# 12. BÖLÜM
# ÇEMBERDE UZUNLUK



## ÇEMBER ve YAYIN UZUNLUĞU

### 1. Çemberin Çevresi

Bütün çemberle de, çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranı sabit bir sayıyı verir. Bu sabit sayıya π olarak adlandırılır.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338332795\cdots$$

biçiminde bir sayıdır. Bu sayının sonucu günümüzde tam tespit edilememiştir. Dolayısıyla rasyonel veya irrasyonel olup olmayacağı bilinmemektedir. Ama çoğunlukla matematikçiler irrasyonel sayı olarak kabul ederler. Çokgenler ve dizilerin limitleri konusunda π sayısının hesaplanması izah edilecektir.

Yarıçapı r, çevresi Ç olan bir çemberde, $\pi = \frac{\text{Ç}}{2r}$ yani, $\text{Ç} = 2\pi r$

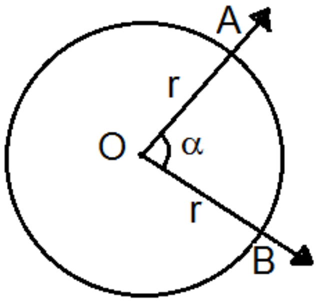
**Örnek:** Çapı 10 cm olan bir çemberin çevre uzunluğu nedir?

Çözüm: $r = \frac{10}{2} = 5$ cm olduğundan $\text{Ç} = 2\pi r = 20\pi$ cm

### 2. Yay Uzunluğu

Çemberin çevresinin uzunluğu $\text{Ç} = 2\pi r$ nin bir kısmının uzunluğuna yay uzunluğu adı verilir.

**12.1. Teorem:** Yarıçapı r olan çemberde $0^0 \leq \alpha \leq 360^0$ olmak üzere, α merkez açısının gördüğü $m(\overset{\frown}{AB})$ nin uzunluğu,




$$|AB| = \frac{2\pi r}{360}\alpha$$

dir.

İspat: Bir çemberin tamamını gören merkez açısının ölçüsü $360^0$ ve çemberin çevresi $2\pi r$ olduğuna göre,

$360^0$ lik merkez açı $\quad$ $2\pi r$ uzunluğundaki yayı görürse,
α derecelik merkez açı $\quad$ AB uzunluğundaki yayı görür.

$$|AB| = \frac{2\pi r}{360}\alpha$$

olur.

**Örnek:** Çapı 20 cm olan çemberde $72^0$ lik merkez açının gördüğü yayın uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $r = \frac{20}{2} = 10$ cm ise $|AB| = \frac{2\pi \cdot 10}{360} \cdot 72 = 4\pi$ cm

**Örnek:** Yarıçapı 12 cm olan bir çemberde α derecelik bir merkez açının gördüğü yayın uzunluğu $3\pi$ cm olduğuna göre α'nın değerini bulunuz.

Çözüm: Yayın uzunluğu$= \frac{2\pi r}{360}\alpha$

$$3\pi = \frac{2\pi \cdot 12}{360}\alpha$$

$$\alpha = 45^0$$

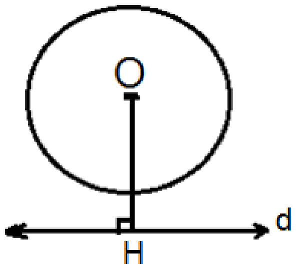
**DÜZLEMDE BİR DOĞRU İLE BİR ÇEMBERİN BİRBİRİNE GÖRE KONUMLARI**

Aynı düzlemde bulunan bir doğru ile bir çemberin birbirine göre konumları, bu doğrunun çember merkezine olan uzaklığına bağlıdır.

Düzlemde bir doğru ile çember üç farklı konumda bulunurlar:

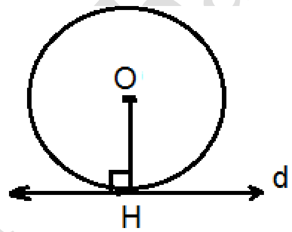
1. Doğru ile çember kesişmez
2. Doğru ile çembere teğet
3. Doğru ile çember iki noktada kesişir

**1.** Çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığı çemberin yarıçapından büyük ise doğru ile çember kesişmezler.



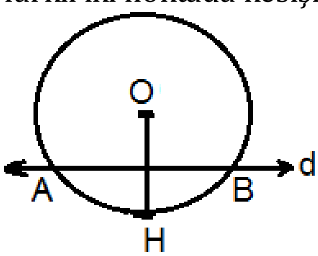

$[OH] \perp d$ ve $|OH| > r$ ise $d \cap Ç = \emptyset$ dir.

**2.** Çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığı çemberin yarıçapına eşit ise doğru çembere teğettir.




$[OH] \perp d$ ve $|OH| = r$ ise $d \cap Ç = \{H\}$ dir.

**3.** Çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığı çemberin yarıçapından küçük ise doğru ile çember farklı iki noktada kesişirler.




$[OH] \perp d$ ve $|OH| < r$ ise $d \cap Ç = \{A, B\}$ dir.

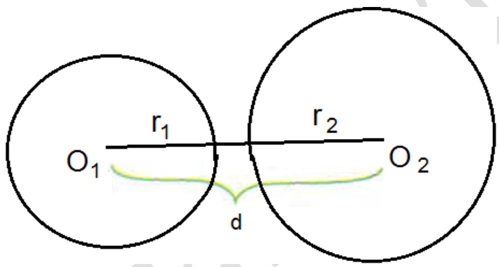
**DÜZLEMDE İKİ ÇEMBERİN BİRBİRİNE GÖRE KONUMLARI**

Aynı düzlem içinde bulunan iki çemberin birbirlerine göre konumları, yarıçaplarına ve merkezleri arasındaki uzaklığa bağlıdır. Buna göre iki çembe-rin durumu üç farklı şekilde incelenir. Bunlar;

1. Ayrık çemberler
2. Teğet çemberler
3. Kesişen çemberler

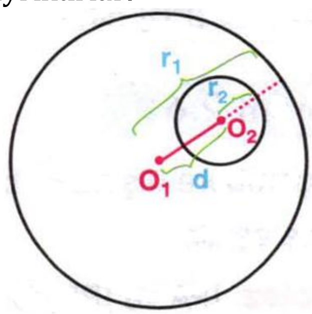
**12.1. Tanım:** İki çemberde hiçbir ortak noktaları olmayan çemberlere ayrık çemberler denir.

a) $O_1$ ve $O_2$ merkezli iki çember birbirlerinin dış bölgelerinde ve merkezleri arasındaki uzaklık yarıçaplarının toplamından büyük ise bu çemberler dıştan ayrıktırlar.




$|O_1O_2| = d$, $r_1$ ve $r_2$ yarıçap ise $d > r_1 + r_2$ ve $Ç_1 \cap Ç_2 = \varnothing$

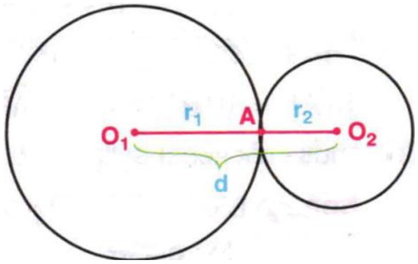
b) Çemberlerden biri diğerinin iç bölgesinde olan ve ortak noktaları olmayan çemberlere içten ayrıktırlar.




$|O_1O_2| = d$, $r_1$ ve $r_2$ yarıçap ise $d < r_1 - r_2$ ve $Ç_1 \cap Ç_2 = \varnothing$

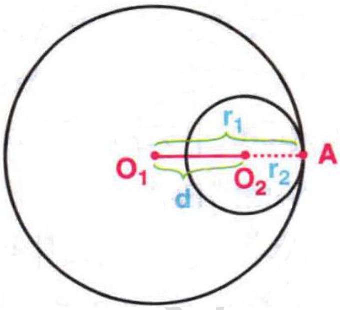
**12.2. Tanım:** İki çemberin yalnız bir ortak noktası olan ve birbirine teğet çemberler olan çemberlere teğet çemberler denir.

a) Yalnız bir ortak noktası olan ve birbirinin dış bölgesinde olan çemberlere dıştan teğet çemberler denir.




$|O_1O_2| = d$, $r_1$ ve $r_2$ yarıçap ise $d = r_1 + r_2$ ve $Ç_1 \cap Ç_2 = \{A\}$

b) Yalnız bir ortak noktası olan ve küçüğü büyüğünün iç bölgesinde olan çemberlere içten teğet çemberler denir.

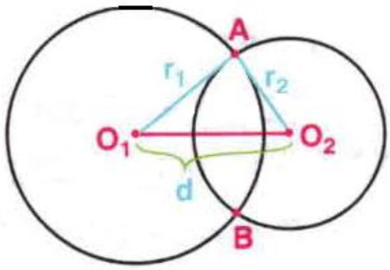



$|O_1O_2| = d$, $r_1$ ve $r_2$ yarıçap ise $d < r_1 - r_2$ ve $Ç_1 \cap Ç_2 = \{A\}$

**12.1. Sonuç:** Birbirine dıştan veya içten teğet iki çemberin ortak noktası, çemberlerin merkezlerini birleştiren doğru üzerindedir.

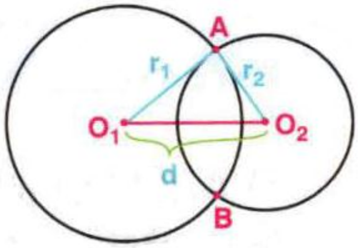
**12.2. Sonuç:** Birbirine dıştan veya içten teğet iki çemberden, birbirine kesişme noktasında çizilen teğet doğru, diğer çembere de aynı noktada teğettir.

**12.3. Tanım:** İki çemberin yalnız iki ortak noktası olan çemberlere kesişen çemberler denir.




$|O_1O_2| = d$, $r_1$ ve $r_2$ yarıçap ise $|r_1 + r_2| < d < r_1 + r_2$ ve $Ç_1 \cap Ç_2 = \{A, B\}$

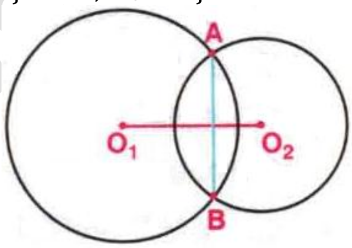
**13.4. Tanım:** Kesişen iki çemberin yarıçapları çemberin kesişme noktalarında birbirlerine dik ise bu çemberlere, dik kesişen çemberler denir. A ve B kesişme noktaları ise,



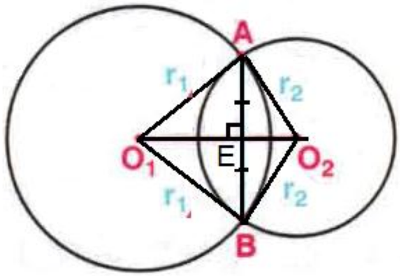

$[O_1A] \perp [O_2A]$ ve $r_1^2 + r_2^2 = |O_1O_2|^2$

dir.

