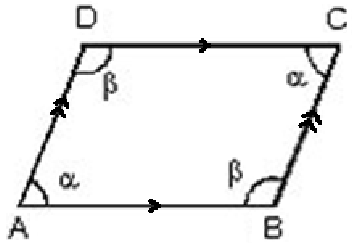
9. BÖLÜM
PARALELKENAR ve EŞKENAR DÖRTGEN

PARALELKENAR

9.1. Tanım: Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgenlere, paralelkenar denir.



ABCD Paralelkenardır

$\Leftrightarrow$ [AB]//[CD], [BC]//[AD], |AB| = |CD| ve |BC| = |AD|

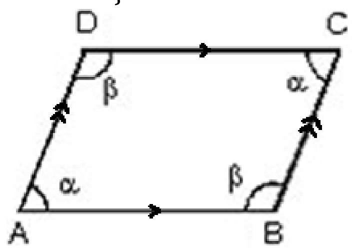
Görüldüğü gibi kare ve dikdörtgen paralelkenarın özel şeklidir. Paralelkenarın tüm özellikleri özel olarak kare ve dikdörtgende taşır. Paralelkenar da ileride göreceğimiz yamuğun özel şeklidir. Yani yamuğun paralel olmayan kenarlarının paralel duruma getirilmesiyle oluşan bir dörtgendir. Dolayısıyla paralelkenar, yamuğun tüm özelliklerini taşır.

9.1. Teorem: Bir paralelkenarda;

a) Karşılıklı kenarların uzunlukları eşittir.

b) Karşılıklı açıların ölçüleri eşittir.

c) Herhangi bir kenarının uçlarında bulunan açılar bütünlerdir.

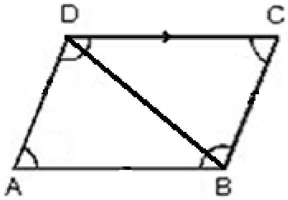


ABCD Paralelkenar $\Leftrightarrow$ a) |AB| = |CD| ve |AD| = |BC|

b) $m(\hat{A}) = m(\hat{C})$ ve $m(\hat{B}) = m(\hat{D})$

c) $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^0$, $m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 180^0$,
$m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180^0$, $m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 180^0$

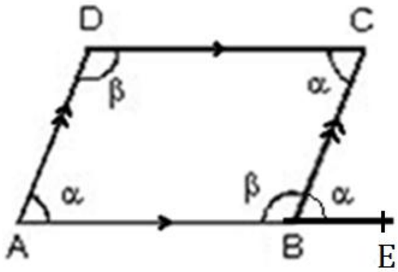
İspat: [BD] doğru parçasını çizelim.



İç ters açılardan $m(A\hat{D}B) = m(D\hat{B}C)$ ve $m(A\hat{B}D) = m(B\hat{D}C)$ dir. Ayrıca $|BD|$ doğru parçası ortak olduğundan $A\overset{\triangle}{B}D \cong C\overset{\triangle}{D}B$ olur. O halde, eş üçgenlerde karşılıklı tüm elemanlar eş olacağından;

a) $|AB| = |DC|$ ve $|AD| = |BC|$ dir.

b) $m(\hat{A}) = m(\hat{C})$ ve $m(\hat{B}) = m(\hat{D})$ dir.



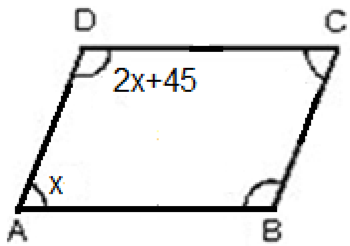
c) Yöndeş açılardan $m(\hat{A}) = m(C\hat{B}E) = \alpha$ dır. Bütünler açılardan $m(A\hat{B}C) = m(C\hat{B}E) = 180$ dir. Bu iki bilgiden,

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^0$$

bulunur.

Benzer şekilde c şıkkının diğer eşitlikleri de gösterilir.

Örnek: Bir ABCD paralelkenarında $m(\hat{A}) = x$ ve $m(\hat{D}) = 2x + 40$ ise paralelkenarın A açısının ölçüsünü bulunuz.

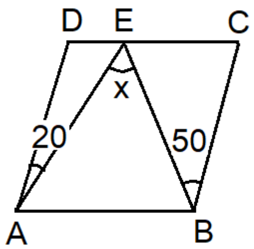


Çözüm: $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180$

$x + 2x + 45 = 180$

$x = 45^0$

Örnek: ABCD paralelkenar, $|AD| = |BE|$, $m(E\hat{B}C) = 50^0$ ve $m(D\hat{A}E) = 20^0$ olduğuna göre,



AEB açısının ölçüsünü bulunuz.

Çözüm: Verilen şekle göre $|AD| = |BE| = |BC|$ ise EBC ikizkenar üçgeninden $m(B\hat{E}C) = m(B\hat{C}E) = 65$ olur. ABCD paralelkenar olduğundan $m(\hat{D}) = 180 - 65 = 115$ dur. ADE üçgeninden,

$$20 + 115 + m(A\hat{E}D) = 180$$

$$m(A\hat{E}D) = 45$$

bulunur. Buna göre,

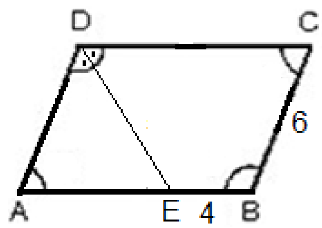
$$m(A\hat{E}D) + m(A\hat{E}B) + m(B\hat{E}C) = 180$$

$$45 + m(A\hat{E}B) + 65 = 180$$

$$m(A\hat{E}B) = 70^0$$

elde edilir.

Örnek: ABCD paralelkenarında, [DE], D açısının açıortayıdır. $|BE| = 4$ cm ve $|BC| = 6$ cm olduğuna göre, $|AB|$ kaç cm'dir.



Çözüm: İç ters açılardan $m(A\hat{E}D) = m(C\hat{D}E)$ dir. Buna göre AED ikizkenar üçgendir.

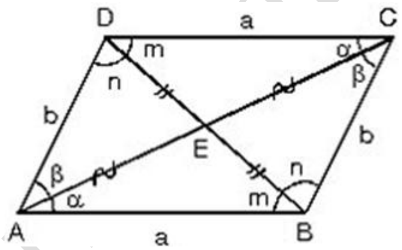
$|BC| = |AD| = |AE| = 6$ cm

$|AB| = |AE| = |EB| = 6 + 4 = 10$ cm

9.2. Teorem: Bir paralelkenarın çevresi uzun ve kısa kenarlarının toplamının iki katıdır. $Ç(ABCD) = 2(a + b)$

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

9.3. Teorem: Bir paralelkenarın köşegenleri birbirini ortalar.



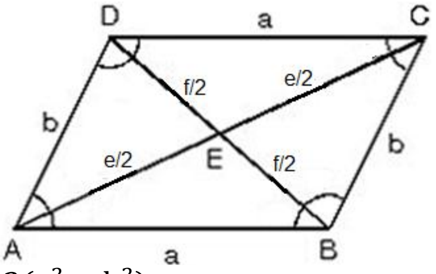
ABCD Paralelkenar [AC] ve [BD] köşegen $\Leftrightarrow |AE| = |EC|$ ve $|BE| = |ED|$

İspat: İç ters açılardan $m(E\hat{A}B) = m(E\hat{C}D)$, $m(E\hat{B}A) = m(E\hat{D}C)$, $m(A\hat{E}B) = m(D\hat{E}C)$ olduğundan A.A.A. benzerlik teoreminden $\overset{\Delta}{EAB} \sim \overset{\Delta}{ECD}$ olur. Benzer üçgenlerde karşılıklı uzunluklar orantılı ve $|AB| = |CD|$ olduğundan,

$$\frac{|EA|}{|EC|} = \frac{|EB|}{|ED|} = \frac{|AB|}{|CD|} = 1$$

dir. Buna göre $|AE| = |EC|$ ve $|BE| = |ED|$ dir.

9.4. Teorem: Bir paralelkenarın kenar uzunlukları a ve b, köşegenlerinin uzunlukları e ve f olmak üzere,



$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

dir.

İspat: DAC üçgeninde kenarortay teoremi uygulanırsa,

$$2\left(\frac{f}{2}\right)^2 + \frac{e^2}{2} = a^2 + b^2$$
$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

bulunur.

Örnek: Bir paralelkenarın kenar uzunlukları a ve b'dir. Köşegenlerin uzunlukları 12 cm ve 10 cm çevre uzunluğu ise 30 cm'dir. O halde $a \cdot b$'nin değeri nedir?

Çözüm: $Ç(ABCD) = 2(a + b) = 30$
$$a + b = 15$$

dir. 9.4. Teoreme göre,

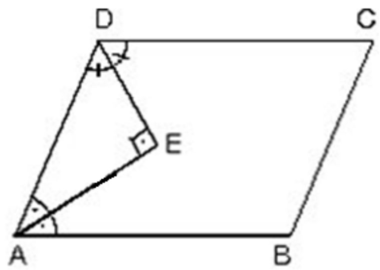
$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$
$$10^2 + 12^2 = 2(a^2 + b^2)$$
$$a^2 + b^2 = 122$$

olur. Buna göre,

$$(a + b)^2 = 15^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 225$$
$$2ab + 122 = 225$$
$$ab = \frac{103}{2}$$

dir.

9.5. Teorem: Paralelkenarda herhangi bir kenarın uçlarındaki açıların açıortaylarının oluşturduğu açı 90^0 dir.



ABCD paralelkenar [AE] ve [DE] açıortay $\Leftrightarrow$ $m(A\hat{E}B) = 90^0$

İspat: ADE üçgeninin iç açıları ölçüleri toplamından

$$\frac{m(\hat{A})}{2} + \frac{m(\hat{D})}{2} + m(A\hat{E}D) = 180 \qquad (1)$$

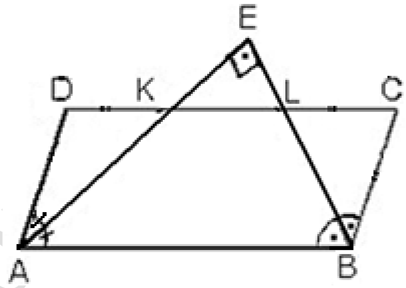
$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180 \qquad (2)$$

yazılır. (1) ve (2) den,

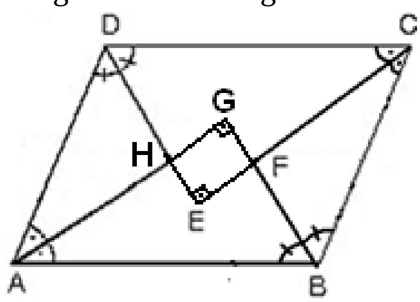
$$m(A\hat{E}D) = 90^0$$

elde edilir.

9.1. Sonuç: Açıortayların kesiştikleri noktanın paralelkenarın dışında kalması durumunda açıortaylarının oluşturduğu açı 90^0 dir.

