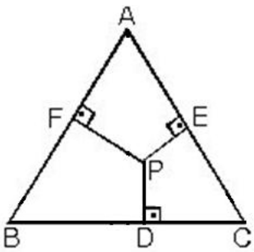
6. BÖLÜM
ÜÇGENDE YARDIMCI DOĞRULAR

Bu kısımda yardımcı doğrular olan ve 2.10. tanımda verilen yükseklik, 2.12. tanımda verilen açıortay 2.14. tanımda verilen kenarortay hakkında bilgiler verilecektir.

YÜKSEKLİK TEOREMLERİ

Lazare Carnot
(13 Mayıs 1753, Nolay, Fransa - 2 Ağustos 1823, Magdeburg, Almanya)

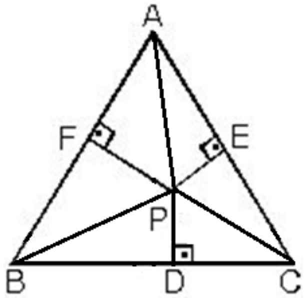
6.1. Teorem (Carnot Teoremi): Bir üçgende kenarlardan çizilen dikmeler bir noktada kesişiyorsa, dikmelerin kenarlar üzerinde ayırdıkları parçalar için, komşu olmayan kenar parçaların karelerinin toplamı birbirine eşittir.



$[PF] \perp [AB]$, $[PD] \perp [BC]$, $[PE] \perp [AC]$

$$\Leftrightarrow |AF|^2 + |BD|^2 + |EC|^2 = |BF|^2 + |DC|^2 + |AE|^2$$

İspat: $[BP]$, $[PC]$, $[PA]$ doğru parçalarını çizelim. Pisagor teoreminden,

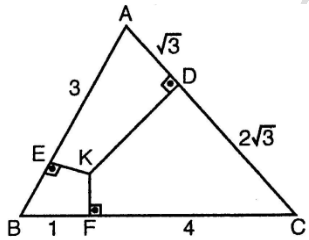


FPD ve BPD üçgenleri için $|FP|^2 + |FB|^2 = |BD|^2 + |PD|^2$
DPC ve CPE üçgenleri için $|DP|^2 + |DC|^2 = |EP|^2 + |EC|^2$
EPA ve APF üçgenleri için $|EP|^2 + |AE|^2 = |AF|^2 + |FP|^2$
yazılır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$|FP|^2 + |FB|^2 + |DP|^2 + |DC|^2 + |EP|^2 + |AE|^2 =$$
$$= |BD|^2 + |PD|^2 + |EP|^2 + |EC|^2 + |AF|^2 + |FP|^2$$
$$|AF|^2 + |BD|^2 + |EC|^2 = |BF|^2 + |DC|^2 + |AE|^2$$

elde edilir.

Örnek:



ABC bir üçgen
$[KD] \perp [AC]$
$[KE] \perp [AB]$
$[KF] \perp [BC]$

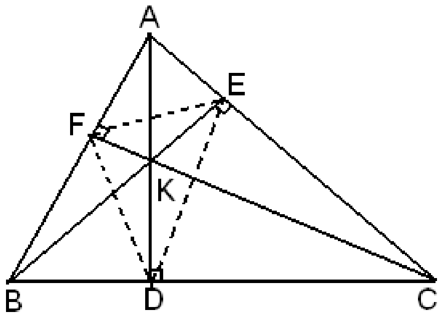
Verilere göre |BE| kaç birimdir?

Çözüm: Carnot teoremi gereği;

$$\mathbf{|BF|^2 + |CD|^2 + |AE|^2 = |FC|^2 + |AD|^2 + |BE|^2}$$
$$\mathbf{1^2 + (2\sqrt{3})^2 + 3^2 = 4^2 + \sqrt{3}^2 + |BE|^2}$$
$$\mathbf{|BE| = \sqrt{3}\ br}$$

bulunur.

6.2. Teorem: Bir üçgende yüksekliklerin ayaklarının oluşturduğu üçgenin iç açılarının ölçüleri;



$$m(E\hat{D}F) = 180 - 2m(\hat{A})$$
$$m(D\hat{E}F) = 180 - 2m(\hat{B})$$
$$m(D\hat{F}E) = 180 - 2m(\hat{C})$$

dir.

İspat: ABC dik üçgeninde;

$$m(A\hat{B}E) = m(A\hat{D}E) = 90 - m(\hat{A})$$
$$\begin{aligned} m(C\hat{D}E) &= 90 - m(A\hat{D}E) \\ &= 90 - [90 - m(\hat{A})] \\ &= m(\hat{A}) \qquad (1) \end{aligned}$$

yazılabilir.

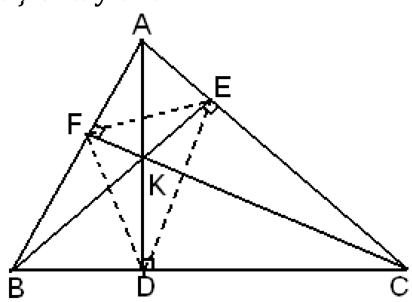
$$m(F\hat{D}B) = 90 - m(A\hat{D}F) = m(\hat{A}) \qquad (2)$$

olacağından (1) ve (2) den,

$$\begin{aligned} m(E\hat{D}F) &= 180 - m(C\hat{D}E) - m(F\hat{D}B) \\ &= 180 - 2m(\hat{A}) \end{aligned}$$

bulunur.

6.3. Teorem: Bir üçgende yüksekliklerin ayaklarının oluşturduğu üçgende yükseklikler iç açıortaylardır.



[AD], [BE] ve [CF] yükseklik dikmeleri DEF üçgenin açıortaylarıdır

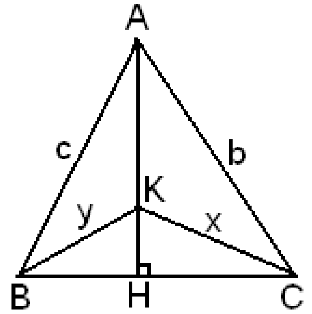
İspat: $m(A\hat{B}E) = m(A\hat{D}E)$ ve $m(A\hat{C}F) = m(A\hat{D}F)$ olduğundan;

$$A\overset{\Delta}{B}E = A\overset{\Delta}{C}F$$

$$m(A\hat{D}E) = m(A\hat{D}F)$$

bulunur.

6.4. Teorem: Herhangi bir üçgende kenarlardan birine ait yükseklik dikmesi üzerinde alınan herhangi bir K noktasının köşelerini birleştirilmesi halinde $|CK| = x$, $|BK| = y$, $|AK| = z$ ise



$$b^2 - c^2 = x^2 - y^2$$

dir.

İspat: $|AK| = z$, $|BH| = p$, $|HC| = q$, $|KH| = r$ olsun.

ACH üçgeninde Pisagor teoremi uygulanarak $b^2 = q^2 + (z + r)^2$

ABH üçgeninde Pisagor teoremi uygulanarak $c^2 = p^2 + (z + r)^2$

bulunur. Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarırsak,

$$b^2 - c^2 = q^2 - p^2 \qquad (1)$$

olur. Ayrıca,

KCH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanarak $x^2 = q^2 + r^2$

KBH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanarak $y^2 = p^2 + r^2$

bulunur. Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarırsak,

$$x^2 - y^2 = q^2 - p^2 \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) eşitliklerinden,

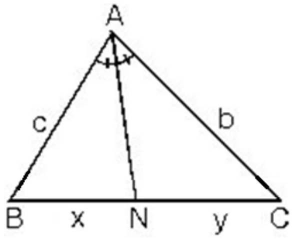
$$b^2 - c^2 = x^2 - y^2$$

elde edilir.

AÇIORTAY TEOREMLERİ

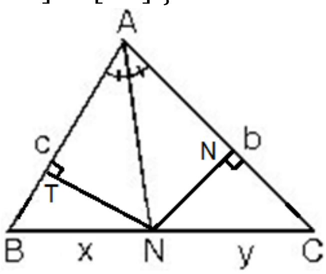
6.1. Tanım: Bir üçgenin iç açısını ikiye bölen açıortaylara iç açıortay, dış açısını bölen açıortaylara dış açıortay adı verilir.

6.5. Teorem (İç Açıortay Teoremi): Bir üçgende herhangi bir açıortayın karşı kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunlukları oranı, bu parçalara bitişik kenarların uzunlukları oranına eşittir.



[AN], A açısının iç açıortayı $\Leftrightarrow \frac{c}{x} = \frac{b}{y}$

İspat: [TN] ⊥ [AB], [NH] ⊥ [AC] çizelim.



4.3. Teorem "Yükseklikleri eşit olan iki üçgenin alanları oranı, tabanlarının uzunlukları oranına eşittir" teoreminden,

$$\frac{A(ABN)}{A(ANC)} = \frac{x}{y} \qquad (1)$$

dir. Ayrıca 3.1. Teoremden $|TN| = |NH|$ olur. Buna göre,

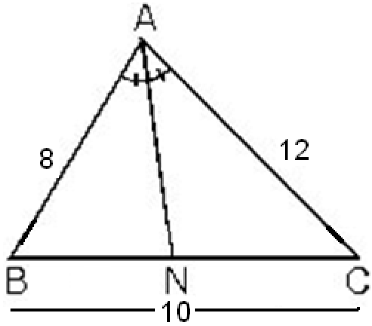
$$\frac{A(ABN)}{A(ANC)} = \frac{\frac{c \cdot |TN|}{2}}{\frac{b \cdot |NH|}{2}} = \frac{c}{b} \qquad (2)$$

(1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\frac{c}{b} = \frac{x}{y} \text{ yani } \frac{c}{x} = \frac{b}{y}$$

elde edilir.

Örnek: ABC üçgeninde [AN], A açısının açıortayıdır. $|AB| = 8$ cm, $|AC| = 12$ cm ve $|BC| = 10$ cm ise $|BN|$ yi bulunuz.



Çözüm: $|BN| = x$ alınırsa $|NC| = 10 - x$ olur. İç açıortay teoreminden;

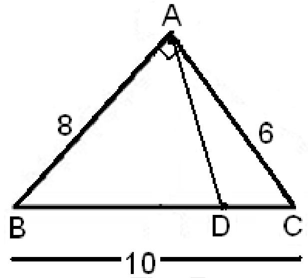
$$\frac{|AB|}{|BN|} = \frac{|AC|}{|NC|}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{12}{10-x}$$

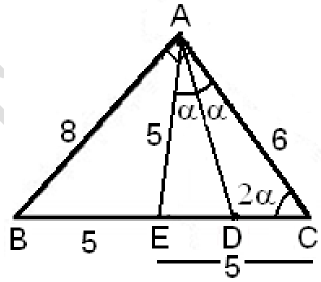
$$x = 4 \text{ cm}$$

dir.

