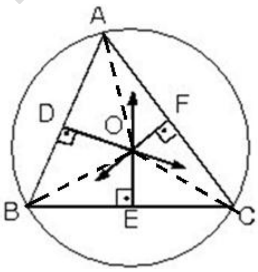
13. BÖLÜM
ÇEMBERDE ÜÇGEN-DÖRTGEN İLİŞKİLERİ

Bu bölüm;
– Üçgenin Çevrel Çemberi
– Çember Üzerindeki Teğetlerin Oluşturduğu Üçgenler
– Kirişler Dörtgeni
– Teğetler Dörtgeni
konusundan oluşmaktadır.

ÜÇGENİN ÇEVREL ÇEMBERİ

2.17. Tanımda üçgenin çevrel çemberi verilmiştir. O kısımda ileride bahsedileceğini söz edilmiştir. Şimdi bu tanım tekrar hatırlayarak çevrel çember teoremleri verelim.

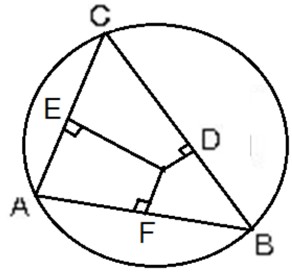
13.2. Tanım: Bir üçgenin köşelerinden geçen çembere, bu üçgenin çevrel çemberi denir.



Şekilde, O merkezli çember, A, B, C noktalarından geçtiğinden ABC üçgeninin çevrel çemberidir.

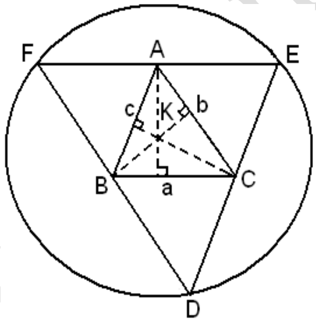
$|OA| = |OB| = |OC| = r$ çemberin yarıçaplarıdır.
[EO, a kenarının, [FO, b kenarının, [DO, c kenarının orta dikmeleridir.

13.1. Teorem: Bir düzlemde aynı doğrultuda olmayan farklı üç noktadan sadece bir çember geçer. Bu üç noktanın belirlediği üçgenin kenarları orta noktalarından çıkarılan dikmelerin kesişim noktası çemberin merkezi belirler.



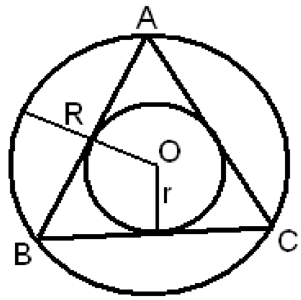
İspat: Bir çemberde herhangi bir kirişin orta noktasından çizilen dikmenin çemberin merkezinden geçtiği bilindiğine göre üç farklı kirişin sadece bir kesişime noktası olacağından, bu çemberin merkezidir.

13.2. Teorem: Bir ABC üçgeninin köşelerinden karşı kenara çizilen paralellerinin oluşturduğu üçgenin kenarortaylarının merkezi, ABC üçgeninin yükseklerinin kesişim noktasıdır. Yani K noktası DEF üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.



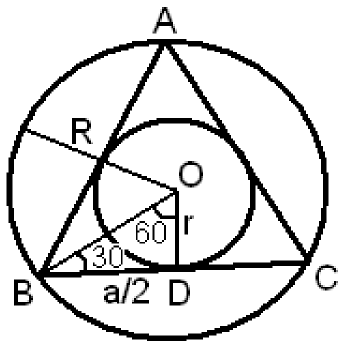
İspat: [DC] // [AB], [FE]//[BC], [DF] // [AC] oluğundan,
ABCE dörtgeni bir paralelkenardır ve |BC| = |AE| = a, |BA| = |EC| = c
ACBF dörtgeni bir paralelkenardır ve |BC| = |AF| = a, |AC| = |BF| = b
ABDC dörtgeni bir paralelkenardır ve |BD| = |AC| = b, |AB| = |DC| = c
bulunur. Buna göre K noktası DEF üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.

13.3. Teorem: Bir kenarının uzunluğu a olan eşkenar üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı r, dış teğet çemberinin yarıçapı R olmak üzere,



$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6},\ R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

İspat: OBD üçgeninde $m(A\widehat{B}C)=30^0$, $m(B\widehat{O}D)=60^0$ ve $|BD|=\frac{a}{2}$ olduğundan;



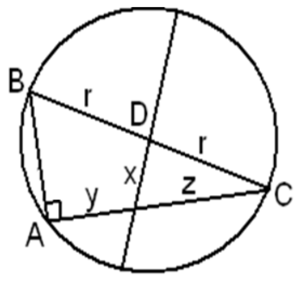
$$|OD|=r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

olur. $|OB|=2|OD|$ için

$$|OB|=R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

bulunur.

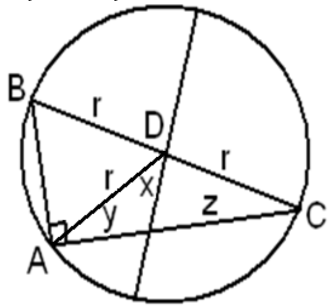
13.4. Teorem: ABC üçgeni bir dik üçgen olmak üzere, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi D olsun. $|BD|=|DC|=r$, $|DE|=x$, $|AE|=y$, $|EC|=z$ ise,



$$y\cdot z=r^2-x^2$$

dir.

İspat: [AD] doğru parçasını çizelim.



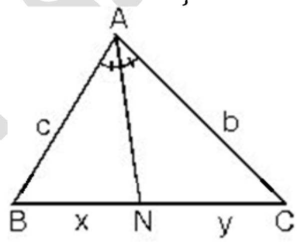
ACD üçgeninde Stewart teoremi uygulanırsa,

$$x^2 = \frac{r^2z+r^2y}{y+z} - yz = r^2 - yz$$
$$yz = r^2 - x^2$$

elde edilir. //

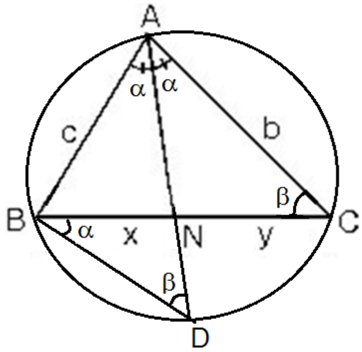
Daha önce açıortay uzunluğu bulunması 6.6. Teoreminde verilmiş ve ispatlanmıştı. Bu kısımda verilen bu teorem çevrel çember yöntemi ile ispatı tekrar verilecektir.

13.5. Teorem: Bir üçgende herhangi bir açıortayın uzunluğu, diğer kenarların çarpımının karşı kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımlarının farklarının kareköklerine eşittir.



$$|AN| = \sqrt{cb - xy}$$

Çözüm: Üçgene çevrel çember ile [AN] doğrusunu uzatıp [AD] doğrusu ile [BD] doğrusunu çizelim.