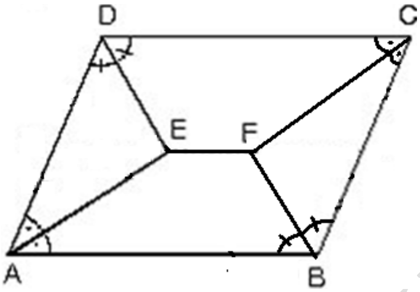


9.6. Teorem: Bir paralelkenarın ardışık iç açılarının, karşılıklı olarak kesişimi ile elde edilen dörtgen bir dikdörtgendir.



İspat: 9.5. Teorem gereği bir paralelkenarda ardışık iki iç açının açıortayı kesişim noktasında birbirine dik olduğundan EFGH dörtgenin tüm iç açıları dik açı olacaktır. Buna göre EFGH dörtgeni bir dikdörtgendir.

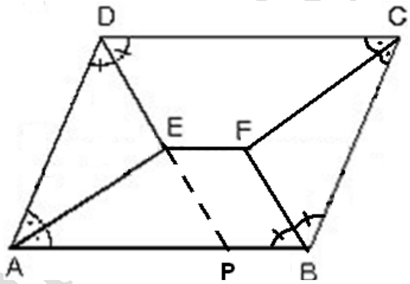
9.7. Teorem: ABCD bir paralelkenar olmak üzere; [AE], [BF], [CF] ve [DE] iç açıortaylar ise;



$$|EF| = |AB| - |BC|$$

dir.

İspat: [DE]//[BF] ve [AE]//[CF] olduğu bilindiğinden [AB]//[CD]//[EF] olur.

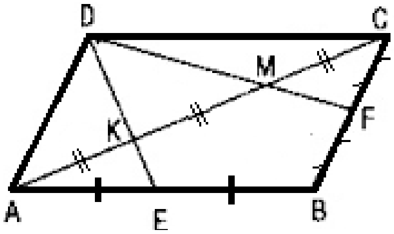


[DE nin uzantısı P noktasında [AB] kenarını kesiyorsa iç ters açılardan $m(\widehat{APE}) = m(\widehat{PDC})$ için ADP üçgeninin ikizkenar üçgen olduğu bulunur. Buradan $|AD| = |AP| = |BC|$ yazılır. [PE]//[BF] için PBFE bir paralelkenar olduğundan,

$$|EF| = |PB| = |AB| - |BC|$$

bulunur.

9.8. Teorem: Bir paralelkenarda köşegenlerden birinden karşı kenarların orta noktalarına çizilen doğrular paralelkenarın bu köşesinden geçmeyen köşegenini üç eşit parçaya böler.



$|AE| = |EB|\,,\, |BF| = |FC| \Leftrightarrow |AK| = |KM| = |MC|$

İspat: İç ters açılardan $m(E\widehat{A}K) = m(D\widehat{C}K)$ ve $m(A\widehat{E}K) = m(C\widehat{D}K)$ dır. [DE] doğru parçası [AB] doğru parçasının kenarortayı olduğundan ve $|AB| = |CD| = |AB|$ olduğundan, AEK üçgeni ile CDK üçgeni arasındaki A.K.A. benzerliğinden,

$$\frac{|AE|}{|CD|} = \frac{|KA|}{|KC|} = \frac{1}{2}$$

olur. Benzer şekilde CFM üçgeni ile ADM üçgeni arasındaki benzerlikten;

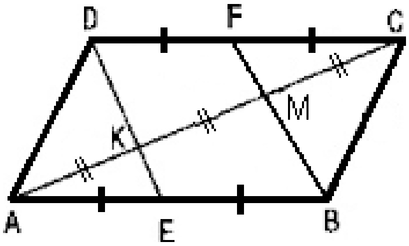
$$\frac{|CF|}{|AD|} = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{1}{2}$$

yazılabilir. Elde edilen iki orantıdan

$$|AK| = |KM| = |MC|$$

bulunur.

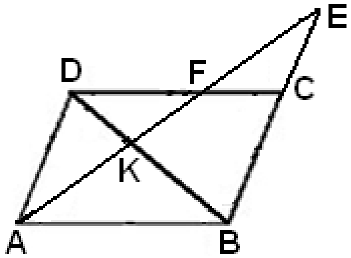
9.9. Teorem: Bir paralelkenarın karşılıklı iki köşesinden karşılarındaki kenarların orta noktalarına çizilen doğrular, paralelkenarın bu köşelerinden geçmeyen köşegenin üç eşit parçaya böler.



$|AE| = |EB|\,,\, |DF| = |FC| \Leftrightarrow |AK| = |KM| = |MC|$

Bu teoremin ispatı bir 9.8. teorem gibi yapıldığından ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

9.10. Teorem: ABCD paralelkenarında, [BD] köşegen, A, K, F, E ve B, C, E şekildeki gibi doğrusal noktalar olmak üzere, $|AK|^2 = |KF| \cdot |KE|$ dir.



İspat: $m(K\hat{A}B) = m(K\hat{F}D)$ ve $m(K\hat{B}A) = m(K\hat{D}F)$ olduğundan A.A.A. benzerlik aksiyomundan $K\overset{\Delta}{A}B \sim K\overset{\Delta}{F}D$ dir. Buna göre,

$$\frac{|AK|}{|KF|} = \frac{|KB|}{|KD|} \qquad (1)$$

olur. $m(K\hat{E}B) = m(K\hat{A}D)$ ve $m(K\hat{B}E) = m(K\hat{D}A)$ olduğundan A.A.A. benzerlik aksiyomundan $K\overset{\Delta}{B}E \sim K\overset{\Delta}{D}A$ dir. Buna göre,

$$\frac{|KE|}{|AK|} = \frac{|KB|}{|KD|} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

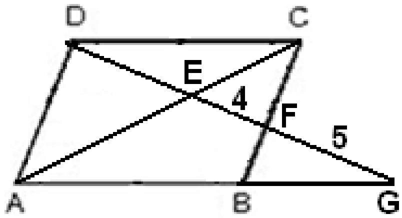
olur. (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\frac{|AK|}{|KF|} = \frac{|KB|}{|KD|} = \frac{|KE|}{|AK|}$$

$$|AK|^2 = |KF| \cdot |KE|$$

bulunur.

Örnek: ABCD paralelkenarında, [AC] köşegen, A, B, G ve D, E, F, G doğrusal noktalardır. $|EF| = 4$ cm ve $|GF| = 5$ cm olduğuna göre $|DE|$ kaç cm'dir.



Çözüm: 9.10. Teoreme göre,

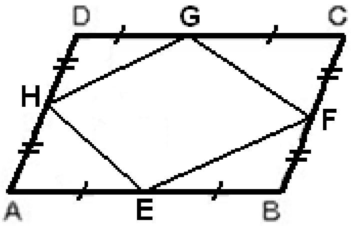
$$|DE|^2 = |EF| \cdot |EG|$$

$$|DE|^2 = 4 \cdot (4 + 5)$$

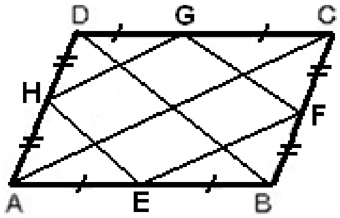
$$|DE| = 6 \text{ cm}$$

olur.

9.11. Teorem: Bir paralelkenarının orta noktalarının birleştirilmesi ile elde edilen düzlemsel şekil de bir paralelkenardır.

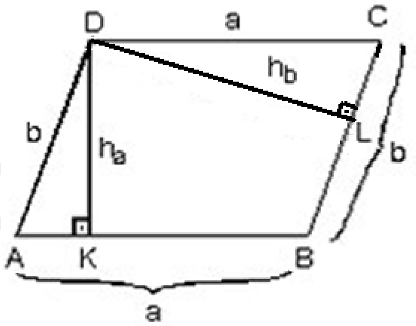


İspat: ABCD paralelkenarının köşegenleri çizildiğinde;



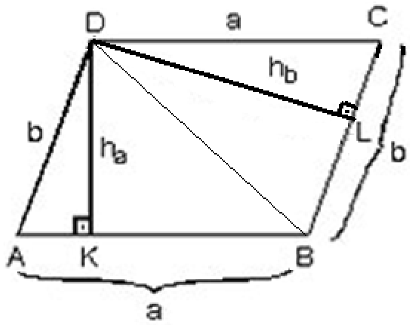
$\overset{\triangle}{DHG} \sim \overset{\triangle}{DAC}$ benzerliğinden [GH]//[AC] dir. Benzer şekilde $\overset{\triangle}{BEF} \sim \overset{\triangle}{BAC}$ benzerliğinden [EF]//[GH] dir. [BD] köşegeni için de aynı şey geçerli olacağından [EF]//[GH] bulunur. Elde edilen dörtgenin karşılıklı kenarları birbirine paralel olduğundan EFGH dörtgeni bir paralelkenardır.

9.12. Teorem: Bir paralelkenarın alanı, bir kenarının uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımına eşittir.



ABCD Paralelkenar, a kenarına ait yükseklik h_a, b kenarına ait yükseklik h_b $\Leftrightarrow$ $A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

İspat: [BD] doğru parçasını çizelim.

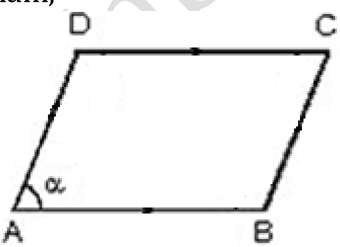


ABD be CDB üçgenleri K.K.K. eşlik aksiyomundan $\overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{CDB}$ ve $A(\overset{\triangle}{ABD}) = A(\overset{\triangle}{CDB})$ olur. O halde,

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\overset{\triangle}{ABD}) + A(\overset{\triangle}{CDB}) \\ &= 2A(\overset{\triangle}{ABD}) \\ &= 2 \cdot \frac{h_a}{2} \\ &= a \cdot h_a \end{aligned}$$

bulunur.

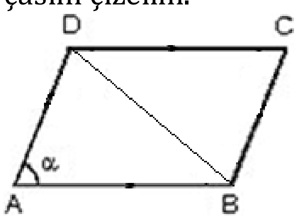
9.13. Teorem: Bir paralelkenarının açılarından biri ve kenar ölçüleri belli ise paralelkenarının alanı,



$$A(ABCD) = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

dır.

İspat: [BD] doğru parçasını çizelim.



|BD| hem ABD hem de CDB üçgeninde ortak ve paralelkenarda olduğundan K.K.K. eşlik aksiyomu gereği $\overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{CDB}$ dir. 4.12. Teorem gereği,

$$A(ABD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha \text{ ve } A(BDC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

olduğundan,

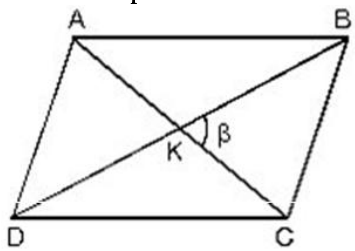
$$A(ABCD) = A(A\overset{\Delta}{B}D) + A(B\overset{\Delta}{D}C) = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

bulunur.