Örnek: ABC dik üçgeninde $m(B\widehat{A}C) = 90^0$, $m(\widehat{C}) = 2 \cdot m(D\widehat{A}C)$, $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm ve $|AC| = 6$ cm olduğuna göre $|DC|$ yi bulunuz.



Çözüm: $m(\widehat{C}) = 2 \cdot m(D\widehat{A}C) = 2\alpha$ olsun ve [AE] kenarortay doğrusunu çizelim.



Muhteşem üçlü teoremi gereği $|AE| = \frac{10}{2} = 5$ ve AEC ikizkenar üçgeni elde edilir. $m(\widehat{C}) = 2 \cdot m(D\widehat{A}C) = 2\alpha$ olduğundan $m(E\widehat{A}C) = \alpha$ olur. Buna göre AEC üçgeninde [AD] açıortayı oluşur. $|DC| = x$ alınırsa,

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|DC|}$$

$$\frac{5}{5-x} = \frac{6}{x}$$

$$x = \frac{30}{11} \text{ cm}$$

olur.

6.6. Teorem: 6.5. Teoremde tanımlanan iç açıortayın uzunluğu,

$$|AN| = \sqrt{cb - xy}$$

dir.

İspat: 6.5. Teoremde $\frac{c}{b} = \frac{x}{y}$ olduğunu biliyoruz. Stewart teoreminden,

$$|AN|^2 = \frac{b^2x - c^2y}{x+y} - xy$$

yazılır. Buna göre,

$$|AN|^2 = \frac{bx\frac{cy}{x} - cy\frac{bx}{y}}{x+y} - xy$$

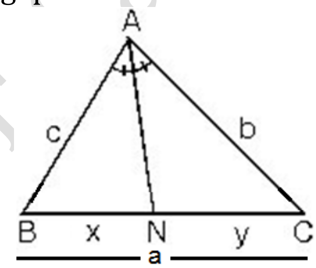
$$|AN|^2 = \frac{bc(y+x)}{x+y} - xy$$

$$|AN|^2 = bc - xy$$

$$|AN| = \sqrt{bc - xy}$$

olur.

6.7. Teorem: Şekildeki ABC üçgeninde A köşesine ait iç açıortayını karşı kenar üzerinde ayırdığı paraların uzunlukları x ve y olmak üzere,



$$x = \frac{ac}{b+c}, \; y = \frac{ab}{b+c}$$

dir.

İspat: [AN] açıortay olduğundan iç açıortay teoreminden,

$$\frac{c}{b} = \frac{x}{y}$$

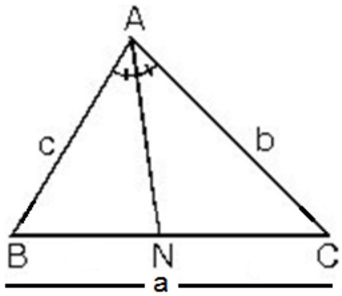
$$bx = cy$$

$$bx + cx = ca$$

$$x = \frac{ac}{b+c}$$

Bezer şekilde $y = \frac{ab}{b+c}$ olduğu gösterilir.

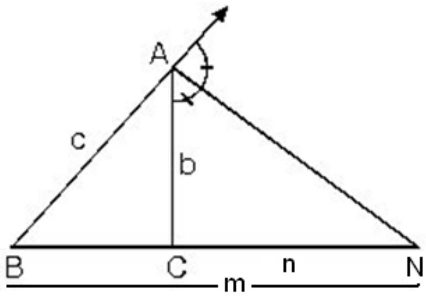
6.8. Teorem: Bir üçgende bir açıya iç açıortay, üçgenin alanı komşu kenarların oranına böler.



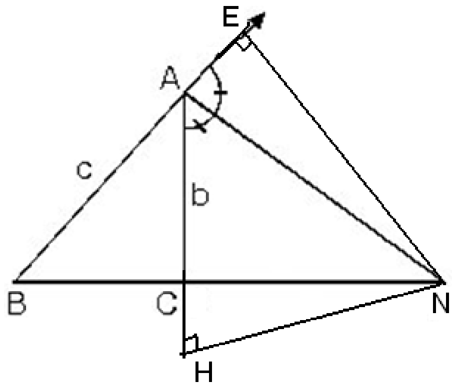
$$\frac{A(ABC)}{A(ABN)} = \frac{b+c}{c}, \frac{A(ABC)}{A(ANC)} = \frac{b+c}{b}, \frac{A(ABC)}{A(ANC)} = \frac{c}{b}$$

Teoremin ispatında "Yükseklikleri eşit olan iki üçgenin alanları oranı, tabanlarının uzunlukları oranına eşittir." teoremi kullanılacağından teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

6.9. Teorem (Dış Açıortay Teoremi): Bir ABC üçgende, A açısının dış açıortayı [AN], [BC] kenarının uzantısını N noktasında kesiyor ise $\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$ dir.



İspat: $[NE] \perp [BE]$, $[NH] \perp [AC]$ çizelim.



4.2. Teorem “Yükseklikleri eşit olan iki üçgenin alanları oranı, tabanlarının uzunlukları oranına eşittir” teoreminden,

$$\frac{A(ABN)}{A(ACN)} = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

dir. Ayrıca 3.1. Teoremden $|NE| = |NH|$ olur. Buna göre,

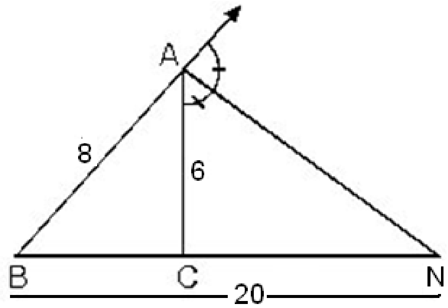
$$\frac{A(ABN)}{A(ACN)} = \frac{\frac{c \cdot |NE|}{2}}{\frac{b \cdot |NH|}{2}} = \frac{c}{b} \qquad (2)$$

(1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{n} \text{ yani } \frac{c}{m} = \frac{b}{n}$$

elde edilir.

Örnek: ABC üçgeninde [AD], A açısının açıortayıdır. $|AB| = 8$ cm, $|AC| = 6$ cm ve $|BC| = 10$ cm ise $|BC|$ yi bulunuz.



Çözüm: $|BC| = x$ alınırsa $|CN| = 20 - x$ olur. Dış açıortay teoreminden;

$$\frac{|AB|}{|BN|} = \frac{|AC|}{|NC|}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{20}{20-x}$$

$$x = 5 \text{ cm}$$

dir.

6.10. Teorem: 6.4. Teoremde tanımlanan dış açıortayın uzunluğu,

$$|AN| = \sqrt{cb - mn}$$

dir.

İspat: 6.9. Teoremde $\frac{c}{b} = \frac{m}{n}$ olduğunu biliyoruz. Stewart teoreminden,

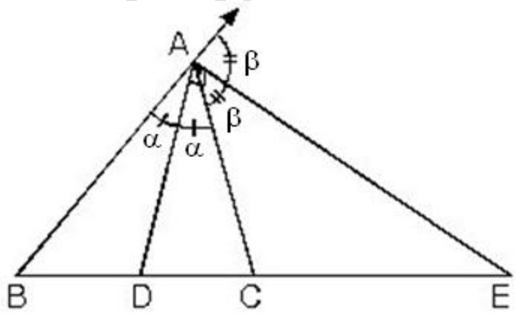
$$b^2 = \frac{|AN|^2(m-n)+c^2n}{m-n+n} - (m-n)n$$

yazılır. Buna göre,

$$b^2m = |AN|^2(m-n) + c^2n - (m-n)mn$$
$$b^2m - c^2n + (m-n)mn = |AN|^2(m-n)$$
$$bm\frac{cn}{m} - cn\frac{bm}{n} + (m-n)mn = |AN|^2(m-n)$$
$$bcn - cbm + (m-n)mn = |AN|^2(m-n)$$
$$-bc(m-n) + (m-n)mn = |AN|^2(m-n)$$
$$-bc + mn = |AN|^2$$
$$|AN| = \sqrt{mn - bc}$$

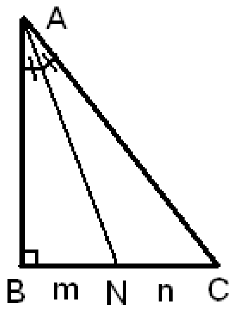
olur.

6.1. Sonuç:



ABC üçgeninde [AD] iç açıortay, [AE] dış açıortay ise, $m(D\widehat{A}E) = 90^0$ dir.

6.11. Teorem: ABC dik üçgeninde $m(\widehat{B}) = 90^0$ için [AN] açıortay, $|BN| = m, |NC| = n$ ise



$$|AN|^2 = \frac{2m^2n}{n-m}$$

dir.

İspat: ABC üçgeninde $|BN| = m$, $|NC| = n$ olduğundan,

$$|AB| = mk, |AC| = nk$$

yazılabilir. ABC üçgeninde Pisagor teoreminden;

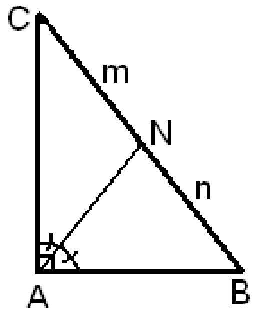
$$(km)^2 + (m+n)^2 = (kn)^2$$
$$(m+n)^2 = k^2n^2 - k^2m^2$$
$$(m+n)^2 = k^2(n^2 - m^2)$$
$$(m+n)^2 = k^2(n-m)(n+m)$$
$$(m+n) = k^2(n-m)$$
$$k^2 = \frac{m+n}{n-m}$$

bulunur. 6.10. Teoremden,

$$\begin{aligned} |AN|^2 &= (nk)(mk) - mn \\ &= mn(k^2 - 1) \\ &= mn\left(\frac{m+n}{n-m} - 1\right) \\ &= \frac{2m^2n}{n-m} \end{aligned}$$

elde edilir.

