC|$$
$$|DC| = 1 \text{ cm}$$

5.21. Teorem (15–75–90 Üçgeni): Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğu hipotenüs uzunluğunun dörtte birine (1/4) eşittir.



İspat: Şekildeki gibi [AK] doğrusunu çizelim.

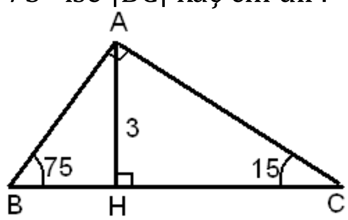


AHK üçgeni 30–60–90 üçgeni olduğundan $|AH| = x$ ise $|AK| = 2x$ olur.
KCA üçgeni 30–75–75 ikizkenar üçgeni olduğundan $|KC| = 2x$ olur.
ABK üçgeni 15–15–150 ikizkenar üçgeni olduğundan $|BH| = 2x$ olur.

$$|BC| = |BK| + |KC| = 2x + 2x = 4x$$

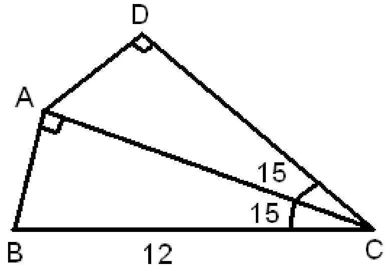
bulunur.

Örnek: ABC üçgeninde $[AC] \perp [AB]$, $[BC] \perp [AH]$, $|AH| = 3$ cm, $m(A\hat{C}B) = 15^0$, $m(A\hat{B}C) = 75^0$ ise $|BC|$ kaç cm'dir?

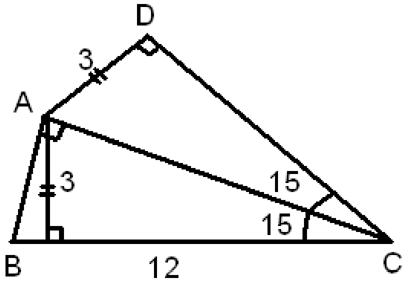


Çözüm: ABC üçgeni 15–75–90 üçgeni olduğundan $|BC| = 4x = 12$ cm'dir.

Örnek: $m(B\widehat{A}C) = 90^0$, $m(A\widehat{D}C) = 90^0$ ve $m(B\widehat{C}A) = m(A\widehat{C}D) = 15^0$ dir. $|BC| = 12$ cm ise $|AD|$ yi bulunuz.



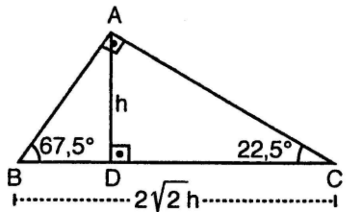
Çözüm: ABC üçgeninde $[BC] \perp [AH]$ olacak şekilde $[AH]$ doğru parçasını çizelim.



$m(D\widehat{A}C) = m(B\widehat{A}C) = 75^0$ olduğundan $|AH| = \frac{|BC|}{4} = \frac{12}{4} = 3$ cm'dir.

$[CA]$, DCB üçgeninin açıortayı ise $|AH| = |AD| = 3$ cm'dir.

5.22. Teorem (22,5–67,5–90 Üçgeni): Bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğu hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğunun $2\sqrt{2}$ katına eşittir.



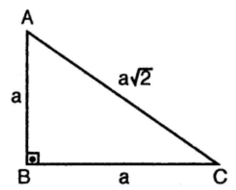
Bu teoremin ispatı 5.21. teoremin ispatına benzediğinden okuyucuya bırakılmıştır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Çevresi $4 + 2\sqrt{2}$ cm olan ikizkenar dik üçgenin alanı kaç cm^2 dir.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bir ikizkenar dik üçgenin kenarlarına a diyelim. Hipotenüsü $a\sqrt{2}$ olur.



$$Ç(ABC) = 2a + a\sqrt{2} = a(2 + \sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}$$
$$a = \frac{4+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})} = 2 \text{ cm}$$
$$A(ABC) = \frac{2\cdot 2}{2} = 2 \text{ cm}^2$$

bulunur.