Örnek: Bir kenarı 8, diğer kenarı 12 cm ve bir açısı 60^0 olan paralelkenarın alanı nedir? ($\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Çözüm: $A(ABD) = 8 \cdot 12 \cdot \sin 60 = 48\sqrt{3}\ cm^2$

9.14. Teorem: Bir paralelkenarının köşegenleri e ile f ve bu köşegenler arasındaki açı α olsun. Bu takdirde paralelkenarın alanı,



$$A(ABCD) = \frac{e \cdot f}{2} \cdot \sin\alpha$$

dir.

İspat: İki kenarı ve kenarlar arasındaki açının ölçüsü bilinen üçgenin alanı;

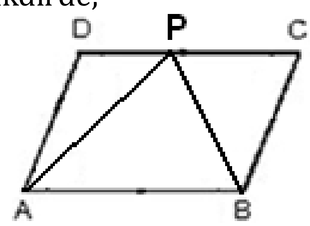
$$A(B\overset{\Delta}{C}D) = \frac{(e/2)(f/2)}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{e \cdot f}{8} \cdot \sin\alpha$$

olduğundan ve köşegenler dikdörtgeni eşit parçaya böldüğünden;

$$A(ABCD) = 4 \cdot A(B\overset{\Delta}{C}D) = 4 \cdot \frac{e \cdot f}{8} \cdot \sin\alpha = \frac{e \cdot f}{2} \cdot \sin\alpha$$

bulunur.

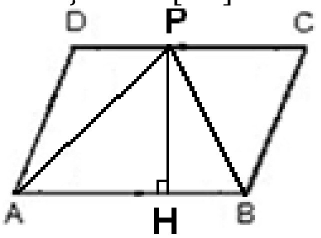
9.15. Teorem: ABCD paralelkenarında P noktası [DC] üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu takdirde,



$$A(ABCD) = 2 \cdot A(P\overset{\triangle}{A}B)$$

dir.

İspat: $[PH] \perp [AB]$ olacak şekilde $[PH]$ dikmesini çizelim.

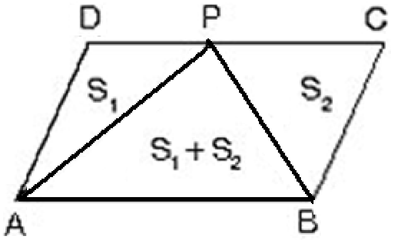


$$A(ABCD) = |AB| \cdot |PH| \text{ ve } A(P\overset{\triangle}{A}B) = \frac{|AB| \cdot |PH|}{2}$$

$$A(ABCD) = 2 \cdot A(P\overset{\triangle}{A}B)$$

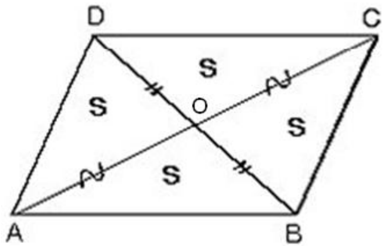
olur.

9.2. Sonuç: Paralelkenarda bir kenar üzerinde alınan bir noktanın karşı köşelere birleştirilmesiyle oluşan alan tüm alanın yarısına eşittir.



$$A(A\hat{P}B) = A(A\hat{P}D) + A(B\hat{P}C)$$

9.16. Teorem: Bir paralelkenarda köşegenler paralelkenarı dört eşit parçaya böler.



$$A(A\overset{\triangle}{O}B) = A(B\overset{\triangle}{O}C) = A(C\overset{\triangle}{O}D) = A(D\overset{\triangle}{O}A) = \frac{A(ABCD)}{4}$$

İspat: “Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin tabanları oranı alanları oranına eşittir” teoremine göre;

ABC üçgeninde |AO| = |OC| olduğundan

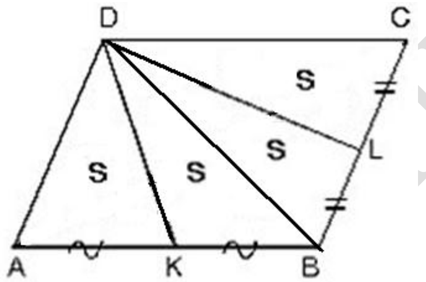
$$A(A\overset{\Delta}{O}B)=A(B\overset{\Delta}{O}C) \text{ ve } A(C\overset{\Delta}{O}D)=A(D\overset{\Delta}{O}A)$$

dir. Benzer şekilde ABD üçgeninde |BO| = |OD| olduğundan $A(A\overset{\Delta}{O}B)=A(D\overset{\Delta}{O}A)$ dir. Buna göre,

$$A(A\overset{\Delta}{O}B)=A(B\overset{\Delta}{O}C)=A(C\overset{\Delta}{O}D)=A(D\overset{\Delta}{O}A)=\frac{A(ABCD)}{4}$$

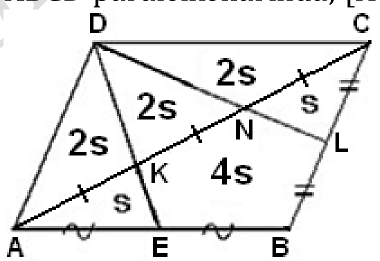
olur.

9.17. Teorem: Bir paralelkenarda köşelerden birinden karşı kenara çizilen kenarortaylar ve köşegen, paralelkenarı 4 eşit parçaya böler.



İspat: [BD] köşegeni ABCD paralelkenarını ABD ve BCD eş üçgenlerine ayırır. Bu üçgenlere çizilen kenarortaylar, üçgenleri tabanları ve yükseklikleri eşit olan ikişer üçgeni böleceğinden, her birinin alanı da birbirine eşit olur.

9.18. Teorem: Bir ABCD paralelkenarında; [AC] köşegen,



|AE| = |EB|, |BL| = |LC| ve A(AEK) = s ise;

A(AKD) = A(DKN) = A(DNC) = 2s

A(NLC) = A(AEK) = s

A(EBLNK) = 4s

dir.

İspat: A.A.A. benzerlik aksiyomundan $A\overset{\Delta}{E}K \sim C\overset{\Delta}{D}K$ olup 9.9. Teoreme göre |DK| = 2|KE| bulunur. O halde;

$$A(AKD) = 2 \cdot A(AEK) = 2s$$

olur. $|AK| = |KN| = |NC|$ olduğundan,

$$A(AKD) = A(DKN) = A(DNC) = 2s$$

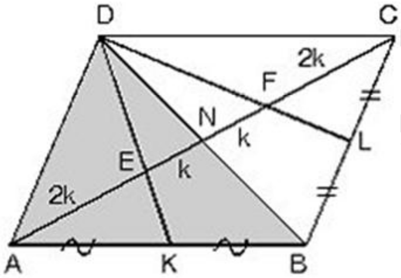
olur. A.A.A. benzerlik aksiyomundan $\overset{\Delta}{AND} \sim \overset{\Delta}{CNL}$ olup 9.9. Teoreme göre $|DN| = 2|NL|$ bulunur. O halde;

$$A(D\hat{N}C) = 2.A(C\hat{N}L) = 2s$$

$$A(C\hat{N}L) = s$$

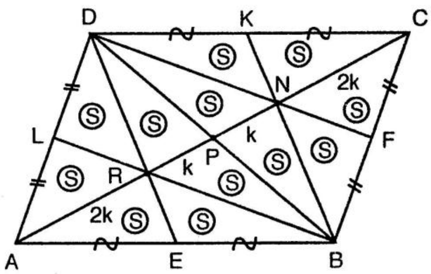
olur.

9.19. Teorem: ABCD paralelkenarında K ve L noktaları kenarların orta noktaları olduğuna göre, E, ABC üçgeninin, F de DCB üçgeninin ağırlık merkezidir.

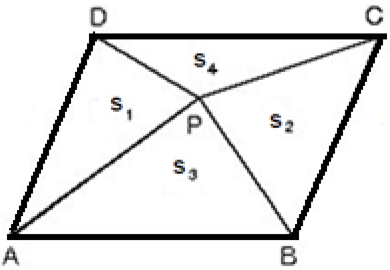


Bu teoremin ispatı 9.4. Teorem ve 9.8. Teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.3. Sonuç: E, F, K ve L kenar orta noktalar, [AC] ve [BD] köşegenler olmak üzere ABCD paralelkenarı aşağıdaki gibi 12 eşit alana bölünür.



9.20. Teorem: ABCD paralelkenarının içinde herhangi bir nokta P olmak üzere,

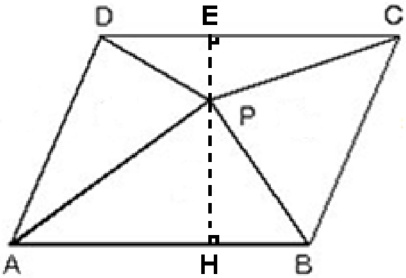


$$\frac{A(ABCD)}{2} = A(P\overset{\triangle}{A}D) + A(P\overset{\triangle}{B}C) = A(P\overset{\triangle}{A}B) + A(P\overset{\triangle}{C}D)$$

$$\frac{A(ABCD)}{2} = s_1 + s_2 = s_3 + s_4$$

dir.

İspat: P den geçen [AB] ve [DC] doğru parçalarına dik olan [EH] dikmesini çizelim.



$$A(P\overset{\triangle}{A}B) = \frac{a \cdot |PH|}{2} \text{ ve } A(P\overset{\triangle}{C}D) = \frac{a \cdot |PE|}{2}$$

olur. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$A(P\overset{\triangle}{A}B) + A(P\overset{\triangle}{C}D) = \frac{a}{2}(|PH| + |PE|) = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

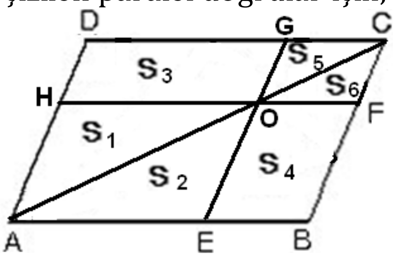
$$A(P\overset{\triangle}{A}B) + A(P\overset{\triangle}{C}D) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

dir. Benzer şekilde,

$$A(P\overset{\triangle}{A}D) + A(P\overset{\triangle}{B}C) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

bulunur.

9.21. Teorem: Bir paralelkenarın köşelerinden biri üzerinde alınan K noktasından kenarlarına çizilen paralel doğrular için;



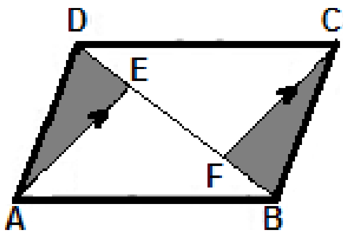
$$|CG| = |OF| = |EB| \Leftrightarrow s_1 = s_2, s_3 = s_4, s_5 = s_6$$

İspat: $|CG| = |OF| = |EB|$ ise $|AE| = |HO| = |DG|$, $|BF| = |EO| = |AH|$ dir. Paralelkenarın içindeki bir noktaları, kenarlara çizilen paraleller, paralelkenarı dört farklı paralelkenara böler. [AC] köşegeni ise AEOH ve OFCG paralelkenarını eşit parçalara böldüğünden $s_1 = s_2, s_5 = s_6$ bulunur. ABC ve ACD üçgenleri için,

$$s_1 + s_3 + s_5 = s_2 + s_4 + s_6$$
$$s_3 = s_4$$

olur.