6.12. Teorem: ABC dik üçgeninde $m(\widehat{B}) = 90^0$ için [AN] açıortay, $|CN| = m$, $|NB| = n$ ise



$$|AN|^2 = \frac{2m^2n^2}{m^2+n^2}$$

dir.

İspat: ABC üçgeninde $|CN| = m$, $|NB| = n$ olduğundan,

$$|AC| = mk,\ |AB| = nk$$

yazılabilir. ABC üçgeninde Pisagor teoreminden;

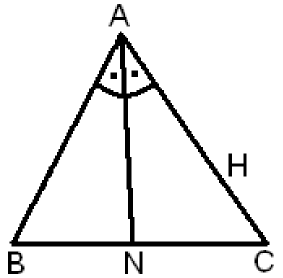
$$(km)^2 + (kn)^2 = (m+n)^2$$
$$k^2m^2 + k^2n^2 = (m+n)^2$$
$$k^2(m^2+n^2) = (m+n)^2$$
$$k^2 = \frac{(m+n)^2}{m^2+n^2}$$

bulunur. 6.10. Teoremden,

$$\begin{aligned} |AN|^2 &= (nk)(mk) - mn \\ &= mn(k^2-1) \\ &= mn\left(\frac{(m+n)^2}{m^2+n^2} - 1\right) \\ &= mn\left(\frac{2m^2n^2}{m^2+n^2}\right) \end{aligned}$$

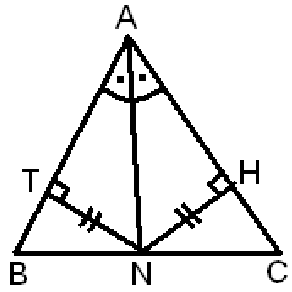
elde edilir.

6.13. Teorem: Üçgenin bir köşesinden çıkan açıortayın oluşturduğu iki üçgenin alanlarının oranı, açıortayın köşede birleşen kenarların uzunlukları oranına eşittir.



$$\frac{A(ABN)}{A(ANC)} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

İspat: [AN], A açısının iç açıortayı olsun.



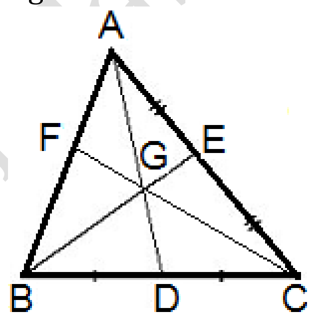
$[NH] \perp [AC]$, $[NT] \perp [AB]$ olacak şekilde $[NH]$ ve $[NT]$ yi çizersek $[NT] = [NH]$ olur. Buradan,

$$\frac{A(ABN)}{A(ANC)} = \frac{\frac{|AB|\cdot|NT|}{2}}{\frac{|AC|\cdot|NT|}{2}} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

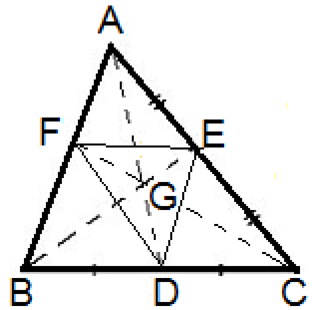
bulunur.

KENARORTAY TEOREMLERİ

Üçgenin bir kenarının orta noktasını karşısındaki köşe ile birleştiren doğru parçasına o kenara ait kenarortay dendiğini 2.8. Tanımdan, kenarortayların kesiştiği noktaya ağırlık merkezi dendiğini 2.15. Tanımdan biliyoruz. Kenarortaylar V ile gösterilmektedir.

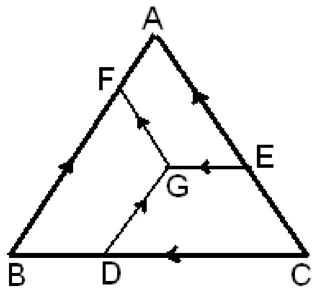


6.14. Teorem: ABC üçgeninin ağırlık merkezi ile, ABC üçgenine ait orta tabanların oluşturduğu DEF üçgeninin ağırlık merkezi aynıdır.



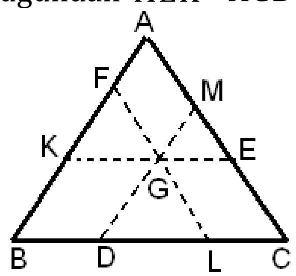
İspat: Temel benzerlik teoreminden [AB]//[DE], [BC]//[EF], [AC]//[DF] olduğundan ve D, E, F noktaları ABC üçgenine ait kenarların orta noktaları olduğundan, ABC üçgeninin kenarlarının aynı zamanda DEF üçgeninde kenarortaylarıdır.

6.15. Teorem: Herhangi bir ABC üçgeninde ağırlık merkezi G olmak üzere ağırlık merkezinden kenarlara çizilen paralellerin uzunlukları toplamı, üçgenin çevresinin üçte birine eşittir.



$$|GD| + |GE| + |GF| = \frac{|AB|+|BC|+|CA|}{3}$$

İspat: [KE]//[BC] olduğundan $A\overset{\triangle}{E}K \sim A\overset{\triangle}{C}B$ üçgenleri benzerdir.



$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|EK|}{|CB|} = \frac{|KA|}{|BA|} = \frac{2}{3}$$

olduğundan $|KG| = |GE|$ dir. Buna göre $|GE| = \frac{|BC|}{3}$ dir. Benzer şekilde diğer paraleller içinde bu eşitlik yazıldığında;

$$|GD| + |GE| + |GF| = \frac{|AB|+|BC|+|CA|}{3}$$

elde edilir.

6.16. Teorem: ABC üçgeninde [AD], [BC] kenarının kenarortayı,

a) $|BD| = |DC| = \frac{a}{2}$, $|AB| = c$, $|AC| = b$ ve $|AD| = V_a$ ise,

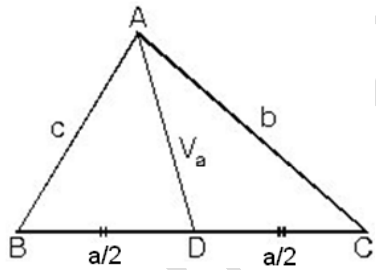
$$\frac{|b-c|}{2} < V_a < \frac{b+c}{2}$$

dir.

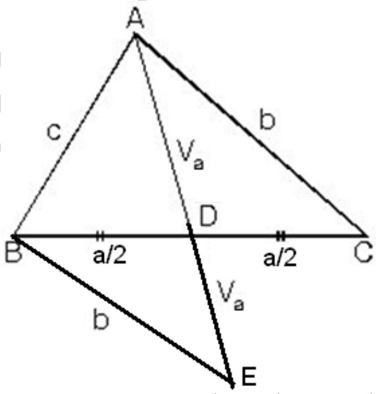
b) [BC], [AC] ve [AB] kenarlarının kenarortayları V_a, V_b, V_c ise

$$\frac{a+b+c}{2} < V_a + V_b + V_c < a + b + c$$

dir.



İspat: $|AD| = |DE|$ olacak şekilde [AD] doğru parçasını uzatalım. E ile B yi birleştirelim.



$|BD| = |DC|$, $|AD| = |DE|$ ve $m(B\hat{D}E) = m(A\hat{D}C)$ olduğundan K.A.K. eşlik aksiyomuna göre $D\overset{\Delta}{B}E \cong D\overset{\Delta}{C}A$ olur.

a) $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgeninde üçgen eşitsizliğinden,

$$|b - c| < 2V_a < b + c$$

$$\frac{|b-c|}{2} < V_a < \frac{b+c}{2}$$

olur.

b) ABE üçgeninde

$$2V_a < b + c, 2V_b < a + c, 2V_c < a + b$$

dir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$2(V_a + V_b + V_c) < 2(a + b + c)$$

$$V_a + V_b + V_c < a + b + c \qquad (1)$$

olur. Şekilden,

ABD üçgeninden $c - \frac{a}{2} < V_a$

BCF üçgeninden $a - \frac{b}{2} < V_b$

AEC üçgeninden $b - \frac{c}{2} < V_c$

elde edilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

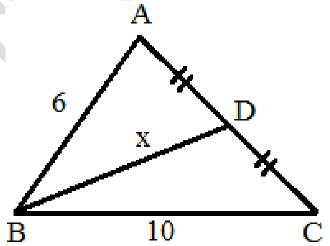
$$\frac{a+b+c}{2} < V_a + V_b + V_c \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitsizliklerinden,

$$\frac{a+b+c}{2} < V_a + V_b + V_c < a + b + c$$

olur.

Örnek: ABC üçgeninde $|AD| = |DC|$, $|AB| = 6$ cm ve $|BC| = 10$ cm ise $|BD| = x$ in alabileceği aralığı bulunuz.



Çözüm: [BD] kenarortay olduğundan,

$$\frac{|a-c|}{2} < V_b < \frac{a+c}{2}$$

$$\frac{|10-6|}{2} < V_b < \frac{10+6}{2}$$

$$2 < V_b < 8$$

bulunur.

Örnek: Bir üçgenin kenar uzunluklarının ikişer ikişer toplamları; 14 cm, 16 cm ve 18 cm'dir. Bu üçgenin kenarortaylarının toplamının alabileceği aralığı bulunuz.

Çözüm: Kenar uzunlukları a, b, c kenarortayları ise V_a, V_b, V_c olsun.

$$a + b = 14$$
$$a + c = 16$$
$$b + c = 18$$

ise $a + b + c = 24$ dir. O halde kenarortayların toplamının alabileceği değerler,

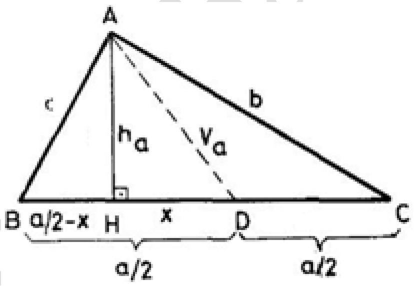
$$\frac{24}{2} < V_a + V_b + V_c < 24$$
$$12 < V_a + V_b + V_c < 24$$

aralığındadır.