Aynı yayı gören çevre açılardan $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$ ve $m(D\hat{B}C) = m(D\hat{A}C)$ olduğundan, A.A.A. benzerlik teoreminden $\overset{\Delta}{NBD} \sim \overset{\Delta}{NAC}$ olur. Buradan,

$$\frac{|NB|}{|NA|} = \frac{|ND|}{|NC|}$$

$$\frac{x}{n_A} = \frac{|ND|}{y}$$

$$xy = n_A|ND| \qquad (1)$$

dir. Ayrıca $m(B\hat{A}D) = m(D\hat{A}C)$ ve $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$ olduğundan A.A.A. benzerlik teoreminden $\overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{ANC}$ olur. Buradan,

$$\frac{|AB|}{|AN|} = \frac{|AD|}{|AC|}$$

$$\frac{c}{n_A} = \frac{n_A + |ND|}{b}$$

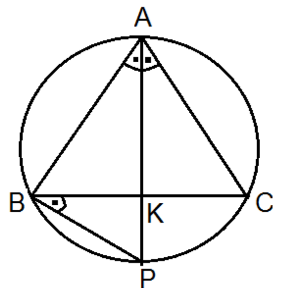
$$bc = n_A^2 + n_A|ND| \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$bc = n_A^2 + xy$$
$$n_A = \sqrt{cb - xy}$$

bulunur.

13.6. Teorem: Bir ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde, şekildeki gibi bir P noktaları verilsin, [AP] de A açsının açıortayı olsun. Bu takdirde;



$$|PB|^2 = |PK| \cdot |PA|$$

olur.

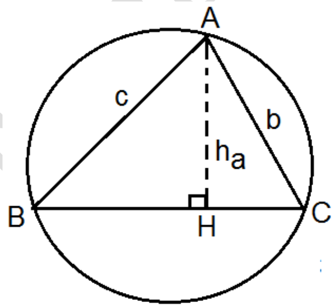
İspat: Aynı yayı gören çevre açılardan $m(P\hat{A}C) = m(P\hat{B}K)$ ve $m(\hat{P})$ ortak açı olduğundan, A.A.A. benzerlik teoreminden $P\overset{\Delta}{B}K \sim P\overset{\Delta}{A}B$ olur. Buradan,

$$\frac{|PB|}{|PA|} = \frac{|PK|}{|PB|}$$

$$|PB|^2 = |PK| \cdot |PA|$$

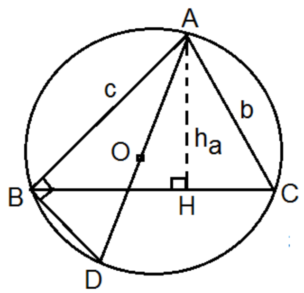
bulunur.

13.7. Teorem: Bir üçgende iki kenarın uzunlukları çarpımının diğer kenara ait yükseklik ile çevrel çemberin çapının çarpımına eşittir.



$$b \cdot c = h_a \cdot 2r$$

İspat: Çemberin merkezinden geçen [AD] doğrusu ve [BD] doğrusunu çizelim.



ABD açısı çapı gören çevre açı olduğundan $m(A\widehat{B}D) = 90^0$ dir. Aynı yayı gören çevre açılardan $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D})$ dir. Ayrıca $m(A\widehat{B}D) = m(A\widehat{H}C) = 90^0$ dir. Buna göre A.A.A. benzerlik teoreminden, $A\overset{\Delta}{B}D \sim A\overset{\Delta}{H}C$ olur. Buradan,

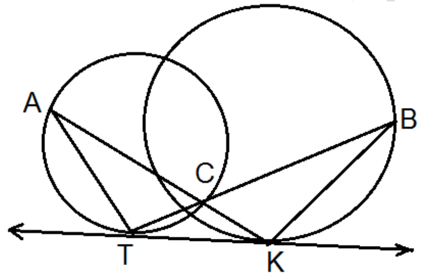
$$\frac{|AB|}{|AH|} = \frac{|AD|}{|AC|}$$

$$\frac{c}{h_a} = \frac{2r}{b}$$

$$b \cdot c = h_a \cdot 2r$$

olur.

13.8. Teorem: İki kesişen çember şekildeki gibi, TK doğrusu bu kesişen iki çemberin ortak dış teğeti olsun. A, C, K ile T, C, B doğruları için,



$$|TK|^2 = |TA| \cdot |KB|$$

olur.

İspat: Aynı yayı gören çevre açı ile teğet-kiriş açılardan,

$$m(T\widehat{A}K) = m(K\widehat{T}B) \text{ ve } m(T\widehat{K}A) = m(T\widehat{B}K)$$

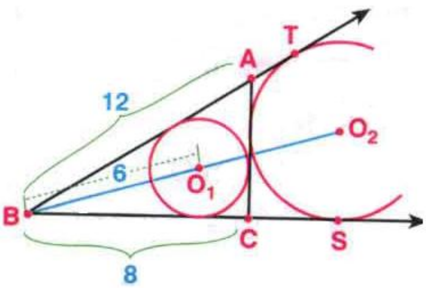
olduğuna göre, A.A.A. benzerlik teoreminden, $A\overset{\Delta}{T}K \sim T\overset{\Delta}{K}B$ olur. Buradan,

$$\frac{|AT|}{|TK|} = \frac{|TK|}{|KB|}$$

$$|TK|^2 = |TA| \cdot |KB|$$

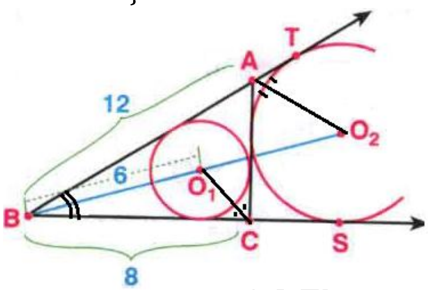
bulunur.

Örnek: ABC üçgeninin O_1 merkezli iç teğet çemberi ile O_2 merkezli dış teğet çemberi şekildeki gibidir.



$|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm ve $|BO_1| = 6$ cm olduğuna göre, $|O_1O_2|$ doğrusunu bulunuz.

Çözüm: O_1 noktası iç açıortayların, O_2 de B açısının iç açıortayı, A ile C açılarının dış açıortaylarının kesişme noktasıdır.



O halde, $m(A\widehat{O_2}B) = \frac{m(A\hat{C}B)}{2}$ dir. $m(A\hat{B}O_2) = m(C\hat{B}O_1)$ ve $m(A\widehat{O_2}B) = m(B\hat{C}O_1)$ olduğuna göre, A.A.A. benzerlik teoreminden $\overset{\triangle}{ABO_2} \sim \overset{\triangle}{O_1BC}$ dir. Buradan,

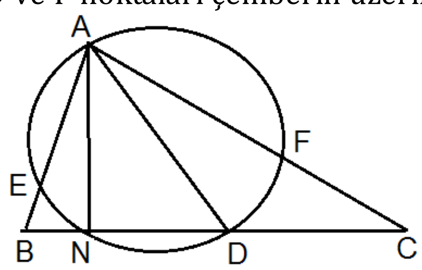
$$\frac{|AB|}{|O_1B|} = \frac{|BO_2|}{|BC|}$$

$$\frac{12}{6} = \frac{6+|O_1O_2|}{8}$$

$$|O_1O_2| = 10 \text{ cm}$$

bulunur.

Örnek: A, E, N, D ve F noktaları çemberin üzerindedir.



$|BD| = |DC|$, $[AN]$, BAC açısının açıortayı ve $|BE| = 4$ cm olduğuna göre, $|FC|$ doğrusunu bulunuz.