9.22. Teorem: Bir paralelkenarın karılıklı iki köşesinden, bu köşelerinden geçmeyen köşegene çizilen paralel doğruların oluşturduğu düzlemsel bölgeler için;

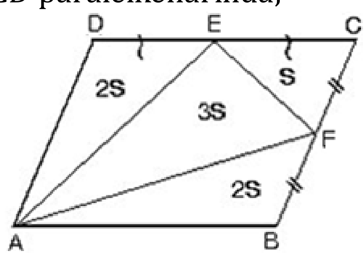


$$A(A\overset{\triangle}{D}E) = A(B\overset{\triangle}{C}F), \; A(A\overset{\triangle}{B}E) = A(C\overset{\triangle}{D}F)$$

dir.

İspat: $m(A\hat{E}D) = m(C\hat{F}B)$, $m(E\hat{A}D) = m(F\hat{C}B)$ ve $|AD| = |BC|$ olduğundan ADE ve BCF üçgenleri eştir. Benzer şekilde ABE ve CDF üçgenleri de eş üçgenlerdir.

9.23. Teorem: ABCD paralelkenarında;

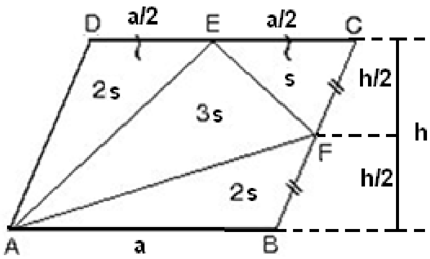


$|DE| = |EC|$, $|BF| = |FC|$ ve $A(EFC) = s$, olmak üzere;

$$A(ABF) = A(AED) = 2s \text{ ve } A(AFE) = 3s$$

dir.

İspat: Paralelkenarın yüksekliği h olsun. Buna göre $A(ABCD) = a \cdot h$ dir.



$$A(EFC) = s = \frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{h}{2}}{2} = \frac{a\cdot h}{8}$$

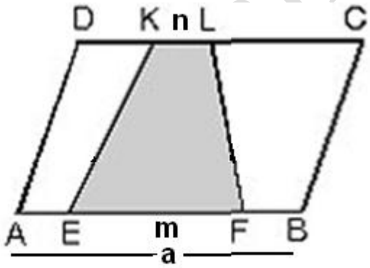
$$A(ABF) = \frac{a\cdot\frac{h}{2}}{2} = \frac{a\cdot h}{4} = 2s$$

$$A(AED) = \frac{a\cdot\frac{h}{2}}{2} = \frac{a\cdot h}{4} = 2s$$

$$A(AFE) = a\cdot h - \left(\frac{a\cdot h}{8} + \frac{a\cdot h}{4} + \frac{a\cdot h}{4}\right) = \frac{3\cdot a\cdot h}{4} = 3s$$

dır.

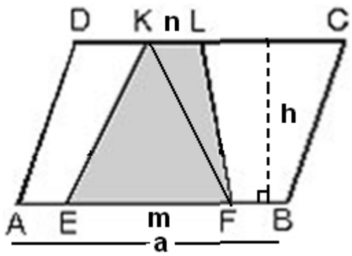
9.24. Teorem: ABCD paralelkenarında $|AB| = a$, $|EF| = m$, $|KL| = n$ birim olsun. Bu paralelkenarın taralı kısmının tüm alana oranı;



$$\frac{A(EFKL)}{A(ABCD)} = \frac{m+n}{2a}$$

dır.

İspat: Bu paralelkenarın yüksekliği h olsun. [KF] doğru parçasını çizelim.

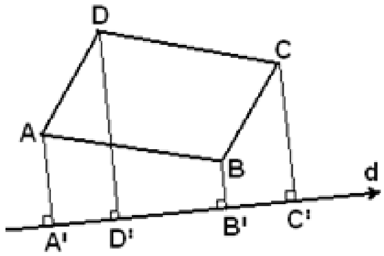


$$A(EKF) = \frac{m\cdot h}{2},\ A(KLF) = \frac{n\cdot h}{2}$$

$$\frac{A(EFKL)}{A(ABCD)} = \frac{\frac{m\cdot h}{2}+\frac{n\cdot h}{2}}{a\cdot h} = \frac{m+n}{2a}$$

bulunur.

9.25. Teorem: ABCD paralelkenar ve d paralelkenarın dışında herhangi bir doğru olsun,



$$[AA'] \perp d,\ [BB'] \perp d,\ [CC'] \perp d \text{ ve } [DD'] \perp d$$

olmak üzere,

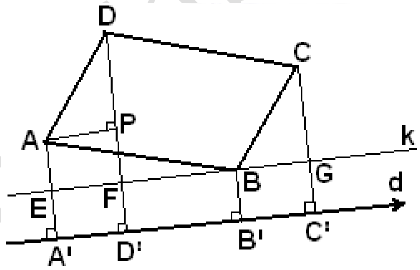
$$|AA'| + |CC'| = |BB'| + |DD'|$$

dir.

İspat: d//k ve [AP]//k olacak şekilde k doğrusu ile [AP] yi çizersek,

$$[AP] \perp [DD'],\ [AA'] \perp k,\ [DD'] \perp k \text{ ve } [CC'] \perp k$$

dır. Aynı zamanda,



$$|EA'| = |FD'| = |BB'| = |GC'| \text{ ve } |AE| = |PF|$$
$$m(APD) = m(BGC) = 90^0$$

dir. Kenarları aynı yönde paralel açılar olduğundan, A.A.A. benzerlik aksiyomu gereği $\overset{\triangle}{APD} \sim \overset{\triangle}{BGC}$ dir. Bu üçgenlerin hipotenüsleri $|AD| = |BC|$ olduğundan benzerlik oranı 1 dir. O halde $|PD| = |GC|$ ve $|PF| = |AE|$ olacağından,

$$|DF| = |PD| + |PF|$$
$$|DF| = |GC| + |AE| \qquad (1)$$

bulunur. Ayrıca

$$|FD'| = |EA'| \qquad (2)$$
$$|BB'| = |GC'| \qquad (3)$$

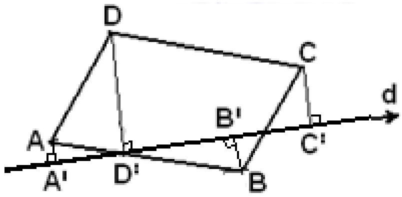
olduğundan (1), (2) ve (3) ü taraf tarafa toplarsak,

$$|DF| + |FD'| + |BB'| = |GC| + |AE| + |EA'| + |GC'|$$

$$|BB'| + |DD'| = |AA'| + |CC'|$$

bulunur.

9.4. Sonuç: ABCD paralelkenar ve d doğrusu paralelkenarı kesiyor.



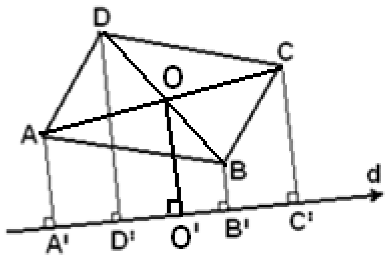
$$[AA'] \perp d,\ [BB'] \perp d,\ [CC'] \perp d \text{ ve } [DD'] \perp d$$

olmak üzere,

$$|AA'| + |CC'| = |DD'| - |BB'|$$

dir.

9.5. Sonuç: ABCD paralelkenar ve d paralelkenarın dışında herhangi bir doğru olsun,



$$[AA'] \perp d,\ [BB'] \perp d,\ [CC'] \perp d \text{ ve } [DD'] \perp d$$

olmak üzere,

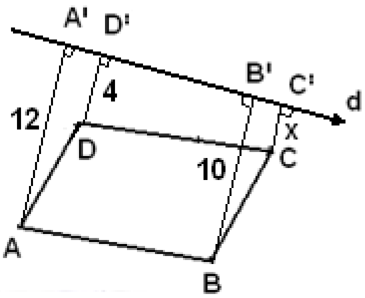
$$|AA'| + |CC'| = |BB'| + |DD'| = 2|OO'|$$

dir.

Örnek: d doğrusu ABCD paralelkenarının dışında herhangi bir doğrudur.

$$[AA'] \perp d,\ [BB'] \perp d,\ [CC'] \perp d \text{ ve } [DD'] \perp d$$

olmak üzere, $|AA'| = 12$ cm, $|DD'| = 4$ cm ve $|BB'| = 10$ cm olduğuna göre, $|CC'|$ kaç cm'dir.



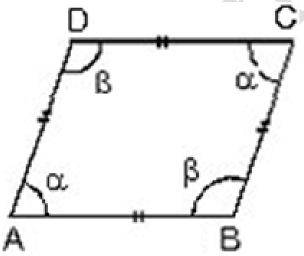
Çözüm: 9.12. Teoreme göre,

$$|AA'| + |CC'| = |BB'| + |DD'|$$
$$12 + |CC'| = 4 + 10$$
$$|CC'| = 2 \text{ cm}$$

olur.

EŞKENAR DÖRTGEN

9.2. Tanım: Kenar uzunlukları (dörtkenarı) birbirine eşit olan paralelkenarlara, eşkenar dörtgen denir. ABCD paralelkenarında;

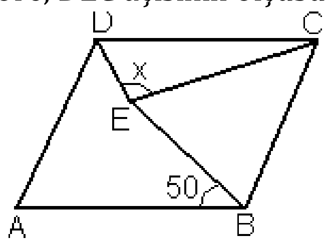


ABCD eşkenar dörtgen

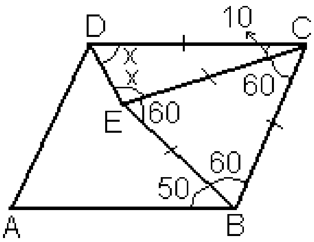
$\Leftrightarrow$ [AB]//[DC], [AD]//[BC] ve $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$

Eşkenar dörtgen paralelkenarın özel bir durumudur. Bu nedenle paralelkenarın tüm özelliklerini taşır. Kareden ayırt edici özelliği ise iç açıları sadece 90^0 olmamasıdır. Yani kare, eşkenar dörtgenin özel bir durumudur.

Örnek: ABCD eşkenar dörtgen ve EBC eşkenar üçgendir. $m(\widehat{ABE}) = 50^0$ olduğuna göre, DEC açısının ölçüsünü bulunuz.



Çözüm:



EBC eşkenar üçgen ise $|EB| = |BC| = |EC|$ dir. Buna göre,

$$m(E\hat{B}C) = m(E\hat{C}B) = m(C\hat{E}B) = 60$$

olduğundan $m(A\hat{B}C) = 110$ ve $m(B\hat{C}D) = 70$ dir. Buna göre,

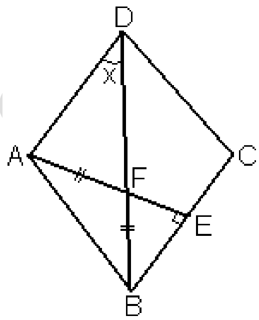
$$m(E\hat{C}D) = 70 - 60 = 10$$

olur. Ayrıca EBC eşkenar üçgen ve ABCD eşkenar dörtgen olduğundan $|EC| = |DC|$ dir. O halde,

$$x + x + 10 = 180$$
$$x = 85^0$$

bulunur.