6.17. Teorem (Kenarortay Teoremi): Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenar uzunluklarına ait kenarortay uzunlukları sırasıyla V_a, V_b, V_c olmak üzere,

$$2V_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2\ ,\ 2V_b^2 + \frac{b^2}{2} = a^2 + c^2,\ 2V_c^2 + \frac{c^2}{2} = a^2 + b^2$$

dir.



$$|BD| = |DC| = \frac{a}{2},\ |AD| = V_a,\ |AC| = b,\ |AB| = c \Leftrightarrow 2V_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$$

İspat: $[AH] \perp [BC]$ olacak şekilde $[AH]$ doğru parçasını çizelim. $|AH| = h_a$ ve $|HD| = x$ dersek,

AHD üçgeninde Pisagor teoreminden $h_a^2 + x^2 = V_a^2$ (1)

AHC üçgeninde Pisagor teoreminden $h_a^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = b^2$ (2)

ABH üçgeninde Pisagor teoreminden $h_a^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = c^2$ (3)

olur. (2) ve (3) taraf tarafa toplanırsa,

$$2h_a^2 + \frac{a^2}{4} + x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + x^2 - ax = b^2 + c^2$$

$$2(h_a^2 + x^2) + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2 \qquad (4)$$

olur. (4) denklemine (1) denklemi yazılırsa,

$$2V_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$$

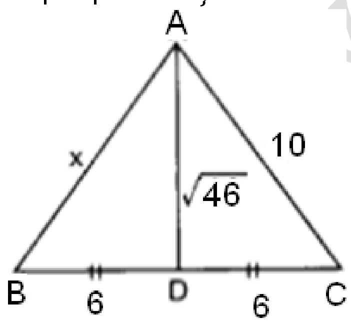
elde edilir.

6.2. Sonuç: Kenarortay teoreminde elde edilen sonuçlar taraf tarafa toplanırsa,

$$3(a^2 + b^2 + c^2) < 4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2)$$

bulunur.

Örnek: ABC üçgeninde $|BD| = |DC| = 6$ cm, $|AD| = \sqrt{46}$ cm, $|AC| = 10$ cm olduğuna göre $|AB| = x$ kaç cm dir?



Çözüm: ABC üçgeninde kenarortay teoreminden

$$2V_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$$

$$2(\sqrt{46})^2 + \frac{12^2}{2} = x^2 + 10^2$$

$$92 + 72 = x^2 + 100$$

$$x = 8 \text{ cm}$$

bulunur.

6.18. Teorem: Bir ABC üçgeninin kenarlarının uzunlukları a, b, c ve kenarortaylarının uzunlukları sırasıyla V_a, V_b, V_c ise,

i) $m(\hat{A}) = 90^0 \Leftrightarrow V_a = \frac{a}{2}$ (Muhteşem üçlü)

ii) $m(\hat{A}) > 90^0 \Leftrightarrow V_a < \frac{a}{2}$

iii) $m(\hat{A}) < 90^0 \Leftrightarrow V_a > \frac{a}{2}$

dir.

İspat: i şıkkı Muhteşem üçlü teoremine ispat edildi.

ii) 2.13. Teoreminde, $m(\widehat{A}) > 90^0$ ise $a^2 > b^2 + c^2$ olduğu gösterildi. Kenarortay teoreminden,

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} < a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$
$$V_a^2 < \frac{a^2}{4}$$
$$V_a < \frac{a}{2}$$

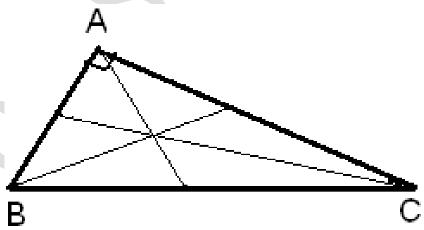
bulunur.

iii) 2.13. Teoreminde, $m(\widehat{A}) < 90^0$ ise $a^2 < b^2 + c^2$ olduğu gösterildi. Kenarortay teoreminden,

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} > a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$
$$V_a^2 > \frac{a^2}{4}$$
$$V_a > \frac{a}{2}$$

bulunur.

6.19. Teorem: Bir dik üçgende dik üçgende dik kenarlara ait kenarortayların karelerinin toplamı, hipotenüse ait kenarlarının karesinin beş katına eşittir.



$$5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$$

İspat: ABC üçgeninde kenarortay teoremi,

$$2V_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}$$
$$2V_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$$

oluğu bilinmektedir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$2V_b^2 + 2V_c^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - \left(\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}\right)$$

bulunur. Pisagor teoreminden $a^2 = b^2 + c^2$ olduğuna göre,

$$2(V_b^2 + V_c^2) = 2a^2 + a^2 - \frac{a^2}{2}$$

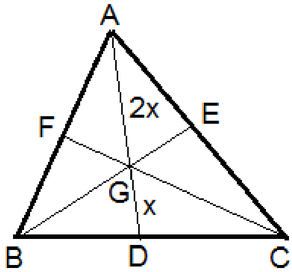
$$V_b^2 + V_c^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

elde edilir. Muhteşem üçlü teoremince, $V_a = \frac{a}{2}$ olduğundan,

$$5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$$

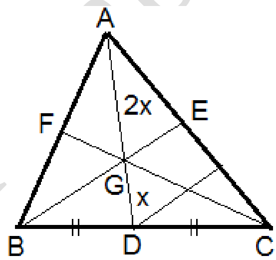
olur.

6.20. Teorem: Bir üçgende herhangi bir köşe ile ağırlık merkezi arasındaki uzaklık o köşeden geçen kenarortay uzunluğunun üçte ikisine eşittir.



$$\text{G Ağırlık Merkezi} \Leftrightarrow |AG| = \frac{2}{3}V_a, |AD| = \frac{1}{3}V_a, \frac{|AG|}{|GD|} = 2$$

İspat: [BE]//[DK]//[FL] olacak şekilde [DK] ve [FL] doğru parçalarını çizelim.



D nokta orta nokta ve temel orantı teoreminden,

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|CK|}{|KE|} = 1 \text{ ise } |CK| = |KE|$$

bulunur. Buna göre

$$|AE| = 2|KE|$$

olur. Şu halde temel orantı teoreminden,

$$\frac{|AE|}{|EK|} = \frac{|AG|}{|GD|} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{|AG|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|AK|} = \frac{2}{3}$$

$$|AG| = \frac{2}{3}|AG| \text{ ise } |AG| = \frac{2}{3}V_a$$

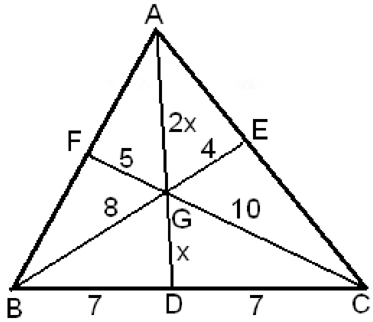
bulunur. Buradan,

$$|AD| = \frac{1}{3}V_a, \frac{|AG|}{|GD|} = 2$$

olduğu aşikardır.

Örnek: Bir ABC üçgeninin kenarlarının uzunlukları a, b, c ve kenarortaylarının uzunlukları sırasıyla V_a, V_b, V_c dir. $a = 14$ cm, $V_a, = 12$ cm ve $V_b = 15$ cm olduğuna göre, V_a nın uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: ABC üçgeninde [AD], [BE] ve [CF] kenarortaylardır.



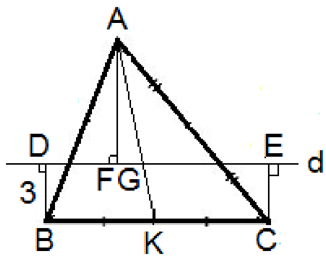
6.20. Teoremden,

$|GD| = x$, $|AG| = 2x$, $|GE| = 4$ cm, $|BG| = 8$ cm, $|CG| = 10$ cm, $|GF| = 5$ cm dir. GBC üçgeninde kenarortay teoreminden,

$$2V_a^2 + \frac{14^2}{2} = 8^2 + 10^2 \text{ ise } V_a = \sqrt{33}$$

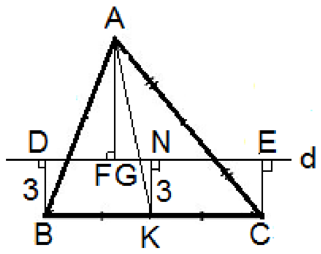
bulunur.

Örnek: Bir ABC üçgeninde, üçgenin ağırlık merkezi G olmak üzere G notasından geçen herhangi bir doğruya üçgenin köşelerinden çizilen dikmeler için;



$|BD| = 3$ cm ise $|AF|$ kaç cm dir.

Çözüm: [BD]//[CE]//[KN] olacak şekilde [KN] doğru parçası çizilirse;



$m(F\widehat{G}A) = m(N\widehat{G}K)$ olduğundan $F\overset{\triangle}{G}A = N\overset{\triangle}{G}K$ benzerliği vardır. Bu benzerlikten,

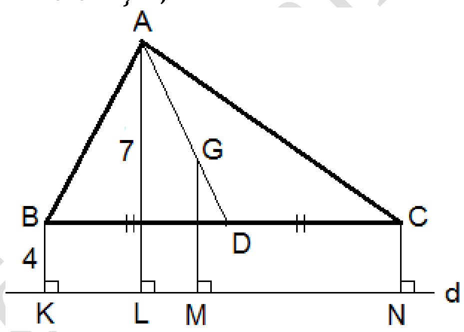
$$\frac{|GF|}{|NG|} = \frac{|AG|}{|GK|} = \frac{|AF|}{|KN|} = 2 \text{ ise } |AF| = 2|KN|$$

yazılabilir. $|KN| = 3$ cm olduğundan;

$$|AF| = 6 \text{ cm}$$

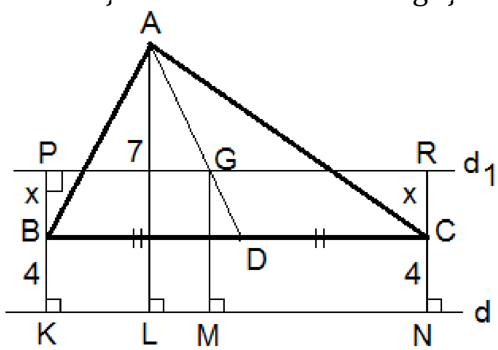
olur.

Örnek: Bir ABC üçgeninde üçgenin ağırlık merkezi G olmak üzere, üçgenin dışında çizilen bir d doğrusuna üçgenin köşelerinden ve ağırlık merkezinden çizilen dikmeler için;



$|BK| = 4$ cm, $|AL| = 7$ cm ise $|GM|$ kaç cm dir.