Çözüm: ABC üçgeninde iç açıortay teoreminden,

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|CN|} \qquad (1)$$

dir. B ve C noktalarının çembere göre kuvvetinden, ($|BD| = |DC|$)

$$\left.\begin{aligned} |BE| \cdot |BA| &= |BN| \cdot |BD| \\ |CF| \cdot |CA| &= |CD| \cdot |CN| \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{|BE|}{|CF|} \cdot \frac{|BA|}{|CA|} = \frac{|BN|}{|CN|} \qquad (2)$$

dir. O halde (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\frac{|BE|}{|CF|} \cdot \frac{|BA|}{|CA|} \cdot \frac{|AC|}{|BA|} = \frac{|BN|}{|CN|} \cdot \frac{|CN|}{|BN|}$$

$$\frac{|BE|}{|CF|} = 1$$

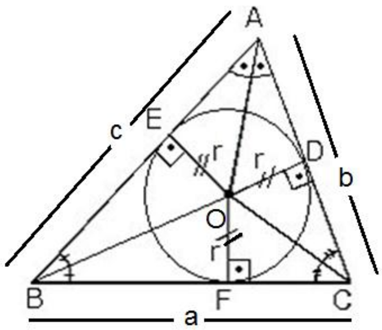
$$\frac{4}{|CF|} = 1$$

$$|CF| = 4 \text{ cm}$$

olur.

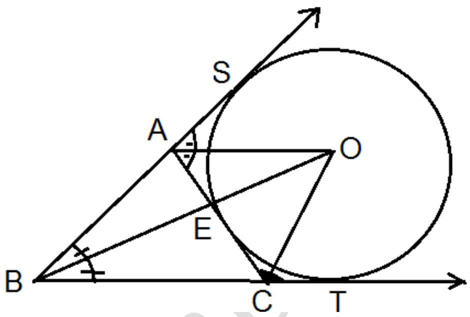
ÇEMBER ÜZERİNDEKİ TEĞETLERİN OLUŞTURDUĞU ÜÇGENLER

13.2. Tanım: Üçgenin iç açıortayları bir noktada kesişirler. Bu noktaya üçgenin iç teğet çemberinin merkezi denir. Bir üçgende herhangi iki dış açıortay ile diğer köşedeki iç açıortay bir noktada kesişirler. Bu noktaya da üçgenin dış teğet çemberinin merkezi denir.



[AO], [BO], [CO] iç açıortaylar
r iç açıortayların oluşturduğu çemberin yarıçapı

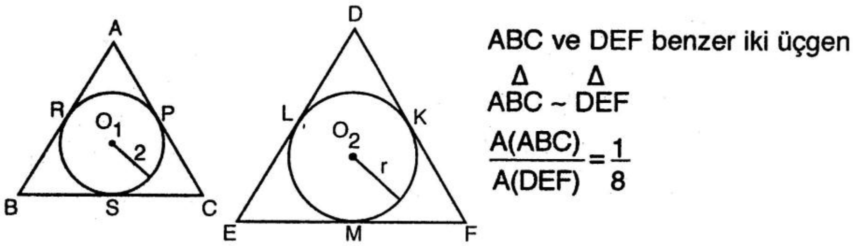
(Açıortayların kesiştiği noktadan kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları eşittir. Çünkü çemberin yarıçaplarıdır.)



[OA] ile [CO] dış açıortay
[BO] ise iç açıortay

Bir üçgenin toplam üç tane dış teğet çemberi vardır.

Örnek:



Verilen şekilde O_1 merkezli iç teğet çemberin yarıçapı 2 cm olduğuna göre, O_2 merkezli iç teğet çemberin yarıçapı r kaç cm'dir?

Çözüm: $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ olduğundan

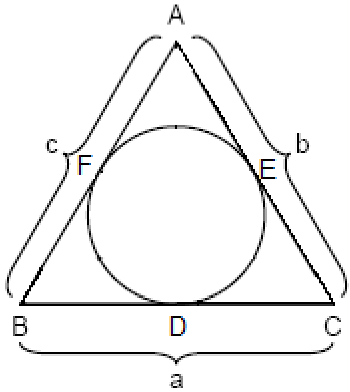
$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{1}{8} = k^2$$

dir. Bu durumda $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$ olur. İç teğet çemberlerin yarıçaplarının oranı benzerlik oranına eşit olduğundan

$$\frac{2}{r} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$r = 4\sqrt{2}\ \text{cm}$$

elde edilir.

13.9. Teorem: Bir ABC üçgenine ait iç teğet çemberin üçgene değme noktaları D, E ve F ise; $u = \frac{a+b+c}{2}$ olmak üzere,



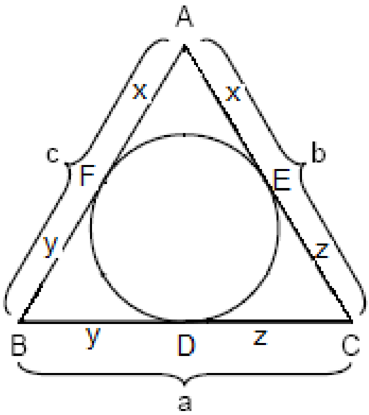
$$|AE| = |AF| = u - a,\ |BD| = |BF| = u - b,\ |CD| = |CE| = u - c$$

dir.

İspat: Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğetlerin uzunlukları birbirine eşit olduğundan,

$$|AE| = |AF| = x,\ |BD| = |BF| = y,\ |CD| = |CE| = z$$

yazılabilir. Buna göre,



$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad x + z = b$$

olduğundan üçgenin çevresi,

$$a + b + c = 2x + 2y + 2z$$

olup

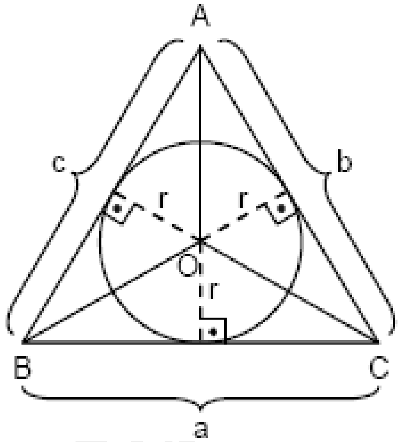
$$u = x + y + x = \frac{a+b+c}{2}$$

yazılabilir. Buradan da,

$$|AE| = |AF| = u - a, |BD| = |BF| = u - b, |CD| = |CE| = u - c$$

olur.

13.10. Teorem: Bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin yarıçapı r ve $u = \frac{a+b+c}{2}$ olmak üzere, üçgenin alanı,



$$A(A\overset{\triangle}{B}C) = u \cdot r$$

olur.

İspat: O noktasından üçgenin kenarına çizilen dikmelerin her biri aynı zamanda iç teğet çemberi yarıçapı olduğundan,

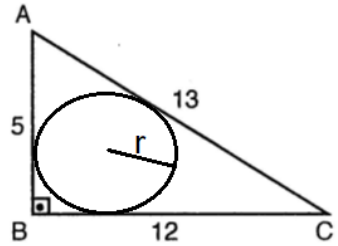
$$A(A\overset{\triangle}{O}B) = \frac{c \cdot r}{2},\ A(A\overset{\triangle}{O}C) = \frac{b \cdot r}{2},\ A(B\overset{\triangle}{O}C) = \frac{a \cdot r}{2}$$

$$\begin{aligned} A(A\overset{\triangle}{B}C) &= A(A\overset{\triangle}{O}B) + A(A\overset{\triangle}{O}C) + A(B\overset{\triangle}{O}C) \\ &= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} \\ &= \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r \\ &= u \cdot r \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: Dik kenarlarının uzunlukları 5 cm ve 12 cm olan bir dik üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı kaç cm'dir?

Çözüm: Dik kenar uzunlukları 5 cm ve 12 cm olan üçgen $5-12-13$ özel dik üçgenidir. O halde $|AC| = 13$ cm olur.