Örnek: ABCD eşkenar dörtgen, [BD] köşegen $[AE] \perp [BC]$ ve $|AF| = |FB|$ olduğuna göre, ADB açısının ölçüsünü bulunuz.



Çözüm: $|AB| = |AD|$ ise $m(A\hat{D}B) = m(A\hat{B}D) = m(C\hat{B}D) = x$, $|AF| = |FB|$ ise $m(F\hat{C}B) = m(A\hat{B}D) = x$ dir. [BD], B ve D açılarının açıortaylarıdır. ABE üçgeninden,

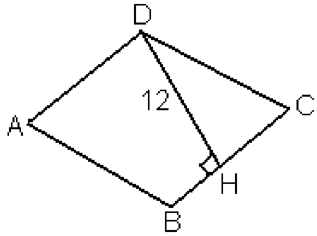
$$x + x + x + 90 = 180$$
$$x = 90^0$$

bulunur.

9.26. Teorem: Bir eşkenar dörtgenin çevresi uzunluğu dörtkenarının toplamına eşittir. $Ç(ABCD) = 4a$

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: ABCD eşkenar dörtgeninde, $[DH] \perp [BC]$ dir. $3|BH| = 2|HC|$ ve $|DH| = 12$ cm olduğuna göre, eşkenar dörtgenin çevresini bulunuz.



Çözüm: $3|BH| = 2|HC|$ ise $|BH| = 2k$ ve $|HC| = 3k$ alırsak $|BC| = |DC| = 5k$ olur. O halde DHC üçgeninde Pisagor teoreminden;

$(5k)^2 = (3k)^2 + 12^2$

$25k^2 = 9k^2 + 144$

$16k^2 = 144$

$k = 9$

$|DC| = 5k = 5 \cdot 3 = 15$ cm

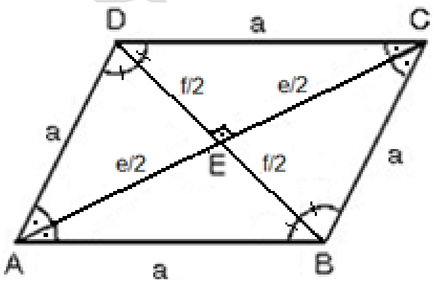
olur. Buradan $Ç(ABCD) = 4a = 4 \cdot 15 = 60$ cm bulunur.

9.27. Teorem: Bir eşkenar dörtgende;

a) Köşegenler birbirini ortalar.

b) Her köşegen birleştirdiği köşelerdeki açıların açıortaylarıdır.

c) Köşegenler birbirine diktir.



ABCD eşkenar dörtgen, [AC] ile [BD] köşegen $\Leftrightarrow$

a) $|AE| = |EC|$ ve $|BE| = |ED|$

b) $m(D\hat{A}C) = m(B\hat{A}C)$, $m(A\hat{C}B) = m(A\hat{C}D)$

$m(A\hat{D}B) = m(C\hat{D}B)$, $m(A\hat{B}D) = m(C\hat{B}D)$

c) $[AC] \perp [BD]$

İspat: a) Eşkenar dörtgen bir paralelkenar ise paralelkenarda köşegenler birbirini ortalayacağından $|AE| = |EC|$ ve $|BE| = |ED|$ olur.

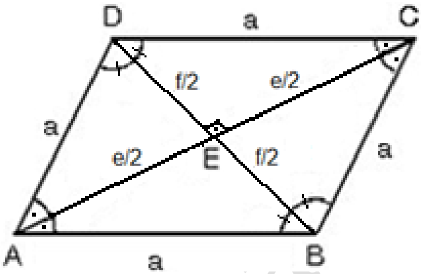
b) Bir ikizkenar üçgende tabana ait kenarortay, tabana dik ve tepe açısının açıortayı olduğundan ABD, ABC, BCD ve CAD ikizkenar üçgenlerinde sırasıyla;

$$m(D\hat{A}C) = m(B\hat{A}C)\ ,\ m(A\hat{C}B) = m(A\hat{C}D)$$
$$m(A\hat{D}B) = m(C\hat{D}B)\ ,\ m(A\hat{B}D) = m(C\hat{B}D)$$

dir. O halde [AC], $\hat{A}$ ile $\hat{C}$ nın, [BD] de $\hat{B}$ ile $\hat{D}$ nın açıortaylarıdır.

c) ABD, ABC, BCD ve CAD ikizkenar üçgenlerinde $[AE] \perp [BD]$, $[BE] \perp [AC]$, $[CE] \perp [BD]$ ve $[DE] \perp [AC]$ olur. O halde $[AC] \perp [BD]$ dir.

9.28. Teorem: Bir eşkenar dörtgende köşegenlerin uzunluklarının kareleri toplamı, bir kenarının uzunluğunun karesinin dört katına eşittir.



ABCD eşkenar dörtgen, [AC] ve [BD] köşegen $\Leftrightarrow e^2 + f^2 = 4a^2$

İspat: ABCD eşkenar dörtgeninde, [AC] ve [BD] köşegenler ve $|AE| = |EC| = \frac{e}{2}$, $|BE| = |ED| = \frac{f}{2}$ dir. EAB üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$\frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{2} = a^2$$
$$e^2 + f^2 = 4a^2$$

olur.

Örnek: Bir eşkenar dörtgenin köşegenlerinin uzunlukları toplamı 17 cm ve çarpımı 120 cm'dir. O halde, bu eşkenar dörtgenin bir kenar uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Eşkenar dörtgenin köşegen uzunlukları e ve f, bir kenar uzunluğu a olsun. Bu takdirde,

$$e + f = 17,\ e \cdot f = 120 \text{ ve } e^2 + f^2 = 4a^2$$

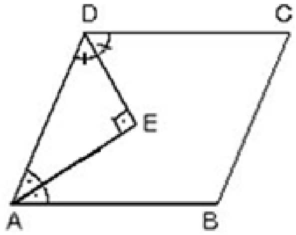
ise,

$$(e + f)^2 = 17^2$$
$$e^2 + 2ef + f^2 = 289$$
$$4a^2 + 2 \cdot 120 = 289$$

$$a = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

dir.

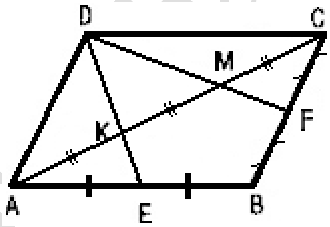
9.29. Teorem: Eşkenarda herhangi bir kenarın uçlarındaki açıların açıortaylarının oluşturduğu açı 90^0 dir.



ABCD eşkenar [AE] ve [DE] açıortay $\Leftrightarrow m(\widehat{AED}) = 90^0$

Bu teoremin ispatı 9.5. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

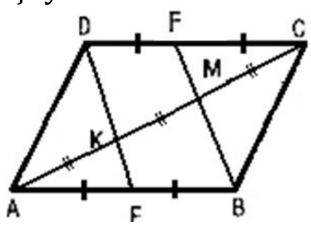
9.30. Teorem: Bir paralelkenarda köşegenlerden birinden karşı kenarların orta noktalarına çizilen doğrular paralelkenarın bu köşesinden geçmeyen köşegenini üç eşit parçaya böler.



$|AE| = |EB|$, $|BF| = |FC| \Leftrightarrow |AK| = |KM| = |MC|$

Bu teoremin ispatı 9.8. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

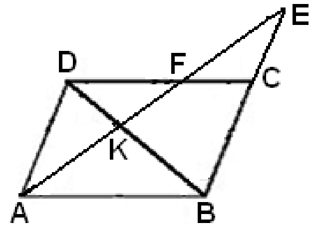
9.31. Teorem: Bir eşkenarın karşılıklı iki köşesinden karşılarındaki kenarların orta noktalarına çizilen doğrular, eşkenarın bu köşelerinden geçmeyen köşegenin üç eşit parçaya böler.



$|AE| = |EB|$, $|DF| = |FC| \Leftrightarrow |AK| = |KM| = |MC|$

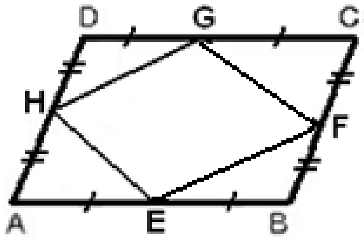
Bu teoremin ispatı 9.9. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.32. Teorem: ABCD eşkenarında, [BD] köşegen, A, K, F, E ve B, C, E şekildeki gibi doğrusal noktalar olmak üzere, $|AK|^2 = |KF| \cdot |KE|$ dir.



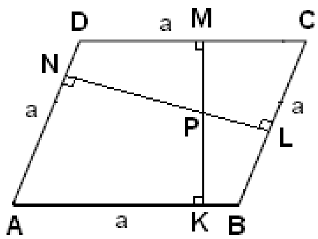
Bu teoremin ispatı 9.10. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.33. Teorem: Bir paralelkenarının orta noktalarının birleştirilmesi ile elde edilen düzlemsel şekil de bir paralelkenardır.



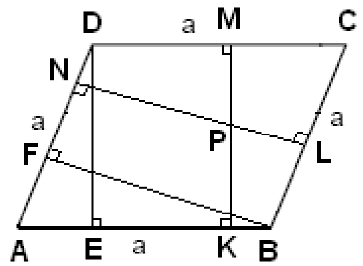
Bu teoremin ispatı 9.11. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.34. Teorem: Eşkenar dörtgenin içinde alınan herhangi bir P noktasının dörtgenin kenarlarına olan uzaklıkların toplamı, eşkenar dörtgenin yüksekliğinin iki katına eşittir.



ABCD Eşkenar Dörtgen $\Leftrightarrow |PN| + |PL| + |PK| + |PM| = 2h$

İspat: [AB] // [CD] ve [AD] // [BC] olduğundan P noktasından çizilen yükseklikler için [DE] // [MK] ve [BF] // [NL] yazılabilir.



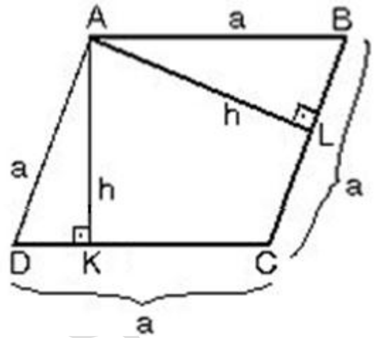
$|PN| + |PL| = |BF| = h$ ve $|PM| + |PK| = |DE| = h$

olduğundan,

$|PN| + |PL| + |PK| + |PM| = 2h$

bulunur.