Cevap: B

2. Alanı, çevresinin $\sqrt{3}$ katı olan eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğu kaç birimdir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Çözüm: Eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğu a diyelim.

$$A(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ ve } Ç(ABC) = 3a$$

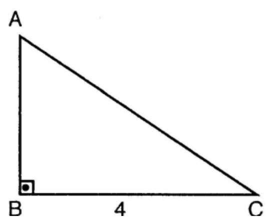
dır. Buna göre;

$$\sqrt{3} \cdot 3a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$a = 12 \text{ cm}$$

elde edilir.

Cevap: E

3.



ABC bir dik üçgen

$|AC| - |AB| = 2$ cm

$|BC| = 4$ cm

Verilere göre $|AB|$ kaç cm'dir?

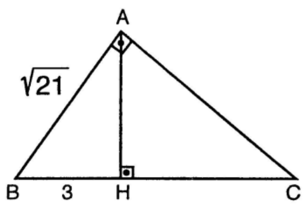
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $|AB| = x$ alınırsa $|AC| = x + 2$ olur.

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$
$$(x+2)^2 = x^2 + 4^2$$
$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 16$$
$$x = 3$$

Cevap: C

4.



BAC bir dik üçgen

$[AH] \perp [BC]$

$|AB| = \sqrt{21}$ cm

$|BH| = 3$ cm

Verilere göre $|HC|$ kaç cm'dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Öklid teoreminden

$$|AB|^2 = |BH| \cdot |BC|$$
$$\sqrt{21}^2 = 3 \cdot |BC|$$
$$|BC| = 7 \text{ cm}$$

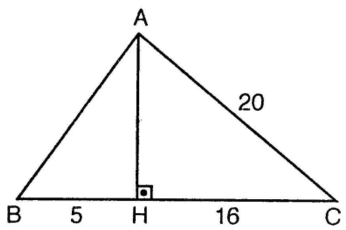
olur ve

$$|BC| = |BH| + |HC|$$
$$7 = 3 + |HC|$$
$$|HC| = 4 \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: D

5.



ABC bir üçgen

$[AH] \perp [BC]$

$|AC| = 20$ cm

$|HC| = 16$ cm

$|BH| = 5$ cm

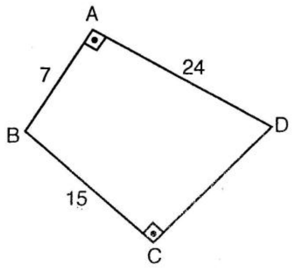
Verilere göre $|AB|$ kaç cm'dir?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: 3–4–5 üçgeninden, AHC üçgeni 12–16–20 olup $|AH| = 12$ cm olur. Yine 5–12–13 üçgeninden $|AB| = 13$ cm olur.

Cevap: E

6.



ABCD bir dörtgen

$[BA] \perp [AD]$

$[BC] \perp [CD]$

$|AB| = 7$ cm

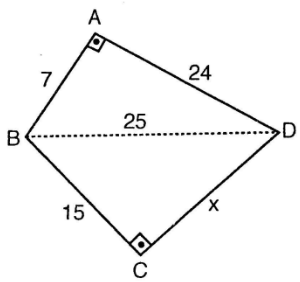
$|AD| = 24$ cm

$|BC| = 15$ cm

Verilere göre $|CD|$ kaç cm'dir?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 22 E) 24

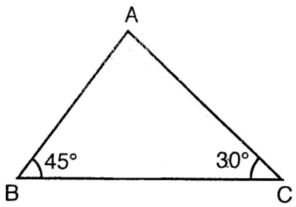
Çözüm: [BD] doğrusunu çizelim. 7–24–25 üçgeninden $|BD| = 25$ cm olur.



3–4–5 üçgeninden BDC üçgeni 15–20–25 olup $|CD| = 20$ cm'dir.

Cevap: C

7.



