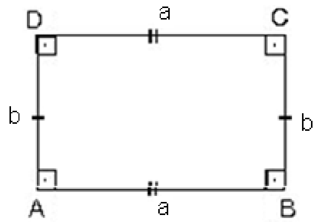
8. BÖLÜM
DİKDÖRTGEN ve KARE

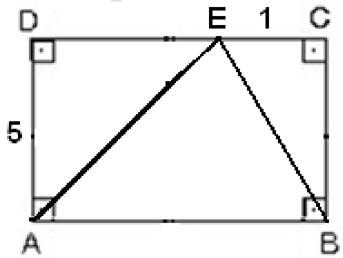
DİKDÖRTGEN

8.1. Tanım: Karşılıklı kenar uzunlukları eşit ve bütün açıları 90^0 olan dörtgenlere dikdörtgen denir.

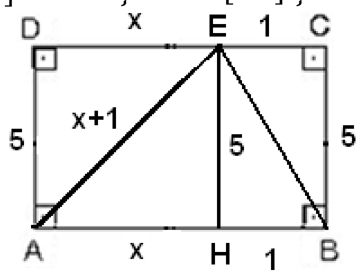


ABCD dikdörtgendir
$\Leftrightarrow m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^0$, $|AB| = |CD|$ ve $|BC| = |AD|$

Örnek: ABCD dikdörtgeninde $|AB| = |AE|$, $|AD| = 5$ cm ve $|EC| = 1$ cm olduğuna göre, $|DE|$ kaç cm'dir?



Çözüm: $[EH] \perp [AB]$ olacak şekilde $[EH]$ çizilirse,



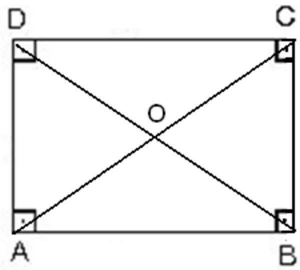
$|EH| = |AD| = 5$ cm, $|HB| = |EC| = 1$ cm
$|AH| = |DE| = x$, $|AE| = |AB| = x + 1$

olur. AHE dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$(x+1)^2 = x^2 + 5^2$$
$$x = 12 \text{ cm}$$

olur.

8.1. Teorem: Bir dikdörtgenin;
a) Köşegen uzunlukları eşittir.
b) Karşılıkları kenarları birbirine paraleldir.
c) Köşegenler birbirini ortalar.



İspat: a) $|AB| = |DC|$, $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^0$ ve $|AD| = |DA|$ olduğundan K.A.K. eşlik aksiyomuna göre $A\hat{B}D \cong D\hat{C}A$ dır. Eş üçgenlerde karşılıklı kenar uzunlukları eş olacağından, $|AC| = |BD|$ bulunur.

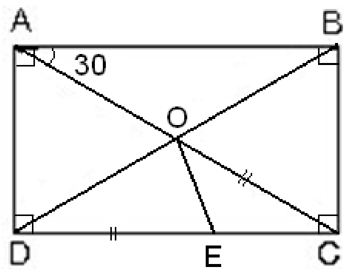
b) $m(A\hat{D}B) = \alpha$ ve $m(B\hat{D}C) = \beta$ olsun. Bu takdirde $\alpha + \beta = 90$ olur.
DAB üçgeninde $m(\hat{A}) = 90$ olduğundan $m(A\hat{B}D) = \beta$ olur.
$m(B\hat{D}C) = m(A\hat{D}C) = \beta$ olduğundan iç ters açılar gereği $[AB]//[DC]$ dir.
ABC üçgeninde $m(\hat{B}) = 90$ olduğundan $m(D\hat{B}C) = \alpha$ olur.
$m(A\hat{D}B) = m(D\hat{B}C) = \alpha$ olduğundan iç ters açılar gereği $[AD]//[BC]$ dir.

C) İç ters açılardan $m(O\hat{A}B) = m(O\hat{C}D)$, $m(O\hat{B}A) = m(O\hat{D}C)$, $m(A\hat{O}B) = m(D\hat{O}C)$ olduğundan A.A.A. benzerlik teoreminden $\overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{OCD}$ olur. Benzer üçgenlerde karşılıklı uzunluklar orantılı ve $|AB| = |CD|$ olduğundan,

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|CD|} = 1$$

dir. Buna göre $|OA| = |OC|$ ve $|OB| = |OD|$ dir.

Örnek: ABCD dikdörtgeninde [AC] ve [BD] köşegenlerdir. $|DE| = |OC|$ ve $m(B\hat{A}C) = 30^0$ olduğuna göre, EOC açısının ölçüsünü bulunuz.



Çözüm: $|DE| = |OC|$ ve $|DO| = |OC|$ olduğundan $|DE| = |DO|$ olur. Ayrıca iç ters açılardan $m(B\hat{A}C) = m(A\hat{C}D) = 30$ dir.

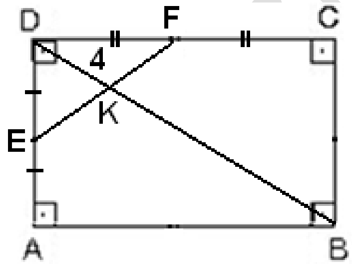
$|DE| = |DO|$ ve $m(A\hat{C}D) = m(O\hat{D}C) = 30$ olduğundan $m(D\hat{O}C) = 120$

$|DE| = |DO|$ olduğundan $m(D\hat{O}E) = 75$

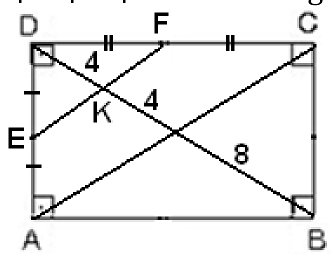
$m(E\hat{O}C) = 120 - 75 = 45^0$

bulunur.

Örnek: ABCD dikdörtgeninde $|AE| = |ED|$, $|DF| = |FC|$ ve $|DK| = 4$ cm olduğuna göre $|KB|$ kaç cm'dir?



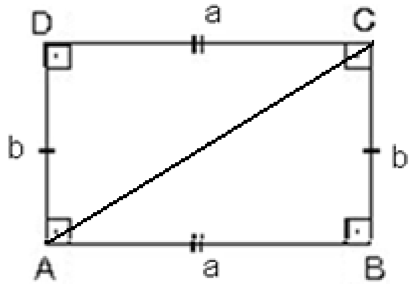
Çözüm: [AC] köşegenini çizersek, ACD üçgeninde [EF] orta tabandır ve $|DK| = |OK| = 4$ cm dir. $|OB| = |DO| = 8$ cm olduğundan,



$$|KB| = |KO| + |OB| = 4 + 8 = 12 \text{ cm}$$

bulunur.

8.2. Teorem: Bir dikdörtgenin kenar uzunlukları a ve b, köşegen uzunluğu e ise



$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dir.

İspat: Pisagor teoreminden,

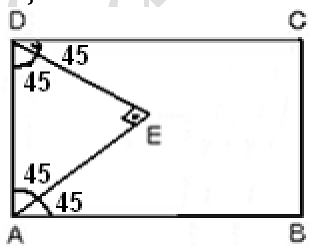
$$e = |AC| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

olur.

8.3. Teorem: Bir dikdörtgenin çevresi uzun ve kısa kenarlarının toplamının iki katıdır. $Ç(ABCD) = 2(a + b)$

İspat okuyucuya bırakılmıştır.

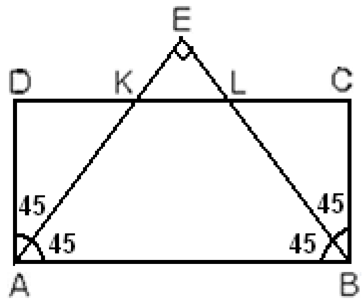
8.4. Teorem: Dikdörtgenin herhangi bir kenarın uçlarındaki açıların açıortaylarının oluşturduğu açı 90^0 dir.



