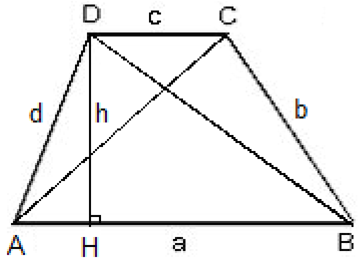
10. BÖLÜM
YAMUK ve DELTOİD

YAMUK

10.1. Tanım: Yalnız iki kenarı birbirine paralel olan dörtgenlere, yamuk denir.



ABCD yamuk ⇔ [AB] // [CD]

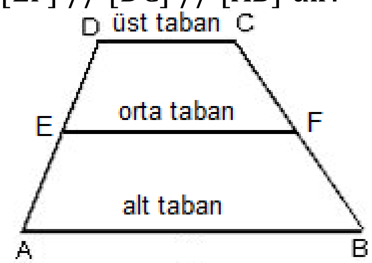
[AB] kenarına yamuğun alt tabanı, [DC] kenarına da yamuğun üst tabanı denir. [DH] dikmesine yamuğun yüksekliği, [AC] ve [BD] doğru parçalarına da yamuğun köşegenleri denir.

Bu tanıma göre kare, dikdörtgen, paralelkenar ve eşkenar dörtgen özel birer yamuktur. Onlar yamuğun özel durumlarıdır. Şu halde, yamukta anlatılacak olan her şey kare, dikdörtgen, paralelkenar ve eşkenar dörtgen içinde geçerlidir.

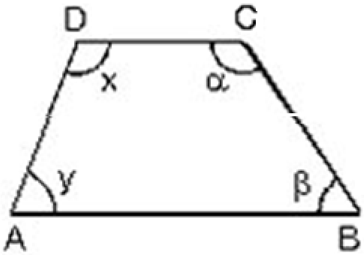
10.2. Tanım: Bir yamukta, paralel olmayan yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına yamuğun orta tabanı denir.

$$|\mathbf{AE}| = |\mathbf{ED}| \text{ ve } |\mathbf{BF}| = |\mathbf{FC}|$$

ise [EF] orta tabandır ve [EF] // [DC] // [AB] dır.



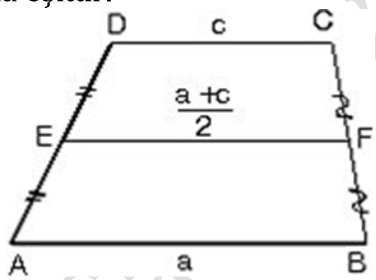
10.1. Teorem: Bir yamukta paralel olmayan kenarlardan her birinin uçlarındaki açılar birbirinin bütünleridir.



ABCD Yamuk, [AB]//[DC] $\Leftrightarrow \mathbf{x+y+\alpha+\beta=180^0}$

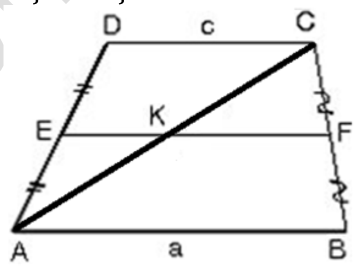
Bu teoremin ispat okuyucuya bırakılmıştır.

10.2. Teorem: Bir yamukta, orta taban uzunluğu, alt ve üst taban uzunlukları toplamının yarısına eşittir.



ABCD yamuk, [EF] orta taban, $|\mathbf{AB}| = \mathbf{a}$, $|\mathbf{DC}| = \mathbf{c} \Leftrightarrow |\mathbf{EF}| = \frac{\mathbf{a+c}}{\mathbf{2}}$

İspat: [AC] doğru parçasını çizelim.



[EK] // [DC] olduğundan $\overset{\triangle}{AKE} \sim \overset{\triangle}{ACD}$ dir. Buna göre,

$$\frac{|KE|}{|CD|} = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{1}{2}$$

$$|KE| = \frac{c}{2} \qquad (1)$$

olur. [KE] // [AB] olduğundan $\overset{\triangle}{CKF} \sim \overset{\triangle}{CAB}$ dir. Buna göre,

$$\frac{|CF|}{|CB|} = \frac{|KF|}{|AB|} = \frac{1}{2}$$

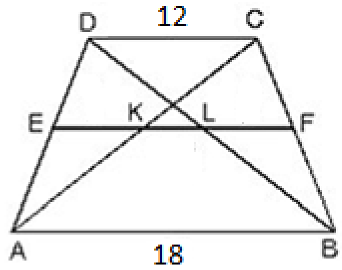
$$|KF| = \frac{a}{2} \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) den,

$$|EF| = |EK| + |KF| = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2}$$

bulunur.

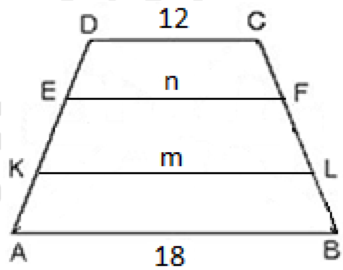
Örnek:



Şekildeki ABCD yamuğunda, [EF] orta taban, [AC] ve [BD] köşegenlerdir. $|KF| = 18$ cm ve $|DC| = 12$ cm olduğuna göre $|EF|$ uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $|EF| = \frac{18+12}{2} = 15$ cm

Örnek:



Verilen şekilde, $[AB]//[EF]//[KL]//[AB]$ dir. $|DE| = |EK| = |KA|$, $|DC| = 12$ cm , $|AB| = 18$ cm, $|EF| = n$ ve $|KL| = m$ kaç cm'dir?

Çözüm: KLCD yamuğunda [EF] orta taban olduğundan,

$$n = \frac{12+m}{2}$$
$$2n - m = 12$$

dir. Yine ABFE yamuğunda [EF] orta taban olduğundan,

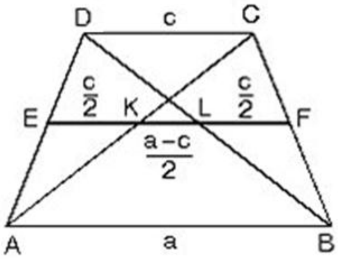
$$m = \frac{18+n}{2}$$
$$2m - n = 18$$

dir. Bu iki eşitlikte yok etme metodu kullanılırsa,

$$\left.\begin{array}{l} 2n - m = 12 \\ 2m - n = 18 \end{array}\right\} m = 16, n = 12$$

bulunur.

10.3. Teorem: Bir yamukta, orta tabanın köşegenler arasında kalan parçasının uzunluğu, yamuğun taban uzunlukları farkının yarısına eşittir.



ABCD yamuk, [EF] orta taban, [AC] ve [BC] köşegenler,

$$|\mathbf{AB}| = \mathbf{a},\ |\mathbf{DC}| = \mathbf{c} \Leftrightarrow |\mathbf{KL}| = \frac{\mathbf{a-c}}{\mathbf{2}}$$

İspat: [LF] // [DC] olduğundan $\overset{\Delta}{BLF} \sim \overset{\Delta}{ADC}$ dir. Buna göre,

$$\frac{|LF|}{|CD|} = \frac{|BF|}{|BC|} = \frac{1}{2}$$

$$|LF| = \frac{c}{2} \qquad (1)$$

olur. [KF] // [AB] olduğundan $\overset{\Delta}{CKF} \sim \overset{\Delta}{CAB}$ dir. Buna göre,

$$\frac{|CF|}{|CB|} = \frac{|KF|}{|AB|} = \frac{1}{2}$$

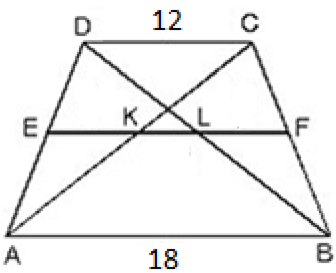
$$|KF| = \frac{a}{2} \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) den,

$$|KL| = |KF| - |LF| = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2}$$

bulunur.

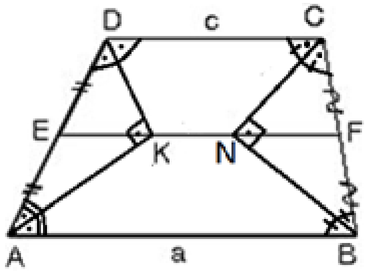
Örnek:



Şekildeki ABCD yamuğunda, [EF] orta taban, [AC] ve [BD] köşegenlerdir. $|KF| = 18$ cm ve $|DC| = 12$ cm olduğuna göre, $|KL|$ uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $|KL| = \frac{18-12}{2} = 3$ cm

10.4. Teorem: Bir yamukta, paralel olmayan kenarların uçlarındaki açıların açıortayları, orta taban üzerinde, dik olarak kesişirler.



ABCD yamuk, [EF] orta taban, [AK], [BN], [DK] ve [CN] açıortay,

a) $\mathbf{K \in [EF]}$ ve $\mathbf{N \in [EF]}$

b) $\mathbf{m(B\widehat{N}C) = m(A\widehat{K}D) = 90^0}$

İspat: a) A açısının açıortayının [EF] yi kestiği nokta K olsun. İç ters açılardan $m(K\widehat{A}B) = m(E\widehat{K}A)$ olacağından $|AE| = |EK|$ olup AKD üçgeni muhteşem üçlü teoremi gereği $K \in [EF]$ dir. Benzer şekilde BNC üçgeninde $N \in [EF]$ olduğu gösterilir.

b) İç açılarının ölçüleri toplamından

$$m(A\widehat{K}D) = \frac{m(\widehat{A})}{2} + \frac{m(\widehat{D})}{2} = 180^0$$

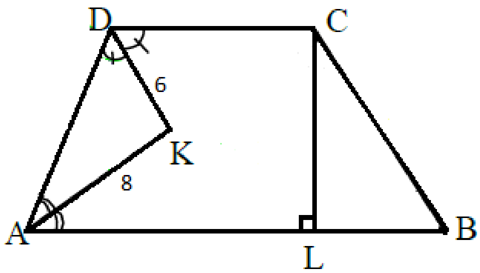
dir. Bütünler açılardan $m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180$ olacağından,

$$m(A\widehat{K}D) + 90 = 180$$

$$m(A\widehat{K}D) = 90^0$$

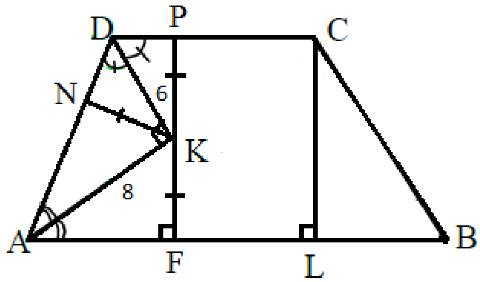
olur. Benzer şekilde $m(B\widehat{N}C) = 90^0$ gösterilir.