$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2 \text{ ve } u = \frac{5+12+13}{2} = 15$$

ise 13.10 teorem gereği;

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = u \cdot r$$
$$30 = 15 \cdot r$$
$$r = 2 \text{ cm}$$

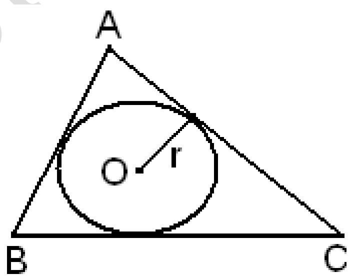
olur.

Sonuç: 13.10. Teoreminden,

$$\frac{A(\overset{\triangle}{AOB})}{a} = \frac{A(\overset{\triangle}{AOC})}{b} = \frac{A(\overset{\triangle}{BOC})}{c} = \frac{r}{2}$$

dir.

13.11. Teorem: Bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin yarıçapı r olmak üzere,



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

dir.

İspat: Üçgenin çevresinin yarısı $u = \frac{a+b+c}{2}$ olmak üzere üçgenin alanı 4.1. Teorem ve 13.10. Teoremden,

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} = u \cdot r$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r$$

$$a \cdot h_a = a \cdot h_a = a \cdot h_a = (a + b + c) \cdot r$$

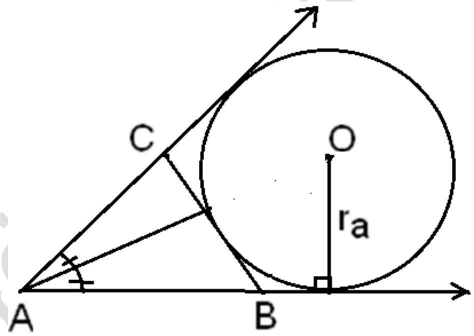
$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{r}}$$

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{r}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

olur.

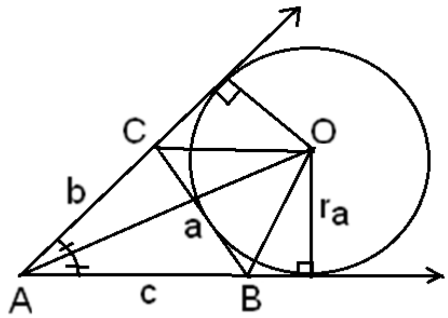
13.12. Teorem: Bir ABC üçgeninin dış teğet çemberlerinin yarıçapları r_a, r_b, r_c ve üçgenin çevresi $2u = a + b + c$ ise,



$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = r_a(u - a) = r_b(u - b) = r_c(u - c)$$

dir.

İspat: ABC üçgenine ait dış teğet çemberin merkezi, üçgenin köşeleri ile birleştirildiğinde,



$$\begin{aligned}A(\overset{\Delta}{ABC}) &= A(\overset{\Delta}{AOB}) + A(\overset{\Delta}{AOC}) - A(\overset{\Delta}{OBC})\\ &= \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2}\\ &= \frac{r_a}{2}(b + c - a)\\ &= \frac{r_a}{2}(b + c + a - 2a)\\ &= \frac{r_a}{2}(2u - 2a)\\ &= r_a(u - a)\end{aligned}$$

olur.

13.13. Teorem: Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c iç teğet çemberinin yarıçapı r, dış teğet çemberlerinin yarıçapları r_a, r_b, r_c ise,

$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

dir.

İspat: Heron teoreminde $A(\overset{\Delta}{ABC}) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$

13.10. teoreminde $A(\overset{\Delta}{ABC}) = u \cdot r$

13.12. teoremden $A(\overset{\Delta}{ABC}) = r_a(u-a) = r_b(u-b) = r_c(u-c)$

oluğunu biliyoruz. Buna göre,

$$r = \frac{A(\overset{\Delta}{ABC})}{u},\ r_a = \frac{A(\overset{\Delta}{ABC})}{u-a},\ r_b = \frac{A(\overset{\Delta}{ABC})}{u-b},\ r_c = \frac{A(\overset{\Delta}{ABC})}{u-c}$$

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{A(\overset{\Delta}{ABC})}{u} \cdot \frac{A(\overset{\Delta}{ABC})}{u-a} \cdot \frac{A(\overset{\Delta}{ABC})}{u-b} \cdot \frac{A(\overset{\Delta}{ABC})}{u-c}$$

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{\left(A(\overset{\Delta}{ABC})\right)^4}{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

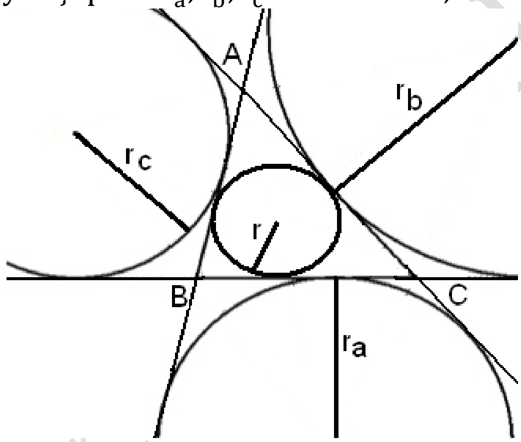
$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{\left(A(A\overset{\Delta}{B}C)\right)^4}{\left(A(A\overset{\Delta}{B}C)\right)^2}$$

$$\left(A(A\overset{\Delta}{B}C)\right)^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

$$A(A\overset{\Delta}{B}C) = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

bulunur.

13.14. Teorem: Bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin yarıçapı r, dış teğet çemberlerinin yarıçapları r_a, r_b, r_c olmak üzere,



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

dir.

İspat: 13.10. teoreminde $2u = a + b + c$ ve $A(A\overset{\Delta}{B}C) = u \cdot r$ ile 13.12. teoreminde

$$A(A\overset{\Delta}{B}C) = r_a(u-a) = r_b(u-b) = r_c(u-c)$$

olduğunu biliyoruz. Bu iki alan teoremlerinden,

$$\frac{u}{\frac{1}{r}} = \frac{u-a}{\frac{1}{r_a}} = \frac{u-b}{\frac{1}{r_b}} = \frac{u-c}{\frac{1}{r_c}}$$

$$\frac{u}{\frac{1}{r}} = \frac{u-a+u-b+u-c}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}$$

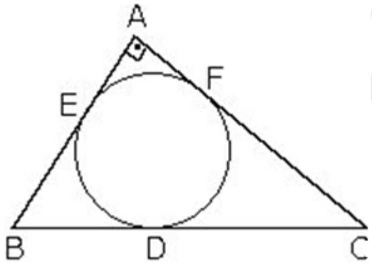
$$\frac{u}{\frac{1}{r}} = \frac{3u-(a+b+c)}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}$$

$$\frac{u}{\frac{1}{r}} = \frac{3u-2u}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$$

olur.

13.15. Teorem: Bir dik üçgende $m(B\widehat{A}C) = 90^0$ ve üçgenin iç teğet çemberinin değme noktaları D, E ve F ise,

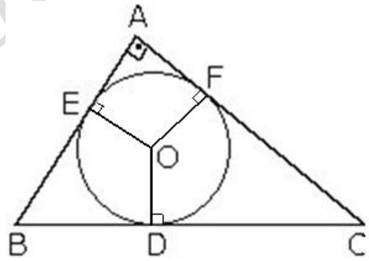


$$A(A\overset{\Delta}{B}C) = |BD| \cdot |DC|$$

dir.