ABCD dikdörtgen [AE] ve [DE] açıortay $\Leftrightarrow m(\widehat{AED}) = 90^0$

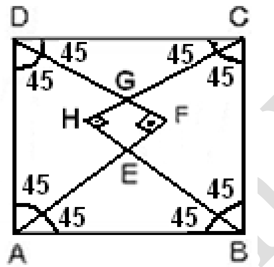
İspat: DAB açısı ile ADC açısının açıortayları 45^0 olduğundan ADE üçgeninin iç açılar toplamından $m(\widehat{AED}) = 90^0$ dir.

8.1. Sonuç: Açıortayların kesiştikleri noktanın dikdörtgenin dışında kalması durumunda açıortaylarının oluşturduğu açı 90^0 dir.



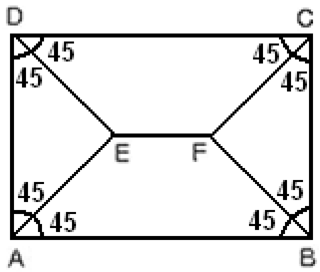
ABCD dikdörtgen [AE] ve [DE] açıortay $\Leftrightarrow m(A\hat{E}D) = 90^0$

8.5. Teorem: Bir dikdörtgenin ardışık iç açılarının, karşılıklı olarak kesişimi ile elde edilen dörtgen bir dikdörtgendir.



İspat: 8.5. Teorem gereği bir dikdörtgende ardışık iki iç açının açıortayı kesişim noktasında birbirine dik olduğundan EFGH dörtgenin tüm iç açıları dik açı olacaktır. Buna göre EFGH dörtgeni bir dikdörtgendir.

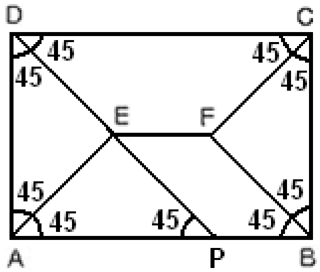
8.6. Teorem: ABCD bir dikdörtgen olmak üzere; [AE], [BF], [CF] ve [DE] iç açıortaylar ise;



$|EF| = |AB| - |BC|$

dir.

İspat: [DP] doğrusunu çizelim.

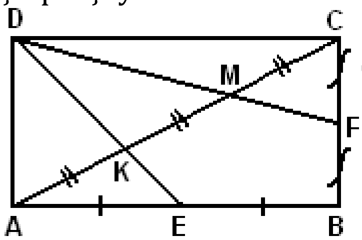


ADP üçgeninden $m(A\hat{P}D) = 45^0$ olduğundan ADP üçgeninin ikizkenar üçgen olduğu bulunur. Buradan $|AD| = |AP| + |BC|$ yazılır. $[PE]//[BF]$ için PBFE bir paralelkenar olduğundan,

$$|EF| = |PB| = |AB| - |BC|$$

bulunur.

8.7. Teorem: Bir dikdörtgende köşegenlerden birinden karşı kenarların orta noktalarına çizilen doğrular dikdörtgenin bu köşesinden geçmeyen köşegenini üç eşit parçaya böler.



$$|AE| = |EB|\,,\ |BF| = |FC| \Leftrightarrow |AK| = |KM| = |MC|$$

İspat: İç ters açılardan $m(E\hat{A}K) = m(D\hat{C}M)$ ve $m(A\hat{E}K) = m(C\hat{D}K)$ dır. $[DE]$ doğru parçası $[AB]$ doğru parçasının kenarortayı olduğundan ve $|AB| = |CD|$ olduğundan, AEK üçgeni ile CDK üçgeni arasındaki A.K.A. benzerliğinden,

$$\frac{|AE|}{|CD|} = \frac{|AK|}{|KC|} = \frac{1}{2}$$

olur. Benzer şekilde CFM üçgeni ile ADM üçgeni arasındaki benzerlikten;

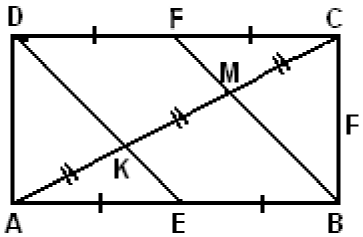
$$\frac{|CF|}{|AD|} = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{1}{2}$$

yazılabilir. Elde edilen iki orantıdan

$$|AK| = |KM| = |MC|$$

bulunur.

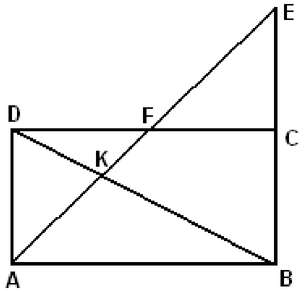
8.8. Teorem: Bir dikdörtgenin karşılıklı iki köşesinden karşılarındaki kenarların orta noktalarına çizilen doğrular, dikdörtgenin bu köşelerinden geçmeyen köşegenin üç eşit parçaya böler.



$|AE| = |EB|$, $|DF| = |FC| \Leftrightarrow |AK| = |KM| = |MC|$

Bu teoremin ispatı 8.7. teoreme benzediğinden ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

8.9. Teorem: ABCD dikdörtgeninde, [BD] köşegen, A, K, F, E ve B, C, E şekildeki gibi doğrusal noktalar olmak üzere, $|AK|^2 = |KF| \cdot |KE|$ dir.



İspat: $m(K\widehat{A}B) = m(K\widehat{F}D)$ ve $m(K\widehat{B}A) = m(K\widehat{D}F)$ olduğundan A.A.A. benzerlik aksiyomundan $\overset{\Delta}{KAB} \sim \overset{\Delta}{KFD}$ dir. Buna göre,

$$\frac{|AK|}{|KF|} = \frac{|KB|}{|KD|} \qquad (1)$$

olur. $m(K\widehat{E}B) = m(K\widehat{A}D)$ ve $m(K\widehat{B}E) = m(K\widehat{D}A)$ olduğundan A.A.A. benzerlik aksiyomundan $\overset{\Delta}{KBE} \sim \overset{\Delta}{KDA}$ dir. Buna göre,

$$\frac{|KE|}{|AK|} = \frac{|KB|}{|KD|} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

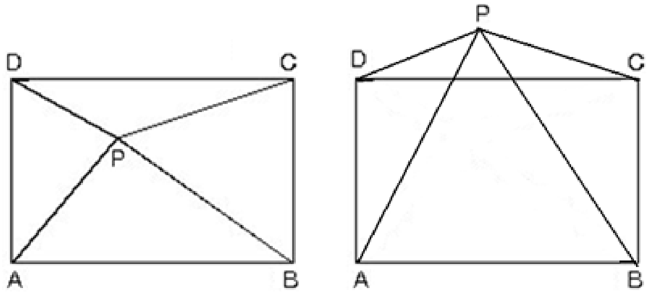
olur. (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\frac{|AK|}{|KF|} = \frac{|KB|}{|KD|} = \frac{|KE|}{|AK|}$$

$$|AK|^2 = |KF| \cdot |KE|$$

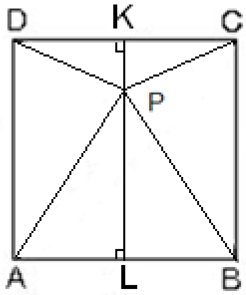
bulunur.

8.10. Teorem: Bir dikdörtgenin içinde veya dışında alınan P bir noktasının dikdörtgenin karşılıklı köşelerine olan uzaklıklarının kareleri toplamı birbirine eşittir.



$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$

İspat: [KL] doğru parçasını [KL]//[AD] olacak şekilde çizelim.