**12.5. Tanım:** Kesişen iki çemberin kesişme noktaları A ve B olsun. A ile B arasındaki AB doğru parçasına, bu iki çemberin ortak kirişi denir.




**12.2. Teorem:** Herhangi bir çember farklı iki noktada kesişiyor ise merkezlerin belirttiği doğru parçası çemberlerin ortak kirişini dik ortalar.



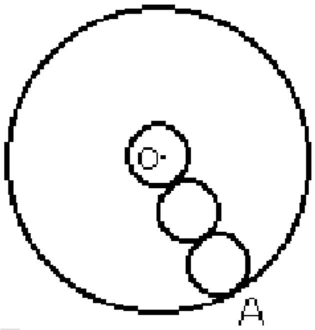

İki çember A ve B noktalarında kesişiyor $\Leftrightarrow [AB] \perp |O_1O_2|$

İspat: $|O_1A| = |O_1B| = r_1$ ve $|O_2A| = |O_2B| = r_2$ olduğundan $AO_1BO_2$ dörtgeni deltoiddir. Deltoidde eş kenarların ortak noktalarından geçen köşegen diğerini dik ortaladığından,

$$[AB] \perp |O_1O_2| \text{ ve } |AE| = |EB|$$

dir.

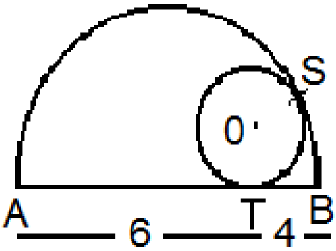
**Örnek:** Şekilde, yarıçapı $r_1$ olan merkezli çemberin içine, yarıçap uzunlukları $r_2$ olan, birbirine dıştan teğet üç eş çizilmiştir.




OA doğrusu üç değme noktasından geçtiğine göre, $\dfrac{r_1}{r_2}$ oranı kaçtır?

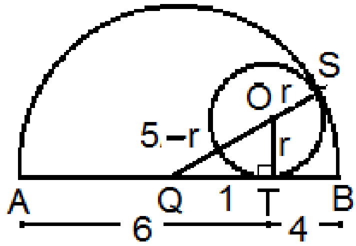
Çözüm: $|OA| = r_1 = 5r$ olduğundan $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{5}{1} = 5$ dir.

**Örnek:** Şekildeki O merkezli çember [AB] ye T de, AB yayı S de teğettir.



[AB] çaplı yarım çember $|AT| = 6$ cm ve $|TB| = 4$ cm Buna göre, bu çemberin yarıçapı kaç birimdir?

Çözüm: $|AB| = 6 + 4 = 10$ cm ise büyük çemberin yarıçapı $|QS| = 5$ dir. $|QT| = 5 - 4 = 1$ olur. Buna göre,



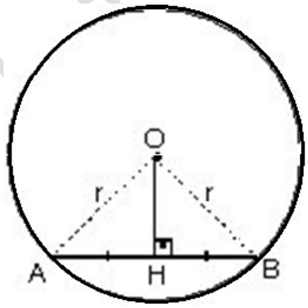

$|SO| = r$ alınırsa $|QO| = 5 - r$ olacağından AOT üçgeninde Pisagor teoremi kullanılırsa,

$$|QO|^2 = |QT|^2 + |TO|^2$$
$$(5 - r)^2 = 1^2 + r^2$$
$$r = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

olur.

## KİRİŞ ÖZELLİKLERİ

**12.3. Teorem:** Bir çemberde, merkezden kirişe inilen dikme kirişi ortalar.



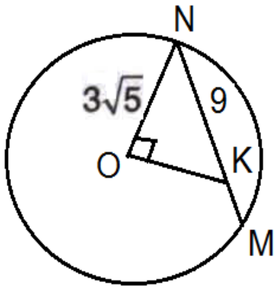

$Ç(O, r)$ çemberinde, $[OH] \perp [AB] \Leftrightarrow |AH| = |HB|$

İspat: $|OA| = |OB| = r$ olduğundan, OAB üçgeni ikizkenar ve $m(O\widehat{A}B) = m(O\widehat{B}A)$ olur. $m(O\widehat{A}B) = m(O\widehat{B}A)$ ve $m(O\widehat{H}A) = m(O\widehat{H}B)$ olduğundan $m(A\widehat{O}H) = m(B\widehat{O}H)$ dir. Buradan $O\overset{\triangle}{A}H \cong O\overset{\triangle}{B}H$ yani A.K.A. eşlik teoremi olur. Eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olduğundan $[AH] \cong [HB]$ veya $|AH| = |HB|$ bulunur.

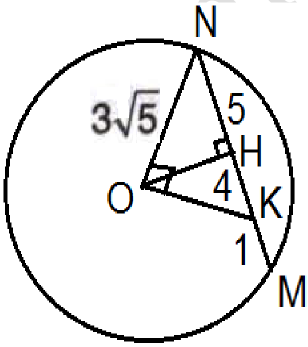
**12.3. Sonuç:** Bir çemberde, kirişin orta dikmesi çemberin merkezinden geçer.

**12.4. Sonuç:** Bir çemberde, kirişin orta noktasını çemberin merkezine birleştiren doğru, kirişe diktir.

**Örnek:** O merkezli çemberde $|ON| = 3\sqrt{5}$ cm, $|KN| = 9$ cm ve $[ON] \perp [OK]$ olduğuna göre, $|KM|$ yi bulunuz.



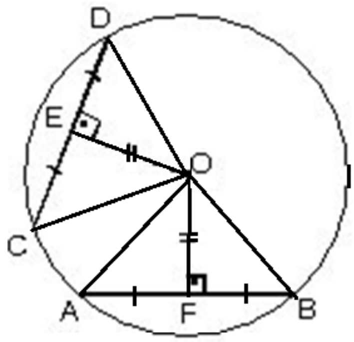

Çözüm: $[OH] \perp [MN]$ olacak şekilde $[OH]$ dikmesini çizersek, $|NH| = |HM|$ olur. OKN üçgeninde Öklid teoreminden,




$$|ON|^2 = |NH| \cdot |KN|$$
$$(3\sqrt{5})^2 = |NH| \cdot 9$$
$$|NH| = 5 \text{ cm}$$

dir. O halde $|NK| = 9 - 5 = 4$ cm ve $|KM| = 5 - 4 = 1$ cm bulunur.

**12.4. Teorem:** Bir çemberde, uzunlukları eşit olan kirişlerin merkeze uzaklıkları eşittir.

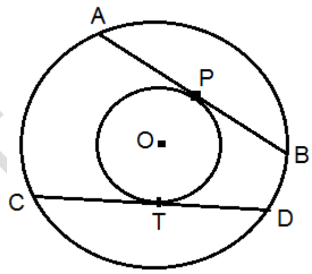



Ç(O, r) çemberinde,
|AB| = |CD|, [OF] ⊥ [AB] ve [OE] ⊥ [CD] ⟺ |OE| = |OF|

İspat: |AO| = |CO|, |BO| = |DO| ve |AB| = |CD| olduğundan, K.K.K. eşlik teoremine göre $A\overset{\triangle}{O}B \cong C\overset{\triangle}{O}D$ olur. Eş üçgenlerde karşılıklı yükseklikler eş olacağından, [OE] ≅ [OF] veya |OE| = |OF| bulunur.

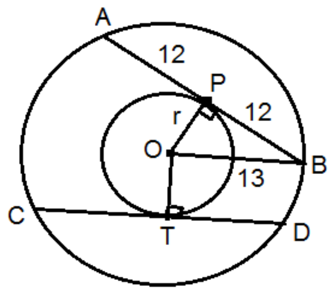
**12.5. Sonuç:** Bir çemberde, merkezden eşit uzunluktaki kirişlerin uzaklıkları eşittir.

**Örnek:**




Şekilde O merkezli iki çember veriliyor. [AB] ve [CD] küçük çembere P ve T noktalarında teğettir. Büyük çemberin yarıçapı 13 cm, $|AB| = 5x - 1$ ve $|CD| = 4x + 4$ olduğuna göre, küçük çemberin yarıçapını bulunuz.

Çözüm: Yarıçap değme noktasında teğete dik olduğundan, [OP] ⊥ [AB] ve [OT] ⊥ [CD] dır. |OP| = |OT| olduğundan |AB| = |CD| olur. Buradan,

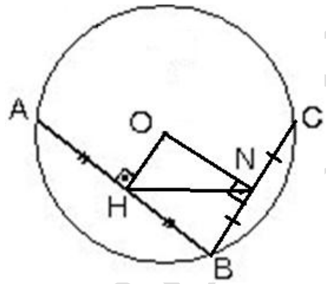



$5x-1=4x+4$ ise $x=4$

$|AB|=5\cdot 5-1=24$ cm

dir. O halde, POB dik üçgeninde $5-12-13$ üçgeninden $r=5$ cm bulunur.

**12.5. Teorem:** Bir çemberde, var olan iki kirişten büyük olan kiriş merkeze daha yakındır.




$|AB|>|CD|$, $[OH]\perp[AB]$ ve $[ON]\perp[BC] \Leftrightarrow |OH|<|ON|$

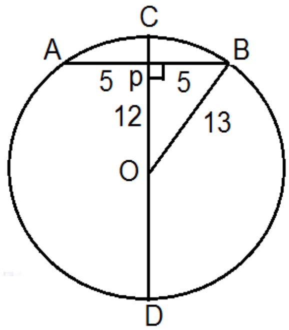
İspat: $|HB|=\frac{|AB|}{2}$ ve $|BN|=\frac{|BC|}{2}$ ise $|HB|>|BN|$

Bir üçgende büyük kenar karşısında büyük açı olacağından, HBN üçgeninde, $m(N\hat{H}B)<m(H\hat{N}B)$ olur. $m(O\hat{H}B)=90$ ve $m(O\hat{A}B)=m(O\hat{N}B)=90$ olduğundan $m(O\hat{N}H)<m(O\hat{H}N)$ olur. O halde, OHN üçgeninde $|OH|<|ON|$ bulunur.

**12.6. Sonuç:** Bir çemberin iki kirişi merkezden aynı uzaklıkta değil ise, merkeze yakın olan kişinin uzunluğu diğer kirişin uzunluğundan daha büyüktür.