İspat: Birim çemberin merkezi O olmak üzere,

$[OE] \perp [AB], [OD] \perp [BC]$ ve $[DE] \perp [AC]$



doğrularını çizersek,

$|AF| = |AE| = u - a = r, |BD| = u - b$

bulunur. Yine

$|BD| = u - b, |DC| = u - c$

Heron teoremi ve teoremden,

$$A(A\overset{\Delta}{B}C) = u \cdot r = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

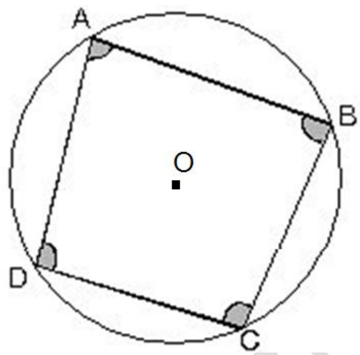
$$(ur)^2 = ur(u-b)(u-c)$$

$$ur = (u-b)(u-c)$$

$A(A\overset{\Delta}{B}C) = |BD| \cdot |DC|$
bulunur.

KİRİŞLER DÖRTGENİ

13.3. Tanım: Kenarları aynı çemberin kirişleri olan dörtgene kirişler dörtgeni denir.



Şekilde [AB], [BC], [CD] ve [AD] O merkezli çemberin birer kirişi olduğundan ABCD bir kirişler dörtgenidir.

13.16. Teorem: Bir kirişler dörtgeninde, karşılıklı açılar bütünlerdir.

ABCD kirişler dörtgeni $\Leftrightarrow m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180^0$ ve $m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 180^0$

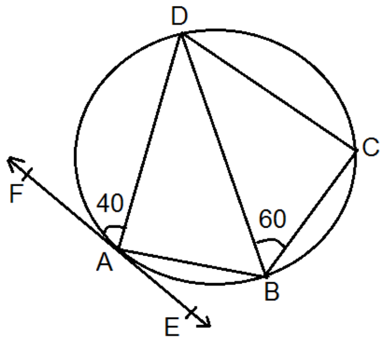
İspat: A ve C açıları çevre açı olduğundan,

$m(\hat{A}) = \frac{m(\overset{\frown}{DCB})}{2}$ ve $m(\hat{C}) = \frac{m(\overset{\frown}{BAD})}{2}$

$m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = \frac{m(\overset{\frown}{DCB})}{2} + \frac{m(\overset{\frown}{BAD})}{2} = \frac{360}{2} = 180^0$

olur. Benzer yolla $m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 180^0$ olduğu gösterilir.

Örnek: EF doğrusu A noktasında çembere teğet, ABCD kirişler dörtgenidir. $m(D\hat{A}B) = 60^0$ ve $m(F\hat{A}D) = 40^0$ olduğuna göre, ADC açısının ölçüsünü bulunuz.



Çözüm: Aynı yayı gören çevre ve teğet-kiriş açılardan $m(F\widehat{A}D) = m(A\widehat{B}C) = 40^0$ dir.

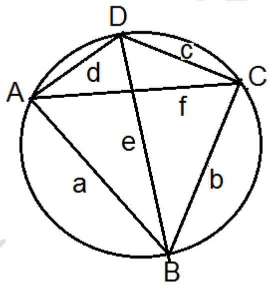
$$m(A\widehat{B}C) = 40 + 60 = 100^0$$

olur. ABCD kirişler dörtgeni olduğundan,

$$m(A\widehat{B}C) + m(A\widehat{D}C) = 180^0$$
$$m(A\widehat{D}C) = 80^0$$

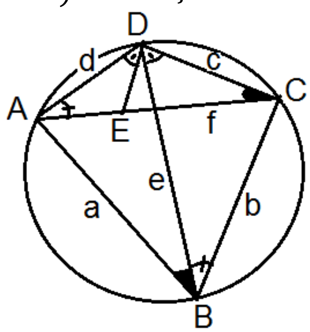
bulunur.

13.17. Teorem: Bir kirişler dörtgeninin kenar uzunlukları a, b, c, d ve köşegen uzunlukları e ve f ise $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$ dir.



ABCD kirişler dörtgeni,
a, b, c, d kenarları, e ve f köşegen $\Leftrightarrow e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$

İspat: $m(A\widehat{D}E) = m(C\widehat{D}B)$ olacak şekilde ADE açısını çizelim.



$m(A\widehat{D}E) = m(C\widehat{D}B)$ ve aynı yayı gören çevre açılar eşit olduğundan $m(D\widehat{A}E) = m(D\widehat{B}C)$ dir. Buna göre A.A.A. benzerlik teoreminden $\overset{\triangle}{AED} \sim \overset{\triangle}{BCD}$ olur. O halde,

$$\frac{|AE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}$$

$$\frac{|AE|}{b} = \frac{d}{e}$$

$$e \cdot |AE| = b \cdot d \qquad (1)$$

dir. Aynı yayı gören çevre alılar eşit olduğundan $m(A\widehat{B}D) = m(D\widehat{C}A)$ dir.

$$m(A\widehat{D}E) + m(E\widehat{D}B) = m(E\widehat{D}B) + m(B\widehat{D}C)$$

$$m(A\widehat{D}E) = m(B\widehat{D}C)$$

olduğundan A.A.A. benzerlik teoreminden $\overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{ECD}$ olur. O halde,

$$\frac{|AB|}{|EC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

$$\frac{a}{|EC|} = \frac{e}{c}$$

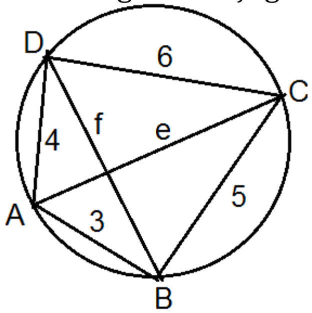
$$e \cdot |AE| = a \cdot c \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$e \cdot |AE| + e \cdot |AE| = a \cdot c + b \cdot d$$
$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$$

bulunur.

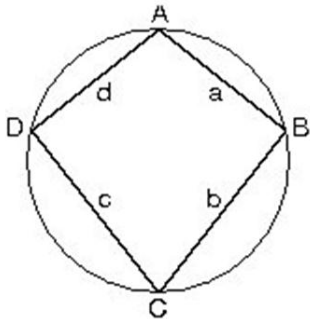
Örnek: Bir ABCD kirişler dörtgeninde $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|CD| = 6$ cm ve $|AD| = 4$ cm ise dörtgenin köşegenlerinin çarpımını bulunuz.



Çözüm: $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$

$$e \cdot f = 3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 38 \text{ cm}^2$$

13.18. Teorem: Bir teğetler dörtgenin alanı, kenar uzunlukları a, b, c, d ve çevresi $2u = a + b + c$ olmak üzere,



$$A(ABCD) = \frac{1}{2}(a \cdot d + b \cdot c)\sin A$$

dir.

İspat: 4.12. teoremde üçgenin alan bulma formülü,

$$A(ABD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin A \text{ ve } A(BCD) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin C$$

olarak tespit edilmiştir. 13.16. teoremine göre $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^0$ olduğundan,

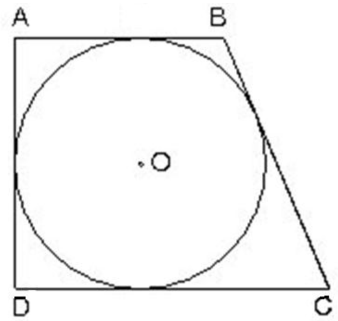
$$\begin{aligned} A(ABCD) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin A + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin C \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin A + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(180 - A) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin A + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A, \quad (\sin(180 - A) = \sin A) \\ &= \frac{1}{2}(a \cdot d + b \cdot c)\sin A \end{aligned}$$

bulunur.