Çözüm: $d // d_1$ olacak şekilde G noktasından geçen d_1 doğrusu çizilirse,



$|GM| = |PK| = |RN| = t$ seçilirse,

$$|BK| + |AL| + |CN| = (t - x) + (t + 2x) + (t - x) = 3t$$

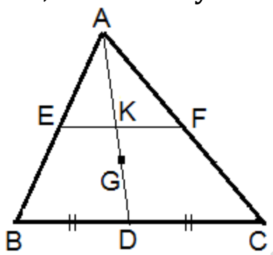
olacağından,

$$|BK| + |AL| + |CN| = 3|GM|$$

$$|GM| = \frac{|BK|+|AL|+|CN|}{3} = \frac{4+7+4}{3} = 5 \text{ cm}$$

bulunur.

6.21. Teorem: Bir üçgende ağırlık merkezi ile orta tabanın kenarortayı kestiği nokta arasındaki uzunluk, kenarortay uzunluğunun altıda biri kadardır.



G Ağırlık Merkezi, [EF] orta taban, [AD] Kenarortay $\Leftrightarrow \frac{|GK|}{|AD|} = \frac{1}{6}$

İspat: [EF] orta taban olduğundan temel benzerlik teoreminden

$$|AK| = |KD| = \frac{|AD|}{2}$$

olur. G ağırlık merkezi olduğundan 6.20. teorem gereği,

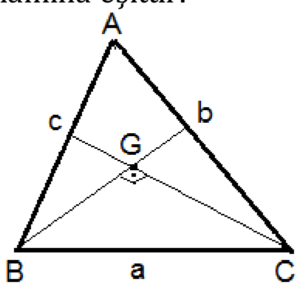
$$\frac{|AG|}{|AD|} = \frac{2}{3}$$

eşitliği yazılabilir. Buna göre,

$$|KG| = |AG| - |AK| = \frac{2|AD|}{3} - \frac{|AD|}{2} = \frac{|AD|}{6}$$

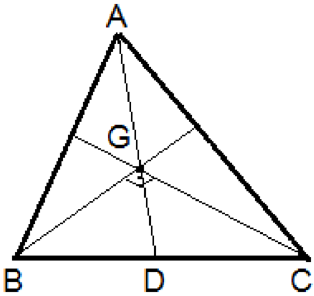
bulunur.

6.22. Teorem: Bir ABC üçgeninde kenarortaylardan herhangi ikisi birbirine dik olarak kesişiyorsa, üçünü kenarortayların karesi, diğer iki kenarortayların kareleri toplamına eşittir.



$$V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$$

İspat: ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olmak üzere; BGC dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa,



$$|BC|^2 = |BG|^2 + |GC|^2$$

olur. 6.20. Teoremden ve muhteşem üçlü teoreminden,

$$|BG| = \frac{2}{3}V_a,\ |GC| = \frac{2}{3}V_c,\ |GD| = \frac{1}{3}V_a \text{ ve } |BC| = 2|GD|$$

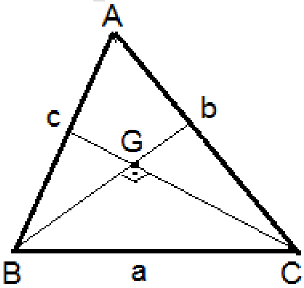
olur ki,

$$\left(\frac{2}{3}V_a\right)^2 = \left(\frac{2}{3}V_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}V_c\right)^2$$

$$V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$$

bulunur.

6.23. Teorem: Bir ABC üçgeninde kenarortaydan herhangi ikisi birbirine dik olarak kesişiyorsa, üçüncü kenarın uzunluklarının karelerinin toplamına eşittir.



$$5a^2 = b^2 + c^2$$

İspat: ABC üçgeninde kenarortay teoreminden;

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow V_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$2V_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow V_b^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$2V_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} \Leftrightarrow V_c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

eşitlikleri 6.22. Teoreminde $V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

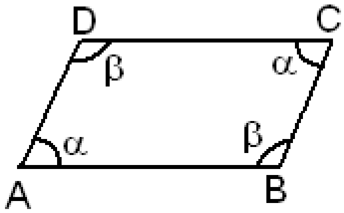
$$\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$

$$5a^2=b^2+c^2$$

elde edilir. //

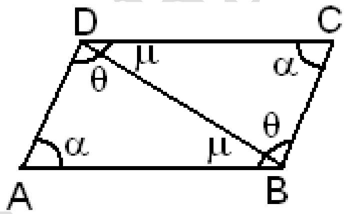
Bu kısımda ihtiyacımıza binaen ileride bahsedilecek olan paralelkenar hakkında şu bilgiyi vermek gerekiyor.

6.24. Teorem: Paralelkenar bir dörtgenin karşılıklı kenarları ve karşılıklı açıları birbirine eşittir.



$$m(D\hat{A}G)=m(D\hat{C}B)=\alpha,\ m(A\hat{D}C)=m(C\hat{B}A)=\beta \Leftrightarrow |AB|=|DC|,|AD|=|BC|$$

İspat: [DB] köşegenini çizelim.



$$m(A\hat{D}B)=m(D\hat{B}C)=\theta \text{ ve } m(D\hat{B}A)=m(B\hat{D}C)=\mu$$

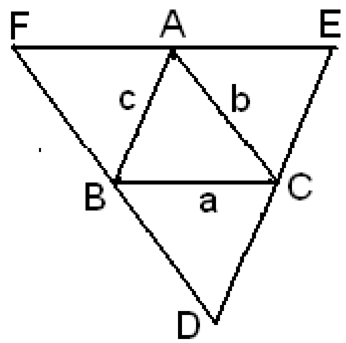
alınırsa, $|DB|=|DB|$ olduğundan A.K.A eşlik aksiyomundan $\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{CDB}$ bulunur. Buna göre,

$$\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|BD|}{|BD|}=\frac{|DA|}{|BC|}=1$$

$$|AB|=|DC|,|AD|=|BC|$$

bulunur.

6.25. Teorem: Bir ABC üçgeninin köşelerinden karşı kenara çizilen paralellerinin oluşturduğu üçgenin çevresi, ABC üçgeninin çevresinin iki katıdır.

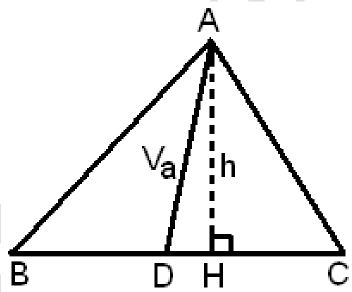


İspat: $[DC]//[AB]$, $[FE]//[BC]$, $[DF]//[AC]$ oluğundan,
ABCE dörtgeni bir paralelkenardır ve $|BC| = |AE| = a$, $|BA| = |EC| = c$
ACBF dörtgeni bir paralelkenardır ve $|BC| = |AF| = a$, $|AC| = |BF| = b$
ABDC dörtgeni bir paralelkenardır ve $|BC| = |AC| = b$, $|AB| = |DC| = c$
bulunur. Buna göre,

$$Ç(DEF) = 2 \cdot Ç(ABC)$$

olur.

6.26. Teorem: Bir üçgende herhangi bir kenarortay üçgeni, alanları eşit iki üçgene ayırır.



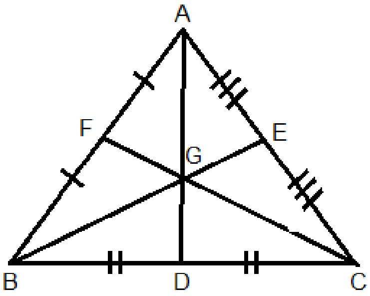
[AD] kenarortay $\Leftrightarrow A(A\overset{\triangle}{B}C) = A(D\overset{\triangle}{B}C)$

İspat: [AD], [BC] kenarortayı olduğundan, $|BC| = |DC|$ dir.

$$\frac{A(ABC)}{A(ADC)} = \frac{\frac{|BD|\cdot h}{2}}{\frac{|DC|\cdot h}{2}} = 1$$

$$A(A\overset{\triangle}{B}D) = A(A\overset{\triangle}{D}C)$$

6.27. Teorem: Bir üçgenin kenarortayları üçgeni, alanları birbirine eşit altı üçgene ayırır.



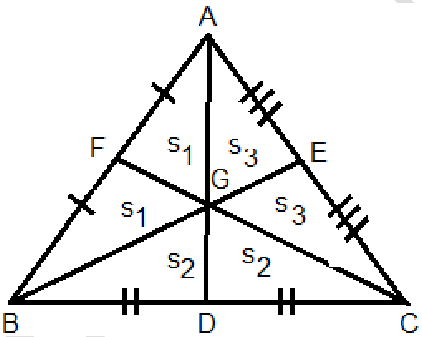
$$A(\overset{\triangle}{AGF}) = A(\overset{\triangle}{FGB}) = A(\overset{\triangle}{BGD}) = A(\overset{\triangle}{DGC}) = A(\overset{\triangle}{CGE}) = A(\overset{\triangle}{EGA})$$

İspat: $A(\overset{\triangle}{ABC}) = s$ olsun. 6.26. teoremden,

AGB üçgeninde [GF] kenarortaydır. $A(\overset{\triangle}{AGF}) = A(\overset{\triangle}{FGB}) = s_1$

BGC üçgeninde [GD] kenarortaydır. $A(\overset{\triangle}{BGD}) = A(\overset{\triangle}{DGC}) = s_2$

CGA üçgeninde [GE] kenarortaydır. $A(\overset{\triangle}{CGE}) = A(\overset{\triangle}{EGA}) = s_3$ olsun.



ABC üçgeninde,

[AD] kenarortay olduğundan $2s_1 + s_2 = 2s_3 + s_2$ ise $s_1 = s_3$ (1)

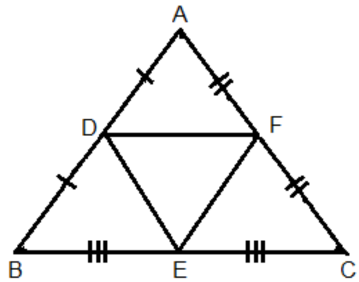
[BE] kenarortay olduğundan $2s_1 + s_3 = 2s_2 + s_3$ ise $s_1 = s_2$ (2)

(1) ve (2) eşitliğinden $s_1 = s_2 = s_3$ olur. O halde,

$$A(\overset{\triangle}{AGF}) = A(\overset{\triangle}{FGB}) = A(\overset{\triangle}{BGD}) = A(\overset{\triangle}{DGC}) = A(\overset{\triangle}{CGE}) = A(\overset{\triangle}{EGA}) = \frac{s}{6}$$

elde edilir.