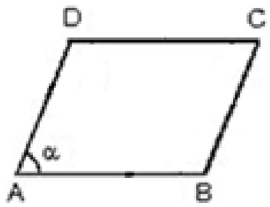
9.35. Teorem: Bir eşkenar dörtgenin alanı, bir kenarının uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımına eşittir.



ABCD eşkenar dörtgen, a kenarına ait yükseklik $h_a \Leftrightarrow A(ABCD) = a \cdot h_a$

Bu teoremin ispatı 9.13. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.36. Teorem: Bir paralelkenarının açılarından biri ve kenar ölçüleri belli ise paralelkenarının alanı,

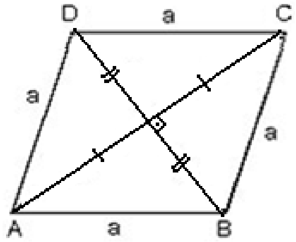


$A(ABCD) = a^2 \sin \alpha$

dır.

Bu teoremin ispatı 9.14. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.37. Teorem: Bir eşkenar dörtgenin köşegenleri e ile f ise eşkenar dörtgenin alanı,



$$A(ABCD) = \frac{e \cdot f}{2}$$

dir.

Bu teoremin ispatı 9.15. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

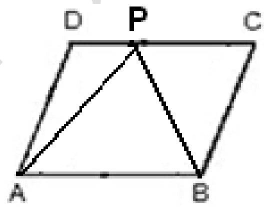
Örnek: Köşegen uzunlukları 9 cm ve 12 cm olan bir eşkenar dörtgenin alanı nedir?

Çözüm: Köşegen uzunlukları e = 9 cm, f = 12 cm ise,

$$A(ABCD) = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54\ cm^2$$

bulunur.

9.38. Teorem: ABCD eşkenarında P noktası [DC] üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu takdirde,

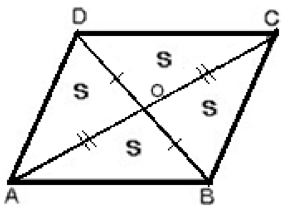


$$A(ABCD) = 2 \cdot A(P\overset{\Delta}{A}B)$$

dir.

Bu teoremin ispatı 9.16. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

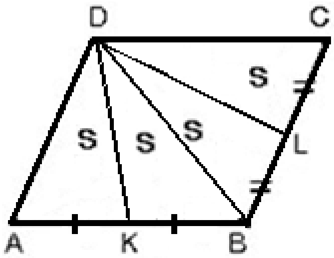
9.39. Teorem: Bir eşkenarda köşegenler eşkenarı dört eşit parçaya böler.



$$A(A\overset{\Delta}{O}B)=A(B\overset{\Delta}{O}C)=A(C\overset{\Delta}{O}D)=A(D\overset{\Delta}{O}A)=\frac{A(ABCD)}{4}$$

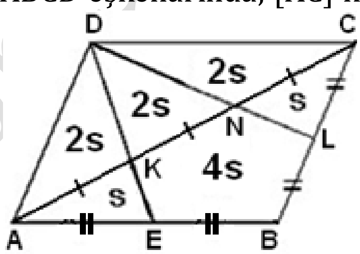
Bu teoremin ispatı 9.17. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.40. Teorem: Bir eşkenarda köşelerden birinden karşı kenara çizilen kenarortaylar ve köşegen, eşkenarı 4 eşit parçaya böler.



Bu teoremin ispatı 9.18. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.41. Teorem: Bir ABCD eşkenarında; [AC] köşegen,



$|AE| = |EB|$, $|BL| = |LC|$ ve $A(AEK) = s$ ise;

$A(AKD) = A(DKN) = A(DNC) = 2s$

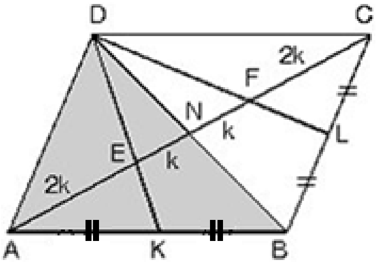
$A(NLC) = A(AEK) = s$

$A(EBLNK) = 4s$

dir.

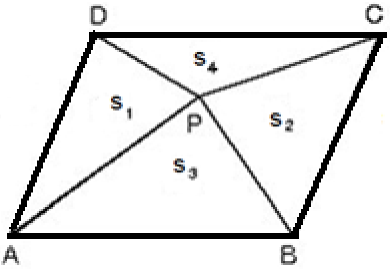
Bu teoremin ispatı 9.19. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.42. Teorem: ABCD eşkenarında K ve L noktaları kenarların orta noktaları olduğuna göre, E, ABC üçgeninin, F de DCB üçgeninin ağırlık merkezidir.



9.4. Teorem ve 9.8. Teoremden bu teoremin ispatı aşikardır.

9.43. Teorem: ABCD eşkenarının içinde herhangi bir nokta P olmak üzere,



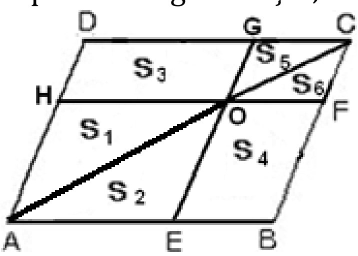
$$\frac{A(ABCD)}{2} = A(\overset{\triangle}{PAD}) + A(\overset{\triangle}{PBC}) = A(\overset{\triangle}{PAB}) + A(\overset{\triangle}{PCD})$$

$$\frac{A(ABCD)}{2} = s_1 + s_2 = s_3 + s_4$$

dir.

Bu teoremin ispatı 9.20. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

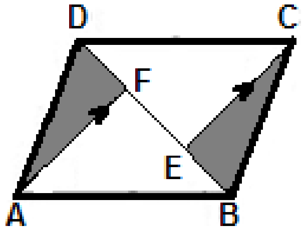
9.44. Teorem: Bir eşkenarın köşelerinden biri üzerinde alınan K noktasından kenarlarına çizilen paralel doğrular için;



$$|CG| = |OF| = |EB| \Leftrightarrow s_1 = s_2, s_3 = s_4, s_5 = s_6$$

Bu teoremin ispatı 9.21. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.45. Teorem: Bir eşkenarın karılıklı iki köşesinden, bu köşelerinden geçmeyen köşegene çizilen paralel doğruların oluşturduğu düzlemsel bölgeler için;

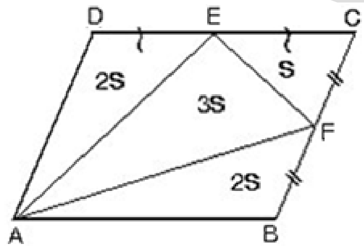


$$A(\overset{\triangle}{ADE}) = A(\overset{\triangle}{BCF}),\ A(\overset{\triangle}{ABE}) = A(\overset{\triangle}{CDF})$$

dir.

Bu teoremin ispatı 9.22. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.46. Teorem: ABCD eşkenarında;



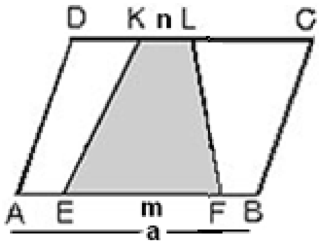
$|DE| = |EC|$, $|BF| = |FC|$ ve $A(EFC) = s$, olmak üzere;

$$A(ABF) = A(AED) = 2s \text{ ve } A(AFE) = 3s$$

dir.

Bu teoremin ispatı 9.23. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

9.47. Teorem: ABCD eşkenarında $|AB| = a$, $|EF| = m$, $|KL| = n$ birim olsun. Bu eşkenarın taralı kısmının tüm alana oranı;



$$\frac{A(EFKL)}{A(ABCD)} = \frac{m+n}{2a}$$

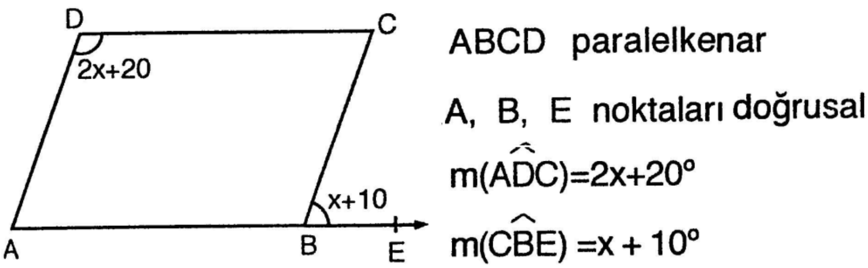
dır.

Bu teoremin ispatı 9.24. teoremin ispatına benzer yolla yapılır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Paralelkenar

1.



Verilere göre $m(D\hat{C}B)$ kaç derecedir?

A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

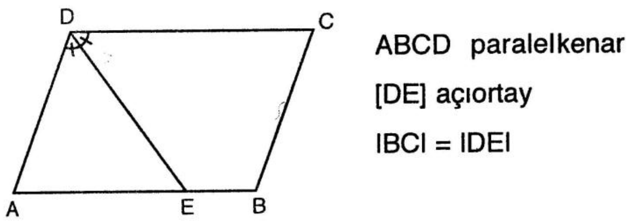
Çözüm: $m(D\hat{A}B) = m(C\hat{B}E) = x + 10$ dir. Buna göre;

$$m(A\hat{D}C) + m(C\hat{B}E) = 180$$
$$2x + 20 + x + 10 = 180$$
$$x = 50$$
$$m(D\hat{A}B) = m(D\hat{C}B) = x + 10 = 50 + 10 = 60^0$$

olur.

Cevap: B

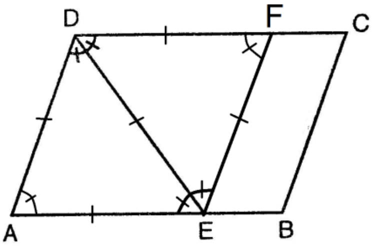
2.



Verilere göre $m(A\hat{B}C)$ kaç derecedir?

A) 105 B) 110 C) 115 D) 120 E) 125

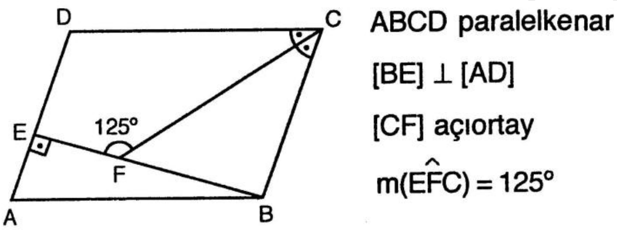
Çözüm: İç ters açılardan $m(F\hat{D}E) = m(D\hat{E}A)$ olacağından $|AD| = |AE|$ dir. $|BC| = |DE| = |AD| = |AE|$ olacağından ABC eşkenar üçgen oluşur.



$m(D\hat{A}B) = 60^0$ ve $m(A\hat{B}C) = 120^0$ dir.

Cevap: C

3.



Verilere göre $m(A\hat{B}C)$ kaç derecedir?

A) 110 B) 105 C) 100 D) 95 E) 90

Çözüm: [CF] açıortay için $m(\hat{C}) = 2\alpha$ alınırsa $m(A\hat{D}C) = 180 - 2\alpha$ olur.