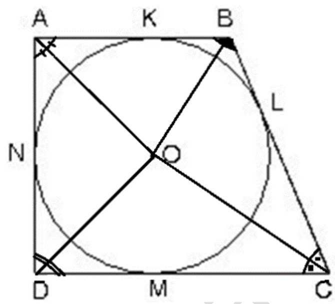
13.1. Not: Kirişler dörtgeni ile ilgili bazı bilgiler, trigonometri konusunda anlatılacaktır.

TEĞETLER DÖRTGENİ

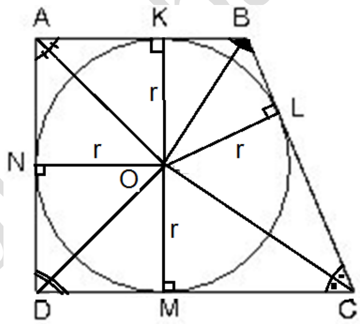
13.4. Tanım: Bütün kenarları aynı çembere teğet olan dörtgene teğetler dörtgeni denir. [AB], [BC], [CD] ve [AD] kenarları O merkezli çembere teğet olduğundan oluşan ABCD dörtgeni bir teğetler dörtgenidir.



13.19. Teorem: Teğetler dörtgeninin, iç açıortayları çemberin merkezinden kesişirler.



İspat:

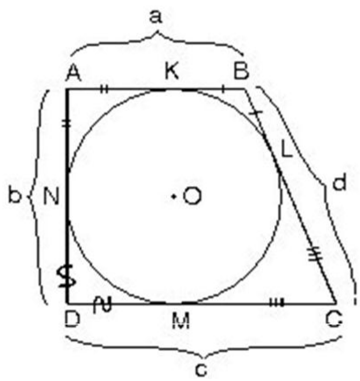


$|AK| = |AN|$, $|BK| = |BL|$, $|CL| = |CM|$, $|DN| = |DM|$

$|NO| = |MO| = |LO| = |KO| = r$

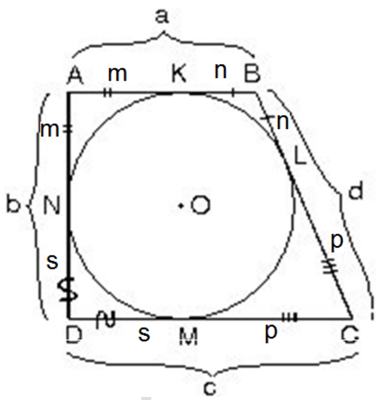
olduğundan teğetler dörtgeninin, iç açıortayları çemberin merkezinden kesişirler.

13.20. Teorem: Bir teğetler dörtgeninde, karşılıklı kenarların uzunlukları toplamı birbirine eşittir.



ABCD teğetler dörtgeni $\Leftrightarrow$ a + c = b + d

İspat: $|AK| = |AN| = m$, $|BK| = |BL| = n$, $|CL| = |CM| = p$, $|DN| = |DM| = s$ olsun.



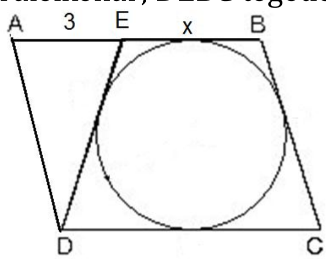
$|AB| + |DC| = m + n + p + s$ ve $|AD| + |BC| = m + n + p + s$

$|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$

$a + c = b + d$

olur.

Örnek: ABCD ise paralelkenar, DEBC teğetler dörtgenidir.



$|AE| = 3$ cm, Ç(AED) = 16 cm ise $|EB|$ doğrusunu bulunuz.

Çözüm: $|AD| = |BC| = b$, $|AD| = c$ olsun. Buna göre,

$|AD| + |DE| + |EA| = 16$ cm

$b + c + 3 = 16$

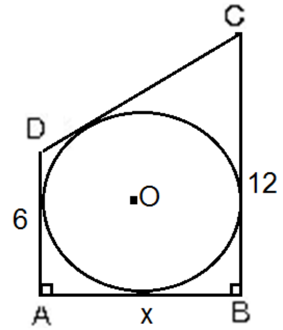
$b + c = 13$

Teğetler dörtgeninden,

$$|EB| + |DC| = |ED| + |BC|$$
$$x + x + 3 = b + c$$
$$2x + 3 = 13$$
$$x = 5 \text{ cm}$$

bulunur.

Örnek: ABCD yamuğu bir teğetler dörtgenidir.

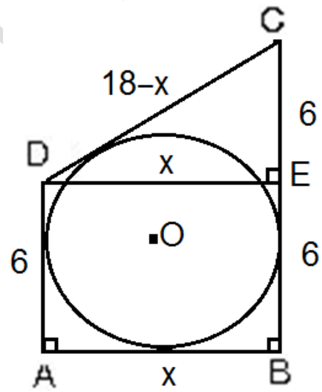


$|AD| = 6$ cm ve $|BC| = 12$ cm olduğuna göre $|AB|$ doğrusunu bulunuz.

Çözüm: $|AB| = x$ dersek

$$|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$$
$$x + |DC| = 6 + 12$$
$$|DC| = 18 - x$$

olur. $[DE] \perp [BC]$ olacak şekilde $[DE]$ doğrusunu çizelim.



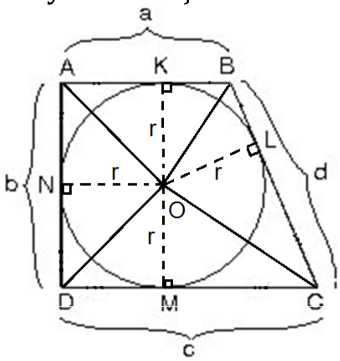
$|DE| = |AB| = x$, $|AD| = |BE| = 6$ cm ve $|EC| = 6$ cm

olur. DEC dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$x^2 + 6^2 = (18 - x)^2$$
$$x^2 + 36 = 324 - 36x + x^2$$
$$36x = 288$$
$$x = 8 \text{ cm}$$

bulunur.

13.21. Teorem: Bir teğetler dörtgenin alanı, iç teğet çemberinin yarıçapı ile çevresinin çarpımının yarısına eşittir.



ABCD teğetler dörtgeni, r iç teğet çemberinin yarıçapı

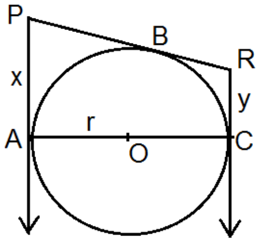
$$\Leftrightarrow A(ABCD) = u \cdot r,\ u = \frac{a+b+c+d}{2}$$

İspat:

$$A(A\overset{\triangle}{O}B) = \frac{a \cdot r}{2},\ A(A\overset{\triangle}{O}D) = \frac{b \cdot r}{2},\ A(D\overset{\triangle}{O}C) = \frac{c \cdot r}{2},\ A(B\overset{\triangle}{O}C) = \frac{d \cdot r}{2}$$

$$\begin{aligned} A(A\overset{\triangle}{B}C) &= A(A\overset{\triangle}{O}CB + A(A\overset{\triangle}{O}D) + A(D\overset{\triangle}{O}C) + A(B\overset{\triangle}{O}C) \\ &= \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{d \cdot r}{2} \\ &= \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right) r \\ &= u \cdot r \end{aligned}$$

13.22. Teorem: [PA // [RC olmak üzere, [PA, [PR] ve [RC nin O merkezli çembere teğet oldukları noktalar A, B ve C olsun.



$|PA| = x$ cm, $|RC| = y$ cm ve çemberin yarıçapı r olmak üzere;

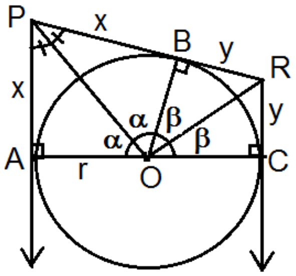
$$r = \sqrt{xy}$$

dir.