ABC bir üçgen

$m(A\widehat{B}C) = 45°$

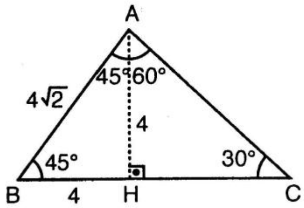
$m(A\widehat{C}B) = 30°$

$|AB| = 4\sqrt{2}$ cm

Verilere göre $|AC|$ kaç cm'dir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

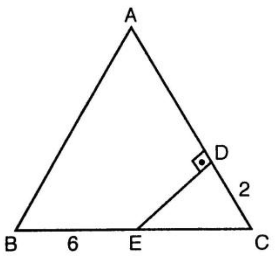
Çözüm: ABC üçgeninde [AH] dikmesini çizelim. $m(H\hat{A}C) = 60^0$, $m(A\hat{C}H) = 30^0$, $m(A\hat{B}H) = m(B\hat{A}H) = 45^0$ olur.



45–45–90 üçgeninde $|AB| = 4\sqrt{2}$ ise $|BH| = |HA| = 4$
30–60–90 üçgeninde $|AC| = 2 \cdot 4 = 8$ cm

Cevap: A

8.



ABC bir eşkenar üçgen

$[ED] \perp [AC]$

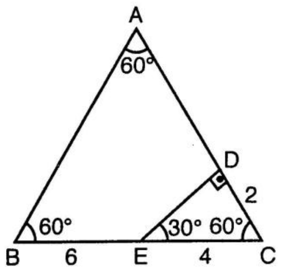
$|BE| = 6$ cm

$|DC| = 2$ cm

Verilere göre $|AD|$ kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: ABC eşkenar üçgen olduğundan EDC dik üçgeni 30–60–90 üçgenini oluşturur.



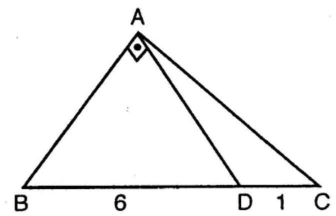
30^0 nin karşısındaki kenar $|DC| = 2$ ise 90^0 nin karşısındaki kenar $|EC| = 4$ dür. ABC üçgeninin bir kenarı $6 + 4 = 10$ cm olur. Buna göre;

$|AC| = |AD| - |DC| = 10 - 2 = 8$ cm

elde edilir.

Cevap: E

9.



ABC bir üçgen

$[BA] \perp [AD]$

$|AB| = |AD|$

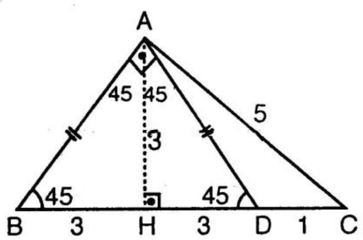
$|BD| = 6$ cm

$|DC| = 1$ cm

Verilere göre $|AC|$ kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: ABD ikizkenar dik üçgen olduğundan [AH] dik üçgeni muhteşem üçlü şartlarını sağladığından $|BH| = |HD| = |AH| = \frac{6}{2} = 3$ cm olur.

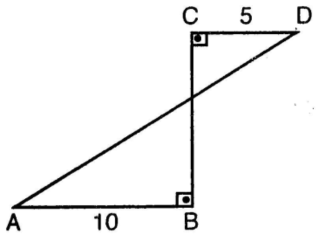


$|HC| = 3 + 1 = 4$ cm

AHC, 3–4–5 üçgeni olduğundan $|AC| = 5$ cm olur.

Cevap: B

10.



$[AB] \perp [BC]$

$[BC] \perp [CD]$

$|CD| = 5$ cm

$|AB| = 10$ cm

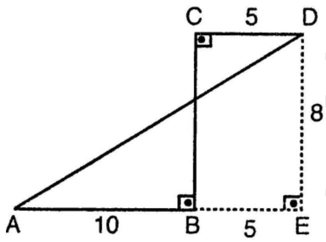
$|BC| = 8$ cm

Verilere göre $|AD|$ kaç cm'dir?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Çözüm: [AB] yi, E noktasına kadar uzatalım. D noktasından [BC] ye paralel olan [DE] yi çizelim.