Örnek: Şekildeki ABCD yamuğunda, [AK] ve [DK] sırayla A ve D açılarının açıortaylarıdır.



$[CL] \perp [AB]$, $|AK| = 8$ cm, $|DK| = 6$ cm olduğuna göre, $|CL|$ yi bulunuz.

Çözüm: $[AK]$ ve $[DK]$ açıortay ise, $m(A\widehat{K}D) = 90^0$ ve $3\text{–}4\text{–}5$ üçgeninden $|AD| = 10$ cm dir.



$[KP]$, $[KF]$ ve $[KN]$ dikmelerini çizelim. AKD üçgeninin alanından;

$$\frac{10 \cdot |NK|}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} \text{ ise } |NK| = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

olur. 3.1. teoremine göre,

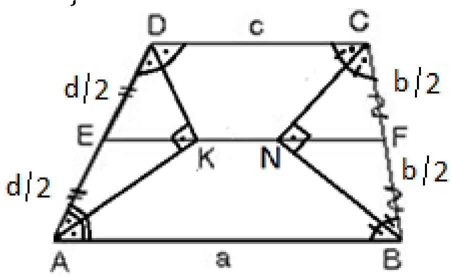
$$|NK| = |KP| = |KF| = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

olup,

$$|PF| = \frac{48}{5} \text{ cm}$$

bulunur.

10.5. Teorem: Bir yamukta iç açıların açıortayları orta taban üzerinde dik olarak kesişirler ve kesişim noktaları arasındaki uzaklık



$$|KN| = \frac{(a+c)-(b+d)}{2}$$

dir.

İspat: [DC]//[EF]//[AB] olduğundan,

$$m(C\hat{D}K) = m(E\hat{D}K) = m(E\hat{K}D)$$

bulunur. Buna göre muhteşem üçlü teorem gereği,

$$|DE| = |EK| = \frac{d}{2}$$

olur. Benzer şekilde,

$$|CF| = |NF| = \frac{b}{2}$$

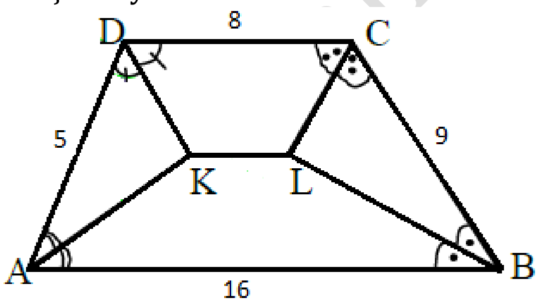
olur. 10.2. Teoremde $|EF| = \frac{a+c}{2}$ olduğuna göre,

$$|KN| = |EF| - |EK| - |NF| = \frac{a+c}{2} - \frac{b}{2} - \frac{d}{2} = \frac{(a+c)-(b+d)}{2}$$

elde edilir.

10.1. Sonuç: 10.4. Teoreme göre $a + c = b + d$ ise, K ile N noktaları çakışıktır.

Örnek: Verilen şekilde, ABCD yamuk, [AK], [DK], [CL] ve [BL] sırasıyla A, D, C ve B açılarının açıortaylarıdır.



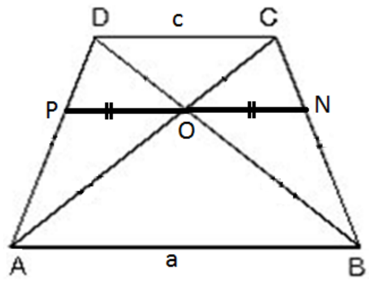
$|DC| = 8$ cm, $|AB| = 16$ cm, $|AD| = 5$ cm ve $|CB| = 9$ cm olduğuna göre $|KL|$ uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: 10.5. teorem gereği,

$$|KN| = \frac{(16+8)-(9+5)}{2} = 5 \text{ cm}$$

olur.

10.6. Teorem: Bir ABCD yamuğunda, [AC] ve [BC] köşeleri O noktasında kesişiyor. [PN]//[AB], $|AB| = a$ ve $|DC| = c$ olmak üzere,



$$|PO| = |ON| = \frac{ac}{a+c}$$

dir.

İspat: [DC]//[PN]//[AB] olduğundan 3.7. teoremi gereği,

$$\frac{1}{|PO|} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$
$$|PO| = \frac{ac}{a+c}$$

dir. [DC]//[PN]//[AB] olduğundan 3.7. teoremi gereği,

$$\frac{1}{|ON|} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$
$$|ON| = \frac{ac}{a+c}$$

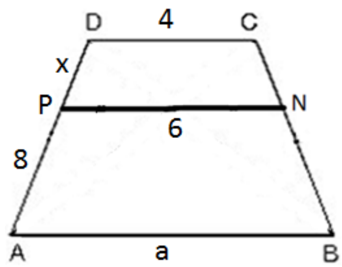
olur.

10.2. Sonuç: 10.6. teoremde,

$$|PN| = 2|PO| = \frac{2ac}{a+c}$$

dir.

Örnek: Şekilde, O noktası ABCD yamuğunun köşegenlerinin kesim noktasıdır. [DC]//[PN], $|DC| = 4$ cm, $|PN| = 6$ cm ve $|AP| = 8$ cm olduğuna göre, $|AB|$ kaç cm'dir?



Çözüm: 10.2. sonuçtan,

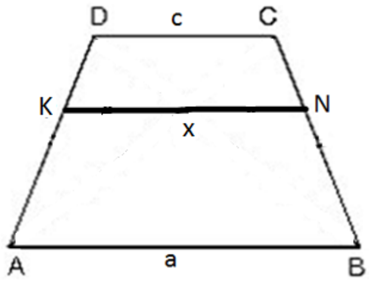
$$|PN| = \frac{2ac}{a+c}$$

$$6 = \frac{2a \cdot 4}{a+4}$$

$$a = 12 \text{ cm}$$

olur.

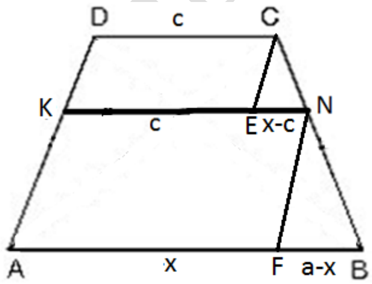
10.7. Teorem: Bir ABCD yamuğunda, [AB]//[KN]//[DC], $|AB| = a$, $|DC| = c$ ve $|KN| = x$ olmak üzere,



$$\frac{|DK|}{|KA|} = \frac{|CN|}{|NB|} = \frac{x-c}{a-x}$$

dir.

İspat: [CE]//[AD] ve [NF]//[AD] olacak şekilde [CE] ve [NF] doğru parçalarını çizelim.



Yöndeş açılardan $m(E\hat{C}N) = m(F\hat{N}B)$ ve $m(E\hat{N}C) = m(F\hat{B}N)$ olduğundan A.A.A. benzerlik aksiyomundan, $\overset{\triangle}{CEN} \sim \overset{\triangle}{NFB}$ dir. O halde,

$$\frac{|CN|}{|NB|} = \frac{|EN|}{|FB|}$$

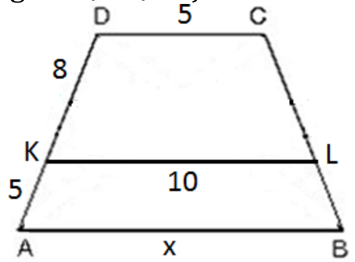
$$\frac{|CN|}{|NB|} = \frac{x-c}{a-x}$$

olur. Paralel doğruların arasında kalan doğru parçaları orantılı olacağından,

$$\frac{|DK|}{|KA|} = \frac{|CN|}{|NB|} = \frac{x-c}{a-x}$$

bulunur.

Örnek: Şekilde [DC] // [KL] // [AB], $|AK| = |DC| = 5$ cm, $|DK| = 8$ cm ve $|KL| = 10$ cm olduğuna göre, $|AB|$ kaç cm'dir?



Çözüm: 10.7. Teoreme göre,

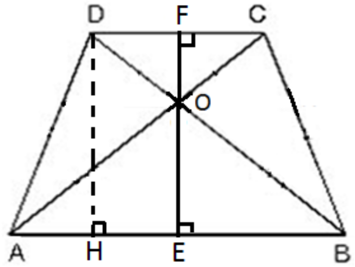
$$\frac{|DK|}{|KA|} = \frac{|KL| - |DC|}{|AB| - |KL|}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{10-5}{x-10}$$

$$x = \frac{105}{8} \text{ cm}$$

bulunur.

10.8. Teorem: Bir ABCD yamuğunda, [AC] ve [BD] köşegenlerdir. $[DC] \perp [AB]$, $[FE] \perp [AB]$, $[DC] \perp [FE]$, $|AB| = a$, $|DC| = b$ ve $|DH| = h$ olmak üzere,



a) $|OE| = \frac{ah}{a+c}$

b) $|OF| = \frac{ch}{a+c}$

dir.

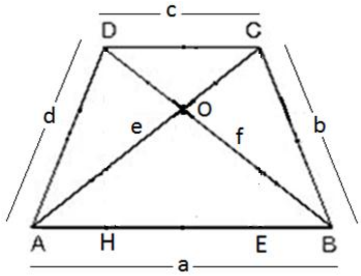
İspat: A.A.A. benzerlik aksiyomundan $D\overset{\triangle}{O}C \sim B\overset{\triangle}{O}A$ yazılabilir. Buna göre,

a) $\frac{c}{a} = \frac{h - |OE|}{|OE|}$ ise $|OE| = \frac{ah}{a+c}$

b) $\dfrac{c}{a} = \dfrac{|OF|}{h-|OF|}$ ise $|OF| = \dfrac{ch}{a+c}$

olur.