6.28. Teorem: Bir üçgenin orta tabanları üçgeni, alanları eşit dört üçgene ayırır.



D, E, F noktaları üzerinde bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan [DE], [EF] ve [DF] orta tabanlardır ve

$$A(A\overset{\Delta}{D}F)=A(D\overset{\Delta}{B}E)=A(F\overset{\Delta}{E}C)=A(D\overset{\Delta}{E}F)=\frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{4}$$

tür.

İspat: $[FE] \perp [AB]$ ve $|FE| = \frac{|AB|}{2}$ ise $|FE| = |AD| = |DB|$

$[DF] \perp [BC]$ ve $|DF| = \frac{|BC|}{2}$ ise $|DF| = |BE| = |EC|$

$[DE] \perp [AC]$ ve $|DE| = \frac{|AC|}{2}$ ise $|DE| = |AF| = |FC|$

olduğundan K.K.K. eşlik aksiyomundan,

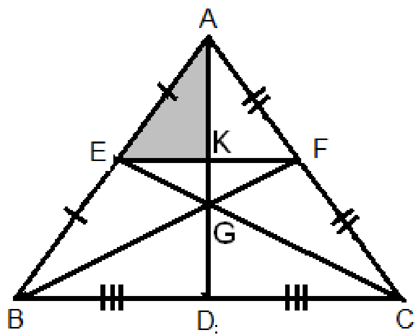
$$A\overset{\Delta}{D}F \cong D\overset{\Delta}{B}E \cong F\overset{\Delta}{E}C \cong D\overset{\Delta}{E}F$$

olur. Buradan,

$$A(A\overset{\Delta}{D}F)=A(D\overset{\Delta}{B}E)=A(F\overset{\Delta}{E}C)=A(D\overset{\Delta}{E}F)=\frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{4}$$

bulunur.

6.29. Teorem: ABC üçgeninde, D, E ve F noktaları kenarların orta noktaları olmak üzere,



$$A(A\overset{\Delta}{E}K)=\frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{8}$$

dir.

İspat: |EK| = |KF| olduğundan $A(A\overset{\Delta}{E}K)=A(A\overset{\Delta}{K}F)$ ve

$$A(A\overset{\Delta}{E}K)=\frac{A(A\overset{\Delta}{E}F)}{2} \qquad (1)$$

dir. 6.28. Teoremden,

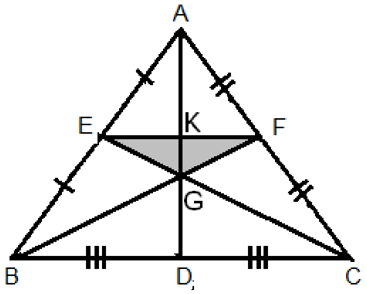
$$A(A\overset{\Delta}{E}F)=\frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{4} \qquad (2)$$

dir. (2) yi (1) de yerine yazarsak,

$$A(A\overset{\Delta}{E}K)=\frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{8}$$

bulunur.

6.30. Teorem: ABC üçgeninde, D, E ve F noktaları kenarların orta noktaları olmak üzere,



$$A(E\overset{\Delta}{G}F)=\frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{12}$$

dir.

İspat: 6.27. Teoremden

$$A(A\overset{\Delta}{G}F)=\frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{6} \qquad (1)$$

dir. 6.29. Teoremden,

$$A(A\overset{\Delta}{K}F)=\frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{4} \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) den,

$$A(K\overset{\Delta}{G}F)=A(A\overset{\Delta}{G}F)-A(A\overset{\Delta}{K}F)$$

$$= \frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{6} - \frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{8}$$

$$= \frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{24}$$

bulunur. Ayrıca,

$$A(E\overset{\Delta}{G}K) = A(K\overset{\Delta}{G}F)$$

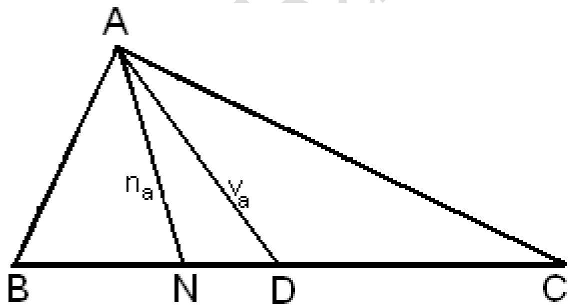
olduğundan,

$$A(E\overset{\Delta}{G}F) = \frac{A(A\overset{\Delta}{B}C)}{12}$$

elde edilir.

YÜKSEKLİK, AÇIORTAY ve KENARORTAY İLİŞKİLERİ

6.31. Teorem: ABC üçgende A açısının iç açıortayı [AN] ve [BC] doğrusu üzerinde [AD] kenarortayı için kenarortay ile açıortay arasındaki fark;



$$|ND| = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}$$

dir.

İspat: $|BN| = x$, $|ND| = y$ ve $|NC| = z$ dersek $|BD| = |DC|$ olduğundan;

$$x + y = z - y \quad x+y=z-y \text{ ise } 2y = z - x$$

yazılabilir. 6.7. teoreminden;

$$x = \frac{ac}{b+c}, z = \frac{ab}{b+c}$$

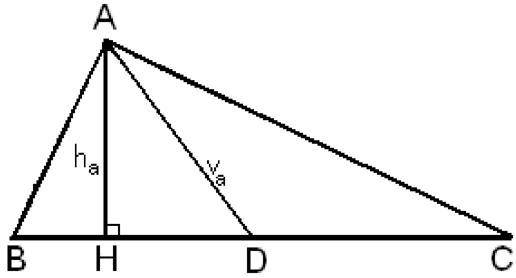
olduğundan,

$$2y = z - x = \frac{ab}{b+c} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a|b-c|}{b+c}$$

$$y = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}$$

bulunur.

6.32. Teorem: ABC üçgende aynı kenara ait yükseklik ile kenarortayın kenarı kestikleri noktalar arasındaki uzaklık;



$$|DH| = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}$$

dir.

İspat: ABC üçgeninde a kenarına ait yükseklik h_a, kenarortay V_a olmak üzere, $|DH| = x$ olsun.

AHC dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$b^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 \qquad (1)$$

$$c^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 \qquad (2)$$

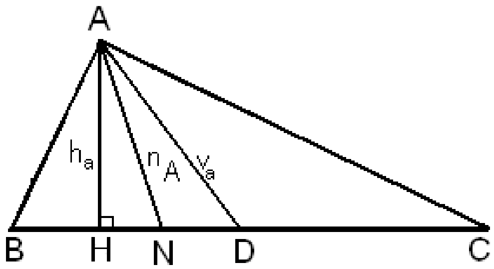
(1) ve (2) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$b^2 - c^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right) - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

$$x = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}$$

bulunur.

6.33. Teorem: ABC üçgende A açısına ait yükseklik [AH] ve A açısına ait iç açıortay [AN] ise [NH] uzunluğu;



$$|NH| = \frac{|b-c|}{2}\left(\frac{b+c}{a} - \frac{a}{b+c}\right)$$

dir.

İspat: 6.7. teoreminden;

$$|BH| = \frac{ac}{b+c}, |CN| = \frac{ab}{b+c}$$

olduğundan, 6.31. teoremden,

$$|ND| = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}$$

ve

$$|DH| = \frac{|b^2-c^2|}{2a}$$

olduğunu biliyoruz.

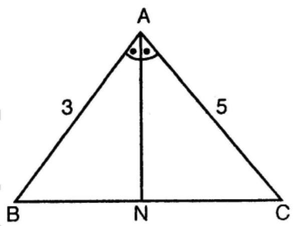
$$\begin{aligned} |NH| &= |HD| - |ND| \\ &= \frac{|b^2-c^2|}{2a} - \frac{a|b-c|}{2(b+c)} \\ &= \frac{|b-c|}{2}\left(\frac{b+c}{a} - \frac{a}{b+c}\right) \end{aligned}$$

bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Açıortay Teoremleri

1.

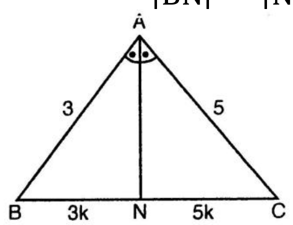


ABC bir üçgen
[AN] iç açıortay
|AB| = 3 cm
|AC| = 5 cm
|BC| = 6 cm

Verilere göre |CN| kaç cm dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{15}{4}$ E) $\frac{15}{2}$

Çözüm: İç açıortay teoreminden $\frac{|AB|}{|BN|} = \frac{|AC|}{|NC|}$ dir.



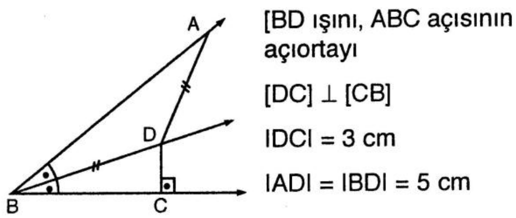
$$\frac{|NC|}{|BN|} = \frac{5k}{3k}$$

$$|BN| = |BN| + |NC| = 3k + 5k = 6$$

$$k = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$
$$|CN| = 5k = 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

Cevap: D

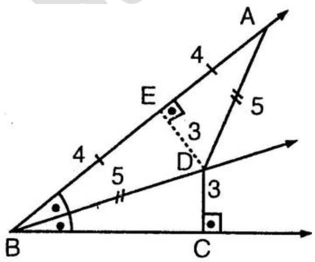
2.



Verilere göre |CN| kaç cm dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: D noktasından [AB] ye dikme çizelim. ABD ikizkenar üçgen olduğundan $|AE| = |EB|$ olur.

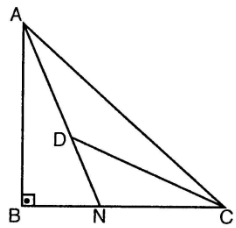


Açıortayın bir noktadan indirilen dik doğrular birbirine eşittir olduğundan $|ED| = |DC| = 3$ cm dir.

3–4–5 üçgeni kuralı gereği $|AE| = |EB| = 4$ cm olacağından $|AB| = 8$ cm dir.

Cevap: E

3.