İspat: P ve R noktaları çembere dıştan teğet olduklarından;

$$|PA| = |PB| = x \text{ ve } |RC| = |RB| = y$$

dir.



Ayrıca [PO] ve [RO] doğruları açıortay olduklarından;

$$m(A\hat{O}P) = m(B\hat{O}P) = \alpha \text{ ve } m(B\hat{O}R) = m(C\hat{O}R) = \beta$$

seçelim. [PA // [RC olduğundan ABC açısı için;

$$2\alpha + 2\beta = 180^0$$

$$\alpha + \beta = 90^0$$

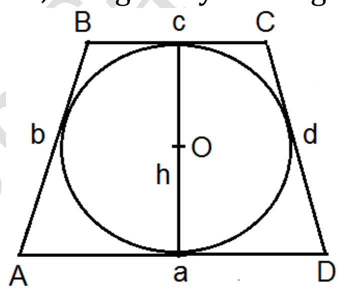
dir. POR üçgeni için Öklid teoreminden;

$$|OB|^2 = |PB| \cdot |BR|$$

$$r = \sqrt{xy}$$

bulunur.

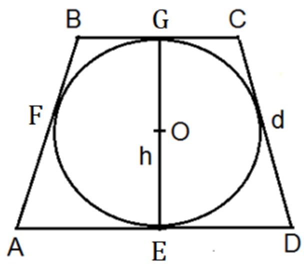
13.23. Teorem: Teğetler dörtgeni eğer ikizkenar yamuk ise alt ve üst tabanlarının geometrik ortası, dörtgenin yüksekliğini verir.



$$h = \sqrt{ac}$$

dir.

İspat: ABCD bir ikizkenar yamuk ise AOD ver BOC üçgenleri birer ikizkenar üçgendirler.



$$|AE| = |ED| = \frac{a}{2} \text{ ve } |BG| = |CG| = \frac{c}{2}$$

olacağından

$$|AF| = |AE| = \frac{a}{2} \text{ ve } |BF| = |BG| = \frac{c}{2}$$

elde edilir. AOB dik üçgeninde Öklid teoreminden;

$$r^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{a \cdot c}{4}$$

olur. İkizkenar yamuğun yüksekliği $h = 2r$ olduğundan,

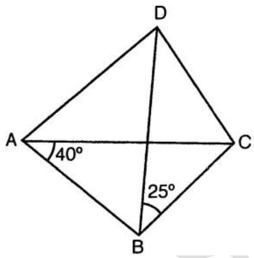
$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{a \cdot c}{4}$$

$$h = \sqrt{ac}$$

bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1.



ABCD bir kirişler dörtgeni

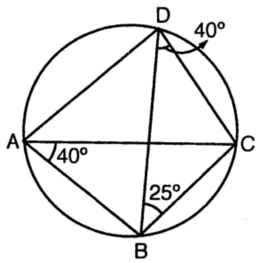
$m(\widehat{BAC}) = 40°$

$m(\widehat{DBC}) = 25°$

Verilere göre $m(D\hat{C}B)$ kaç derecedir?

A) 115 B) 120 C) 125 D) 130 E) 135

Çözüm: ABCD kirişler dörtgeni olduğundan A, B, C, D noktalarından geçen bir çember çizilir.



Aynı yayı gören açılar birbirine eşit olduğundan

$$m(B\hat{A}C) = m(B\hat{D}C) = 40$$

bulunur. DCB üçgeninin iç açılarından

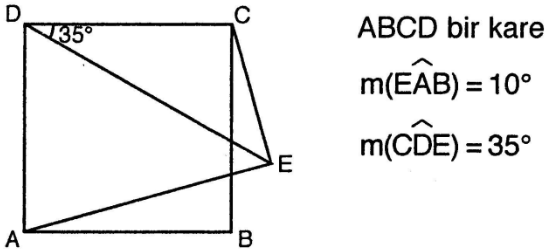
$$m(D\hat{C}B) + 40 + 25 = 180$$

$$m(D\hat{C}B) = 115^0$$

oluşur.

Cevap: A

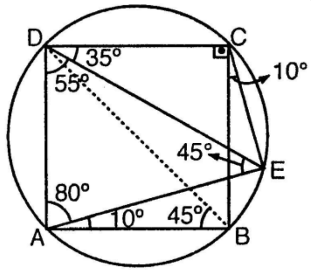
2.



Verilere göre $m(B\hat{C}E) + m(A\hat{E}D)$ kaç derecedir?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

Çözüm: ABCDE noktalarından geçen çevrel çemberi çizelim.
$m(A\hat{D}E) = 90 - 35 = 55$ ve $m(D\hat{A}B) = 90 - 10 = 80$
$m(D\hat{E}A) = 180 - 80 - 55 = 45$



Aynı yayı gören çevre açılar birbirine eşit olduğundan

$$m(A\hat{E}B) = m(B\hat{C}E) = 10$$

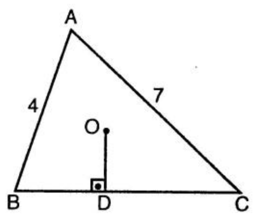
bulunur. Buna göre;

$$m(B\hat{C}E) + m(A\hat{E}D) = 10 + 45 = 55^0$$

olur.

Cevap: C

3.



ABC bir üçgen

O içteğet çemberin merkezi

$[OD] \perp [BC]$

$|AB| = 4$ cm

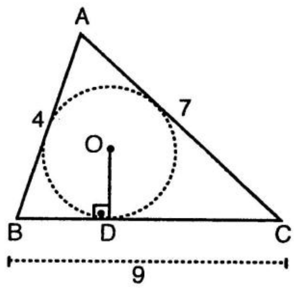
$|AC| = 7$ cm

$|BC| = 9$ cm

Verilere göre $|DC|$ kaç cm'dir?

A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) 7

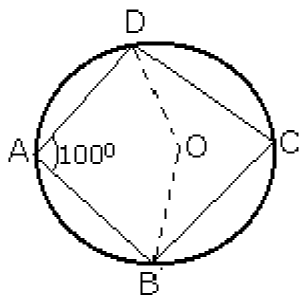
Çözüm: O merkezli iç teğet çember, D noktasında [BC] doğrusuna teğettir.



$$u = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+7+9}{2} = 10$$
$$|DC| = u - 4 = 10 - 4 = 6 \text{ cm}$$
olur.

Cevap: D

4.



Şekilde $m(D\widehat{A}B) = 100^0$ olduğuna göre $m(B\widehat{O}D)$ kaç derecedir.

A) 120   B) 130   C) 140   D) 150   E) 160

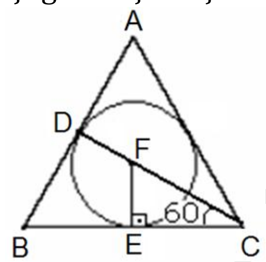
Çözüm: ABCD kirişler dörtgeni olduğundan $m(B\hat{C}D) = 80^0$ dir. Çevre açı gereğince $m(\overset{\frown}{BAD}) = 160^0$ dir. Merkez açıdan $m(B\hat{O}D) = 160^0$ dir.