**Örnek:** O merkezli ve 13 m yarıçaplı bir çemberin içinde merkezden 12 cm uzaklıkta bir P noktası alınıyor. P noktasından geçen en büyük kirişin uzunlukları toplamını bulunuz.

Çözüm: P noktasından geçen en büyük kiriş [CD] çapıdır. En kısa kiriş ise [CD] çapına P noktasında dik olan [AB] kirişidir.



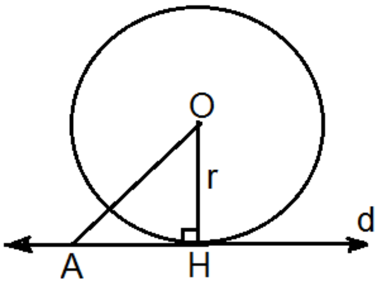

Yarıçapı $r = 13$ cm ise $|CD| = 26$ cm'dir. $|OP| = 12$ cm ve $|OB| = 13$ cm ise POB dik üçgeninde,

$$|OB|^2 = |OP|^2 + |PB|^2$$
$$|PB|^2 = 13^2 - 12^2$$
$$|PB| = 5 \text{ cm}$$

dir. O halde, $|AB| + |CD| = 10 + 26 = 36\ cm$ bulunur.

**TEĞETİN ÖZELLİKLERİ**

**12.6. Teorem:** Çemberin herhangi bir teğeti değme noktasında yarıçapa diktir.




d doğrusu H noktasında O merkezli çembere teğet $\Leftrightarrow$ $[OH] \perp d$

İspat: [OH] yarıçapının d doğrusuna dik olmadığını kabul edelim. d doğrusuna O merkezinden [OA] dikmesini çizersek $|OA| < |OH|$ olur. H noktası çemberin üzerinde, A noktası da çemberin dışında olduğundan $|OA| > |OH|$ dur. Bu durum ise çelişkidir. O halde,

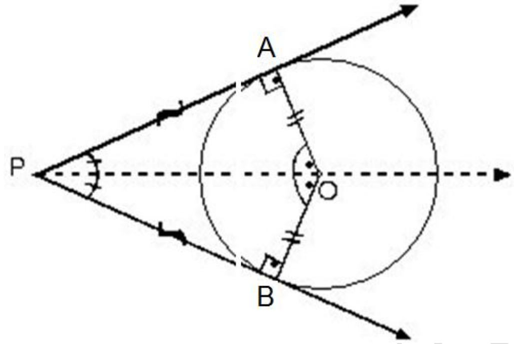
$$|OA| = |OH| \text{ ve } [OH] \perp d$$

olur.

**12.7. Sonuç:** Bir çemberde, değme noktasında teğet çıkarılan dikme, çemberin merkezinden geçer.

**12.8. Sonuç:** Çemberde bir çapın uç noktalarından geçen teğetler birbirine paraleldir.

**12.7. Teorem:** Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçaların uzunlukları birbirine eşittir.

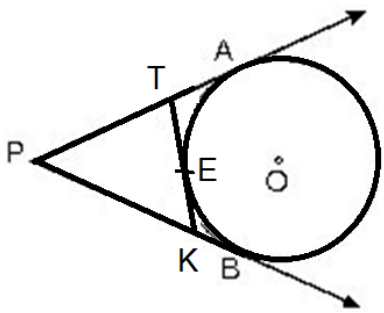



[PA ve [PB, O merkezli çembere A ve B noktalarında teğet $\Leftrightarrow$ $|PA| = |PB|$

İspat: Teğet değme noktasında yarıçapa dik olduğundan $[OA] \perp [PA$ ve $[OB] \perp [PB$ dir. $|OA| = |OB| = r$, $m(O\widehat{A}P) = m(O\widehat{B}P) = 90^0$ ve $|OP|$ ortak kenar olduğundan, hipotenüs ile dik kenar eşitliğinden $P\overset{\Delta}{O}A \equiv P\overset{\Delta}{O}B$ olur. Eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olacağından $|PA| = |PB|$ bulunur.

**12.9. Sonuç:** Bir çemberde dışındaki bir noktadan çizilen teğetlerin oluşturduğu açının açıortayı çemberin merkezinden geçer.

**Örnek:** [PA ve [PB, O merkezli çembere A ve B noktalarında teğettir. [TK] ise çembere E noktasında teğettir. TKP üçgenin çevresi 24 cm olduğuna göre, $|PA|$ doğrusunu bulunuz.

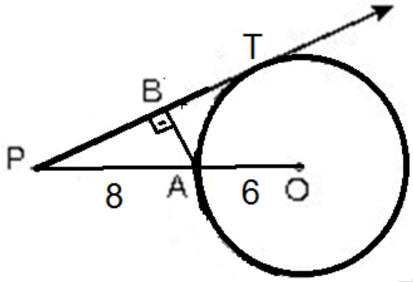



Çözüm: $|PA| = |PB| = a$ ve $|AT| = |TE| = x$ ise $|PT| = a - x$ ve $|KB| = |KE| = y$ ise $|PK| = a - y$ olur. Buna göre,

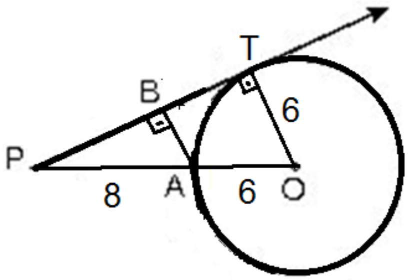
$$Ç(T\overset{\Delta}{P}K) = a - x + a - y + x + y = 24$$
$$a = 12 \text{ cm}$$

bulunur.

**Örnek:** [PT, O merkezli çembere T noktasında teğettir. $[AB] \perp [PT$, $|PA| = 8$ cm ve $|AO| = 6$ cm olduğuna göre, $|AB|$ doğrsunu bulunuz.




Çözüm: $[OT] \perp [PT$ ve $|OT| = |AO| = 6\ cm$ dir.




$[AB] // [OT]$ ise A. A. A. benzerlik teoreminden, $B\overset{\Delta}{P}A \sim T\overset{\Delta}{P}O$ olur. O halde,

$$\frac{|PA|}{|PO|} = \frac{|AB|}{|OT|}$$
$$\frac{8}{14} = \frac{|AB|}{6}$$
$$|AB| = \frac{24}{7} \text{ cm}$$

olur.

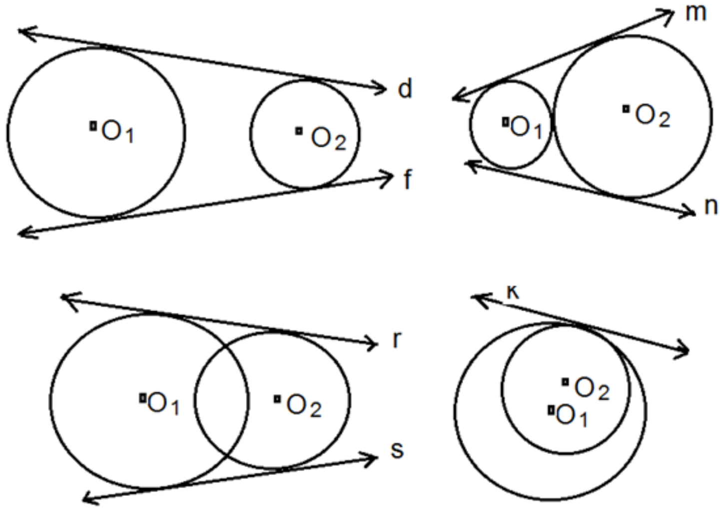


**İKİ ÇEMBERİN ORTAK TEĞETLERİ**

**12.6. Tanım:** Aynı düzlemde bulunan iki çembere de teğet olan doğruya, bu çemberlerin ortak teğeti denir. Ortak teğetler, ortak dış teğet ve ortak iç teğet olmak üzere iki gruba ayrılır.

**1. Ortak Dış Teğetler**

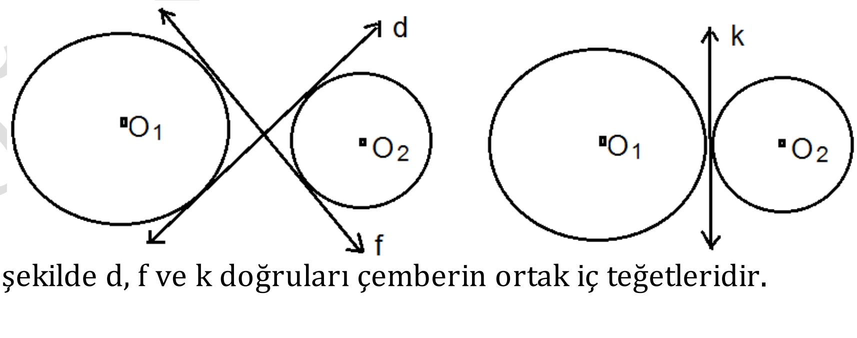
**12.7. Tanım:** Çemberlerin her ikisi de ortak teğete göre aynı yarı düzlemde ise bu ortak teğete, iki çemberin ortak dış teğeti denir. Ortak dış teğetlerin değme noktaları arasında kalan doğru parçalarına bu iki çemberin ortak dış teğet parçası denir.




Üstteki şekilde d, f, m, n, s, r ve k doğruları çemberin ortak dış teğetleridir.

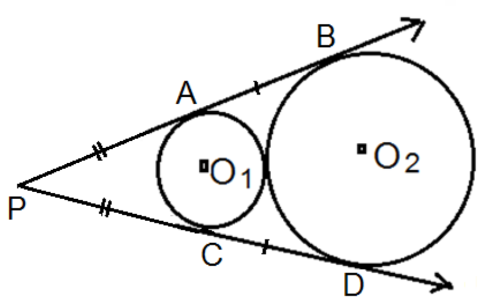
## 2. Ortak İç Teğetler

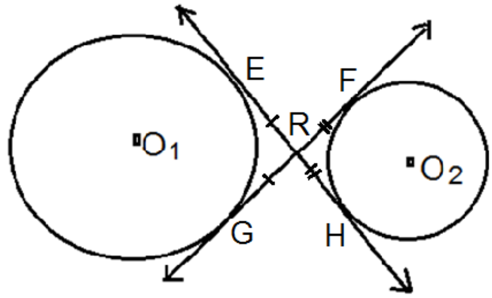
**12.8. Tanım:** Çemberler ortak teğete göre, farklı yarı düzlemlerde ise bu ortak teğete, iki çemberin ortak iç teğeti denir. Ortak iç teğetlerin, değme noktaları arasında kalan doğru parçalarına bu iki çemberin ortak iç teğet parçası denir.