Pisagor teoreminden,

$|PL|^2 = |PA|^2 - |AL|^2$, $|PL|^2 = |PB|^2 - |BL|^2$ ise $|PA|^2 - |AL|^2 = |PB|^2 - |BL|^2$

$|PK|^2 = |PD|^2 - |DK|^2$, $|PK|^2 = |PC|^2 - |CK|^2$ ise $|PC|^2 - |CK|^2 = |PD|^2 - |DK|^2$

yazılabilir. Bu iki eşitlik taraf tara toplanırsa,

$$|PA|^2 + |PC|^2 + |BL|^2 + |DK|^2 = |PB|^2 + |PD|^2 + |AL|^2 + |CK|^2$$

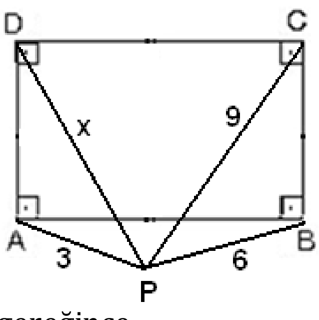
bulunur. $|BL| = |CK|$ ve $|DK| = |AL|$ olacağından,

$$|PA|^2 + |PC|^2 + |CK|^2 + |AL|^2 = |PB|^2 + |PD|^2 + |AL|^2 + |CK|^2$$

$$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$$

elde edilir.

Örnek: P noktası ABCD dikdörtgeninin dış bölgesinde herhangi bir noktadır. $|PA| = 3$ cm, $|PB| = 6$ cm ve $|PC| = 9$ cm ise $|PD|$ kaç cm'dir?



Çözüm: 8.4. Teorem gereğince

$$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$$

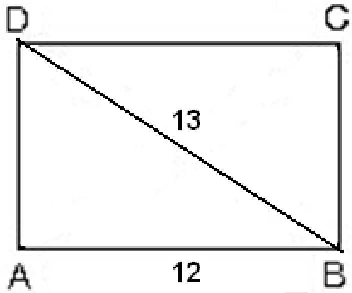
$$3^2 + 9^2 = 6^2 + x^2$$

$$x = 3\sqrt{6}\ \text{cm}$$

bulunur.

8.1. Not: 4.1. aksiyoma göre bir kenarı a, diğer kenarı b olan bir dikdörtgenin alanı $A(ABCD) = a \cdot b$ dir.

Örnek: ABCD dikdörtgen ve [BD] köşegenidir. $|AB| = 12$ cm ve $|BD| = 13$ cm olduğuna göre dikdörtgenin alanını bulunuz.

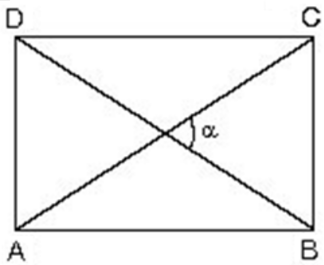


Çözüm: ABD üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$|AD|^2 + |AB|^2 = |BD|^2$$
$$|AD|^2 + 12^2 = 13^2$$
$$|AD| = 5\ \text{cm}$$
$$A(ABCD) = |AB| \cdot |AD| = 5 \cdot 12 = 60\ \text{cm}^2$$

olur.

8.11. Teorem: Bir dikdörtgenin köşegen uzunluğu e ise bu dikdörtgenin alanı,



$$A(ABCD) = \frac{e^2}{2} \cdot \sin\alpha$$

dır.

İspat: İki kenarı ve kenarlar arasındaki açının ölçüsü bilinen üçgenin alanı;

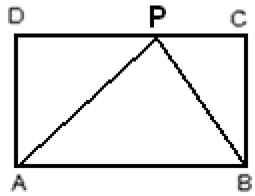
$$A(\overset{\triangle}{BCD}) = \frac{(e/2)(e/2)}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{e^2}{8} \cdot \sin\alpha$$

olduğundan ve köşegenler dikdörtgeni eşit parçaya böldüğünden;

$$A(ABCD) = 4 \cdot A(\overset{\triangle}{BCD}) = 4 \cdot \frac{e^2}{8} \cdot \sin\alpha = \frac{e^2}{2} \cdot \sin\alpha$$

bulunur.

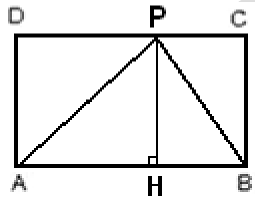
8.12. Teorem: ABCD dikdörtgeninde P noktası [DC] üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu takdirde,



$$A(ABCD) = 2 \cdot A(\overset{\triangle}{PAB})$$

dir.

İspat: [PH] ⊥ [AB] olacak şekilde [PH] dikmesini çizelim.

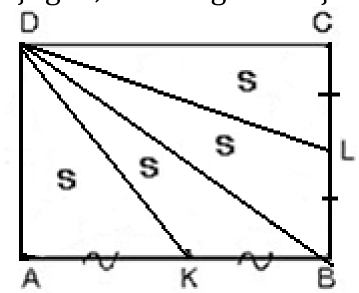


$$A(ABCD) = |AB| \cdot |PH| \text{ ve } A(\overset{\triangle}{PAB}) = \frac{|AB| \cdot |PH|}{2}$$

$$A(ABCD) = 2 \cdot A(\overset{\triangle}{PAB})$$

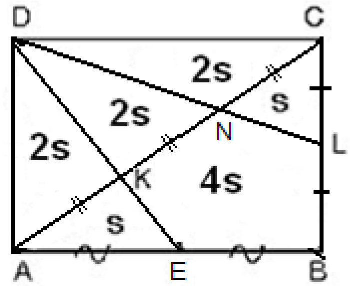
olur.

8.13. Teorem: Bir dikdörtgende köşelerden birinden karşı kenara çizilen kenarortaylar ve köşegen, dikdörtgeni 4 eşit parçaya böler.



İspat: [BD] köşegeni ABCD dikdörtgeni ABD ve BCD eş üçgenlerine ayırır. Bu üçgenlere çizilen kenarortaylar, üçgenleri tabanları ve yükseklikleri eşit olan ikişer üçgeni böleceğinden, her birinin alanı da birbirine eşit olur.

8.14. Teorem: Bir ABCD dikdörtgeninde; [AC] köşegen,



$|AE| = |EB|$, $|BL| = |LC|$ ve $A(A\hat{E}K) = s$ ise;

$A(AKD) = A(DKN) = A(DNC) = 2s$

$A(NLC) = A(AEK) = s$

$A(EBLNK) = 4s$

dir.

İspat: A.A.A. benzerlik aksiyomundan $\overset{\Delta}{AEK} \sim \overset{\Delta}{CDK}$ olup 8.8. Teoreme göre $|DK| = 2|KE|$ bulunur. O halde;

$$A(AKD) = 2 \cdot A(AEK) = 2s$$

olur. $|AK| = |KN| = |NC|$ olduğundan,

$$A(AKD) = A(DKN) = A(DNC) = 2s$$

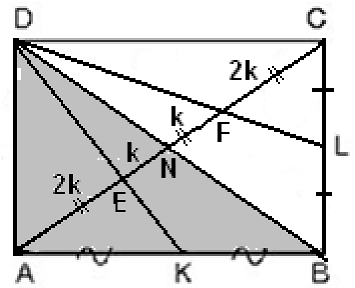
olur. A.A.A. benzerlik aksiyomundan $\overset{\Delta}{AND} \sim \overset{\Delta}{CNL}$ olup 8.8. Teoreme göre $|DN| = 2|NL|$ bulunur. O halde;

$$A(D\hat{N}C) = 2.A(C\hat{N}L) = 2s$$

$$A(C\hat{N}L) = s$$

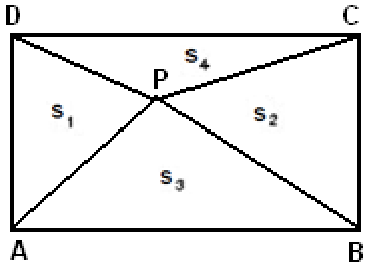
olur.

8.15. Teorem: ABCD dikdörtgeninde K ve L noktaları kenarların orta noktaları olduğuna göre, E, ABC üçgeninin, F de DCB üçgeninin ağırlık merkezidir.



8.1. Teorem ve 8.7. Teoremden bu teoremin ispatı aşikardır.

8.16. Teorem: ABCD dikdörtgeninin içinde herhangi bir nokta P olmak üzere,

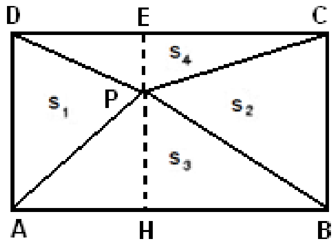


$$\frac{A(ABCD)}{2} = A(P\overset{\triangle}{A}D) + A(P\overset{\triangle}{B}C) = A(P\overset{\triangle}{A}B) + A(P\overset{\triangle}{C}D)$$

$$\frac{A(ABCD)}{2} = s_1 + s_2 = s_3 + s_4$$

dir.