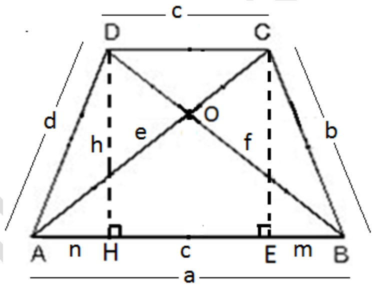
10.9. Teorem: Bir ABCD yamuğunda, [AC] ve [BD] köşegen, $|AC| = e$, $|BD| = f$, $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ olmak üzere,



$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$$

dir.

İspat: $[DH]\perp[AB], [CE]\perp[AB]$ olacak şekilde $|DH| = |CE| = h$ yüksekliğini çizelim. $|AH| = n$, $|HE| = |DC| = c$, $|EB| = m$ olsun.



$\overset{\Delta}{AHD}$ üçgeninde, Pisagor teoreminden,

$$h^2 = d^2 - n^2 \qquad (1)$$

$\overset{\Delta}{AEC}$ üçgeninde, Pisagor teoreminden,

$$e^2 = (n + c)^2 + h^2$$

$$e^2 = n^2 + c^2 + h^2 + 2nc \qquad (2)$$

(1) ve (2) den

$$e^2 = n^2 + c^2 + d^2 + 2nc - n^2 \qquad (3)$$

$\overset{\Delta}{CEB}$ üçgeninde, Pisagor teoreminden,

$$h^2 = b^2 - m^2 \qquad (4)$$

$\overset{\Delta}{DHB}$ üçgeninde, Pisagor teoreminden,

$$f^2 = (m + c)^2 + h^2$$

$$f^2 = m^2 + c^2 + h^2 + 2mc \qquad (5)$$

(4) ve (5) den

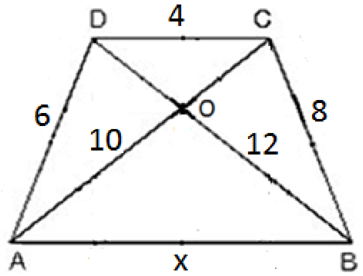
$$f^2 = m^2 + c^2 + b^2 + 2mc - m^2 \qquad (6)$$

olur. (3) ve (6) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} e^2 + f^2 &= c^2 + d^2 + 2nc + c^2 + b^2 + 2mc \\ &= b^2 + d^2 + 2c(c + n + m) \\ &= b^2 + d^2 + 2ac \end{aligned}$$

olur.

Örnek: ABCD yamuğunda, [AC] ve [BD] köşegenlerdir. $|AC| = 10$ cm, $|BD| = 12$ cm, $|AD| = 6$ cm, $|BC| = 8$ cm ve $|DC| = 4$ cm olduğuna göre $|AB|$ kaç cm'dir.



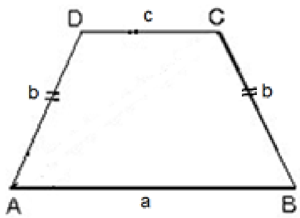
Çözüm: 10.9. Teoremden,

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$$
$$10^2 + 12^2 = 8^2 + 6^2 + 2|AB| \cdot 4$$
$$|AB| = 18 \text{ cm}$$

bulunur.

İKİZKENAR YAMUK

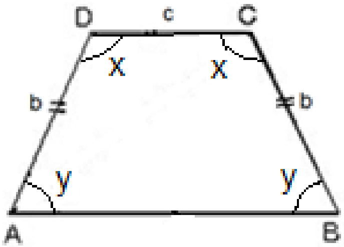
10.3. Tanım: Paralel olmayan kenarlarının uzunlukları eşit olan yamuğa, ikizkenar yamuk denir.



[AB] // [DC] ve $|AD| = |BC|$ olduğundan ABCD ikizkenar yamuktur.

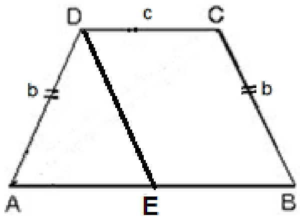
İkizkenar yamuk, yamuğun tüm özelliklerini taşıyacağından tekrar bahsedilmeyecektir. Ayrıca ikizkenar yamukta şu özellikler de mevcuttur.

10.10. Teorem: İkizkenar yamukta, bir tabanın iki ucundaki açılarının ölçüleri eşittir.



ABCD ikizkenar yamuk, [AB] // [DC] ve $|AD| = |BC| \Leftrightarrow m(\hat{A}) = m(\hat{B})$, $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$

İspat: [BC] // [DE] olacak şekilde [DE] yi çizelim.



$|AD| = |BC|$ ve paralel doğrular arasında kalan paralel doğru parçaları eşit olduğundan $|DE| = |BC|$ dir. Buna göre $|AD| = |DE|$ olup yöndeş açılardan

$m(A\hat{E}D) = m(\hat{B})$ ve $m(A\hat{E}D) = m(\hat{A})$

$m(\hat{A}) = m(\hat{B})$

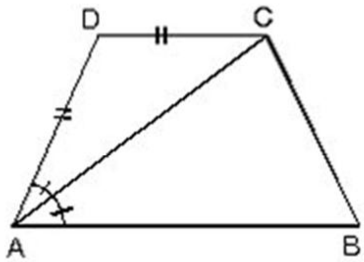
elde edilir. Ayrıca bütünler açılardan

$m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180$ ve $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180$

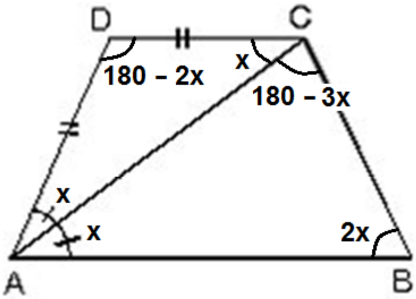
$m(\hat{C}) = m(\hat{D})$

olur.

10.11. Teorem: Karşılıklı iki kenarı paralel olan dörtgenlerde açıortay verilmiş ise ikizkenar üçgen elde edebileceğimiz gibi, iki kenarlık verilmiş ise de açıortay elde ederiz.



İspat:



[AC] açıortay için $m(B\hat{A}C) = m(C\hat{A}D) = x$ alınırsa yöndeş açılardan $m(A\hat{C}D) = x$ olur. 10.10 Teoreme göre

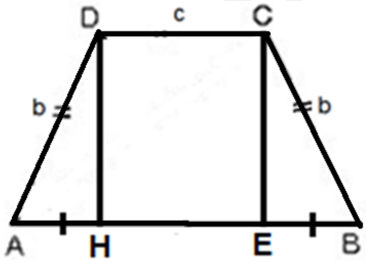
$$m(\hat{D}) = m(\hat{C}) = 180 - 2x$$

olur. Buna göre,

$$m(A\hat{C}B) = 180 - 3x$$

dir. ACB üçgeninden $m(\hat{B}) = 2x$ dir. O halde ABCD yamuğu ikizkenar yamuktur.

10.12. Teorem: İkizkenar yamukta, eş kenarların taban üzerindeki dik iz düşümleri de eşittir.



ABCD ikizkenar yamuk, $[AB] \mathbin{//} [DC]$, $[DH]\perp[AB]$ ve $[CE]\perp[AB]$

$$\Leftrightarrow m(\hat{A}) = m(\hat{B}), m(\hat{C}) = m(\hat{D})$$

İspat: A.A.A. eşlik aksiyomundan $\overset{\triangle}{AHD} \cong \overset{\triangle}{BEC}$ olacağından,

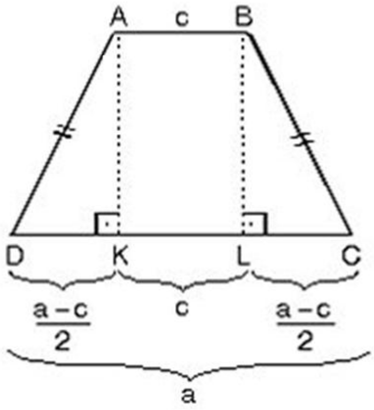
$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AH|}{|BE|}$$

dir. $|AD| = |BC|$ olduğundan $|AH| = |BE|$ olur.

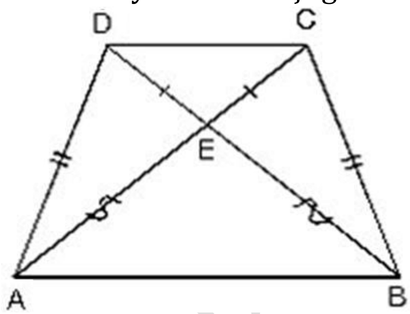
10.3. Sonuç: İkizkenar bir yamukta eş kenarların taban üzerindeki dik iz düşümlerinin uzunlukları, taban uzunluklarının farkının yarısına eşittir. Yani,

$$|AH| = |BE| = \frac{a-c}{2}$$

dir.



10.13. Teorem: İkizkenar yamukta köşegen uzunlukları eşittir.

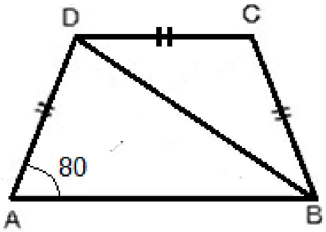


ABCD ikizkenar yamuk, [AB] // [DC], $|AD| = |BC|$, [AC] ve [BD] köşegen $\Leftrightarrow |AC| = |BD|$

İspat: $|AD| = |BC|$, $|AB| = |AB|$ ve 10.10 Teoremden $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$ olduğundan K.A.K. eşlik aksiyomundan $A\overset{\triangle}{B}C \cong B\overset{\triangle}{A}D$ dir. Eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olduğundan $|AC| = |BD|$ olur.