Üstteki şekilde d, f ve k doğruları çemberin ortak iç teğetleridir.

**12.8. Teorem:** İki çemberin,
a) Ortak dış teğet parçalarının uzunlukları eşittir.
b) Ortak iç teğet parçalarının uzunlukları eşittir.






[PB ve [PD, $O_1$ ve $O_2$ merkezli çemberin ortak dış teğetleri $\Leftrightarrow$ $|AB| = |CD|$
[EH] ve [GF], $O_1$ ve $O_2$ merkezli çemberin ortak iç teğetleri $\Leftrightarrow$ $|EH| = |GF|$

İspat: a) Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan,

$$|PB| = |PD| \text{ ve } |PA| = |PC|$$

olur. Bu eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$|PB| - |PA| = |PD| - |PC|$$

$$|AB| = |CD|$$

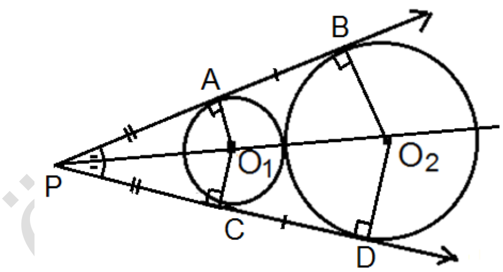
bulunur.

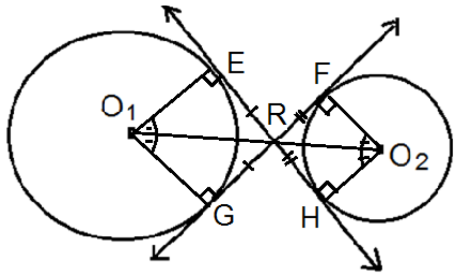
b) Bu önermenin doğruluğu okuyucuya bırakılmıştır.

**12.9. Teorem:** İki çemberin,

a) Ortak dış teğetlerinin kesim noktası ile merkezleri aynı doğru üzerindedir.

b) Ortak iç teğetlerinin kesim noktası ile merkezleri aynı doğru üzerindedir.






[PB ve [PD, $O_1$ ve $O_2$ merkezli çemberin ortak dış teğetleri $\Leftrightarrow$ P, $O_1$ ve $O_2$ noktaları doğrusal

[EH] ve [GF], $O_1$ ve $O_2$ merkezli çemberin ortak iç teğetleri $\Leftrightarrow$ $O_1$, R ve $O_2$ noktaları doğrusal

İspat: a) $[O_1A] \perp [PB$, $[O_1C] \perp [PD$ ve $|O_1A| = |O_1C|$

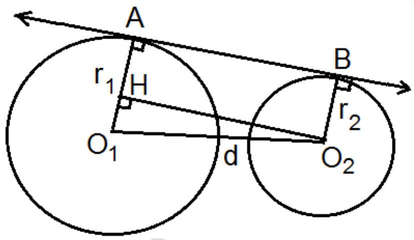
$[O_2B] \perp [PB$, $[O_2D] \perp [PD$ ve $|O_2B| = |O_2D|$

Açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktadan açının kenarlarına çizilen dikmelerin uzunlukları birbirine eşit olduğundan, $[PO_2$, BPD açısının açıortayıdır. O halde, P, $O_1$ ve $O_2$ noktaları doğrusal noktalardır.

b) $[O_1E] \perp [EH$, $[O_1G] \perp [GF$ ve $|O_1E| = |O_1G|$
$[O_2H] \perp [EH$, $[O_2F] \perp [GF$ ve $|O_2H| = |O_2F|$
Açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktadan açının kenarlarına çizilen dikmelerin uzunlukları birbirine eşit olduğundan, $[RO_1]$, ERG açısının, $[RO_2]$, FRH açısının açıortayıdır. O halde, ERG ile FRH açıları ters açılar olduğundan, $O_1$, R ve $O_2$ noktaları doğrusal noktalardır.

## İKİ ÇEMBERİN ORTAK DIŞ TEĞET PARÇASININ UZUNLUĞU

**12.10. Teorem:** Yarıçap uzunlukları $r_1$ ve $r_2$ olan iki çemberin ortak dış teğet parçasının uzunluğu |AB| ve çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklık d ise,




$$|AB| = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

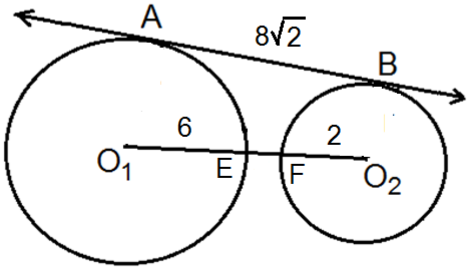
dir.

İspat: $[O_2H]$ // AB olacak şekilde $[O_2H]$ nu çizersek, $HO_1O_2$ dik üçgen ve $|O_2H| = |AB|$ olur. Buna göre, $|O_1H| = r_1 - r_2$ dir. Pisagor teoreminden,

$$|O_1O_2|^2 = |O_1H|^2 + |HO_2|^2$$
$$d^2 = (r_1 - r_2)^2 + |AB|^2$$
$$|AB| = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

olur.

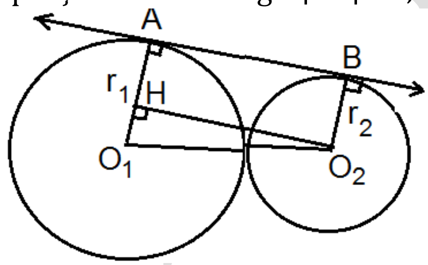
**Örnek:** AB doğrusu $O_1$ ve $O_2$ merkezli çemberlerin ortak dış teğetidir. $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 2$ cm ve $|AB| = 8\sqrt{2}$ olduğuna göre |EF| doğrusunu bulunuz.




Çözüm: $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 2$ cm, $|O_1O_2| = |EF| + 6 + 2\ cm$

$$|AB| = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$
$$8\sqrt{2} = \sqrt{(|EF| + 8)^2 - (6 - 2)^2}$$
$$128 = (|EF| + 8)^2 - 16$$
$$144 = (|EF| + 8)^2$$
$$|EF| = 4 \text{ cm}$$

**12.11. Teorem:** Yarıçap uzunlukları $r_1$ ve $r_2$ olan iki çember birbirlerine dıştan teğet ise teğet parçasının uzunluğu $|AB|$ ise,




$$|AB| = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

dir.

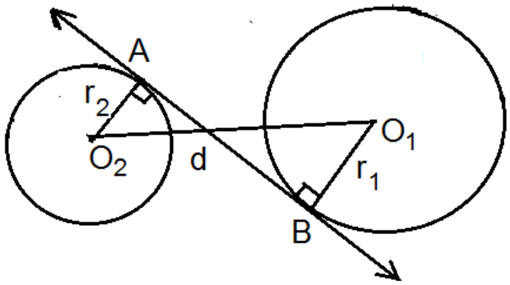
İspat: $[O_2H]$ // AB olacak şekilde $[O_2H]$ doğru parçasını çizersek, $HO_1O_2$ dik üçgen ve $|O_2H| = |AB|$ olur. Buna göre $|O_1H| = r_1 - r_2$ ve $|O_1O_2| = r_1 + r_2$ dir. Pisagor teoreminden,

$$|O_1O_2|^2 = |O_1H|^2 + |HO_2|^2$$
$$(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + |AB|^2$$
$$r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 + |AB|^2$$
$$|AB| = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

olur.

## İKİ ÇEMBERİN ORTAK İÇ TEĞET PARÇASININ UZUNLUĞU

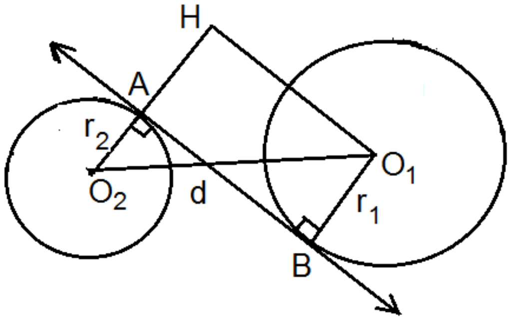
**12.12. Teorem:** Yarıçap uzunlukları $r_1$ ve $r_2$ olan iki çemberin ortak iç teğet parçasının uzunluğu $|AB|$ ve çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklık d ise,




$$|AB| = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

dir.

İspat: $[O_2A]$ nun uzantısı, AB doğrusuna paralel $[O_1H]$ nu H noktasında kessin. $ABO_1H$ dikdörtgeni oluşur.




Buna göre,

$$|O_1H| = |AB|, |O_1B| = |AH| = r_2 \text{ ve } |O_2H| = r_1 + r_2$$

olduğuna göre $O_1O_2H$ dik üçgende Pisagor teoreminden,

$$|O_1O_2|^2 = |O_1H|^2 + |HO_2|^2$$

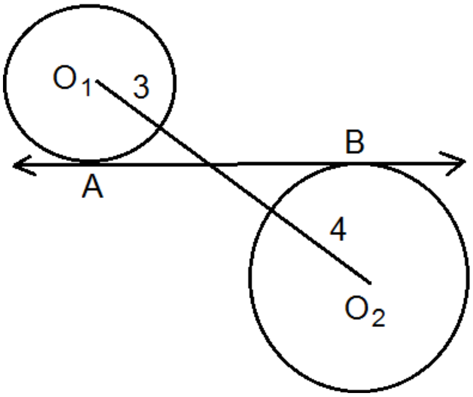
$$d^2 = |AB|^2 + (r_1 + r_2)^2$$

$$|AB| = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

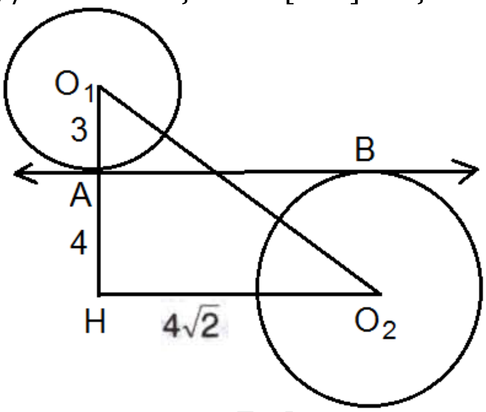
bulunur.



**Örnek:** AB doğrusu $O_1$ ve $O_2$ merkezli çemberlere A ve B noktalarında teğettir. $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm ve $|AB| = 4\sqrt{2}$ olduğuna göre $|O_1O_2|$ doğrusunu bulunuz.