İspat: P den geçen [AB] ve [DC] doğru parçalarına dik olan [EH] dikmesini çizelim.



$$A(P\overset{\triangle}{A}B) = \frac{a\cdot|PH|}{2} \text{ ve } A(P\overset{\triangle}{C}D) = \frac{a\cdot|PE|}{2}$$

olur. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$A(P\overset{\triangle}{A}B) + A(P\overset{\triangle}{C}D) = \frac{a}{2}(|PH| + |PE|) = \frac{a\cdot h_a}{2}$$

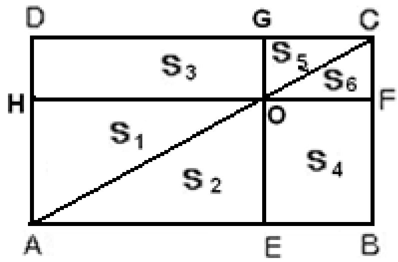
$$A(P\overset{\triangle}{A}B) + A(P\overset{\triangle}{C}D) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

dir. Benzer şekilde,

$$A(P\overset{\triangle}{A}D) + A(P\overset{\triangle}{B}C) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

bulunur.

8.17. Teorem: Bir dikdörtgeninin köşelerinden biri üzerinde alınan K noktasından kenarlarına çizilen paralel doğrular için;



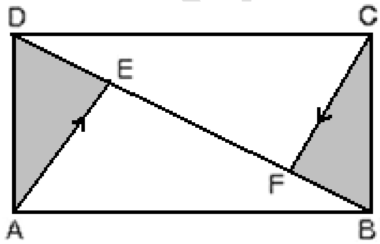
$$|CG| = |OF| = |EB| \Leftrightarrow s_1 = s_2, s_3 = s_4, s_5 = s_6$$

İspat: $|CG| = |OF| = |EB|$ ise $|AE| = |HO| = |DG|$, $|BF| = |EO| = |AH|$ dir. Dikdörtgenin içindeki bir noktaları, kenarlara çizilen paraleller, paralelkenarı dört farklı paralelkenara böler. [AC] köşegeni ise AEOH ve OFCG dikdörtgenleri eşit parçalara böldüğünden $s_1 = s_2, s_5 = s_6$bulunur. ABC ve ACD üçgenleri için,

$$s_1 + s_3 + s_5 = s_2 + s_4 + s_6$$
$$s_3 = s_4$$

olur.

8.18. Teorem: Bir dikdörtgenin karılıklı iki köşesinden, bu köşelerinden geçmeyen köşegene çizilen paralel doğruların oluşturduğu düzlemsel bölgeler için;

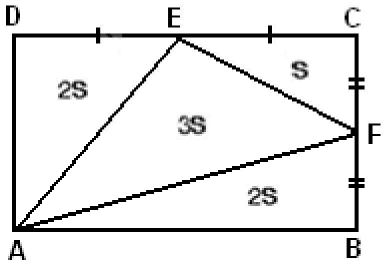


$$A(A\overset{\triangle}{D}E) = A(B\overset{\triangle}{C}F),\ A(A\overset{\triangle}{B}E) = A(C\overset{\triangle}{D}F)$$

dir.

İspat: $m(A\hat{E}D) = m(C\hat{F}B)$, $m(E\hat{A}D) = m(F\hat{C}B)$ ve $|AD| = |BC|$ olduğundan ADE ve BCF üçgenleri eştir. Benzer şekilde ABE ve CDF üçgenleri de eş üçgenlerdir.

8.19. Teorem: ABCD dikdörtgende $|DE| = |EC|$, $|BF| = |FC|$ ve $A(EFC) = s$ olmak üzere;



$$A(ABF) = A(AED) = 2s \text{ ve } A(AFE) = 3s$$

dir.

İspat: Dikdörtgenin yüksekliği h olsun. Buna göre $A(ABCD) = a \cdot h$ dir.

$$A(EFC) = s = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{a \cdot h}{8}$$

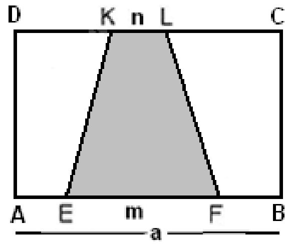
$$A(ABF) = \frac{a \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{a \cdot h}{4} = 2s$$

$$A(AED) = \frac{a \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{a \cdot h}{4} = 2s$$

$$A(AFE) = a \cdot h - \left(\frac{a \cdot h}{8} + \frac{a \cdot h}{4} + \frac{a \cdot h}{4}\right) = \frac{3 \cdot a \cdot h}{4} = 3s$$

dır.

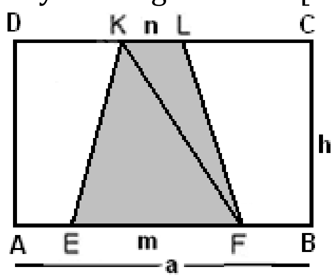
8.20. Teorem: ABCD dikdörtgende $|AB| = a$, $|EF| = m$, $|KL| = n$ birim olsun. Bu dikdörtgenin taralı kısmının tüm alana oranı;



$$\frac{A(EFKL)}{A(ABCD)} = \frac{m+n}{2a}$$

dır.

İspat: Bu dikdörtgenin yüksekliği h olsun. [KF] doğru parçasını çizelim.



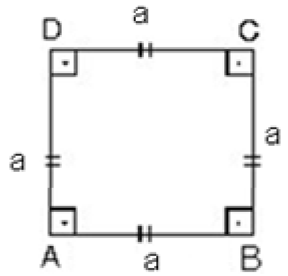
$$A(EKF) = \frac{m \cdot h}{2}, A(KLF) = \frac{n \cdot h}{2}$$

$$\frac{A(EFKL)}{A(ABCD)} = \frac{\frac{m \cdot h}{2} + \frac{n \cdot h}{2}}{a \cdot h} = \frac{m+n}{2a}$$

bulunur.

KARE

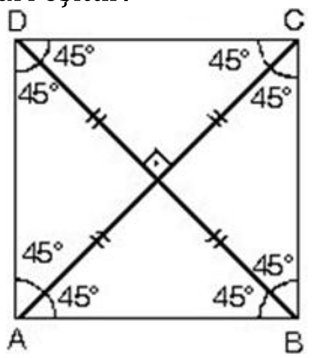
8.2. Tanım: Dört, kenar uzunlukları birbirine eşit ve bütün açıları 90^0 olan dörtgenlere kare denir.



ABCD karedir
$\Leftrightarrow m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^0$ ve $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$

Kare; dikdörtgen ve ileri de verilecek olan eşkenar dörtgen, paralelkenar ve yamuk kavramlarının özel bir durumudur.

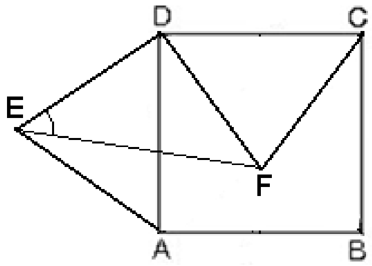
8.21. Teorem: Bir karenin;
a) Karşılıkları kenarları birbirine paraleldir.
b) Köşegen uzunlukları eşittir.



İspat: a) $m(A\widehat{D}C) = m(A\widehat{B}D) = 45^0$ olması iç ters açılardan [AB]//[DC] ile mümkündür. Yine $m(C\widehat{A}D) = m(A\widehat{C}B) = 45^0$ olması iç ters açılardan [AB]//[DC] ile mümkündür. Şu halde karşılıkları kenarları birbirine paraleldir.

b) A.A.A. eşlik aksiyomundan $ABD \cong BCA$ dir. Eş üçgenlerde karşılıklı kenar uzunlukları eş olacağından $|AC| = |BD|$ dir.