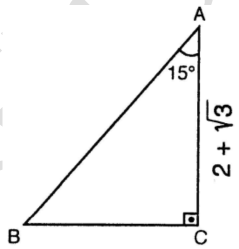
$|CB| = |DE| = 8$ cm



Oluşan ADE üçgeni 8–15–17 üçgeni olacağından $|AD| = 17$ cm'dir.

Cevap: D

11.



ACB bir dik üçgen

$[AC] \perp [BC]$

$m(\widehat{BAC}) = 15°$

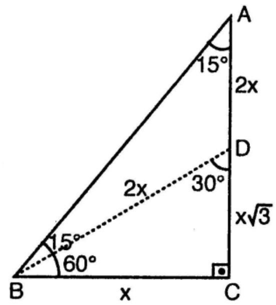
$|AC| = 2 + \sqrt{3}$ cm

Verilere göre $|BC|$ kaç cm'dir?

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

Çözüm: Şekildeki gibi [BD] doğru parçasını çizelim.

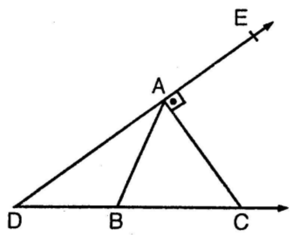
$|BC| = x$ alınırsa $|DC| = x\sqrt{3}$, $|BD| = |AD| = 2x$ olur



$|AC| = |AD| + |DC|$
$2 + \sqrt{3} = 2x + x\sqrt{3}$
$x = 1$

Cevap: A

12.



ADC bir üçgen

ABC eşkenar üçgen

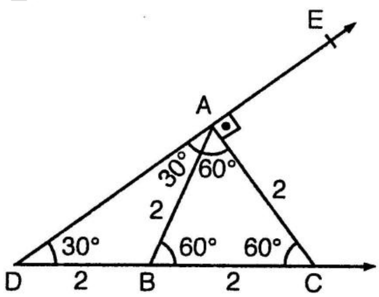
$[CA] \perp [DE]$

$|AC| = 2$ cm

Verilere göre $|BC|$ kaç cm'dir?

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

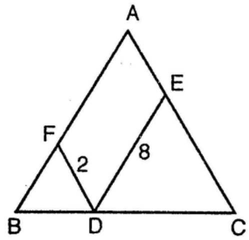
Çözüm: Açıları şekil üzerinde yazarsak aşağıdaki değerleri elde edilir.



ADC üçgeninin de muhteşem üçlü uygulanınca $|DB| = 2$ cm'dir.

Cevap: C

13. ABC bir ikizkenar üçgen



|AB| = |AC|
[DE] // [BA]
[DF] // [CA]
|DE| = 8 cm
|DF| = 2 cm
|BC| = 12 cm

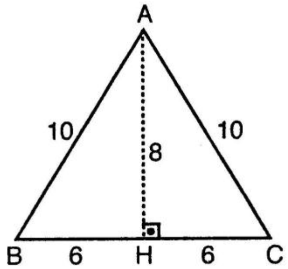
Verilere göre A köşesine ait yükseklik kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: 5.5. teorem gereği;

$$|AB| = |AC| = |FD| + |DE| = 2 + 8 = 10 \text{ cm}$$

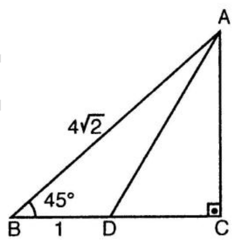
dir. [AH] yüksekliğini çizelim. 5.1. teorem gereği aşağıdaki şekil çizilir.



Buna göre $|BH| = |HC| = 6$ cm'dir. 3–4–5 üçgeni gereği $|AH| = 8$ cm olur.

Cevap: E

14.