Çözüm: $[O_2H]$ // AB olacak şekilde $[O_2H]$ nu çizelim.




$[O_1H] \perp [O_2H]$, $|O_2H| = |AB| = 4\sqrt{2}$, $|O_2B| = |AH| = 4$ cm, $|O_1H| = 7$ cm'dir.

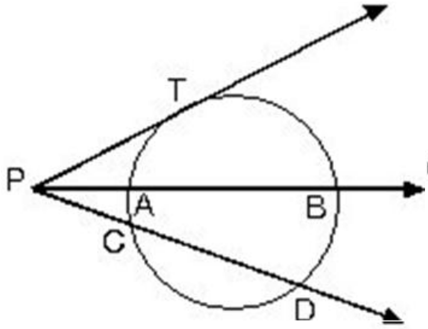
$|O_1O_2| = x$ cm olsun. $O_1\overset{\Delta}{H}O_2$ dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

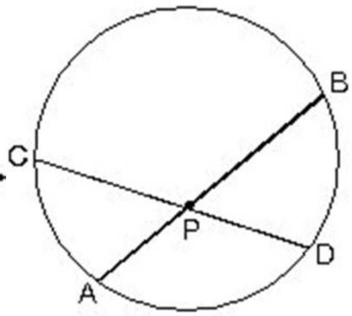
$$|O_1O_2|^2 = |O_1H|^2 + |HO_2|^2$$
$$x^2 = 7^2 + (4\sqrt{2})^2$$
$$x = 9 \text{ cm}$$

bulunur.

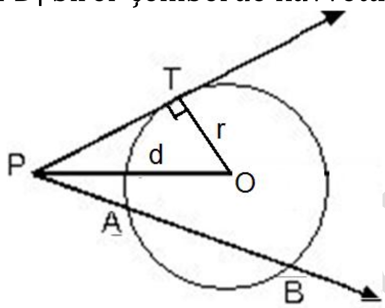
## ÇEMBERDE KUVVET

**12.8. Tanım:** Düzlemde bir çember ve sabit bir P noktası alalım. P noktasından geçen ve çemberi kesen sonsuz sayıda kesen vardır ve bu kesenlerin çemberi kestiği noktalarla P noktası arasındaki uzaklıkların çarpımı sabittir. Bu sabit çarpıma P noktasının çembere göre kuvveti denir.



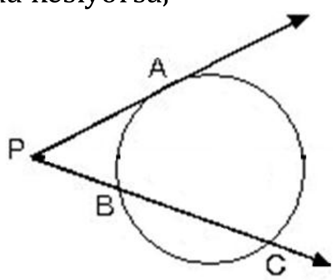

$|PA| \cdot |PB|$, $|PC| \cdot |PD|$ birer çemberde kuvvettir




P noktasının, O merkezli çemberin merkezine uzaklığı $|OP| = d$ ve çemberin yarıçap uzunluğu r ise $k = d^2 - r^2$ nin değeri P noktasının çembere göre kuvvetine eşittir.

1. $d^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow d = r$ olacağından P noktası çemberin üzerindedir.
2. $d^2 - r^2 > 0 \Leftrightarrow d > r$ olacağından P noktası çemberin dışındadır.
3. $d^2 - r^2 < 0 \Leftrightarrow d < r$ olacağından P noktası çemberin içindedir.

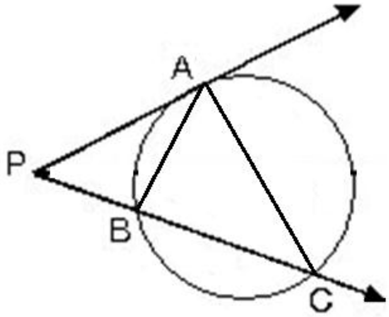
**12.13. Teorem:** Aynı düzlem üzerinde bir çember ve dışında bir nokta P olsun. PA doğrusu çembere A noktasında teğet ve P den geçen bir kesen çemberi B ve C noktalarında kesiyorsa,




$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$$

dir.

İspat: [AB] ve [AC] doğru parçasını çizelim.

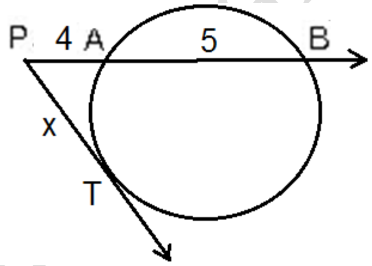



Aynı yayı gören çevre açı ile teğet kiriş açı ölçüleri eşit olduğundan $m(P\widehat{A}B) = m(P\widehat{C}A)$ dir. PBA ve PAC üçgenlerinde ortak açı $m(\widehat{P})$ olduğundan A.A.A. benzerlik teoremine göre, $P\overset{\Delta}{B}A \sim P\overset{\Delta}{A}C$ olur.

$$\frac{|PB|}{|PA|} = \frac{|PA|}{|PC|}$$
$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$$

bulunur.

**Örnek:** [PT çember T noktasında teğettir. $|PA| = 4$ cm ve $|AB| = 5$ cm olduğuna göre, $|PT| = x$'i bulunuz.

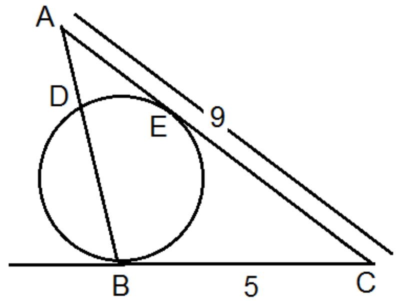



Çözüm: 12.13. Teoremden,

$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$$
$$|PA|^2 = (4 + 5) \cdot 4$$
$$|PA| = 6 \text{ cm}$$

olur.

**Örnek:** [CB ve [AC çembere sırasıyla B ve E noktalarında teğettir. A, D, B doğrusal noktalardır.



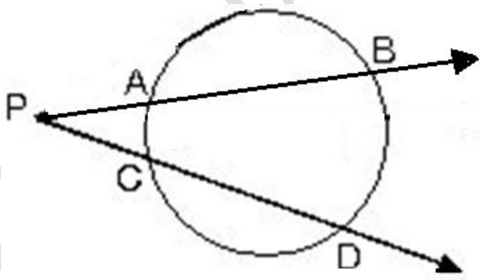

$|BC| = 5$ cm, $|AC| = 9$ cm ve $|AB| = 8$ cm olduğuna göre, $|DB|$ doğrusunu bulunuz.

Çözüm: $|BC| = |EC| = 5$ cm ise $|AE| = 9 - 5 = 4$ cm'dir. $|DB| = x$ alınırsa $|AD| = 8 - x$ olur. Bir noktanın çembere göre kuvvetinden,

$$|AE|^2 = |AD| \cdot |AB|$$
$$4^2 = (8 - x) \cdot x$$
$$x = 6 \text{ cm}$$

bulunur.

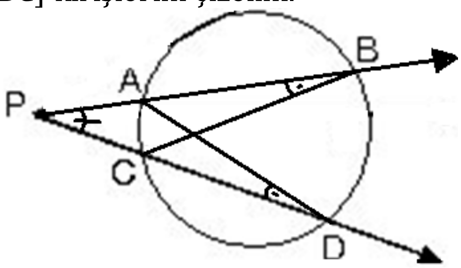
**12.14. Teorem:** Bir çember ve dışındaki herhangi bir P noktası aynı düzlem üzerinde verilsin. P den geçen herhangi iki kesen çemberi A ve B, C ve D noktalarında kesiyorsa,




$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

dur.

İspat: [AD] ve [BC] kirişlerini çizelim.



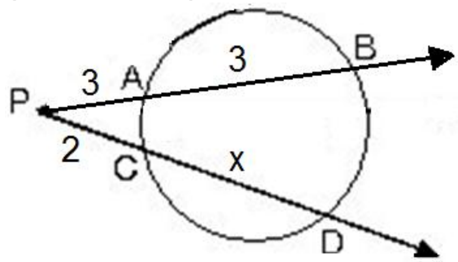
Aynı yayı gören çevre açı ile teğet kiriş açı ölçüleri eşit olduğundan $m(A\hat{D}P) = m(C\hat{B}P)$ dir. PAD ve PCB üçgenlerinde ortak açı $m(\hat{P})$ olduğundan A.A.A. benzerlik teoremine göre, $P\overset{\Delta}{A}D \sim P\overset{\Delta}{C}B$ olur.

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

bulunur.

**Örnek:** P, A ve B, C ve D noktaları doğrusaldır. $|PA| = |AB| = 3$ cm ve $|PC| = 2$ cm olduğuna göre $|CD|$ doğrusunu bulunuz.




Çözüm: 12.14. Teoremden,

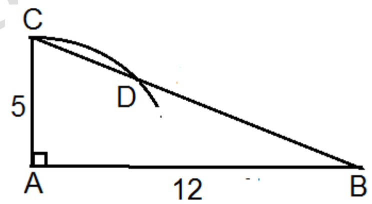
$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

$$3 \cdot (3 + 3) = 2 \cdot (2 + x)$$

$$x = 7 \text{ xm}$$

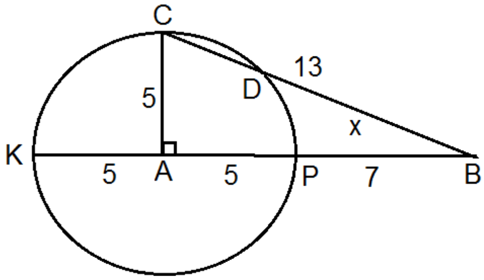
olur.

**Örnek:** ABC dik üçgeninde, A merkezli çember yayı [BC] kenarını C ve E de kesmektedir.




$|AC| = 5$ cm ve $|AB| = 12$ cm olduğuna göre $|BE|$ doğrusunu bulunuz.

Çözüm: Çemberi tamamlayalım. [AB] doğru parçasının uzantısı, çemberi K ve P noktalarında kessin.

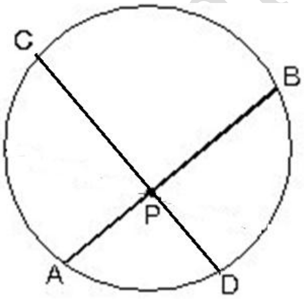



O halde $|AC| = |AP| = |AK| = 5$ cm ve $|PB| = 7$ cm olur. ABC üçgeninde $5 - 12 - 13$ üçgeninden $|BC| = 13$ cm olur. O halde B noktasının çember kuvvetinden,

$$|BD| \cdot |BC| = |BP| \cdot |BK|$$
$$x \cdot 13 = 7 \cdot 17$$
$$x = \frac{119}{13} \text{ cm}$$

bulunur.