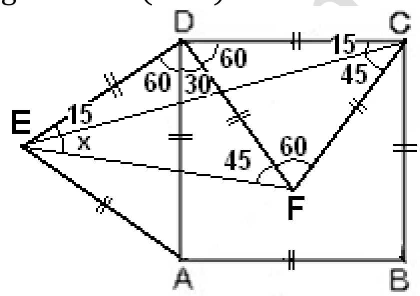
Örnek: ABCD kare, ADE ve DFC birer eşkenar üçgendir. O halde CEF açısının ölçüsünü bulunuz.



Çözüm: ABCD kare, ADE ve DFC birer eşkenar üçgen ise

$$|AB| = |BC| = |AD| = |DE| = |EA| = |DC| = |DF| = |FC|$$

dir. $m(F\widehat{D}C) = 60^0$ olduğundan $m(A\widehat{D}F) = 30^0$ olur.



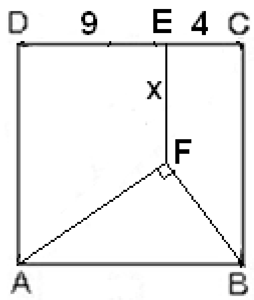
DEF ikizkenar üçgeninde $|DE| = |DF|$ ve $m(E\widehat{D}F) = 90^0$ ise,

$$m(D\widehat{E}F) = x + 15 = 45$$

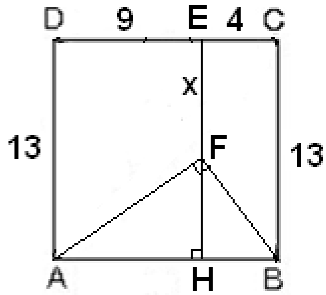
$$x = 30^0$$

bulunur.

Örnek: ABCD kare, $[AF] \perp [FB]$ ve $[FE] \perp [DC]$ dır. $|DE| = 9$ cm ve $|EC| = 4$ cm olduğuna göre, $|EF|$ kaç cm'dir.



Çözüm: [FH] ⊥ [AB] olacak şekilde [FH] çizelim.



$|AH| = |DE| = 9$ cm ve $|HB| = |EC| = 4\ cm$

dir. FAB üçgeninde Öklid teoreminden,

$|FH|^2 = |AH| \cdot |HB|$

$h^2 = 9 \cdot 4$

$h = 6$ cm

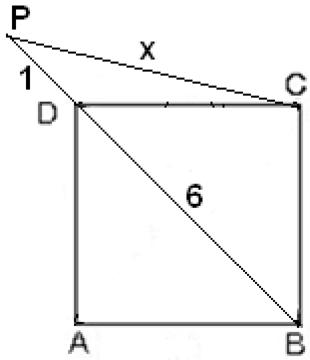
olur. $|EH| = |BC| = 13$ olduğundan

$x + h = 13$

$x = 13 - 6 = 7$ cm

bulunur.

Örnek: ABCD kare, P noktası D ve B noktalarına doğrusaldır. $|PD| = 1$ cm ve $|BD| = 6$ cm olduğuna göre $|PC|$ kaç cm'dir?



Çözüm: [AC] köşegenini çizersek, [AC] ⊥ [BD],

$|AC| = |BD| = 6$ cm ve $|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = 3$ cm

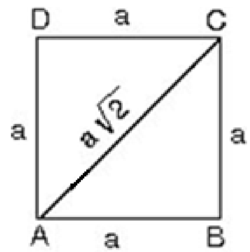
olur. POC üçgeninde 3–4–5 kuralı gereği $x = 5$ cm'dir.

8.22. Teorem: Bir karenin kenarının uzunluğu a olmak üzere,

a) Köşegenler birbirini dik keserler.

b) Köşegenin uzunluğu e ise $e = a\sqrt{2}$ dir.

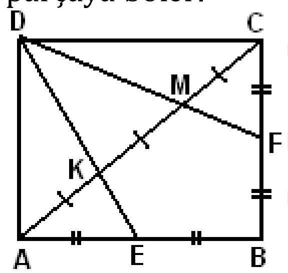
c) Karenin çevresi $Ç(ABCD) = 4a$ dır.



ABCD Kare $\Leftrightarrow$ $e = |AC| = a\sqrt{2}$ ve $Ç(ABCD) = 4a$

İspat okuyucuya bırakılmıştır.

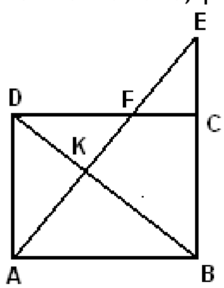
8.23. Teorem: Bir dikdörtgende köşegenlerden birinden karşı kenarların orta noktalarına çizilen doğrular paralelkenarın bu köşesinden geçmeyen köşegenini üç eşit parçaya böler.



$$|AE| = |EB| = |BF| = |FC| \Leftrightarrow |AK| = |KM| = |MC|$$

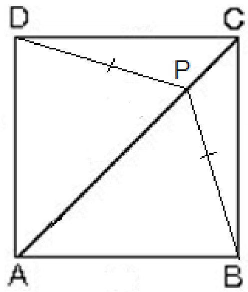
Bu teoremin ispatı 8.7. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

8.24. Teorem: ABCD karesinde, [BD] köşegen, A, K, F, E ve B, C, E şekildeki gibi doğrusal noktalar olmak üzere, $|AK|^2 = |KF| \cdot |KE|$ dir.



Bu teoremin ispatı 8.12. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

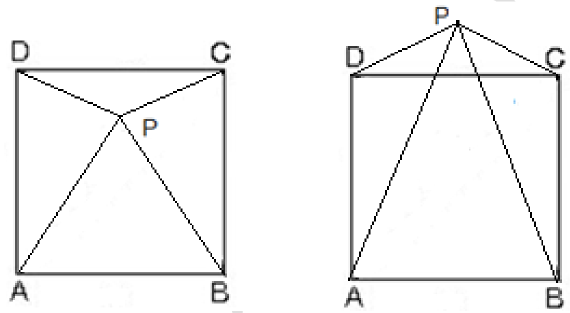
8.25. Teorem: Bir karede köşegenler üzerinde alınan bir noktanın yan köşelere uzaklıkları birbirine eşittir.



[AC] köşegen ⇔ $|PB| = |DP|$

Karede köşegenler karenin simetri eksenlerine eşit olduğundan teoremin ispatı aşikârdır.

8.26. Teorem: Bir karenin içinde veya dışında alınan P bir noktasının karenin karşılıklı köşelerine olan uzaklıklarının kareleri toplamı birbirine eşittir.

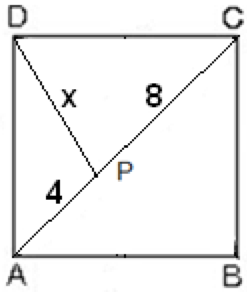


$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$

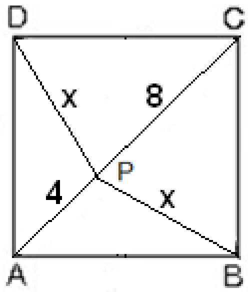
P noktasını karenin dış bölgesinde alarak teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Bu teoremin ispatı 8.4. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

Örnek: ABCD karesinde, [AC] köşegen ve $p \in [AC]$ dır. $|AP| = 4$ cm ve $|PC| = 8$ cm olduğuna göre $|PD|$ kaç cm'dir?



Çözüm: Verilen şekilde [PB] doğru parçasını çizelim. 8.3. Teoremden $|PD| = x$ ise $|PB| = x$ dir.



8.4. Teoremden,

$$|PD|^2 + |PB|^2 = |PA|^2 + |PC|^2$$
$$x^2 + x^2 = 4^2 + 8^2$$
$$x = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

bulunur.