Cevap: E

5. İç teğet çemberin yarıçapı $2\sqrt{3}$ cm olan eşkenar üçgenin kenar uzunluğu kaç cm'dir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

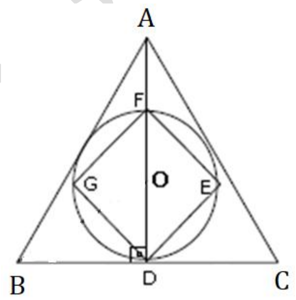
Çözüm: Verilere göre aşağıdaki şekil çizilir.



$|EF| = 2\sqrt{3}$ dir. EDC dik üçgeninde $|EC| = 2\sqrt{3}\sqrt{3} = 6$ olacağından $|BC| = 2 \cdot 6 = 12$ cm bulunur.

Cevap: B

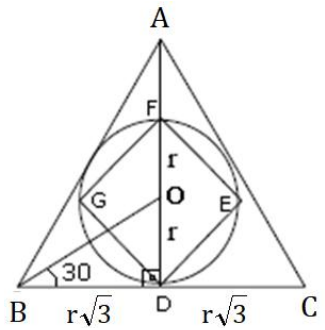
6. ABC eşkenar üçgenin iç teğet çemberi ve bu çember içine DEFG karesi çiziliyor.



Eşkenar üçgenin alanının, karenin alanına oranı aşağıdakilerden nedir?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Çözüm: Çemberin yarıçapı r olsun. Bu takdirde $|BD| = |DC| = r\sqrt{3}$ dir.



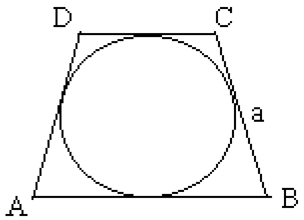
Karenin bir kenarı $r\sqrt{2}$ olup, karenin alanı $A(EDGF) = 2r^2$ dir.

$|BC| = 2r\sqrt{3}$ ise eşkenar üçgenin alanı $A(ABC) = \frac{(2r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2$ dir.

Buna göre eşkenar üçgenin alanının karenin alanına oranı, $\frac{3\sqrt{3}r^2}{2r^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ olur.

Cevap: C

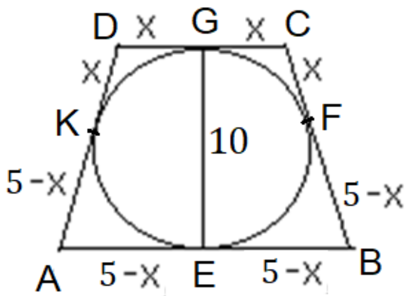
7.



Şekildeki çemberin yarıçapı 5 ve bu çembere dıştan teğet olarak çizilmiş bulunan ABCD ikizkenar yamuğunun BC kenar uzunluğu 5'dir. Buna göre yamuğun alanı nedir?

A) 50 B) 54 C) 56 D) 60 E) 60

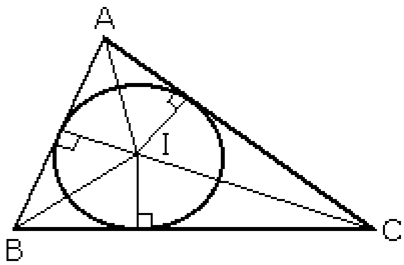
Çözüm: $|DG| = |GC| = |DK| = |CF| = x$ alınırsa
$|AK| = |AE| = |EB| = |BF| = 5 - x$ olur.



$$A(ABC)=\frac{(|AB|+|DC|)\cdot 10}{2}=\frac{(10-2x+2x)\cdot 10}{2}=50\ cm^2$$

Cevap: A

8.



Şekildeki iç teğet çemberin merkezi I ve $|AC|=5$ cm'dir. BIC ve AIC üçgenlerinin alanları sırasıyla 4, 6 ve 8 cm² olduğuna göre, |BC| uzunluğu kaç cm'dir?

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{11}{4}$ D) 3 E) $\frac{15}{4}$

Çözüm: $A(AIC)=8$ ve çemberin yarıçapı r olmak üzere,

$$A(AIC)=\frac{5\cdot r}{2}=8$$

$$r=\frac{16}{5}$$

dir. $A(BIC)=6$ olmak üzere,

$$A(BIC)=\frac{|BC|\cdot\frac{16}{5}}{2}=6$$

$$|BC|=\frac{15}{4}\ cm$$

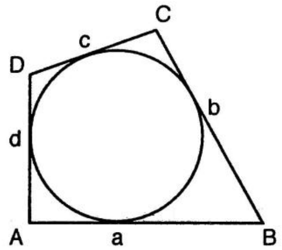
elde edilir.

Cevap: E

9. Çevresi 28 cm ve alanı 56 cm² olan bir teğetler dörtgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı kaç cm'dir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $u = \frac{28}{2} = 14$



ABCD teğetler dörtgeninin alanı;

$A(ABCD) = u \cdot r$

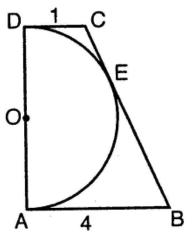
$56 = 14 \cdot r$

$r = 4 \text{ cm}$

olur.

Cevap: B

10.



O, yarım çemberin merkezi

A, D ve E teğet noktalarıdır.

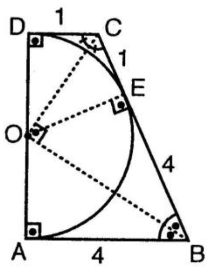
$|AB| = 4$ cm

$|CD| = 1$ cm

Verilere göre, O merkezli yarım daire diliminin yarıçapı nedir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90^0$ dir. $[CO]$ ve $[BO]$ çizildiğinde açıortay olur. $m(B\widehat{O}C) = 90^0$ ve $[OE] \perp [BC]$ çizilir. $|OE| = r$ olsun.



$|DC| = |CE| = 1$ ve $|AB| = |BE| = 4$

$|OE|^2 = |CE| \cdot |EB|$

$|OE|^2 = 1 \cdot 4$

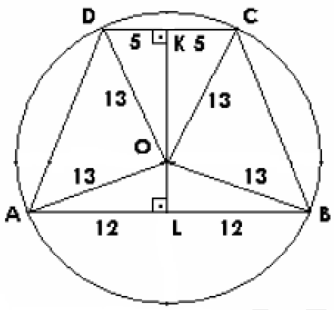
$r = |OE| = 2$ cm

Cevap: D

11. Yarıçapı 13 cm olan bir çemberin içine tabanları 24 cm ve 10 cm olan bir yamuk çiziliyor. Merkez yamuğun içinde olduğuna göre yamuğun alanı kaç cm² dir?

A) 272 B) 276 C) 280 D) 289 E) 290

Çözüm: Verilere göre aşağıdaki şekil çizilebilir.



Şekle göre $|DC| = 10$ cm, $|AB| = 24$ cm olacağından $|DK| = |KC| = 5$ cm, $|AL| = |LB| = 12$ cm ve $|OC| = |OB| = |OA| = |OD| = 13$ cm dir. Pisagor teoremine göre,

$|OK| = 12$ cm ve $|OL| = 5$ cm

olacağından yamuğun alanı,

$$A(ABCD) = \frac{(|AB|+|DC|)\cdot|KL|}{2} = \frac{(24+10)\cdot(12+5)}{2} = 289 \text{ cm}^2$$

olarak bulunur.

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.

7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.