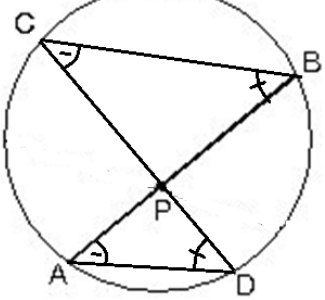
**12.15. Teorem:** Aynı düzlem üzerinde bir çember ve iç bölgesinde bir P noktası verilsin. P den geçen herhangi iki kesen çemberi A ve B, C ve D noktalarında kesiyorsa,




$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

dur.

İspat: [AD] ve [BC] nı çizelim.

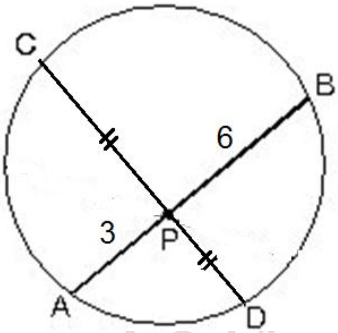


Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşit olduğundan $m(P\widehat{A}D) = m(P\widehat{C}B)$ ve $m(P\widehat{D}A) = m(P\widehat{B}C)$ dir. PAD ve PCB üçgenlerinde ortak açı $m(\widehat{P})$ olduğundan A.A.A. benzerlik teoremine göre, $\overset{\triangle}{PAD} \sim \overset{\triangle}{PCB}$ olur.

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$
$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

bulunur.

**Örnek:** [AB] ve [CD] kirişleri P noktasında kesişmektedir. $|PC| = |PD|$, $|PA| = 3$ cm ve $|PB| = 6$ cm olduğuna göre, $|PC|$ doğrusunu bulunuz.

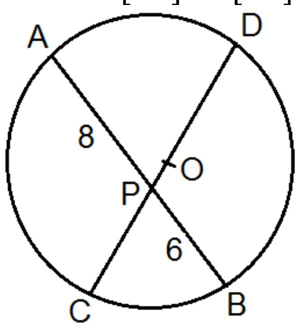



Çözüm: 12.15. Teoremden,

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$
$$3 \cdot 6 = x \cdot x$$
$$x = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

olur.

**Örnek:** O merkezli çemberde [AB] ile [CD] nin kesişme noktası P dir.



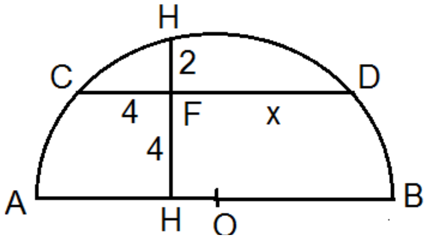

$|OP| = 1$ cm, $|PA| = 8$ cm ve $|PB| = 6$ cm olduğuna göre, çemberin yarıçapını bulunuz.

Çözüm: $|PC| = r - 1$ cm ve $|PD| = r + 1$ cm olur. O halde bir noktanın çembere göre kuvvetinden,

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$
$$8 \cdot 6 = (r-1) \cdot (r+1)$$
$$r = 7 \text{ cm}$$

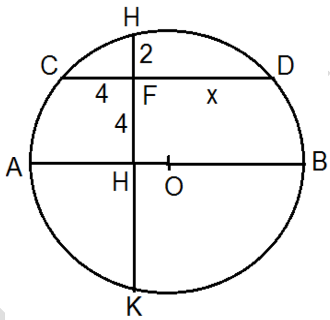
olur.

**Örnek:** O merkezli yarım çemberde $[CD] \perp [EH]$ ve $[AB] \perp [EH]$ dir.




$|EF| = 8$ cm, $|CF| = |FH| = 4$ cm olduğuna göre, $|FD|$ doğrusunu bulunuz.

Çözüm: Çemberi tamamlayalım. [EH] doğru parçasının uzantı yayı K noktasında kessin.

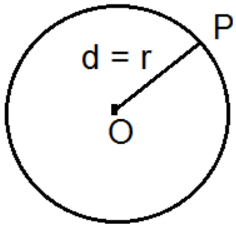



$|EH| = |HK| = 6$ cm olur. O halde, F noktasının çembere göre kuvvetinden,

$$|FC| \cdot |FD| = |FE| \cdot |FK|$$
$$4 \cdot x = 2 \cdot 10$$
$$x = 5 \text{ cm}$$

bulunur.

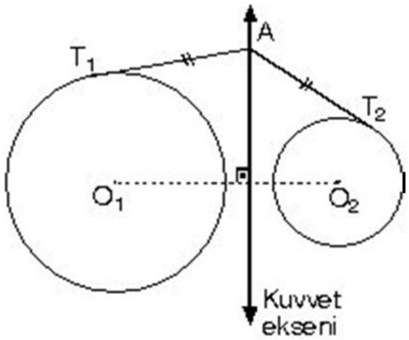
**12.16. Teorem:** Çember üzerindeki bir noktanın çembere göre kuvveti sıfırdır.



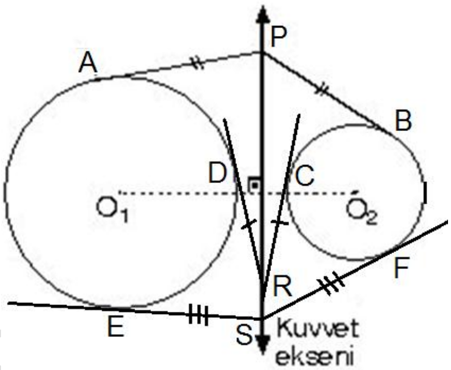

İspat: $k = d^2 - r^2$ ve $d = r$ olduğunda $k = 0$ bulunur.

## KUVVET EKSENİ

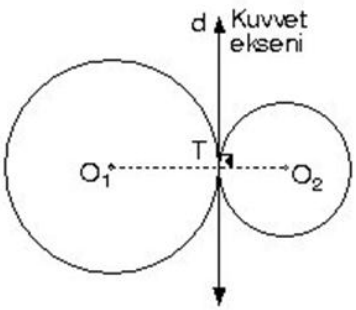
**12.9. Tanım:** Düzlemde iki çembere göre, aynı kuvvette olan noktaların kümesi, bu iki çemberin kuvvet ekseni denir.

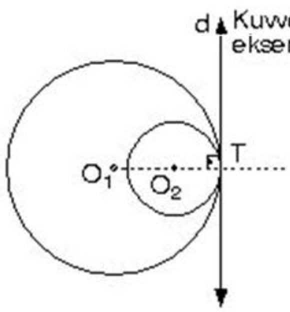



Şekilde $T_1$ ve $T_2$ teğetlerin değme noktalarıdır $|AT_1| = |AT_2|$ olduğundan A, kuvvet ekseni üzerindedir. Kuvvet ekseni üzerinde alınan her A noktası çember çizilen teğetler üzerindedir. Bu teğetler çemberde kuvvet oluştururlar.

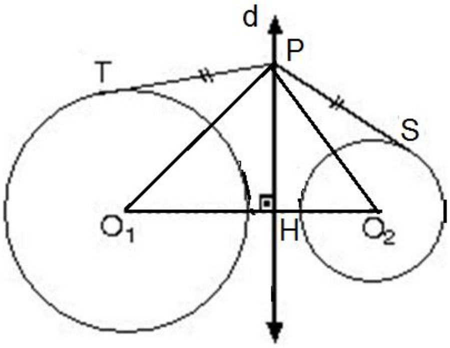



Kuvvet ekseni üzerinde rastgele alınan P,R ve S noktalarının iki çember üzerindeki teğetler arasında $|AP| = |PB|$, $|CR| = |RD|$, $|ES| = |SF|$ eşitlikleri vardır.



**12.17. Teorem:** İki çemberin merkezlerini birleştiren doğru, bu çemberin kuvvet kesenine diktir.




İspat: Yarıçapları $r_1$ ve $r_2$ olan $Ç(O_1, r_1)$ ile $Ç(O_2, r_2)$ çemberleri dışında alınan bir P noktasından, çembere çizilen teğet parçalarının uzunlukları $|PT| = |PS|$ dir. P ile $O_1$ ve O noktalarını birleştirelim ve $|PO_1| = d_1$, $|PO_2| = d_2$ diyelim. $|PT| = |PS|$ ve P noktasının her iki çembere göre de kuvveti aynı olacağından,

$|PT|^2 = d_1^2 - r_1^2$ ve $|PS|^2 = d_2^2 - r_2^2$

$r_2^2 - r_1^2 = d_2^2 - d_1^2$

olduğu görülür. $[PH] \perp [O_1O_2]$ çizilirse, H noktasının,

$Ç(O_1, r_1)$ çemberine göre kuvveti, $|HO_1|^2 - r_1^2$ (1)

$Ç(O_2, r_2)$ çemberine göre kuvveti, $|HO_2|^2 - r_2^2$ (2)

$PO_1H$ ve $PHO_2$ dik üçgenlerinde,

$d_1^2 = |PH|^2 + |HO_1|^2$ ve $d_2^2 = |PH|^2 + |HO_2|^2$

olduğundan

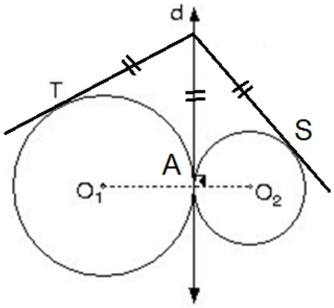
$d_2^2 - d_1^2 = |HO_2|^2 - |HO_1|^2$

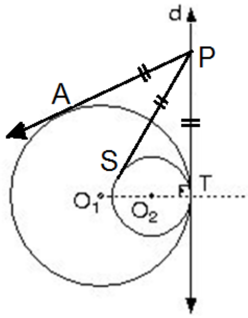
$r_2^2 - r_1^2 = |HO_2|^2 - |HO_1|^2$

$|HO_1|^2 - r_1^2 = |HO_2|^2 - r_2^2$

olur. Bu sonuç (1) ve (2) eşitliğinde de görüldüğü gibi H noktasının çembere göre kuvvetidir. O halde, H noktası kuvvet ekseni üzerinde ve kuvvet ekseni de merkezleri birleştiren doğru diktir. Yani $[PH] \perp [O_1O_2]$ veya $d \perp [O_1O_2]$ bulunur.