10.4. Sonuç: 10.12. Teoreme göre $|AE| = |EB|$ ve $|EC| = |ED|$ dir.

Örnek:



Şekilde ABCD ikizkenar yamuktur. $|AD| = |DC| = |BC|$ ve $m(\hat{A}) = 80^0$ olduğuna göre, ADB açısının ölçüsünü bulunuz.

Çözüm: ABCD ikizkenar yamuk olduğundan,

$$m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180 \text{ ise } m(\hat{C}) = 100$$

$$m(\hat{C}) = m(\hat{D}) = 100$$

olur. BCD ikizkenar üçgen olduğundan,

$$m(D\hat{B}C) = m(B\hat{D}C) = 40$$

bulunur. Buna göre,

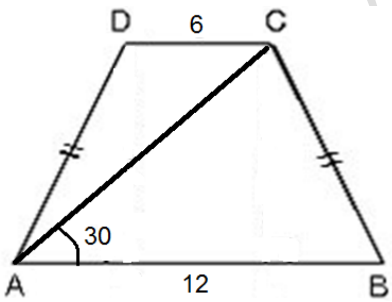
$$m(\hat{D}) = m(A\hat{D}B) + m(B\hat{D}C)$$

$$100 = m(A\hat{D}B) + 40$$

$$m(A\hat{D}B) = 60^0$$

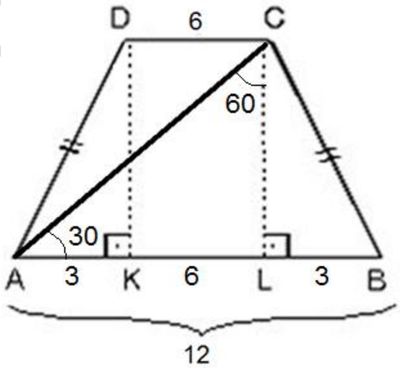
elde edilir.

Örnek: ABCD ikizkenar yamuğunda [AB] // [DC], $|AD| = |BC|$ ve $m(C\hat{A}B) = 30^0$ dir.



$|AB| = 12$ cm ve $|DC| = 6$ cm ise $|AC|$ kaç cm'dir?

Çözüm: $[DK] \perp [AB]$ ve $[CL] \perp [AB]$ olacak şekilde [DK] ve [CL] yi çizelim.



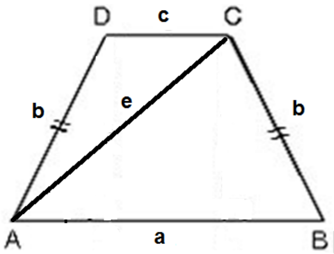
10.3. Sonuca göre $|AK| = |LB| = \frac{12-6}{2} = 3$ dür. ACL üçgeninde $|AL| = 9$ cm olduğuna göre,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|AC| = |AL|$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|AC| = 9$$
$$|AC| = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$$

olur.

10.14. Teorem: İkizkenar yamukta köşegenler (e), üst taban (c) alt taban (a) ise köşegenler ile tabanlar arasında $e^2 - b^2 = ac$ ilişkisi vardır.



$|AB| = a$, $|AD| = |BC| = b$, $|DC| = c$ ve $|AC| = |BD| = e$ ise $e^2 - b^2 = ac$ dir.

İspat: 10.9. Teoremde $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$ olduğunu biliyoruz. İkizkenar yamukta $b = d$ ve $e = f$ olduğundan,

$$e^2 + e^2 = b^2 + b^2 + 2ac$$
$$2e^2 = 2b^2 + 2ac$$
$$e^2 - b^2 = ac$$

olur.

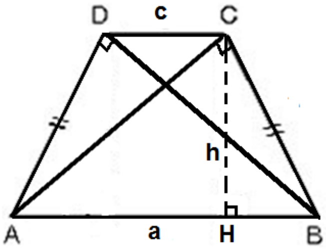
Örnek: İkizkenar bir yamukta taban uzunlukları 4 cm ve 12 cm'dir. Bir köşegenin uzunluğu 10 cm olduğuna göre, birbirine eşit yan kenarlardan birinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: 10.14. teoremden,

$$e^2 - b^2 = ac$$
$$10^2 - b^2 = 4 \cdot 12$$
$$b^2 = 100 - 48 = 52$$
$$b = 2\sqrt{13}\ \text{cm}$$

olur.

10.15. Teorem: İkizkenar yamukta köşegenler yan kenarlara dik iseler, yamuğun yüksekliği, $h = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}$ dir.



$[AC]\perp[BC]$ ve $[BD]\perp[AD]$, $[DH]\perp[AB]$, $|AB| = a$, $|DC| = c$ ve $|CH| = h$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{2}$$

İspat: 10.3. Sonuca göre, $|HB| = \frac{a-c}{2}$ dir. Buradan,

$$|AH| = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2}$$

olur. O halde CAB dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa,

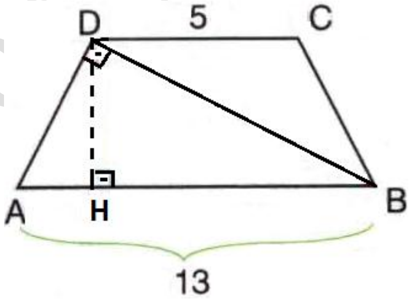
$$|CH|^2 = |AH||HB|$$

$$h^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{a-c}{2}\right)$$

$$h = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{2}$$

bulunur.

Örnek: ABCD yamuğunda, $[AB] // [DC]$, $|AD| = |BC|$ ve $[BD]\perp[AD]$ dir. $|AB| = 13$ cm ve $|DC| = 5$ cm olduğuna göre, yamuğun yüksekliğini bulunuz.

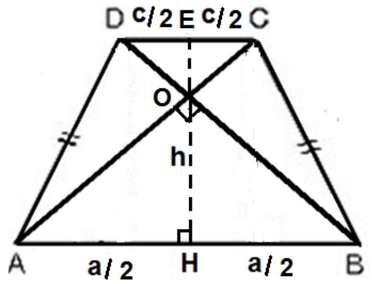


Çözüm: Yamuğun yüksekliğine h dersek, 10.15. teorem gereği,

$$h = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{2} = \frac{\sqrt{13^2-5^2}}{2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6 \text{ cm}$$

olur.

10.16. Teorem: İkizkenar yamukta köşegenler birbirine dik kesiyor ise yamuğun yüksekliği alt ve üst tabanlarının uzunlukları toplamının yarısına eşittir.



$[AC] \perp [BC]$, $[EH] \perp [AB]$, $|AB| = a$, $|DC| = c$ ve $|CH| = h \Leftrightarrow |EH| = \frac{a+c}{2}$

İspat: ABCD ikizkenar yamuğunda [EH] yüksekliği, AOB ve DOC üçgenlerini ortalamaktadır. Muhteşem üçlü teoremine göre;

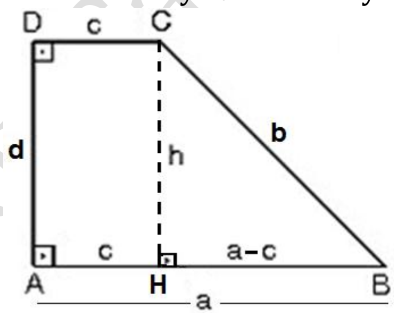
$$|HO| = \frac{a}{2} \text{ ve } |OE| = \frac{c}{2}$$

$$|EH| = |HO| + |OE| = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2}$$

dir.

DİK YAMUK

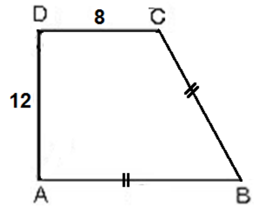
10.4. Tanım: Paralel olmayan kenarlarından biri tabanlara dik olan yamuğa, dik yamuk denir. Dik kenar aynı zamanda yamuğun yüksekliğidir.



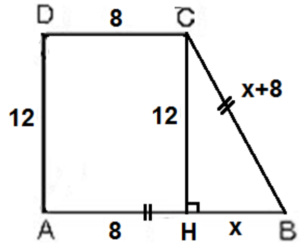
$$m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 90,\ |CH| = |AD| \Leftrightarrow h = d$$

$$\overset{\Delta}{CHB} \text{ dik üçgeninde } h^2 + (a-c)^2 = b^2$$

Örnek: ABCD dik yamuğunda $|AD| = 12$ cm, $|DC| = 8$ cm ve $|AB| = |BC|$ dur. O halde $|BC|$ kaç cm'dir?



Çözüm: $[CH] \perp [AB]$ olacak şekilde $[CH]$ yüksekliğini çizelim ve $|HB| = x$ olsun.

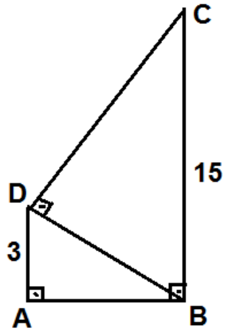


$|AB| = |BC| = x + 8$ olacağından BHC dik üçgeninde,

$$(x+8)^2 = 12^2 + x^2$$
$$x^2 + 16x + 64 = 144 + x^2$$
$$16x = 80$$
$$x = 5 \text{ cm}$$

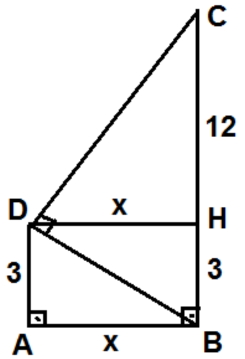
olur.

Örnek: ABCD dik yamuğunda $[BD] \perp [DC]$ dir.



$|AD| = 3$ cm ve $|BC| = 15$ cm olduğuna göre $|DC|$ kaç cm'dir.

Çözüm: $[AB] // [DH]$ çizelim.