$m(D\hat{E}F) + m(E\hat{F}C) + m(F\hat{C}D) + m(C\hat{D}E) = 360$

$90 + 125 + \alpha + 180 - 2\alpha = 360$

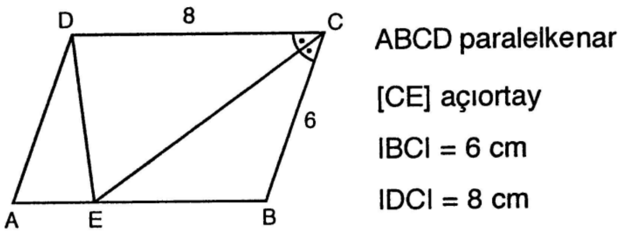
$\alpha = 35^0$

$m(\hat{C}) = 2\alpha = 70$

$m(A\hat{B}C) = 180 - 70 = 110^0$

Cevap: A

4.

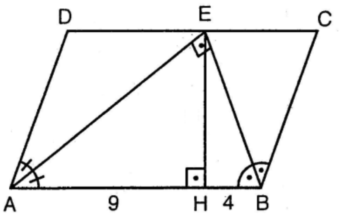


Verilere göre $|AE|$ kaç cm'dir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: İç ters açılardan $m(D\hat{C}E) = m(C\hat{E}B)$ olacağından EBC ikizkenar üçgen olup $|CB| = |EB| = 6$ dır. $|AE| = |AB| - |EB| = 8 - 6 = 2$ cm dir.

5.



ABCD paralelkenar
$m(AEB) = 90^0$
$[EH] \perp [AB]$
$|AH| = 9$ cm
$|HB| = 4$ cm

Verilere göre A(ABCD) kaç cm² dir?

A) 70 B) 72 C) 75 D) 76 E) 78

Çözüm: AEB dik üçgen olduğundan Öklid teoremi gereği;

$|EH|^2 = |AH| \cdot |HB|$

$|EH|^2 = 9 \cdot 4$

$|EH| = 6$ cm

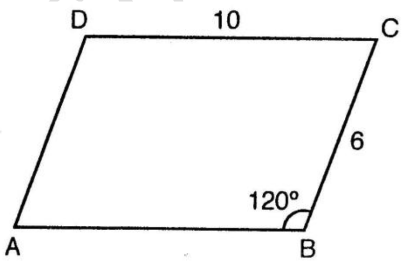
olur. Buna göre;

$A(ABCD) = a \cdot h_a = (9 + 4) \cdot 6 = 78$ cm²

dir.

Cevap: E

6.



ABCD paralelkenar
$|DC| = 10$ cm
$|BC| = 6$ cm
$m(\widehat{ABC}) = 120°$

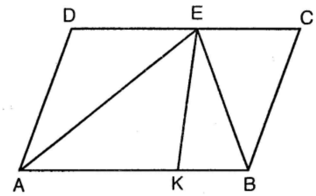
Verilere göre A(ABCD) kaç cm² dir? $\left(\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

A) 10 B) 20 C) $20\sqrt{3}$ D) 30 E) $30\sqrt{3}$

Çözüm: $A(ABCD) = a \cdot b \cdot \sin\alpha = 10 \cdot 6 \cdot \sin 120 = 30\sqrt{3}$

Cevap: E

7.



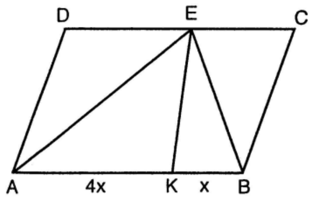
ABCD bir paralelkenar

$|AK| = 4 \cdot |KB|$

$A(EKB) = 4\ cm^2$ ise $A(ABCD)$ kaç cm^2 dir.

A) 32 B) 35 C) 36 D) 40 E) 42

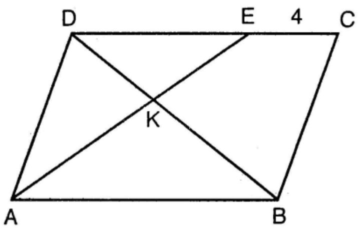
Çözüm: $|KB| = x$ ise $|AK| = 4x$ olacağından $A(EKB) = 4 cm^2$ için $A(AEK) = 16\ cm^2$ dır.



$A(AEB) = 4 + 16 = 20\ cm^2$
$A(ABCD) = 2 \cdot A(AEB) = 2 \cdot 20 = 40\ cm^2$

Cevap: D

8.



ABCD bir paralelkenar

$[AE] \cap [BD] = \{K\}$

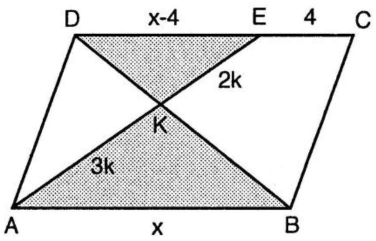
$2|AK| = 3|KE|$

$|EC| = 4$ cm

Verilere göre $|AB|$ kaç cm'dir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: $|EK| = 2k$ alınırsa $|AK| = 3k$ dır. Yine $|AB| = x$ alınırsa $|DE| = x - 4$ dür.



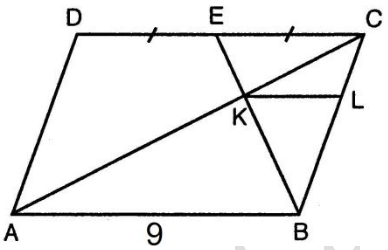
$\overset{\Delta}{EKD} \sim \overset{\Delta}{AKB}$ dir. Buna göre;

$$\frac{x-4}{x} = \frac{2k}{3k}$$
$$3x - 12 = 2x$$
$$|AB| = x = 12 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: C

9.



ABCD bir paralelkenar

[KL] // [AB]

[AC]∩[BE]={K}

|DE| = |EC|

|AB| = 9 cm

Verilere göre |KL| kaç cm’dir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

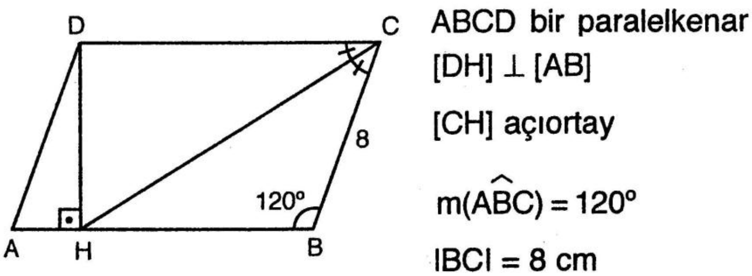
Çözüm: 9.9. teorem gereği $|AC| = 3|KC|$ dir. Buna göre $\overset{\Delta}{CKL} \sim \overset{\Delta}{CAB}$ dir.

$$\frac{|CK|}{|CA|} = \frac{|KL|}{|AB|}$$
$$\frac{k}{3k} = \frac{|KL|}{9}$$
$$|KL| = 3 \text{ cm}$$

olur.

Cevap: A

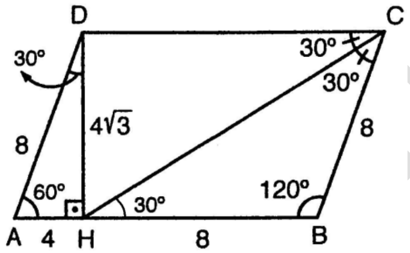
10.



Verilere göre A(ABCD) kaç cm² dir?

A) 48 B) $48\sqrt{3}$ C) 52 D) $52\sqrt{3}$ E) 56

Çözüm: $|AD| = |BC| = 8$ dir.



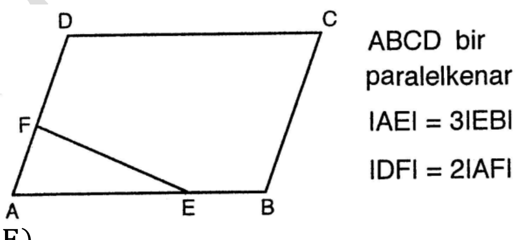
İç ters açılardan $m(DCH) = m(CHB) = 30$ olduğundan $|HB| = 8$ dir.

Karşı durumlu açılardan $m(A) = 60$ dir. Şu halde DAH üçgeni 30–60–90 dir. Buna göre $|AH| = 4$, $|DH| = 4\sqrt{3}$ olur.

$A(ABCD) = (4+8) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Cevap: B

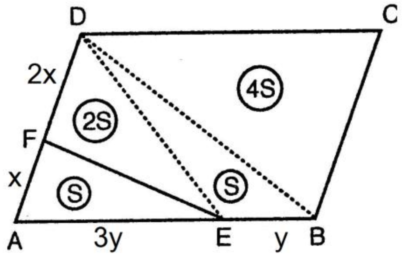
11.



Verilere göre $\dfrac{A(AEF)}{A(ABCD)}$ oranı kaçtır?

A) $\dfrac{1}{8}$ B) $\dfrac{1}{9}$ C) $\dfrac{1}{10}$ D) $\dfrac{1}{11}$ E) $\dfrac{1}{12}$

Çözüm: [DE] ve [DB] doğrularını birleştirelim. $|AF| = x$ alırsak $|FD| = 2x$ olup $A(AEF) = s$ ise $A(DEF) = 2s$ olur. $|EB| = y$ alırsak $|AE| = 3y$ olup $A(AED) = 3s$ ise $A(DEB) = s$ olur.

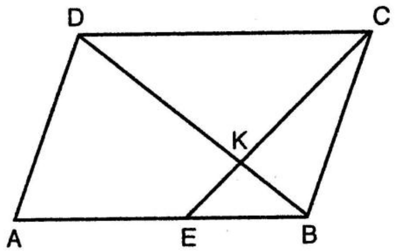


$A(ADB) = 4s$ ise $A(DBC) = 4s$ dir.

$$\frac{A(AEF)}{A(ABCD)} = \frac{s}{8s} = \frac{1}{8}$$

Cevap: A

12.



ABCD paralelkenar

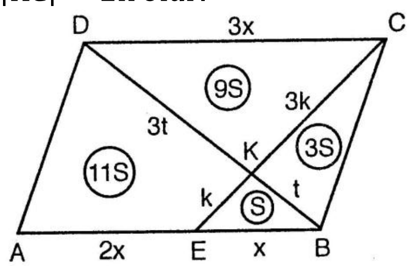
E, K, C noktaları doğrusal

$|AE| = 2|EB|$

Verilere göre $\frac{A(EBK)}{A(AEKD)}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{11}$ E) $\frac{1}{12}$

Çözüm: $|EB| = x$ alırsak $|AE| = 2x$ ve $|DC| = 3x$ dir. $\overset{\Delta}{EBK} \sim \overset{\Delta}{CDK}$ olacağından $|EK| = k$ alırsak $|KC| = 2k$ olur.