ABC bir dik üçgen

A, D ve N doğrusal

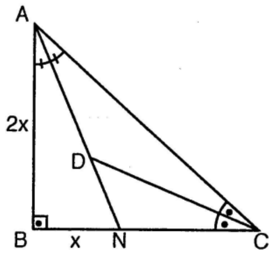
D, iç teğet çemberin merkezi

$|AB| = 2|BN|$

Verilere göre $\frac{A(ADC)}{A(DNC)}$ kaçtır?

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

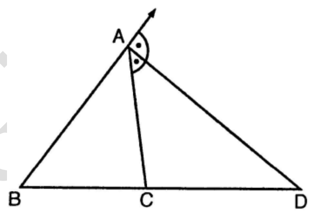
Çözüm: D, açıortayların kesin noktası, $|AB| = 2|BN|$ dir.



$$\frac{|AB|}{|BN|} = \frac{2x}{x} = \frac{|AC|}{|NC|} = \frac{A(ADC)}{A(DNC)} = 2$$

Cevap: C

4.



ABC bir üçgen

[AD] dış açıortay

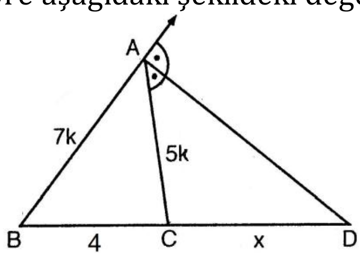
$5|AB| = 7|AC|$

$|BC| = 4$ cm

Verilere göre $|CD|$ kaç cm dir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: Verilere göre aşağıdaki şekildeki değerler bulunur.



Dış açıortay teoreminden

$$\frac{7k}{4+x} = \frac{5k}{x}$$

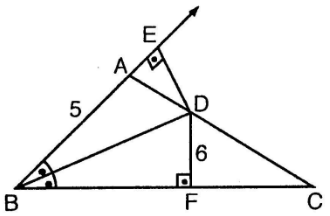
$$7x = 20 + 5x$$

$$x = 10 \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: A

5. ABC bir üçgen, [BD] iç açıortay,



$[DE] \perp [EB]$

$[DF] \perp [BC]$

$|AB| = 5$ cm

$|DF| = 6$ cm

$|AD| = 3\sqrt{5}$ cm

Verilere göre |BD| kaç cm dir?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: Açıortaydan kollara dik inen doğrular birbirine eşit olduğundan $|ED| = 6$ dır. ADE dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$|AD|^2 = |AE|^2 + |ED|^2$$

$$(3\sqrt{5})^2 = |AE|^2 + 6^2$$

$$|AE| = 3$$

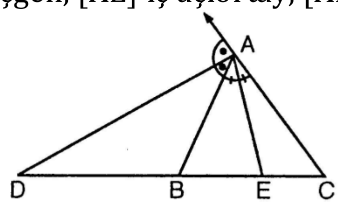
bulunur. BED üçgeni 3–4–5 kuralına göre;

$$|BD| = 10 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: B

6. ABC bir üçgen, [AE] iç açıortay, [AD] dış açıortay,



$|AE| = 5$ cm

$|AD| = 12$ cm

$|DC| = 15$ cm

Verilere göre |EC| kaç cm dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: A bütünler açısı iki iç açının toplamından oluştuğundan $m(D\widehat{A}E) = 90$ dir.

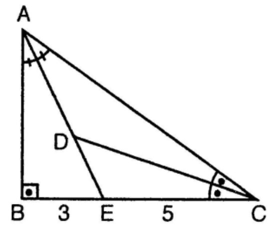
DAE dik üçgeninde 5–12–13 uygulanınca $|DE| = 13$ olacağından,

$$|DC| = |DE| - |EC| = 15 - 13 = 2 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: B

7.



ABC bir dik üçgen

[AE] ve [CD] iç açıortaylar

$|BE| = 3$ cm

$|EC| = 5$ cm

Verilere göre $A(D\widehat{E}C)$ kaç cm² dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

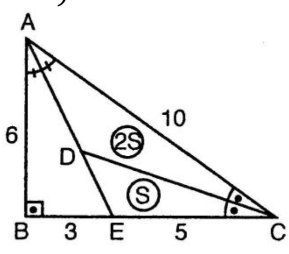
Çözüm: [AE] açıortay olduğundan $\frac{|AB|}{3k} = \frac{|BN|}{5k}$ dir. ABC üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$
$$(5k)^2 = (3k)^2 + 8^2$$
$$16k^2 = 64$$
$$k = 2$$

bulunur. BED üçgeni 3–4–5 kuralına göre;

$$|AC| = 10 \text{ cm}, |AB| = 6 \text{ cm}$$

olur. $A(DEC) = s$ alınırsa $A(ADC) = 2s$ olur.

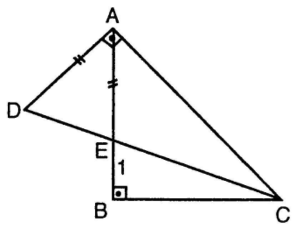


$$A(AEC) = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 = 3s$$
$$A(DEC) = 5 \text{ cm}^2$$

olur.

Cevap: E

8.



ABC ve DAC birer dik üçgen

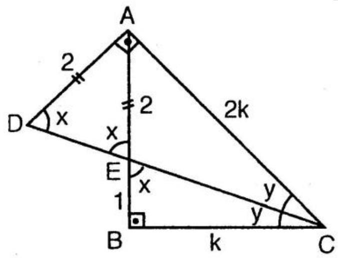
$|AD| = |AE| = 2$ cm

$|BE| = 1$ cm

Verilere göre $m(B\hat{C}E)$ açısı kaç derecedir?

A) 18 B) 20 C) 24 D) 30 E) 36

Çözüm: ADE ikizkenar üçgen olduğundan $m(B\hat{C}E) = m(B\hat{C}E) = x$ diyelim. $m(B\hat{E}C) = x$ olur.



$m(A\hat{C}E) = y$ olsun. $x + y = 90$ olacağından $m(B\hat{C}E) = y$ olur. $[EC]$ açıortay olacağından iç açıortay teoremi gereği;

$$\frac{|AC|}{|BK|} = \frac{2k}{k}$$

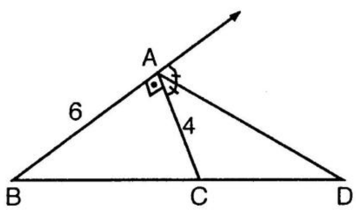
bulunur. ABC üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$
$$3^2 = k^2 + (2k)^2$$
$$k = \sqrt{3}$$

olur. $|AB| = 2$ bulunur. BEC üçgeninin 30–60–90 üçgeni olduğunu gösterir. $m(B\hat{C}E) = 30^0$ dir.

Cevap: D

9.



BAC bir dik üçgen

$[AD]$, dış açıortay

$|AB| = 6$ cm

$|AC| = 4$ cm

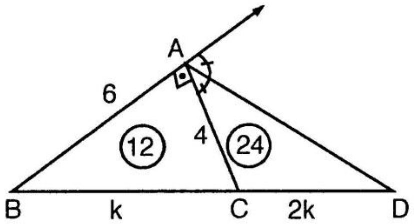
Verilere göre $A(A\hat{C}D)$ kaç cm² dir?

A) 21 B) 22 C) 24 D) 25 E) 26

Çözüm: Dış açı ortay teoreminden

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|BD|}{|CD|} \text{ ise } \frac{6}{4}=\frac{|BD|}{|CD|}$$

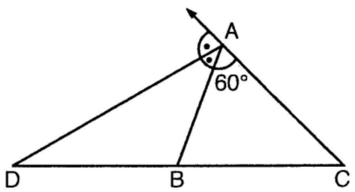
olur. $|BC| = k$ alınırsa $\frac{6}{4}=\frac{k+|CD|}{|CD|}$ için $|CD| = 2k$ dır.



$A(A\hat{B}C) = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$ olacağından $A(A\hat{C}D) = 24 \text{ cm}^2$ dir.

Cevap: C

10.



ABC bir üçgen

[AD], dış açıortay

$m(B\widehat{A}C) = 60°$

$|AB| = 2$ cm

$|AC| = 3$ cm

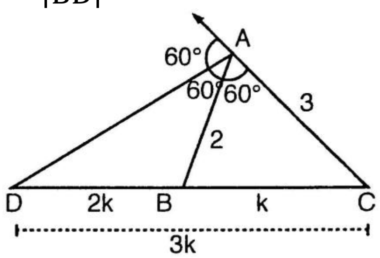
Verilere göre $|BC|$ kaç cm'dir?

A) 21 B) 22 C) 24 D) 25 E) 26

Çözüm: Dış açı ortay teoreminden

$$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|CD|}{|BD|} \text{ ise } \frac{3}{2}=\frac{|CD|}{|BD|}$$

olur. $|BC| = k$ alınırsa $\frac{3}{2}=\frac{k+|BD|}{|BD|}$ için $|BD| = 2k$ dır.



ADC üçgeninde iç açıortay teoreminden,

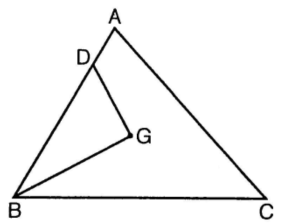
$$\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|AD|}{|BD|} \text{ için } \frac{3}{k}=\frac{|AD|}{2k} \text{ olup } |BD|=6 \text{ cm}$$

dir.

Cevap: A

Kenarortay Teoremleri

11.



ABC bir üçgen

G, ağırlık merkezi

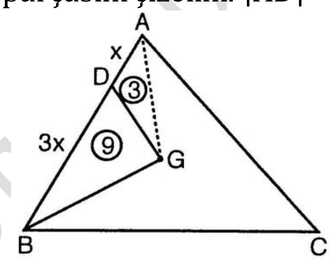
|BD| = 3|AD|

A(BDG) = 9 cm^2

Verilere göre A(ABC) kaç cm'dir?

A) 24 B) 27 C) 30 D) 32 E) 36

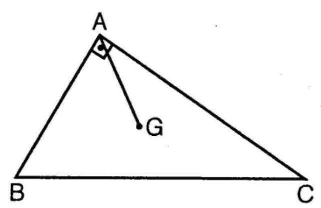
Çözüm: [AG] doğru parçasını çizelim. $|AD|=x$ alınırsa $|BD|=3x$ dir.



3x'lik kısım $A(DBG)=9$ cm^2 ise x'ik kısım $A(DAG)=3$ cm^2 dir.
$A(ABG)=12$ cm^2 ise $A(ABC)=3\cdot 12=36$ cm^2 dir.