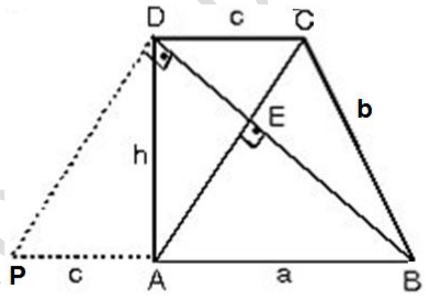


$|AD| = |BH| = 3$ cm, $|CH| = 12$ cm ve $|DH| = |AB|$ seçilirse BDC dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa,

$$x^2 = 3 \cdot 12 \text{ ise } x = 6$$
$$|DC|^2 = |DH|^2 + |HC|^2$$
$$|DC|^2 = 6^2 + 12^2$$
$$|DC| = 3\sqrt{30}$$

olur.

10.17. Teorem: Bir dik yamukta köşegenle birbirini dik olarak kesiyorlarsa, yamuğunun yüksekliğinin uzunluğu, tabanlarının uzunluklarının geometrik ortalamasına eşittir.



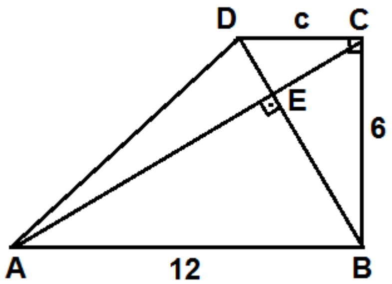
ABCD dik yamuk ve $[AC]\perp[BD] \Leftrightarrow h = \sqrt{ac}$

İspat: $[PD] // [AC]$ çizilirse yöndeş açılardan $m(P\widehat{D}B) = m(A\widehat{E}B) = 90^0$ olur. $[PA] // [DC]$ ve $[PD] // [AC]$ olduğundan $|PA| = |DC| = c$ dir. O halde DPB üçgeninde Öklid teoreminden,

$$h^2 = ac \text{ ise } h = \sqrt{ac}$$

bulunur.

Örnek: Köşegenleri dik kesişen bir dik yamukta alt taban uzunluğu 12 cm ve yamuğun dik olan kenar uzunluğu 6 cm veriliyor. O halde yamuğun üst taban uzunluğunu bulunuz.



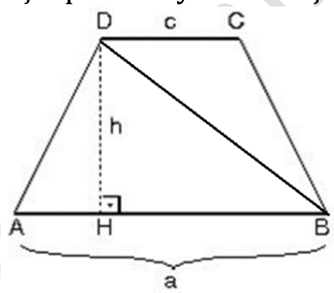
Çözüm: 10.17. teoreme göre,

$$h = \sqrt{ac}$$
$$6 = \sqrt{12c}$$
$$c = 3 \text{ cm}$$

olur.

YAMUKTA ALAN

10.18. Teorem: Bir yamuğun alanı, tabanlarının uzunlukları toplamı ile bu tabanlara ait yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.



ABCD yamuğunda [DC] // [AB] ve [DH]⊥[AB] ⟺ $A(ABCD) = \frac{(a+c)\cdot h}{2}$

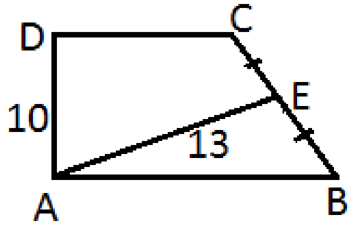
İspat: $A(ABCD) = A(\overset{\Delta}{ABD}) + A(\overset{\Delta}{DBC})$

$$A(ABCD) = \frac{a\cdot h}{2} + \frac{c\cdot h}{2} = \frac{(a+c)\cdot h}{2}$$

bulunur.

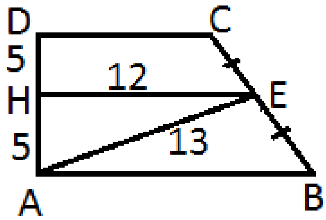
10.5. Sonuç: Bir ABCD yamuğunda yükseklik h, orta taban $|EF| = e$ ise, $A(ABCD) = e \cdot h$ dir.

Örnek:



$|BE| = |EC|$, $|AC| = 10$ cm, $|AE| = 13$ cm olduğuna göre ABCD yamuğunun alanı nedir?

Çözüm: [DC] // [HE] // [AB] olacak şekilde [HE] yi çizelim.

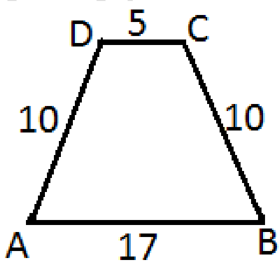


$|DH| = |HA| = 5$ cm olup 5–12–13 üçgeninden $|HE| = 12$ cm dir.

$$\frac{a+c}{2} = 12$$

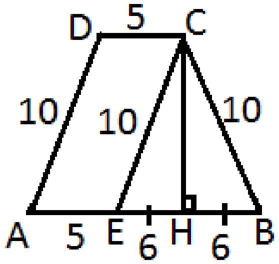
$$A(ABCD) = \frac{(a+c)\cdot h}{2} = 12 \cdot 10 = 120 \text{ cm}^2$$

Örnek:



$|AB| = 17$ cm, $|BC| = |AD| = 10$ cm ve $|DC| = 5$ cm olduğuna göre, ABCD yamuğunun alanı nedir?

Çözüm: [AD] // [CE] olacak şekilde [CE] çizelim.

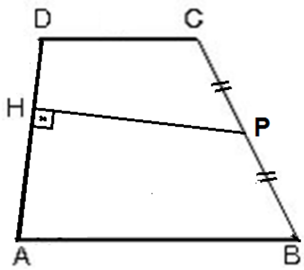


$|CE| = |AD| = 10$ cm, $|DC| = |AE| = 5$ cm, ECB ikizkenar üçgen $|EH| = |HB| = 6$ cm

3–4–5 kuralı gereği $h = |CH| = 8$ cm dir.

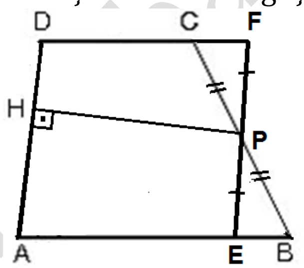
$$A(ABCD) = \frac{(a+c)\cdot h}{2} = \frac{(17+5)\cdot 8}{2} = 88 \text{ cm}^2$$

10.19. Teorem: Bir yamukta, bir yan kenarların karşı kenarın orta noktasına ait yükseklik ile o kenarın çarpımı, yamuğun alanını verir.



ABCD yamuk, $|BP| = |PC|$ ve $[PH] \perp [AD]$ ise $A(ABCD) = |PH| \cdot |AD|$

İspat: [EF] // [AD] olacak şekilde P den geçen [EF] yi çizelim.

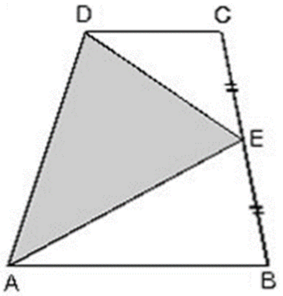


P orta nokta olduğundan, K.A.K. eşlik aksiyomuna göre $\overset{\triangle}{CPF} \cong \overset{\triangle}{BPE}$ ve $A(\overset{\triangle}{CPF}) = A(\overset{\triangle}{BPE})$ dir. O halde $A(ABCD) = A(AEFD)$ dir. AEFD paralelkenar olduğundan,

$$A(AEFD) = |PH| \cdot |AD|$$
$$A(ABCD) = |PH| \cdot |AD|$$

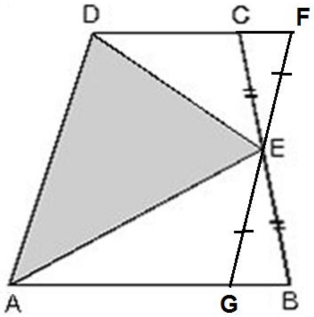
bulunur.

10.20. Teorem: Bir yamukta, bir yan kenarların karşı kenarın orta noktasının oluşturduğu alan, yamuğun alanının yarısına eşittir.



ABCD yamuk, |AP| = |PD| ise $A(A\overset{\Delta}{E}D) = \frac{A(ABCD)}{2}$

İspat: [AD] // [FG] olacak şekilde [FG] yi çizelim.

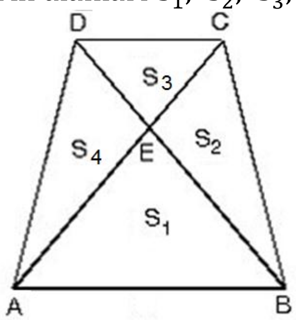


E orta nokta olduğundan, K.A.K. eşlik aksiyomuna göre $C\overset{\Delta}{E}F \cong B\overset{\Delta}{E}G$ ve $A(C\overset{\Delta}{E}F) = A(B\overset{\Delta}{E}G)$ dir. 9.15. Teoremine göre,

$$A(A\overset{\Delta}{E}D) = \frac{A(AGFD)}{2}$$
$$A(A\overset{\Delta}{E}D) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

dir.

10.21. Teorem: Bir yamuk köşegenler tarafından dört farklı düzlemsel bölgeye ayrılır. Bu düzlemlerin alanları s_1, s_2, s_3, s_4 olmak üzere;



a) $s_2 = s_4 = \sqrt{s_1 s_3}$
b) $A(ABCD) = (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_3})^2$

dir.

İspat: a) ABC ve ABD üçgenlerin tabanları ve yükseklikleri aynı olduğundan,

$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = A(\overset{\Delta}{ABD})$$
$$s_1 + s_2 = s_1 + s_4$$
$$s_2 = s_4$$

olur. Ayrıca ABD ve CBD üçgenlerinden,

$$\frac{|BE|}{|DE|} = \frac{s_1}{s_4} = \frac{s_2}{s_3}$$

$$s_2 \cdot s_4 = s_1 \cdot s_3$$

$$s_2^2 = s_1 \cdot s_3$$

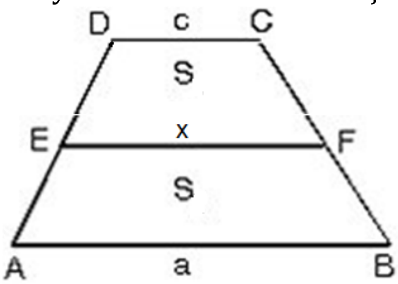
$$s_2 = \sqrt{s_1 s_3}$$

bulunur.

b) $A(ABCD) = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$
$= s_1 + \sqrt{s_1 s_3} + s_3 + \sqrt{s_1 s_3}$
$= s_1 + 2\sqrt{s_1 s_3} + s_3$
$= (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_3})^2$

elde edilir.