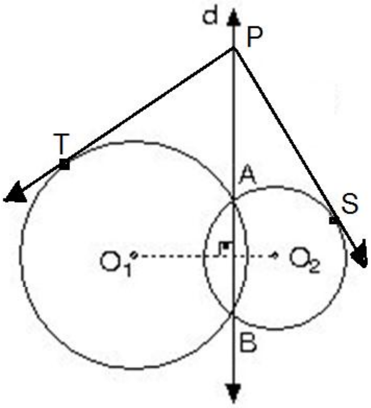
**12.10. Sonuç:** Dıştan teğet veya içten teğet çemberlerin kuvvet ekseni, çemberlerin ortak teğetidir.



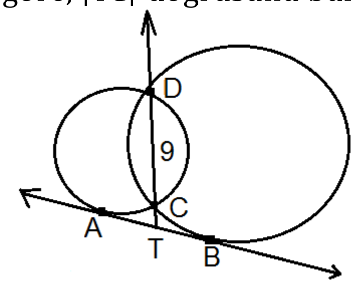

$|PT| = |PS| = |PA|$ $|PT| = |PS| = |PA|$
$d \perp [O_1O_2]$ $d \perp [TO_1]$

**12.11. Sonuç:** Kesişen iki çemberin kuvvet ekseni, ortak kirişi taşıyan doğrudur.




$|PT|^2 = |PA| \cdot |PB|$ ve $|PS|^2 = |PA| \cdot |PB|$ ise $|PT| = |PS|$

**Örnek:** Şekilde AB doğrusu, iki çemberin ortak teğetidir. $|AB| = 12$ cm ve $|CD| = 9$ cm olduğuna göre, $|TC|$ doğrusunu bulunuz.



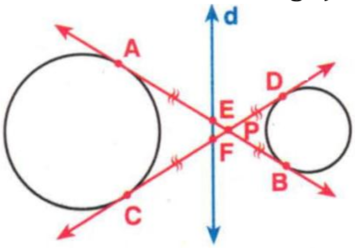

Çözüm: $|TA|^2 = |TC| \cdot |TD|$ ve $|TB|^2 = |TC| \cdot |TD|$ olduğundan $|TA| = |TB| = \frac{12}{2} = 6$ cm olur. $|TC| = x$ olsun.

$$|TA|^2 = |TC| \cdot |TD|$$
$$6^2 = x \cdot (x + 9)$$
$$x^2 + 9x - 36 = 0$$

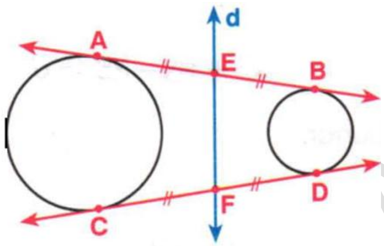
$$x = 6$$

bulunur.

**12.12. Sonuç:** Kesişmeyen iki çemberin kuvvet ekseni, ortak iç ve dış parçalarının orta noktalarından geçer.




d kuvvet ekseni
$|AE| = |EB| = |CF| = |FD|$



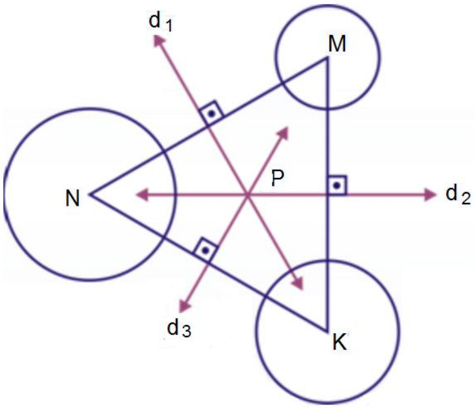

d kuvvet ekseni
$|AE| = |EB| = |CF| = |FD|$

**12.13. Sonuç:** Kuvvet ekseni, yarıçapı küçük olan çemberin merkezine daha yakındır.

**KUVVET MERKEZİ**

**12.10. Tanım:** Düzlemde merkezleri aynı doğru üzerinde olmayan üç çembere göre kuvvetleri eşit olan noktaya, bu çemberlerin kuvvet merkezi denir.

**12.18. Teorem:** Düzlemde merkezleri aynı doğru üzerinde olmayan, üç çembere göre kuvvetleri eşit olan noktaya, bu çemberlerin kuvvet merkezi denir.



İspat: Bu çemberin konumları yandaki gibidir.

$d_1$: M ve N merkezli çemberlerin kuvvet ekseni,
$d_2$: M ve K merkezli çemberlerin kuvvet ekseni,
$d_3$: N ve K merkezli çemberlerin kuvvet ekseni olsun.

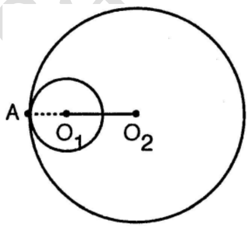
Şimdi bu kuvvet ekseninin P gibi bir noktada kesiştiğini gösterelim. M, N ve K noktaları doğrusal olmadıklarından $d_1$ ve $d_2$, P gibi bir noktada kesişirler. Bu P noktası $d_1$ ve $d_2$ kuvvet eksenleri üzerinde olduğundan M, N ve K merkezli çemberlere göre kuvvetleri eşittir. P noktasını üç çembere göre kuvveti eşit olduğundan P noktası $d_3$ kuvvet eksenlerinin kesim noktası, üç çembere de eşit kuvvetteki P noktasıdır.

## ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

**1.** Çevrelerinin uzunluğu $12\pi$ cm ve $4\pi$ cm olan iki çember birbirine içten teğet olduğuna göre, merkezleri arasındaki uzaklık kaç cm'dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $O_1$ ve $O_2$ merkezli çemberin yarıçapları sırasıyla $r_1$ ve $r_2$, A'da teğet noktası olsun.




Büyük çemberde $2\pi r_2 = 12\pi$ ise $r_2 = 6$ cm'dir.
Küçük çemberde $2\pi r_2 = 4\pi$ ise $r_1 = 2$ cm'dir.

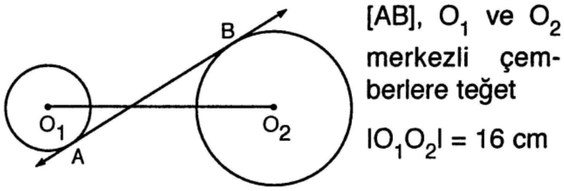
Merkezler arası uzaklık $(|O_1O_2|)$:

$$\begin{aligned} |O_1O_2| &= r_1 - r_2 \\ &= 6 - 2 \\ &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

bulunur.

Cevap: D

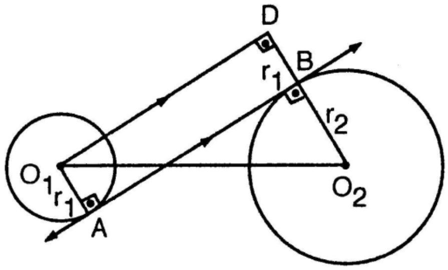
**2.**




Yukarıdaki şekilde $O_1$ ve $O_2$ merkezli çemberlerin yarıçapları toplamı 8 cm olduğuna göre, |AB| kaç cm'dir?

A) 7 B) 8 C) $8\sqrt{3}$ D) $9\sqrt{3}$ E) $10\sqrt{3}$

Çözüm: $[O_1D] // [AB]$ çizelim. $m(\widehat{D}) = 90^0$ olur.



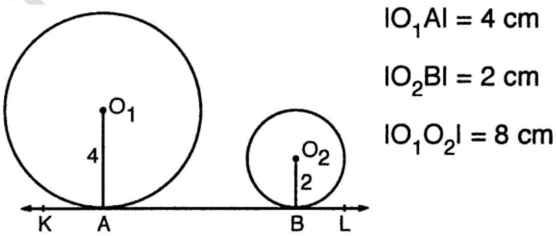

$|O_1D| = r_1 + r_2 = 8$ ve $|AB| = |O_1D|$ dir. $O_1DO_2$ dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$|O_1O_2|^2 = |O_1D|^2 + |O_2D|^2$$
$$16^2 = |O_1D|^2 + 8^2$$
$$|O_1D| = 8\sqrt{3}$$

bulunur.

Cevap: C

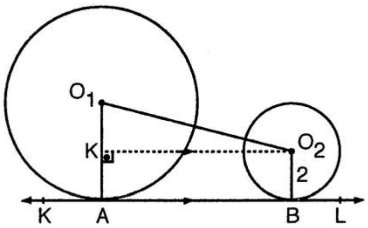
**3.**




Verilen şekilde KL, $O_1$ ve $O_2$ merkezli çemberlere A ve B noktalarında teğet olduğuna göre, |AB| kaç cm'dir?

A) $\sqrt{15}$ B) $2\sqrt{15}$ C) $3\sqrt{15}$ D) $4\sqrt{10}$ E) $5\sqrt{10}$

Çözüm: $[O_2K]$ doğrusunu çizelim.



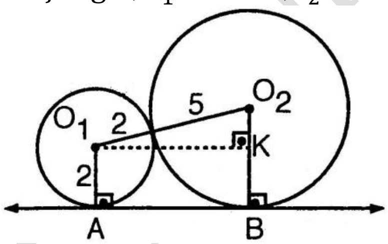

$|O_1K| = 4 - 2 = 2$ cm
$|O_1O_2|^2 = |O_1K|^2 + |KO_2|^2$
$8^2 = 2^2 + |KO_2|^2$
$|AB| = |KO_2| = 2\sqrt{15}$ cm

Cevap: B

**4.** Birbirine dıştan teğet olan çemberlerin yarıçapları 2 cm ve 5 cm olduğuna göre, bu iki çemberin ortak dış teğet uzunluğu kaç cm'dir?

A) $2\sqrt{10}$ B) $3\sqrt{10}$ C) $4\sqrt{10}$ D) $5\sqrt{10}$ E) $6\sqrt{10}$

Çözüm: [AB] ortak dış teğet, $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm olsun.



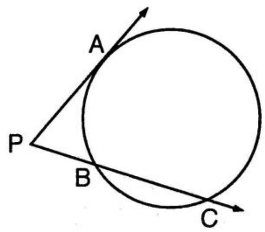

12.11 teoreme göre;

$$|AB| = 2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{2 \cdot 5} = 2\sqrt{10}$$

olur.

Cevap: A

**5.**




[PA, çembere teğet
|PA| = 4 cm
|BP| = 2 cm

Verilere göre |BC| kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $|BC| = x$ olsun.

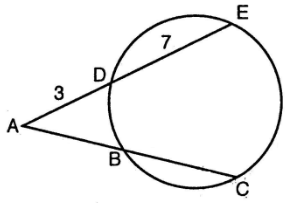
$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$

$4^2 = 2 \cdot (2 + x)$

$x = 8$ cm

Cevap: E

**6.**




B, C, E ve D noktaları çember üzerinde

$|AD| = 3$ cm

$|DE| = 7$ cm

$|BC| = \frac{7}{2}$ cm

Verilere göre $|AB|$ kaç cm'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $|AB| = x$ olsun.