8.2. Not: 4.1. aksiyoma göre bir kenarı a olan bir karenin alanı $A(ABCD) = a^2$ dir.

Örnek: Çevresinin uzunluğu, alanına eşit olan karenin bir kenar uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Bir kenar uzunluğu a olan ABCD karesinde;

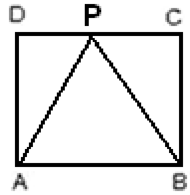
$$A(ABCD) = a^2 \text{ ve } Ç(ABCD) = 4a$$

olduğundan,

$$a^2 = 4a$$
$$a^2 - 4a = 0$$
$$a(a - 4) = 0$$
$$a = 4$$

olur.

8.27. Teorem: ABCD karesinde P noktası [DC] üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu takdirde,

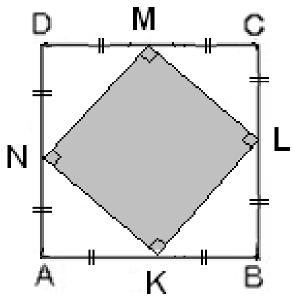


$$A(ABCD) = 2 \cdot A(P\overset{\Delta}{A}B)$$

dir.

Bu teoremin ispatı 8.4. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

8.28. Teorem: ABCD karesinin kenarlarının orta noktaları K, L, M, N olmak üzere;



$$A(KLMN) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

dir.

İspat: AKN, BKL, CML ve DNM üçgenleri dik kenarı a/2 olduklarından ikizkenar dik üçgenler olduklarından KLMN bir karedir ve bir kenarının uzunluğu,

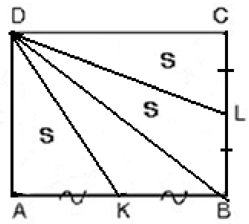
$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

olur. Buna göre,

$$A(KLMN) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{A(ABCD)}{2}$$

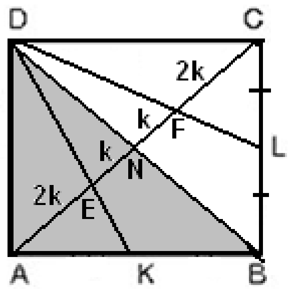
elde edilir.

8.29. Teorem: Bir dikdörtgende köşelerden birinden karşı kenara çizilen kenarortaylar ve köşegen, dikdörtgeni 4 eşit parçaya böler.



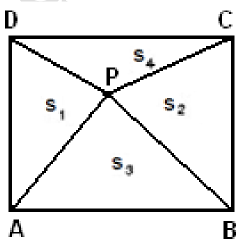
Bu teoremin ispatı 8.13. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

8.30. Teorem: ABCD karesinde K ve L noktaları kenarların orta noktaları olduğuna göre, E, ABC üçgeninin, F de DCB üçgeninin ağırlık merkezidir.



8.1. Teorem ve 8.7. Teoremden bu teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

8.31. Teorem: ABCD karesi içinde herhangi bir nokta P olmak üzere,



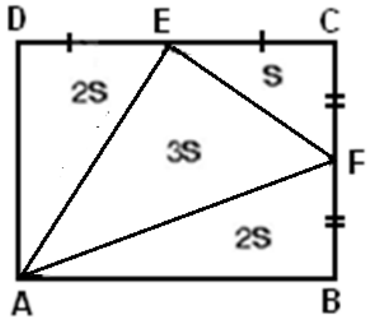
$$\frac{A(ABCD)}{2} = A(P\overset{\triangle}{A}D) + A(P\overset{\triangle}{B}C) = A(P\overset{\triangle}{A}B) + A(P\overset{\triangle}{C}D)$$

$$\frac{A(ABCD)}{2} = s_1 + s_2 = s_3 + s_4$$

dir.

Bu teoremin ispatı 8.16. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

8.32. Teorem: ABCD karesinde $|DE| = |EC| = |BF| = |FC|$ ve $A(EFC) = s$ olmak üzere;

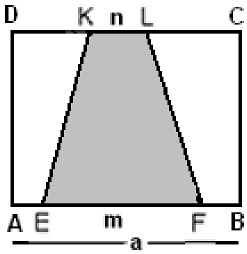


$$A(ABF) = A(AED) = 2s \text{ ve } A(AFE) = 3s$$

dir.

Bu teoremin ispatı 8.19. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

8.33. Teorem: ABCD karesinde $|AB| = a$, $|EF| = m$, $|KL| = n$ birim olsun.
Bu karenin taralı kısmının tüm alana oranı;



$$\frac{A(EFKL)}{A(ABCD)} = \frac{m+n}{2a}$$

dır.

Bu teoremin ispatı 8.20. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Dikdörtgen

1. Çevre uzunluğu birer doğal sayı olan ve 22 cm olan bir dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 dir.

A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

Çözüm: $2a + 2b = 22$

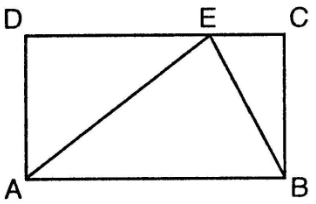
$a + b = 11$

$a = 6$ cm ve $b = 5$ cm

Alan $= 6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}^2$

Cevap: E

2.



ABCD bir dikdörtgen

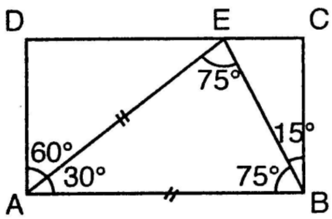
$|AE| = |DC|$

$m(\widehat{CBE}) = 15°$

Verilere göre $m(D\widehat{A}E)$ kaç derecedir?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

Çözüm: Dikdörtgenin karşılıklı kenarları eşittir. $|DC| = |AE| = |AB|$ olduğundan ABE bir ikizkenar üçgendir.



$m\left(A\widehat{B}E\right) = 90 - 15 = 75^0$

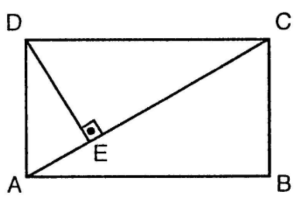
$m(A\widehat{B}E) = m(A\widehat{E}B) = 75^0$

$m\left(E\widehat{A}B\right) = 180 - 75 - 75 = 30^0$

$m\left(D\widehat{A}E\right) = 90 - 30 = 60^0$

Cevap: D

3.



ABCD bir dikdörtgen

[AC] köşegen

$[DE] \perp [AC]$

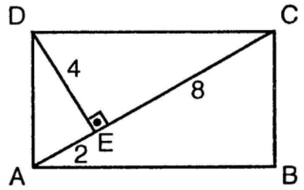
$|AE| = 2$ cm

$|DE| = 4$ cm

Verilere göre $|AC|$ kaç cm'dir?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: ADC dik üçgenine Öklid teoremi uygulanırsa;

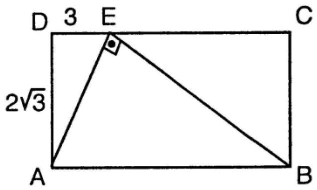


$|DE|^2 = |AE| \cdot |EC|$
$4^2 = 2 \cdot |EC|$
$|EC| = 8$
$|AE| = |AE| + |EC| = 2 + 8 = 10$ cm

bulunur.

Cevap: A

4.

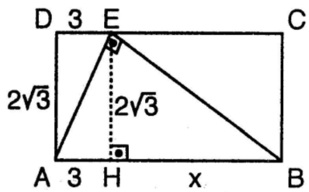


ABCD bir dikdörtgen
$[AE] \perp [EB]$
$|AD| = 2\sqrt{3}$ cm
$|DE| = 3$ cm

Verilere göre $|AB|$ kaç cm'dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: [EH] dikmesini çizelim. $|DE| = |AH| = 3$ cm , $|AD| = |EH| = 2\sqrt{3}$ dir. AEB dik üçgenine Öklid teoremi uygulanırsa;

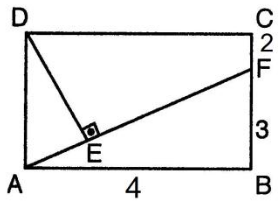


$|EH|^2 = |AH| \cdot |HB|$
$(2\sqrt{3})^2 = 3 \cdot x$
$x = 4$
$|AB| = |AH| + |HB| = 3 + 4 = 7$ cm

bulunur.

Cevap: B

5.