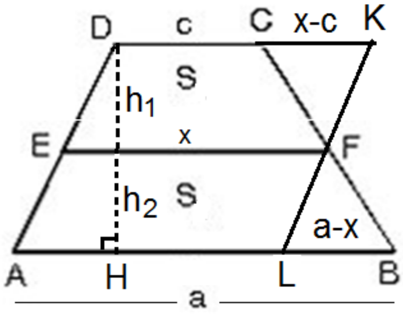
10.22. Teorem: Bir yamukta, tabanlarına paralel olarak çizilen [EF] doğrusu yamuğun alanları eşit olan iki parçaya ayırıyorsa; [EF] doğrusu tabanların karelerinin toplamının yarısının kareköküne eşittir.



ABCD yamuk, [DC] // [EF] // [AB], $|AB| = a$, $|DC| = c$,

$$A(ABCD) = A(EFCD) \Leftrightarrow |EF| = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$$

İspat: F notasından geçen, [KL] // [AD] olacak şekilde, [KL] yi çizelim. Yine D noktasından üst ve alt tabanlara h_1 ve h_2 dikmelerini çizelim.



$$|EF| = x \text{ ise } |KC| = x - c \text{ ve } |LB| = a - x$$

dir. Buna göre,

$$A(EFCD) = A(ABFE)$$

$$\frac{c+x}{2} h_1 = \frac{a+x}{2} h_2$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a+x}{c+x} \qquad (1)$$

dir. A.A.A. benzerlik teoreminden $C\overset{\Delta}{F}K \sim B\overset{\Delta}{F}L$ dir. Buradan,

$$\frac{|CK|}{|LB|} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{x-c}{a-x} = \frac{h_1}{h_2} \qquad (2)$$

olur. O halde (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\frac{x-c}{a-x} = \frac{a+x}{c+x}$$

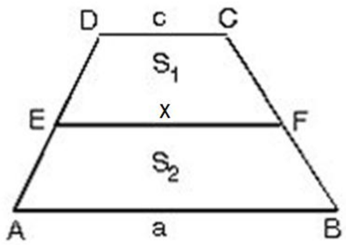
$$a^2 - x^2 = x^2 - c^2$$

$$a^2 + c^2 = 2x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$$

bulunur.

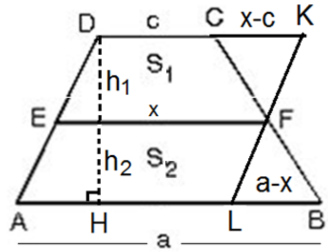
10.23. Teorem: Bir yamukta, tabanlarına paralel olarak çizilen herhangi bir [EF] doğrusunda, $|AB| = a$, $|DC| = c$ ve $|EF| = x$ olmak üzere,



$$\frac{A(EFCD)}{A(ABFE)} = \frac{x^2 - c^2}{a^2 - x^2}$$

dir.

İspat: F notasından geçen, [KL] // [AD] olacak şekilde, [KL] yi çizelim. Yine D noktasından üst ve alt tabanlara h_1 ve h_2 dikmelerini çizelim.



$$|EF| = x \text{ ise } |KC| = x - c \text{ ve } |LB| = a - x$$

dir. Buna göre,

$$A(EFCD) = \frac{c+x}{2} h_1, \quad A(ABFE) = \frac{a+x}{2} h_2$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{c+x}{a+x}\right)\left(\frac{h_1}{h_2}\right) \qquad (1)$$

dir. A.A.A. benzerlik teoreminden $\overset{\Delta}{CFK} \sim \overset{\Delta}{BFL}$ dir. Buradan,

$$\frac{|CK|}{|LB|} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{x-c}{a-x} = \frac{h_1}{h_2} \qquad (2)$$

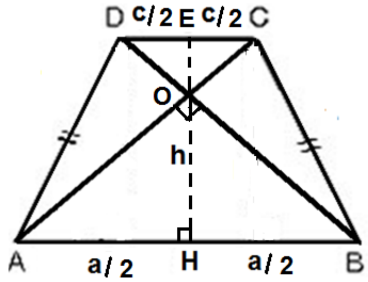
olur. O halde (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{c+x}{a+x}\right)\left(\frac{x-c}{a-x}\right)$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{x^2 - c^2}{a^2 - x^2}$$

bulunur.

10.24. Teorem: Bir ikizkenar yamukta, köşegenler birbirine dik kesiyor ise yamuğun tabanların toplamının yarısının karesine eşittir.



$[AC]\perp[BD]$, $[EH]\perp[AB]$, $|AB| = a$, $|DC| = c$ ve $|CH| = h$

$$\Leftrightarrow A(ABCD) = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

İspat: 10.16. Teoremde ikizkenar yamukta, köşegenler birbirine dik kesiyor ise yükseklik,

$$h = \frac{a+c}{2}$$

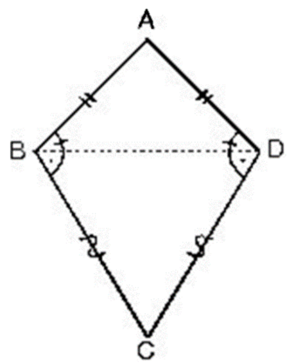
olduğu gösterildi. Buna göre,

$$A(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot h = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

olur.

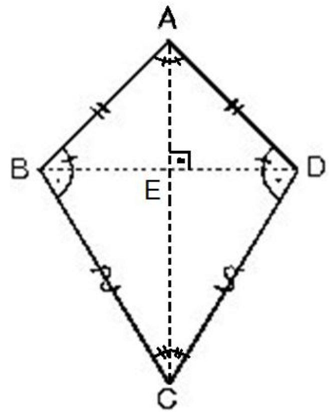
DELTOİD

10.5. Tanım: Tabanları eşit ve çakışık olan iki ikizkenar üçgenin oluşturduğu dörtgene deltoid denir.



ABCD Deltoid $\Leftrightarrow |AB| = |AD|$ ve $|CB| = |CD|$

Bir deltoidde şu özellikler olduğu açıktır;



10.25. Teorem: a) Deltoidde köşegenler birbirlerini dik olarak keser. $[AC] \perp [BD]$

b) Eş olmayan kenarların oluşturduğu köşegeni diğer köşegen iki eşit parçaya böler. $|BE| = |ED|$ dir.

c) Birbirlerini eş kenarlarının kesiştikleri köşeleri birleştiren bu köşelerdeki açıların açıortayıdır. [AC] açıortaydır. (Bu [AC] açıortay köşegeni aynı zamanda deltoidin simetri eksenidir.)

İspat: ABD ve CBD ikizkenar üçgen olduklarından, ikizkenar üçgenlerin tepe açısından çizilen açıortaylar aynı zamanda kenarortay ve yükseklik olduğundan,

a) $[AC] \perp [BD]$
b) $|DE| = |EB|$
c) b'den [AC] açıortaydır.

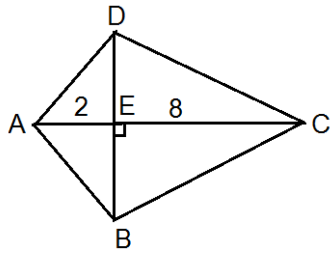
10.26. Teorem: Eş olmayan kenarların kesiştikleri köşelerdeki açıların ölçüleri birbirine eşittir. $m(A\hat{B}C) = m(A\hat{D}C)$

İspat: ABD ve BCD ikizkenar üçgenlerinin taban açıları kendi aralarında eşit olacağından;

$$m(A\hat{B}E) = m(A\hat{D}E) \text{ ve } m(C\hat{B}E) = m(C\hat{D}E)$$
$$m(A\hat{B}C) = m(A\hat{D}C)$$

bulunur.

Örnek: ABCD dörtgeni bir deltoiddir. $|AE| = 2$ cm, $|EC| = 8$ cm, $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^0$ ise deltoidin çevresini bulunuz.



Çözüm: $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180$ ise $m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180$ dir. 10.26. Teoreme göre, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 90$ dir. DAC dik üçgen olduğundan Öklid teoremi gereği,

$$|DE|^2 = |AE| \cdot |EC| = 2 \cdot 8 \text{ ise } |DE| = 4 \text{ cm}$$

olur. AED ve DEC üçgenlerinde Pisagor teoreminden,

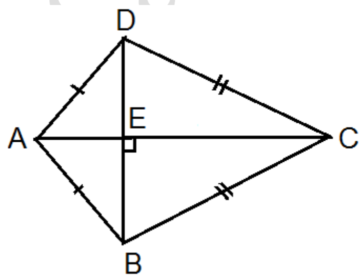
$$a^2 = 2^2 + 4^2 \text{ ise } a = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$b^2 = 8^2 + 4^2 \text{ ise } a = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$Ç(ABCD) = 2\left(2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\right) = 12\sqrt{5} \text{ cm}$$

bulunur.

10.27. Teorem: Bir deltoidin alanı, köşegenlerin uzunlukları çarpımının yaısıdır.



ABCD Deltoid, $|AC| = e$, $|BD| = f \Leftrightarrow A(ABCD) = \frac{e \cdot f}{2}$

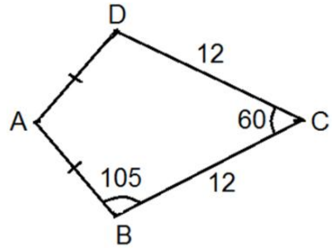
İspat: $|AC| = |AE| + |EC| = e$ olduğundan,

$$A(B\overset{\Delta}{A}D) = \frac{|BD||AE|}{2} \text{ ve } A(B\overset{\Delta}{C}D) = \frac{|BD||EC|}{2}$$

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(B\overset{\Delta}{A}D) + A(B\overset{\Delta}{C}D) \\ &= \frac{|BD||AE|}{2} + \frac{|BD||EC|}{2} \\ &= \frac{|BD|(|AE| + |EC|)}{2} \\ &= \frac{|BD||AC|}{2} \end{aligned}$$

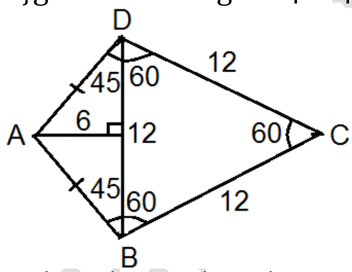
bulunur.