$|AD| \cdot |AE| = |AB| \cdot |AC|$

$3 \cdot (3 + 7) = x \cdot \left(x + \frac{7}{2}\right)$

$60 = 2x^2 + 7x$

$2x^2 + 7x - 60 = 0$

2x    15

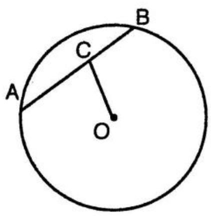
x    −4

$(2x + 15)(x - 4) = 0$

$x = 4$ cm (Uzunluk negatif olamayacağından $x = -15/2$ alınmaz)

Cevap: A

**7.**




O, çemberin merkezi

$[AB] \cap [OC] = \{C\}$

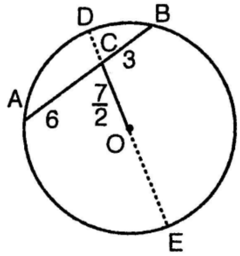
$|OC| = \frac{7}{2}$ cm

$|AC| = 2.|BC| = 6$ cm

Verilere göre, O merkezli çemberin yarıçapı kaç cm'dir?

A) $\frac{9}{2}$ B) 5 C) $\frac{11}{2}$ D) 6 E) $\frac{13}{2}$

Çözüm: Çemberin yarıçapı r olsun. $|AC| = 6$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|DC| = r - \frac{7}{2}$ cm, $|CE| = r + \frac{7}{2}$ cm'dir.

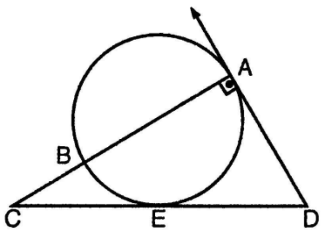



C noktasına göre iç kuvvet uygulayalım.

$$|DC| \cdot |CE| = |AC| \cdot |CB|$$
$$\left(r - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(r + \frac{7}{2}\right) = 6 \cdot 3$$
$$r^2 - \frac{49}{4} = 18$$
$$r^2 = 18 + \frac{49}{4} = \frac{121}{4}$$
$$r = \frac{11}{2} \text{ cm}$$

Cevap: C

**8.**




CAD bir dik üçgen

A ve E çemberin teğet noktaları

$|AD| = 3$ cm

$|CE| = 2$ cm

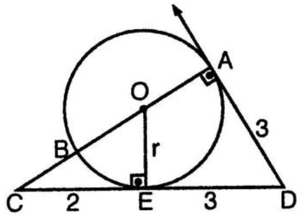
Verilere göre, O merkezli çemberin yarıçapı kaç cm'dir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{4}$ D) 2 E) $\frac{3}{2}$

Çözüm: Çemberin yarıçapı r ve $|DE| = x$ olsun. D noktasına kuvvet uygularsak;

$$|AD|^2 = |DE| \cdot |DC|$$
$$3^2 = x \cdot (x + 2)$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x + 1)(x - 2) = 0$$
$$x = 2 \text{ cm}$$

bulunur. [OE] yarıçapını çizelim.




ABD üçgeninde $3-4-5$ kuralı gereği $|AC| = 4$ cm olur. $C\overset{\triangle}{E}O \sim C\overset{\triangle}{A}D$ olduğundan;

$$\frac{|OE|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|CA|}$$

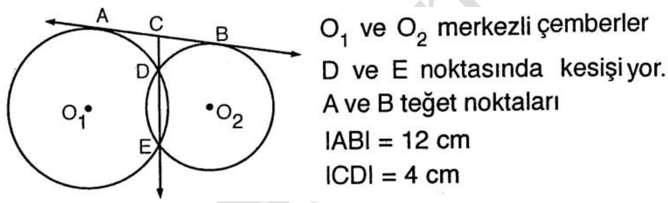
$$\frac{r}{3} = \frac{2}{4}$$

$$r = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

elde edilir.

Cevap: E

**9.**




Verilere göre $|CE|$ kaç cm'dir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: C noktasının $O_1$ merkezli çembere göre kuvveti;

$$|CA|^2 = |CD| \cdot |CE| \qquad (1)$$

ve yine C noktasının $O_2$ merkezli çembere göre kuvveti;

$$|CB|^2 = |CD| \cdot |CE| \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) den

$$|CA| = |CB| = 6 \text{ cm}$$

olur. (1) eşitliğine göre;

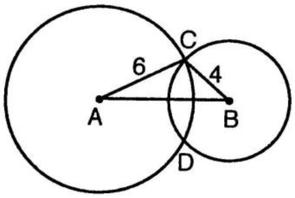
$$6^2 = 4 \cdot |CE|$$

$$|CE| = 9 \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: B

**10.**




A ve B merkezli birer çember

$|AC| = 6$ cm

$|CB| = 4$ cm

$m(\widehat{ACB}) > 90°$

Verilere göre $|AB|$ bir tamsayı olmak üzere aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 8 E) 7

Çözüm: ABC bir üçgendir. "Bir kenar diğer iki kenarın toplamından küçük, farkından büyüktür" teoremi gereği;

$$6 - 4 < |AB| < 6 + 4$$
$$2 < |AB| < 10 \qquad (1)$$

olur. Ayrıca $m(A\hat{C}B) > 90^0$ olduğundan;

$$|AB|^2 > 6^2 + 4^2 = 52 > 49$$
$$|AB| > 7 \qquad (2)$$

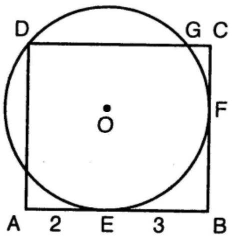
olur. (1) ve (2) den,

$$7 < |AB| < 10$$

aralığındaki tamsayılardır.

Cevap: E

**11.**




ABCD dikdörtgeni O merkezli çembere E ve F noktalarında teğettir.

D noktası çember üzerinde

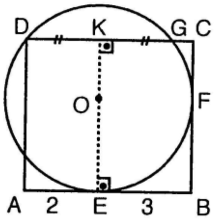
$|AE| = 2$ cm

$|EB| = 3$ cm

Verilere göre $|CF|$ kaç cm'dir?

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\sqrt{5}$ D) 3 E) 4

Çözüm: $[AB] \perp [OE]$ ve $[OK] \perp [DC]$ çizelim. K, O, E doğrusal olur.



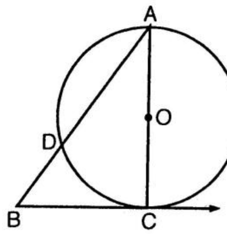

$|DK| = |KG| = 2$ cm, $|GC| = 3 - 2 = 1$ cm'dir. C noktasına göre kuvvet alırsak;

$$|CF|^2 = |CG| \cdot |CD|$$
$$|CF|^2 = 1 \cdot (3 + 2)$$
$$|CF| = \sqrt{5} \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: C

**12.**




O, çemberin merkezi

[BC teğet

|AC| = 4 cm

|BC| = 3 cm

Verilere göre |AD| kaç cm'dir?

A) 4 B) $\frac{12}{5}$ C) 5 D) $\frac{16}{5}$ E) 6

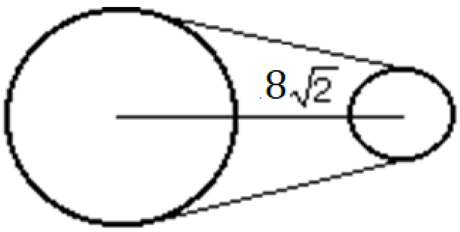
Çözüm: ABC üçgeninde $3 - 4 - 5$ kuralı gereği $|AB| = 5$ cm'dir. $|BD| = x$ olsun. B noktasına kuvvet uygularsak;

$$|BC|^2 = |BD| \cdot |BA|$$
$$3^2 = x \cdot 5$$
$$x = \frac{9}{5} \text{ cm}$$
$$|AD| = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5} \text{ cm}$$

olur.

Cevap: D

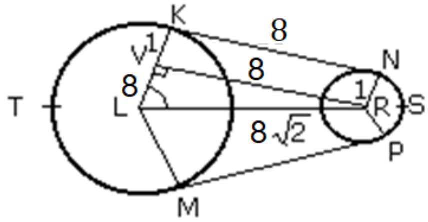
**13.**




Merkezleri arasındaki uzaklığı $8\sqrt{2}$ cm olan 1 cm ve 9 cm yarıçaplı iki çemberin, şekilde görüldüğü gibi gergin olarak saran ip uzunluğu kaç cm'dir?

A) 16 B) $14\pi$ C) $16 + 10\pi$ D) $16 + 12\pi$ E) $16 + 14\pi$

Çözüm: $|NR| = 1$ cm olduğundan $|LV| = 9 - 1 = 8$ cm olur. Buna göre aşağıdaki şekil çizilir.




$$|KN| = |MP| = 8 \text{ cm}$$

dir. VLR dik üçgeninde veriler $m(V\hat{L}R) = 45^0$ olduğunu gösterir. O halde,

$$m(K\hat{L}M) = 270^0 \text{ ve } m(P\hat{S}N) = 90^0$$

olduğundan bu aralıktaki yay uzunlukları;

$$2\pi \cdot 9 \cdot \frac{270}{360} = \frac{27\pi}{2} \text{ ve } 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{90}{360} = \frac{\pi}{2}$$

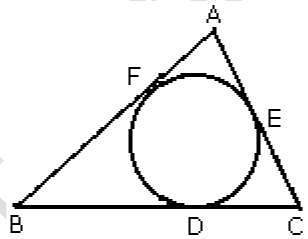
bulunur. Bütün ipin uzunluğu,

$$8 + 8 + \frac{27\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 16 + 14\pi$$

dir.

Cevap: E

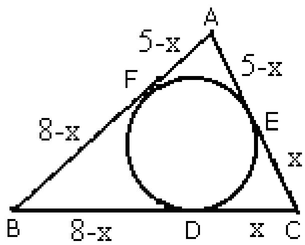
**14.**




ABC üçgeninde $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 5$ cm, $|AB| = 7$ cm olduğuna göre $|DC|$ kaç cm'dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Eğer $|DC| = |CE| = x|$ seçilirse aşağıdaki şekil oluşur.




$$|AB| = (8 - x) + (5 - x)$$
$$7 = 13 - 2x$$

$$x = 3$$

bulunur.

Cevap: C

## KAYNAKÇA


1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.