Cevap: E

12.



BAC bir dik üçgen

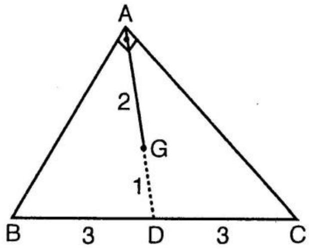
G, ağırlık merkezi

|AG| = 2 cm

Verilere göre |BC| kaç cm'dir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

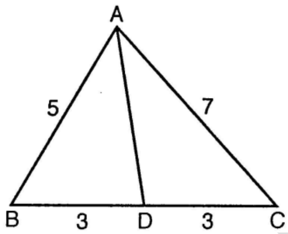
Çözüm: [AD] doğrusunu çizelim.



Ağırlık merkezi uzunluğundan $|GD| = 1$ cm ve $|AD| = 3$ cm dir.
ABC dik üçgeninde muhteşem üçlü oluşup $|BC| = 6$ cm olur.

Cevap: D

13.



ABC bir üçgen

IABI = 5 cm

IACI = 7 cm

IBDI = IDCI = 3 cm

Verilere göre $|AD|$ kaç cm'dir?

A) $2\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 4 E) 5

Çözüm: [AD] kenarortaydır. Kenarortay teoremlerinden,

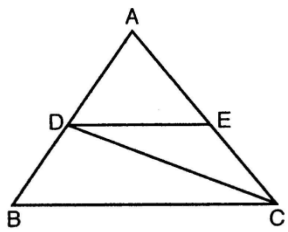
$$2|AD|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - \frac{|BC|^2}{2}$$

$$2|AD|^2 = 5^2 + 7^2 - \frac{6^2}{2}$$

$|AD| = 2\sqrt{7}$ cm

Cevap: A

14.



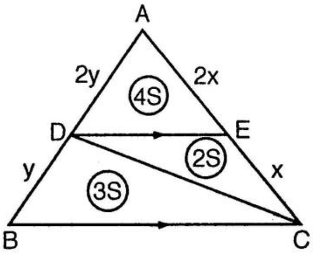
ABC bir üçgen

[DE] // [BC]

ABC üçgeninin ağırlık merkezi [DE] üzerinde olduğuna göre, $\dfrac{A(ABD)}{A(BDC)}$ oranı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: ABC üçgeninin ağırlık merkezi [DE] üzerinde olduğuna göre, $|AE| = 2|EC|$ dir. $|EC| = x$ alırsak $|AE| = 2x$ olur.



$A(DEC) = 2s$ alırsak $A(ADE) = 4s$ ve $A(ADC) = 6s$ olur.

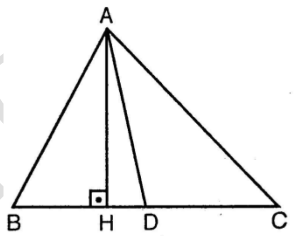
$A(ADC) = 6s$ ise $A(BDC) = 3s$ olur.

$$\frac{A(ABD)}{A(BDC)} = \frac{9s}{3s} = 3$$

olur.

Cevap: B

15.



ABC bir üçgen

$[AH] \perp [BC]$

$|BD| = |DC| = 4$ cm

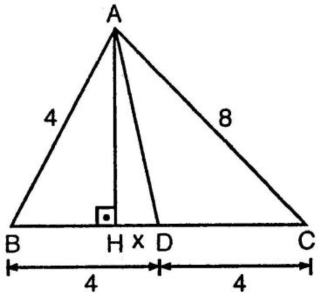
$|AC| = 8$ cm

$Ç(ABC) = 20$ cm

Verilere göre $|HD|$ kaç cm'dir?

A) 2 B) $\dfrac{5}{2}$ C) 3 D) $\dfrac{7}{2}$ E) 4

Çözüm: $Ç(ABC) = 20$ cm olduğuna göre $|AB| = 4$ cm dir.



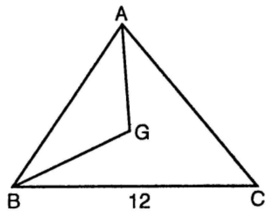
$|HD| = x$ olsun. 6.32. teoreme göre;

$$|AC|^2 - |AB|^2 = 2|BC||HD|$$
$$8^2 - 4^2 = 2 \cdot 8 \cdot x$$
$$x = 3 \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: C

16.



ABC bir ikizkenar üçgen

$|AB| = |AC|$

G, ağırlık merkezi

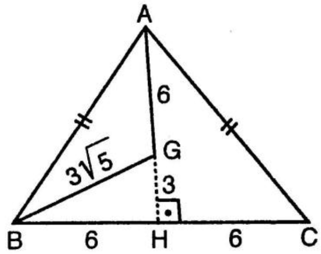
$|BC| = 12$ cm

$|BG| = 3\sqrt{5}$ cm

Verilere göre $|AG|$ kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: [AH] doğrusunu çizelim. ABC ikizkenar üçgen olduğundan [AH] kenarortay, açıortay ve yüksekliktir. $|BH| = |HC| = 6$ cm



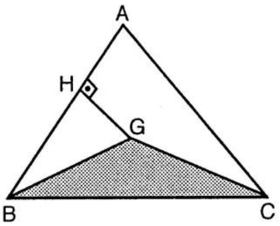
BGH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$|BG|^2 = |BH|^2 + |HG|^2$$
$$(3\sqrt{5})^2 = 6^2 + |HG|^2$$
$$|HG| = 3 \text{ cm}$$
$$|AG| = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: C

17.



ABC bir üçgen

G, ağırlık merkezi

$[GH] \perp [AB]$

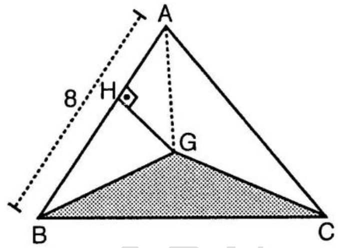
$|AB| = 8$ cm

$A(BCG) = 12\ cm^2$

Verilere göre $|HG|$ kaç cm'dir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: [AG] doğru parçasını çizelim.



$A(ABG) = A(BGC) = 12$ cm olduğundan

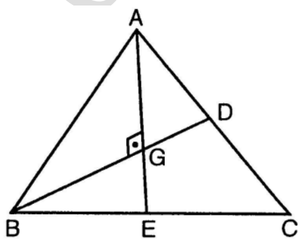
$$\frac{8 \cdot |HG|}{2} = 12$$

$$|HG| = 3 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: B

18.



ABC bir ikizkenar üçgen

$|AC| = |BC|$

G, ağırlık merkezi

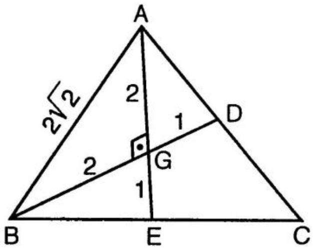
$[AE] \perp [BD]$

$|GD| = 1$ cm

Verilere göre $|AB|$ kaç cm'dir?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) 3

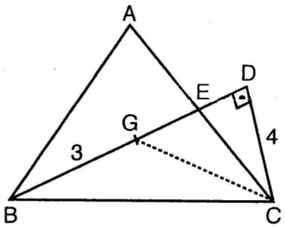
Çözüm: G ağırlık merkezi olduğundan $|BG| = 2|GD| = 2$ dir.
ABC ikizkenar üçgen olduğundan $|AG| = |BG| = 2$ dir.



ABG ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AB| = 2\sqrt{2}$ olur.

Cevap: D

19.



ABC bir üçgen

G, ağırlık merkezi

$[CD] \perp [DB]$

$|BG| = 3$ cm

$|DC| = 4$ cm

Verilere göre A(ABC) kaç cm^2 dir?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

Çözüm: $A(BGC) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$

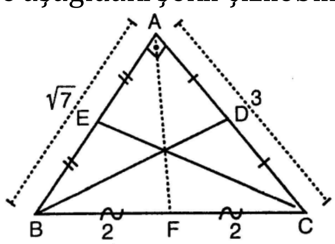
$A(ABC) = 3 \cdot A(BGC) = 3 \cdot 6 = 18 \text{ cm}^2$

Cevap: E

20. Bir dik üçgenin dik kenarlarının uzunlukları 3 cm ve $\sqrt{7}$ cm dir. Bu dik üçgenin dik kenarlarına ait kenarortay uzunluklarının kareleri toplamı kaçtır?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

Çözüm: Verilere göre aşağıdaki şekil çizilebilir.



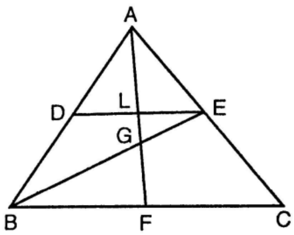
Pisagor teoreminden $|BC| = 4$ ve muhteşem üçlüden $|AF| = |BF| = |FC| = 2$ dir. (Neden?) 6.19. teoremden dik üçgenin kenarortayları;

$$5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$$
$$5 \cdot 2^2 = V_b^2 + V_c^2$$
$$V_b^2 + V_c^2 = 20$$

bulunur.

Cevap: A

21.



ABC bir üçgen

G, ağırlık merkezi

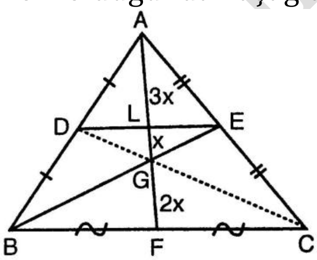
|AD| = |DB|

|GF| = 6 cm

Verilere göre |AL| kaç cm'dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: G ağırlık merkezi olduğundan aşağıdaki şekil çizilir.



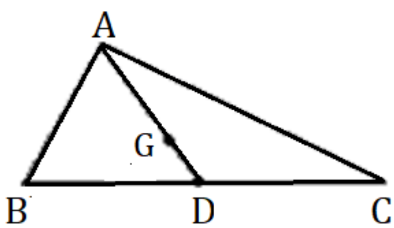
$|GF| = 2x = 6$ ise $|AL| = 3x = 9$ cm dir.

Cevap: D

22. Bir ABC üçgeninde V_a kenarortayı 24 cm dir. Üçgenin ağırlık merkezinin A köşesine uzaklığı kaç cm dir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm:



$|GA| = \frac{2V_a}{3} = \frac{2 \cdot 24}{3} = 16 \text{ cm}$

Cevap: E

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.