ABCD bir dikdörtgen

[DE]⊥ [AF]

|AB| = 4 cm

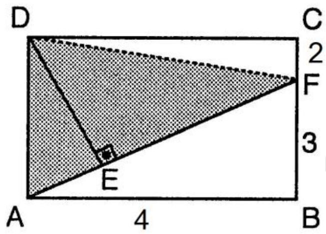
|BF| = 3 cm

|CF| = 2 cm

Verilere göre |DE| kaç cm'dir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: ABF dik üçgeninde 3–4–5 kuralı gereği $|AF| = 5$ cm'dir.



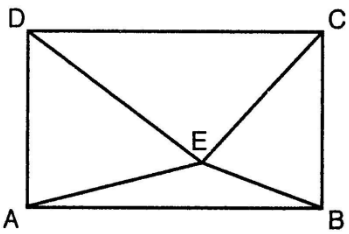
$A(A\widehat{D}F) = \frac{A(ABCD)}{2}$

$\frac{5 \cdot |DE|}{2} = \frac{4 \cdot (3+2)}{2}$

$|DE| = 5$ cm

Cevap: C

6.



ABCD bir dikdörtgen

|EC| = 6 cm

|AE| = 8 cm

3|EB| = |DE|

Verilere göre |EB| kaç cm'dir?

A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) 4 D) $\sqrt{15}$ E) 5

Çözüm: 8.10. teoremi gereği;

$|EA|^2 + |EC|^2 = |EB|^2 + |ED|^2$

$8^2 + 6^2 = x^2 + (3x)^2$

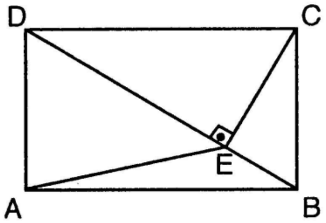
$100 = x^2 + 9x^2$

$x = \sqrt{10}$ cm

olur.

Cevap: B

7.



ABCD bir dikdörtgen

[DB] köşegen

[CE] ⊥ [DB]

|EB| = 4 cm

|DE| = 6 cm

Verilere göre $|AE|^2$ nedir?

A) 22 B) 24 C) 28 D) 30 E) 32

Çözüm: BCD dik üçgeninde Öklid teoreminden;

$$|CE|^2 = |DE| \cdot |EB|$$
$$|CE|^2 = 6 \cdot 4$$
$$|CE| = 2\sqrt{6}$$

bulunur. 8.10. teoremi gereği;

$$|EA|^2 + |EC|^2 = |EB|^2 + |ED|^2$$
$$|EA|^2 + (2\sqrt{6})^2 = 4^2 + 6^2$$
$$|EA|^2 = 28$$

olur.

Cevap: C

8. Bir dikdörtgenin kenarlarından biri %30 artırılıp diğer kenarı %20 azaltılırsa, bu dikdörtgenin alanında ne kadar değişme olur?

A) %4 azalır B) %2 azalır C) Ne artar ne azalır
D) %2 artar E) %4 artar

Çözüm: Dikdörtgenin bir kenarı x, diğer kenarı y olsun. İlk durumda alan xy olur.

x kenarı %30 artırılırsa $x + \frac{30x}{100} = \frac{130x}{100}$ olur.

y kenarı %20 azaltılırsa $y - \frac{20y}{100} = \frac{80y}{100}$ olur.

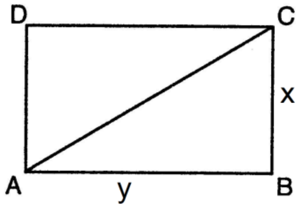
Son durumda alan $\frac{130x}{100} \cdot \frac{80y}{100} = \frac{104}{100}xy$

Cevap: E

9. Çevresi 34 cm, alanı 60 cm^2 olan dikdörtgenin köşegen uzunluğu kaç cm’dir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

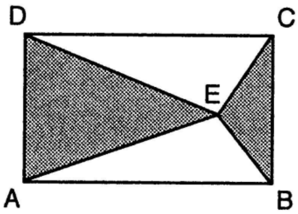
Çözüm: Dikdörtgenin bir kenarı x, diğer kenarı y ise; Çevre $= 2x + 2y$, Alan $= xy$ olur. Bir dikdörtgenin köşegen uzunluğu;



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= 17^2 - 2 \cdot 60 \\ &= 169 \end{aligned}$$
$|AC| = 13$ cm

Cevap: D

10.



ABCD bir dikdörtgen

|AD| = 7 cm

$A(A\widehat{D}E) + A(E\widehat{B}C) = 28\ cm^2$ olduğuna göre, ABCD dikdörtgeninin çevresi kaç cm’dir?

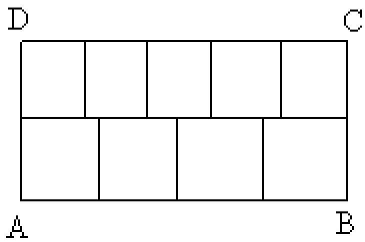
A) 30 B) 28 C) 27 D) 26 E) 25

Çözüm: 8.16. teoremden üçgenlerin karşılıklı alanları toplamı birbirine eşit olduğundan taralı alan dikdörtgenin alanının yarısıdır.

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= 2 \cdot 28 \\ |AD| \cdot |AB| &= 56 \\ 7 \cdot |AB| &= 56 \\ |AB| &= 8 \\ Ç(ABCD) &= 2(8+7) = 30 \text{ cm} \end{aligned}$$

Cevap: A

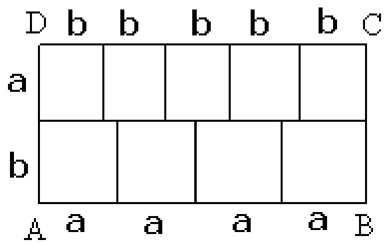
11.



Verilen şekilde, alanı 180 cm^2 olan ABCD dikdörtgeninin içine, boyutları birbirine eşit ve birer tam sayı olan 9 dikdörtgen yerleştirilmiştir. Küçük bir dikdörtgeninin çevresi kaç cm'dir?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

Çözüm: Dikdörtgenin bir kenarı a, diğer kenarı b uzunluğunda şekildeki gibi olsun.



Dikdörtgenin alanı $\frac{180}{9} = 20\ cm^2$ dir. Öyleyse $a \cdot b = 20$ dir. Ayrıca $5b = 4a$ dir. Elde edilen bu iki denklem çözülürse,

$$a(5b) = 100$$
$$4a^2 = 100$$
$$a = 5,\ b = 4\ cm$$

bulunur. Küçük dikdörtgenin çevresi ise,

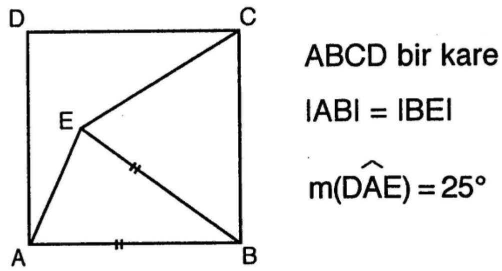
$$Ç = 5 + 4 + 5 + 4 = 18\ cm$$

olur.

Cevap: C

Kare

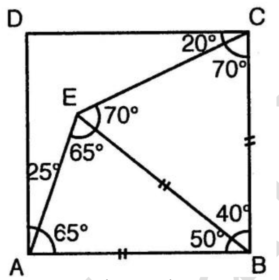
12.



Verilere göre m(DĈE) kaç derecedir?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Çözüm: Kare olduğundan |AB| = |EB| = |BC| dir. Buna göre EBC de bir ikizkenar üçgendir.



$m(D\hat{A}E) = 25$ olduğundan $m(E\hat{A}B) = 90 - 25 = 60$ dır.

AEB ikizkenar olduğundan $m(A\hat{E}B) = 65$ ve $m(A\hat{B}E) = 180 - 65 - 65 = 50$ dir.