ACB bir dik üçgen
$m(\widehat{ABC}) = 45°$
$|AB| = 4\sqrt{2}$ cm
$|BD| = 1$ cm

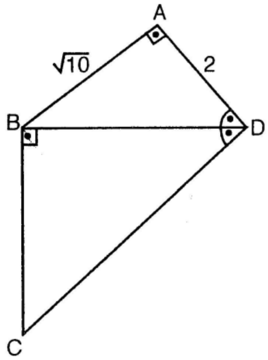
Verilere göre $|AD|$ kaç cm'dir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 5,5

Çözüm: ABC, 45–45–90 üçgeni olduğundan $|BC| = |AC| = 4$ dür.
$|DC| = |BC| - |BD| = 4 - 1 = 3$
ADC üçgeni 3–4–5 üçgeni gereği $|AD| = 5$ cm olur.

Cevap: D

15. ABD ve BCD şekildeki gibi birer üçgen



[BA] ⊥ [AD]

[CB] ⊥ [BD]

[DB], açıortay

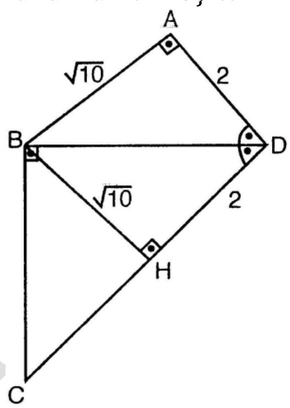
|AD| = 2 cm

|AB| = $\sqrt{10}$ cm

Verilere göre |CH| kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: B noktasından [BH] dikmesini çizelim. Açıortay üzerinde alınan bir noktadan indirilen dikme uzunlukları eşittir.



$|BH| = \sqrt{10}$ ve $|HD| = 2$ olur. CBD dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa;

$$|BH|^2 = |CH| \cdot |HD|$$

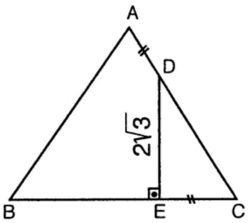
$$\sqrt{10}^2 = |CH| \cdot 2$$

$$|CH| = 5 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: B

16.



ABC eşkenar üçgen

[DE] ⊥ [BC]

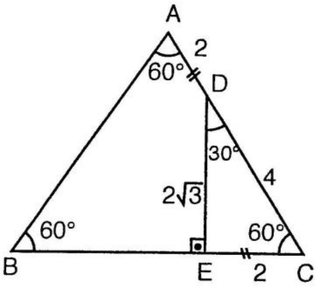
|AD| = |EC|

|DE| = $2\sqrt{3}$ cm

Verilere göre eşkenar üçgenin bir kenarı kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

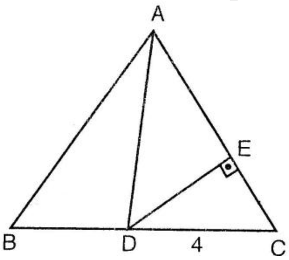
Çözüm: ABC eşkenar üçgen, DEC 30–60–90 üçgenidir.



30–60–90 üçgeninden $|EC| = |AD| = 2$, $|DC| = 4$ olur.
$|AC| = 2 + 4 = 6$ cm

Cevap: C

17.



ABC eşkenar üçgen

[DE] ⊥ [AC]

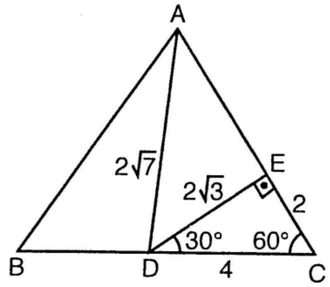
|AD| = $2\sqrt{7}$ cm

|DC| = 4 cm

Verilere göre eşkenar üçgenin bir kenarı kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: ABC eşkenar üçgen, DEC 30–60–90 üçgenidir.



30–60–90 üçgeninden $|EC| = 2$, $|DE| = 2\sqrt{3}$ olur.
ADE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$|AD|^2 = |DE|^2 + |EA|^2$$
$$(2\sqrt{7})^2 = (2\sqrt{3})^2 + |EA|^2$$
$$|EA| = 4 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: A

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.