Örnek: Şekilde ABCD deltoiddir.



$m(\widehat{B}) = 105^0$, $m(\widehat{C}) = 60^0$, $|DC| = |BC| = 12$ cm ve $|AD| = |AB|$ olduğuna göre, ABCD deltoidinin alanını bulunuz.

Çözüm: [AC] ve [BD] köşegenlerini çizersek $m(\widehat{C}) = 60^0$ ve $|DC| = |BC|$ olduğundan BCD eşkenar üçgendir. Buna göre $|BD| = 12$ dir.



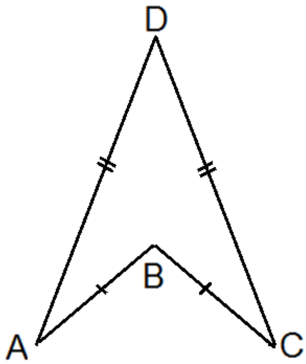
$m(\widehat{B}) = 105$ olduğundan $m(A\widehat{B}D) = m(A\widehat{D}B) = 45$ ve $m(\widehat{A}) = 90$ dir. Buna göre $|AE| = 6$ olacağından,

$$A(B\overset{\Delta}{A}D) = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ ve } A(B\overset{\Delta}{C}D) = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$$

$$A(ABCD) = 36 + 36\sqrt{3} \text{ cm}$$

bulunur.

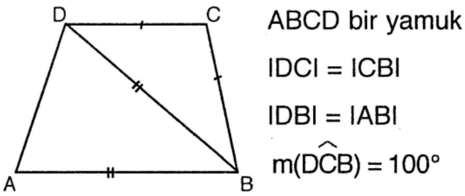
10.6. Tanım: Tabanları çakışık olan ve tepe açıları aynı yöne bakan iki ikizkenar üçgenin tabanları yok sayılırsa elde edilen dörtgene iç bükey deltoid denir.



ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Yamuk

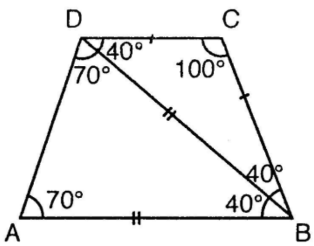
1.



Verilere göre $m(\widehat{A})$ kaç derecedir?

A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

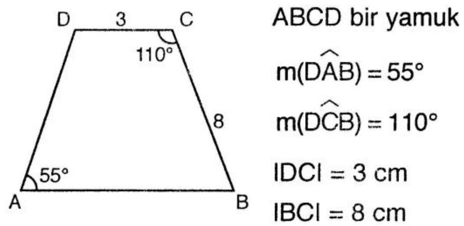
Çözüm: DCB ikizkenar üçgen olduğundan $m(C\widehat{D}B) = m(D\widehat{B}C) = 40$ dır.



ABC ikizkenar üçgen olduğundan $m(A\widehat{D}B) = m(D\widehat{A}B) = 70$ dır.

Cevap: C

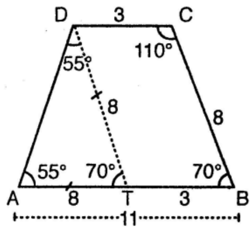
2.



Verilere göre $|AB|$ kaç cm'dir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: $[DT]//[BC]$ olacak şekilde $[DT]$ çizilirse DTBC bir paralelkenar olur.



$|DC| = |TB| = 3$ cm, $|BC| = |DT| = 8$ cm

$m(A\hat{B}C) = 180 - 110 = 70$

dir. Yöndeş açılardan $m(A\hat{T}D) = 70$ olur.

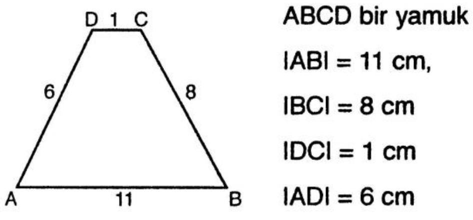
$m(A\hat{D}T) = 180 - 70 - 55 = 55$

$|AT| = |DT| = 8$ cm

$|AB| = 3 + 8 = 11$ cm

Cevap: D

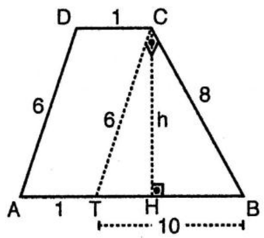
3.



Verilere göre A(ABCD) kaç cm^2 dir?

A) $\frac{140}{5}$ B) $\frac{144}{5}$ C) 30 D) 32 E) 34

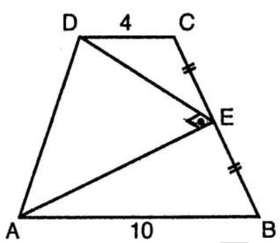
Çözüm: $[CT]//[AD]$ olacak şekilde $[CT]$ çizilirse ADCT bir paralelkenar olur.



$|DC| = |AT| = 1$ cm, $|AD| = |CT| = 6$ cm, $|BT| = 10$ cm
3–4–5 kuralı gereği $m(T\widehat{C}B) = 90$ dir.
CBT üçgeninin alanı $\frac{10 \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2}$ ise $h = \frac{24}{5}$ olur.
$A(ABCD) = \frac{(11+1) \cdot 24/5}{2} = \frac{144}{5}$ cm^2

Cevap: B

4.

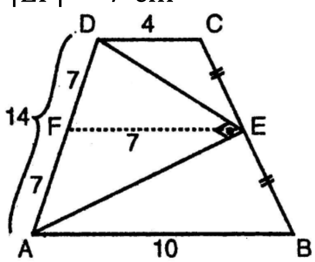


ABCD bir yamuk
$[DE] \perp [AE]$
$|AB| = 10$ cm
$|DC| = 4$ cm
$|CE| = |EB|$

Verilere göre $|AD|$ kaç cm'dir?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

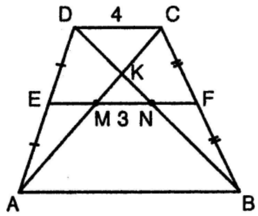
Çözüm: [DC]//[EF]//[AB] olacak şekilde [EF] doğrusunu çizelim.
$|EF| = \frac{4+10}{2} = 7$ cm
[DC]//[EF]//[AB] olduğundan muhteşem üçlü gereği;
$|AF| = |FD| = |EF| = 7$ cm



$|AD| = 14$ cm
olur.

Cevap: A

5.



ABCD bir yamuk

[BD] ∩ [AC] = { K }

[EF] orta taban

|MN| = 3 cm.

|DC| = 4 cm

Verilere göre |AB| kaç cm'dir?

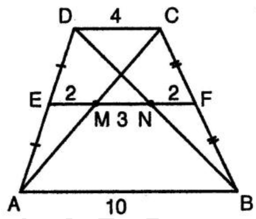
A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

Çözüm: $\overset{\triangle}{AEM} \sim \overset{\triangle}{ADC}$ olduğundan $\frac{|EM|}{4} = \frac{1}{2}$ olup $|EM| = |NF| = 2$ dir.

$|EF| = 4 + 2 + 2 = 7$ cm

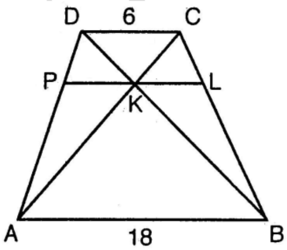
$\frac{4+|AB|}{2} = 7$

$|AB| = 10$ cm



Cevap: E

6.



ABCD bir yamuk

[PL] // [AB] // [DC]

[AC] ve [BD] köşegen

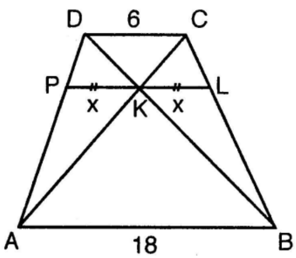
|AB| = 18 cm

|DC| = 6 cm

Verilere göre |PL| kaç cm'dir?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Çözüm:[DC]//[PL]//[AB] ise $|KP| = |KL| = x$ dir.

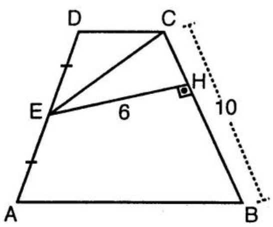


10.6 teorem gereği $x = \frac{6 \cdot 18}{6+18} = \frac{9}{2}$ dir.

$|PL| = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9$ cm

Cevap: D

7.



ABCD bir yamuk

$[EH] \perp [BC]$

$|DE| = |EA|$

$|AB| = 2|DC|$

$|EH| = 6$ cm

$|BC| = 10$ cm

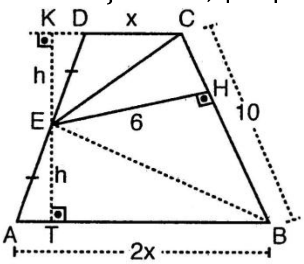
Verilere göre A(DEC) kaç cm^2 dir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: [EB] doğru parçasını çizelim.

$$A(BEC) = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$$
$$A(ABCD) = 2 \cdot 30 = 60$$
$$A(DEC) + A(AEB) = 30$$

Burada E noktasından yükseklikler çizilirse, $|KE| = |ET| = h$ olur.



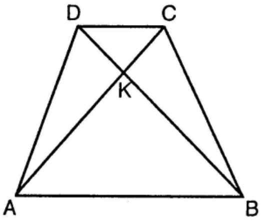
"Yükseklikleri aynı üçgenlerin tabanları oranı alanları oranına eşittir" teoremi gereği;

$$\frac{A(DEC)}{A(AEB)} = \frac{x}{2x}$$
$$A(DEC) = 10\ cm^2, \ A(AEB) = 20\ cm^2$$

dir.