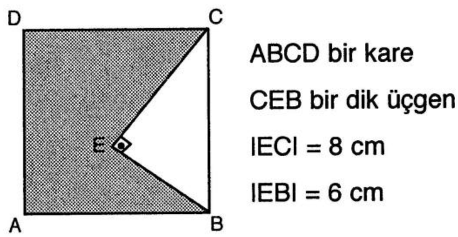
$m(A\hat{B}E) = 50$ olduğundan $m(E\hat{B}C) = 90 - 50 = 40$ dır.

BEC ikizkenar olduğundan $m(B\hat{E}C) = 70$ ve $m(E\hat{C}B) = 70$ dir.

$m(E\hat{C}B) = 70$ olduğundan $m(E\hat{C}D) = 90 - 70 = 20$ dır.

Cevap: B

13.



Verilere göre $\dfrac{A(C\hat{E}B)}{A(ABCD)}$ nedir?

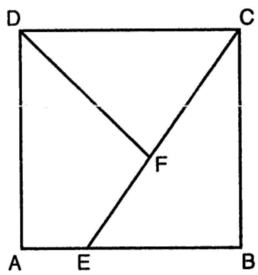
A) 0,15 B) 0,20 C) 0,24 D) 0,30 E) 0,32

Çözüm: CEB üçgeninde 3–4–5 kuralı gereği $|CB| = 10$ cm'dir.

$$\frac{A(C\hat{E}B)}{A(ABCD)} = \frac{6 \cdot 8/2}{10 \cdot 10} = 0{,}24$$

Cevap: C

14.



ABCD bir kare

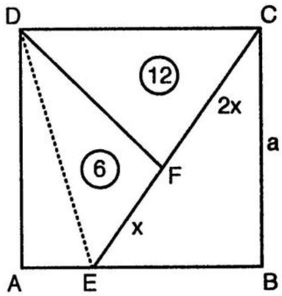
$2|EC| = 3.|FC|$

Alan(DFC) = 12 cm

Verilere göre $|AB|$ kaç cm'dir?

A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 5,5 E) 6

Çözüm: [DE] doğru parçasını çizelim. $\frac{|EC|}{|FC|} = \frac{3x}{2x}$ alınırsa $|EF| = x$ dir.



$|FC| = 2x$ lik kısım $A(EFC) = 12\ cm^2$ ise $|EF| = x$ lik kısım $A(EFD) = 6\ cm^2$ dir. Buna göre;

$A(DFC) = 18\ cm^2$

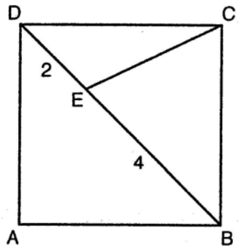
$A(ABCD) = 2 \cdot 18 = 36\ cm^2$

$|AB| = \sqrt{36} = 6$ cm

olur.

Cevap: E

15.



ABCD bir kare

[BD] köşegen

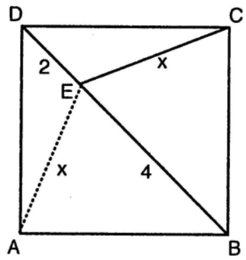
|ED| = 2 cm

|BE| = 4 cm

Verilere göre |EC| kaç cm'dir?

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{12}$ C) 4 D) 5 E) 6

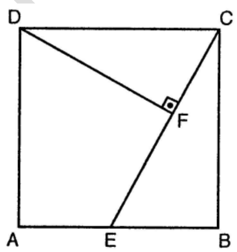
Çözüm: [EA] doğru parçasını çizelim. $|EC| = |EA| = x$ olsun. 8.26. teorem gereği;



$$|EA|^2 + |EC|^2 = |EB|^2 + |ED|^2$$
$$x^2 + x^2 = 2^2 + 4^2$$
$$x = \sqrt{10}$$

Cevap: A

16.



ABCD bir kare

[DF] ⊥ [EC]

|FC| = 3 cm

|DF| = 9 cm

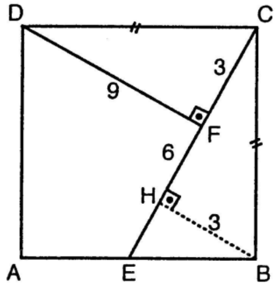
Verilere göre |EF| kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: [BH] dikmesini çizelim. BHC ve CFD üçgenleri eş üçgen olduğundan

$|FC| = |BH| = 3$ cm ve $|DF| = |HC| = 9$ cm ve $|HF| = 6$ cm dir.

EBC dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa;



$$|BH|^2 = |HE| \cdot |HC|$$
$$3^2 = |HE| \cdot (6+3)$$
$$|HE| = 1 \text{ cm}$$

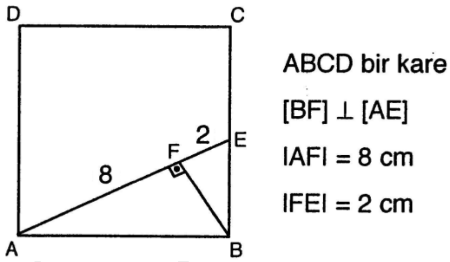
olur. Buna göre istenen;

$$|FE| = 1 + 6 = 7 \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: D

17.



Verilere göre A(ABCD) kaç cm^2 dir?

A) 72 B) 75 C) 76 D) 80 E) 81

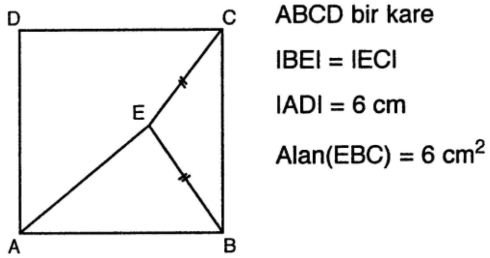
Çözüm: AEF üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa;

$$|AB|^2 = |AF| \cdot |AE|$$
$$|AB|^2 = 8 \cdot (8+2) = 80$$

olur ki, bu bize $A(ABCD) = |AB|^2 = 80 \text{ cm}^2$ dir.

Cevap: D

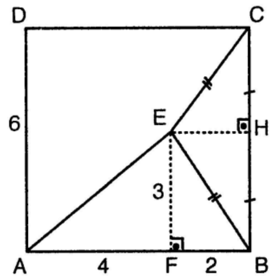
18.



Verilere göre |AE| kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: [EH] dikmesini çizelim. $|BH| = |HC| = 3$ cm dir.



$$A(EBC) = \frac{|EH| \cdot |BC|}{2}$$
$$6 = \frac{|EH| \cdot 6}{2}$$
$$|EH| = 2 \text{ cm}$$

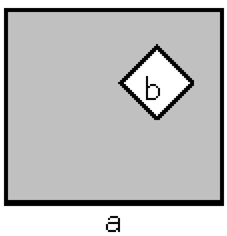
$[EF] \perp [AB]$ olacak biçimde [EF] dikmesini çizelim. $|BH| = |EF| = 3$ ve $|EH| = |FB| = 2$ dir. Buna göre;

$$|AF| = 6 - 2 = 4 \text{ cm}$$

dir. AFE üçgeninde 3–4–5 kuralı gereği $|AE| = 5$ cm olur.

Cevap: B

19.



Kenarları a ve b olarak gösterilen iki karenin çevreleri toplamı 80 cm'dir. Taralı alan 120 cm^2 olduğuna göre a kaç cm'dir?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: İki karenin çevreleri toplamı 80 cm ise,

$$4a + 4b = 80$$
$$a + b = 20$$

olarak bulunur. Yine taralı alan 120 cm^2 ise,

$$a^2 - b^2 = 120$$
$$(a - b)(a + b) = 120$$
$$a - b = 6$$

dir. Şu halde bu iki denklem çözülürse $a = 13$ olarak bulunur.

Cevap: E

20. Kenarlarının oranı 5 olan iki karenin alanları oranı kaçtır?

A) 25 B) 24 C) 21 D) 20 E) 18

Çözüm: Karenin kenarları a ve 5a olsun. Alanların oranı;

$$\frac{A_{\text{Büyük}}}{A_{\text{Küçük}}} = \frac{(5a)^2}{a^2} = \frac{25a^2}{a^2} = 25$$

dir.

Cevap: A

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.