$A(EBK) = s$ alınırsa $A(KBC) = 3s$ olur. Yine benzerlik oranının karesi alanları oranına eşittir teoremi gereği;

$$\frac{A(EBK)}{A(CDK)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

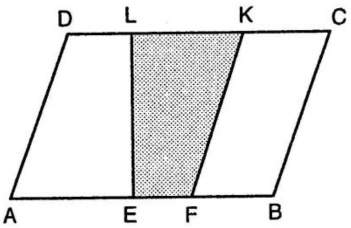
$$A(CDK) = 9s$$

olur. $A(DBC) = A(ABD) = 12s$ ise $A(AEKD) = 11s$ dir.

$$\frac{A(EBK)}{A(ABCD)} = \frac{s}{11s} = \frac{1}{11}$$

Cevap: D

13.



ABCD bir paralelkenar

$|DC| = 2|KL|$

$|AB| = 6|EF|$

$A(ABCD)=72\ cm^2$

Verilere göre A(EFKL) kaç cm^2 dir?

A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

Çözüm: $|EF| = x$ alırsak $|LK| = 3x$ ve $|AB| = |DC| = 6x$ olur. 9.24. teorem gereği;

$$\frac{A(EFKL)}{A(ABCD)} = \frac{m+n}{2a}$$

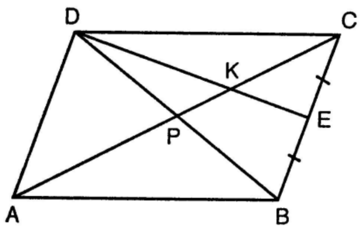
$$\frac{A(EFKL)}{72} = \frac{3x+x}{2 \cdot 6x}$$

$$A(EFKL) = 24\ cm^2$$

olur.

Cevap: B

14.



ABCD bir paralelkenar

D, K ve E doğrusal

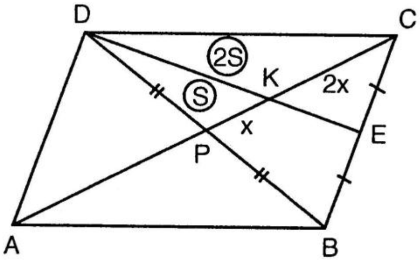
[AC] ve [BD] köşegenler

$|CE| = |EB|$

Verilere göre $\dfrac{A(DKP)}{A(ABCD)}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{11}$ E) $\frac{1}{12}$

Çözüm: DBC üçgeninde [DE] kenarortaydır. Buna göre $|KP| = x$ alınırsa $|CK| = 2x$ olup $A(AKP) = s$ ise $A(DCK) = 2s$ dir.



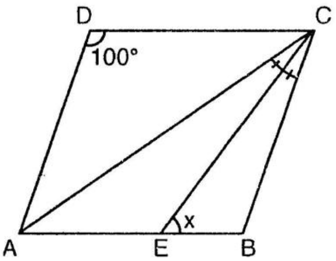
$A(DPC) = 3s$ ise $A(ABCD) = 4 \cdot 3s = 12s$ dir.

$$\frac{A(DKP)}{A(ABCD)} = \frac{s}{12s} = \frac{1}{12}$$

Cevap: E

Eşkenar Dörtgen

15.



ABCD eşkenar dörtgen

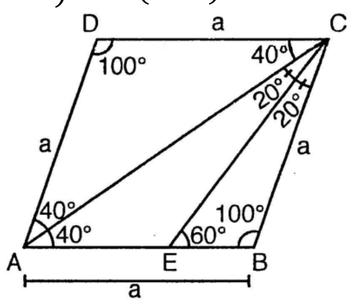
[CE] açıortay

$m(\widehat{ADC}) = 100°$

Verilere göre $m(\widehat{CEB}) = x$ kaç derecedir?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

Çözüm: ABCD eşkenar dörtgen olduğundan bütün kenarları eşittir. $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACB}) = 40$ olur.



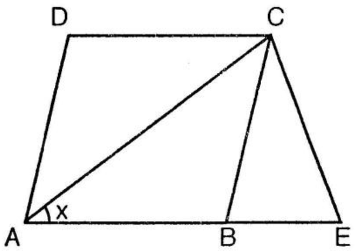
Buna göre $m(A\hat{C}E) = m(E\hat{C}B) = 20$ dir. CEB üçgenine göre;

$$x + 20 + 100 = 180$$
$$x = 60^0$$

olur.

Cevap: C

16.



ABCD eşkenar dörtgen

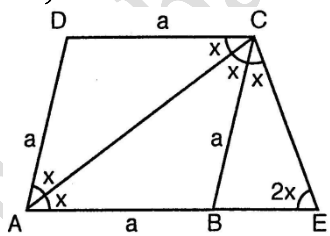
$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BCE})$

$|AC| = |AE|$

Verilere göre $m(C\hat{A}B) = x$ kaç derecedir?

A) 30 B) 35 C) 36 D) 40 E) 42

Çözüm: ABCD eşkenar dörtgen olduğundan bütün kenarları eşittir. $m(C\hat{A}B) = m(A\hat{C}B) = m(A\hat{C}D) = x$ olur.



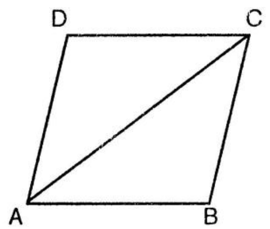
$|AC| = |AE|$ olduğundan $m(A\hat{C}E) = m(A\hat{E}C) = 2x$ dir. ACE üçgeninde;

$$x + x + x + 2x = 180$$
$$x = 36^0$$

olur.

Cevap: C

17.



ABCD eşkenar dörtgen

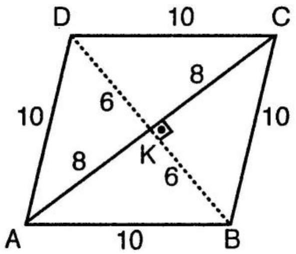
$Ç(ABCD) = 40$ cm

$|AC| = 16$ cm

Verilere göre A(ABCD) kaç cm^2 dir?

A) 90 B) 96 C) 100 D) 104 E) 108

Çözüm: ABCD eşkenar dörtgen olduğundan bir kenarı 10 cm'dir. Köşegenler dik kesiştiğini hatırlayalım.

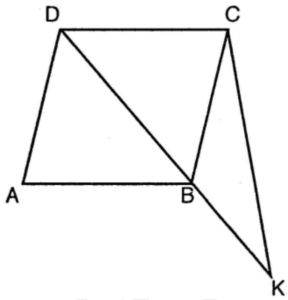


$|AC| = 16$ ise $|AK| = |KC| = 8$ dir. 3–4–5 üçgeninden $|DK| = |KB| = 6$ dir.

$$A(ABCD) = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$$

Cevap: B

18.



ABCD eşkenar dörtgen

$|DB| = |BK| = 10$ cm

$|AB| = \sqrt{89}$ cm

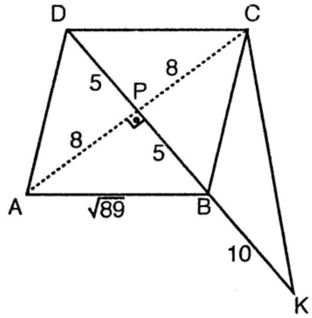
D,B,K noktaları doğrusal.

Verilere göre $|CK|$ kaç cm'dir?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Çözüm: Köşegenlerin kesişme noktası P ise $|DP| = |PB| = 5$ dir. APB dik üçgeninden;

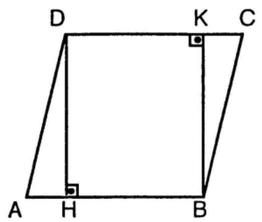
$$|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2$$
$$\sqrt{89}^2 = |AP|^2 + 5^2$$
$$|AP| = |PC| = 8 \text{ cm}$$



olur. CKP üçgeni dik üçgen olduğundan 8–15–17 üçgeni gereği $|CK| = 17$ cm olur.

Cevap: E

19.



ABCD eşkenar dörtgen

$[DH] \perp [AB]$

$[BK] \perp [DC]$

$|AD| = 13$ cm

$A(ABCD) = 156 \text{ cm}^2$

Verilere göre $|HB|$ kaç cm'dir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Eşkenar dörtgenin bir kenarı 13 cm olduğundan

$A(ABCD) = |AB| \cdot |HD|$

$156 = 13 \cdot |HD|$

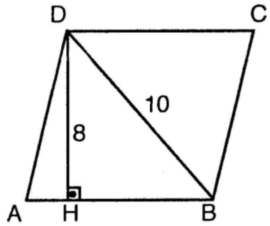
$|HD| = 12$

olur. AHD dik üçgeni 5–12–13 üçgeninin şartlarını sağladığından $|AH| = 5$ dir.

$|HB| = |AB| - |AH| = 13 - 5 = 8$ cm

Cevap: D

20.



ABCD eşkenar dörtgen

$|BD| = 10$ cm,

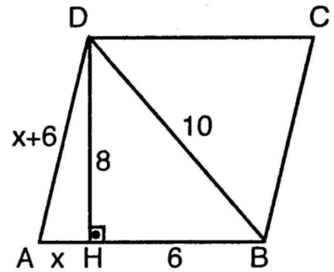
$|DH| = 8$ cm

$[DH] \perp [AB]$

Verilere göre $|AB|$ kaç cm'dir?

A) $\frac{25}{3}$ B) 9 C) $\frac{28}{3}$ D) 10 E) 11

Çözüm: DHB üçgeni 3–4–5 kuralı gereği $|HB| = 6$ dır. $|AH| = x$ alınırsa $|AD| = 6 + x$ olur.



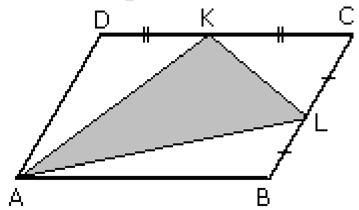
ADH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$(x+6)^2 = x^2 + 8^2$$
$$x^2 + 12x + 36 = x^2 + 64$$
$$12x + 36 = 64$$
$$x = \frac{7}{3}$$
$$|AB| = 6 + \frac{7}{3} = \frac{25}{3} \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: A

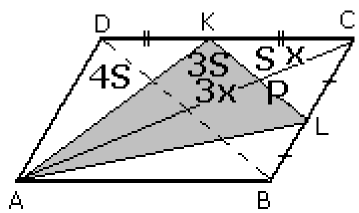
21.



Yandaki ABCD eşkenar dörtgenin alanı 48 cm² dir. [CD] nin orta noktası K, [BC] nin orta noktası L olduğuna göre $\overset{\Delta}{AKL}$ üçgeninin alanı kaç cm² dir?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 21 E) 22

Çözüm:



Şekilde [AC] köşegenin çizelim. $|PC| = x$ alırsak $|AP| = 3x$ olur. "Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin tabanları oranı alanları oranına eşit" teoreminden

$$A(KPC) = S,\ A(AKP) = 3S,\ A(ADK) = 4S$$

dir. Eşkenar dörtgenin yarısı 8S olacağından tamamı 16 S olarak bulunur. Şu halde,

$$16S = 48 \text{ ise } S = 3$$
$$A(AKL) = 6S = 6 \cdot 3 = 18\ \text{cm}^2$$

elde edilir.

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.