Cevap: C

8.



ABCD bir yamuk

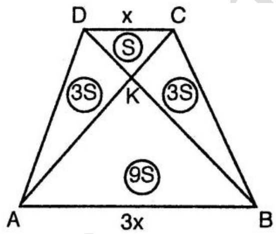
[AC] ve [BD] köşegen

$|AB| = 3|DC|$

Verilere göre $\dfrac{A(AKB)}{A(DKC)}$ kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

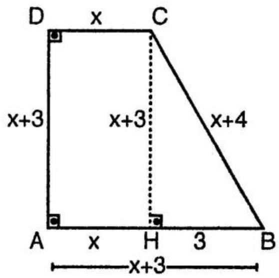
Çözüm: $|DC| = x$ alınırsa $|AB| = |3x|$ olur. $\overset{\triangle}{DKC} \sim \overset{\triangle}{AKB}$ olduğundan aşağıdaki şekil gibi alanlar oluşur.



$$\frac{A(AKB)}{A(DKC)} = \frac{9s}{s} = 9$$

Cevap: B

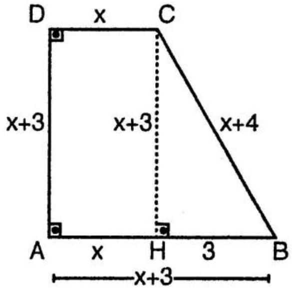
9.



Verilere göre x'in değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: [CH] dikmesini çizelim. Bu takdirde $|HB| = 3$ dür.



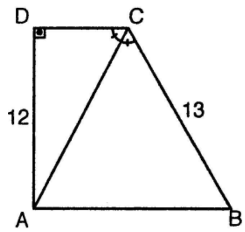
CHB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$|CB|^2 = |CH|^2 + |HB|^2$$
$$(x+4)^2 = (x+3)^2 + 3^2$$
$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 6x + 9 + 9$$
$$x = 1$$

olur.

Cevap: A

10.

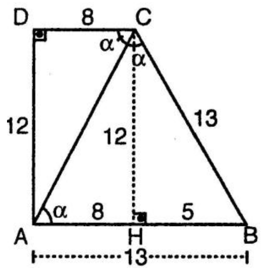


ABCD bir dik yamuk
[CA] açıortay
$|BC| = 13$ cm
$|AD| = 12$ cm

Verilere göre A(ABCD) kaç cm^2 dir?

A) 121 B) 122 C) 124 D) 125 E) 126

Çözüm: $m(D\hat{C}A) = m(A\hat{C}B) = \alpha$ alınırsa iç ters açılardan $m(B\hat{A}C) = \alpha$ olur. Buna göre $|CB| = |AB| = 13$ cm dir. [CH] dikmesini çizelim. $|CH| = 12$ cm dir.

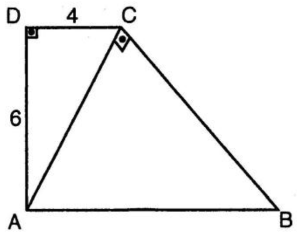


5–12–13 üçgeninden $|HB| = 5$ cm ve $|AH| = |DC| = 8$ cm olur.

$$A(ABCD) = \frac{(8+13)\cdot 12}{2} = 126 \text{ cm}^2$$

Cevap: E

11.



ABCD bir dik yamuk

$[AC] \perp [BC]$

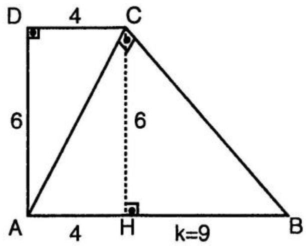
$|AD| = 6$ cm

$|DC| = 4$ cm

Verilere göre A(ABCD) kaç cm² dir?

A) 48 B) 49 C) 50 D) 51 E) 52

Çözüm: ABC dik üçgeninde [CH] dikmesini çizelim. $|CH| = 6$ cm ve $|DC| = |AH| = 4$ cm'dir. Öklid teoremi uygulanırsa;



$$|CH|^2 = |AH| \cdot |HB|$$
$$6^2 = 4 \cdot |HB|$$
$$|HB| = 9 \text{ cm}$$

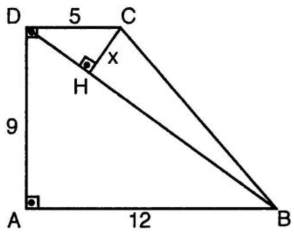
dir. Buna göre;

$$A(ABCD) = \frac{(4+13)\cdot 6}{2} = 51 \text{ cm}^2$$

olur.

Cevap: D

12.



ABCD bir dik yamuk

$[CH] \perp [DB]$

$|AD| = 9$ cm

$|DC| = 5$ cm

$|AB| = 12$ cm

Verilere göre x'in değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

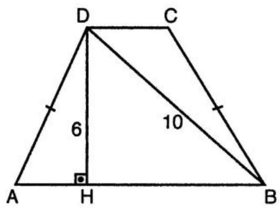
Çözüm: ABD dik üçgeninde 3–4–5 kuralı gereği $|DB| = 15$ cm dir.
$A(ABCD) = A(ABD) + A(DCB)$

$$\frac{(5+12)\cdot 9}{2} = \frac{12\cdot 9}{2} + \frac{x\cdot 15}{2}$$

$x = 3$ cm

Cevap: C

13.



ABCD bir ikizkenar yamuk

$[DH] \perp [AB]$

$|AD| = |BC|$

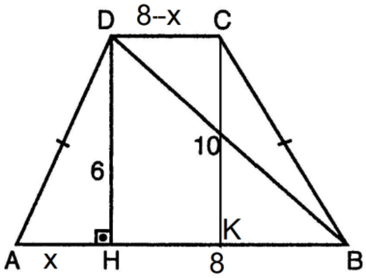
$|BD| = 10$ cm

$|DH| = 6$ cm

Verilere göre A(ABCD) kaç cm² dir?

A) 48 B) 49 C) 50 D) 51 E) 52

Çözüm: DHB dik üçgenin 3–4–5 kuralı gereği $|HB| = 8$ cm dir. [CK] dikmesini çizelim. $|CK| = 6$ cm'dir.
$|AH| = |KB| = x$ alınırsa, $|DC| = 8 - x$ olur.

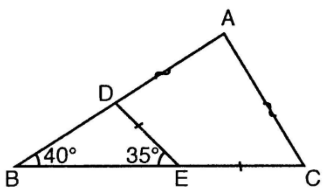


$$A(ABCD) = \frac{(8-x+8+x)\cdot 6}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

Cevap: A

Deltoid

14.



IADI = IACI

IDEI = IECI

$m(\widehat{B}) = 40°$

$m(\widehat{DEB}) = 35°$

Verilere göre $m(\widehat{A})$ kaç derecedir?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

Çözüm: "Bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir." teoremi gereği;

$$m(A\widehat{D}E) = m(D\widehat{B}E) + m(B\widehat{E}D) = 40 + 35 = 75^0$$

dir. Deltoid özelliğinden;

$$m(A\widehat{D}E) = m(A\widehat{C}E) = 75^0$$

olacağından ABC üçgeninden

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180$$

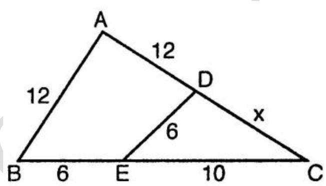
$$m(\widehat{A}) + 40 + 75 = 180$$

$$m(\widehat{A}) = 65^0$$

elde edilir.

Cevap: E

15.



ABC bir üçgen

ABED deltoid

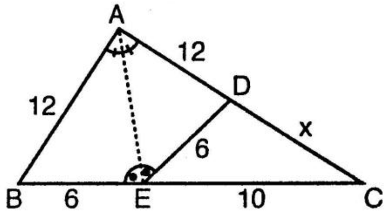
IABI = IADI = 12 cm

IBEI = IEDI = 6 cm

Verilere göre x'in değeri kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: ABED deltoid olduğundan [AE] doğru parçası açıortay olarak çizilir.



İç açıortay teoremi gereği;

$$\frac{12}{6} = \frac{12+x}{10}$$
$$|DC| = 8 \text{ cm}$$

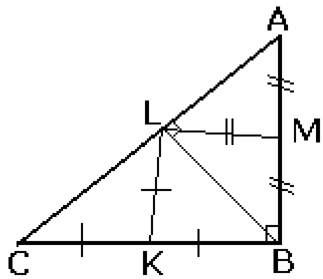
olur.

Cevap: B

16. Herhangi bir dik üçgende, dik açı olan B noktasından çizilen kenarortay L noktası olsun, L noktasından diğer kenarlara çizilen kenarortaylar M ve K noktası olsunlar. Oluşan KBML şekli aşağıdakilerden hangisidir.

A) Kare B) Deltoit C) Yamuk D) Paralelkenar E) Dikdörtgen

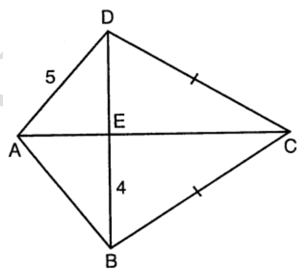
Çözüm: [BL] doğru parçasını |AC| kenarına dik olacak şekilde çizelim. "Muhteşem üçlü" teoremince aşağıdaki şekil çizilebilir.



Şu halde KBML dörtgeni deltoittir.

Cevap: B

17.



ABCD bir deltoid
[AC] ve [BD] köşegenler
|DC| = |CB|
|EC| = 2|AE|
|AD| = 5 cm
|BE| = 4 cm

Verilere göre A(ABCD) kaç cm^2 dir?

A) 32 B) 34 C) 35 D) 36 E) 38

Çözüm: $|AD| = |AB| = 5$ cm, $|DE| = |EB| = 4$ cm dir. 3–4–5 kuralı gereği $|AE| = 3$ cm'dir.

$|EC| = 2|AE| = 6$ cm
$|AC| = 6 + 3 = 9$ cm

$$A(ABCD) = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36\ cm^2$$

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.