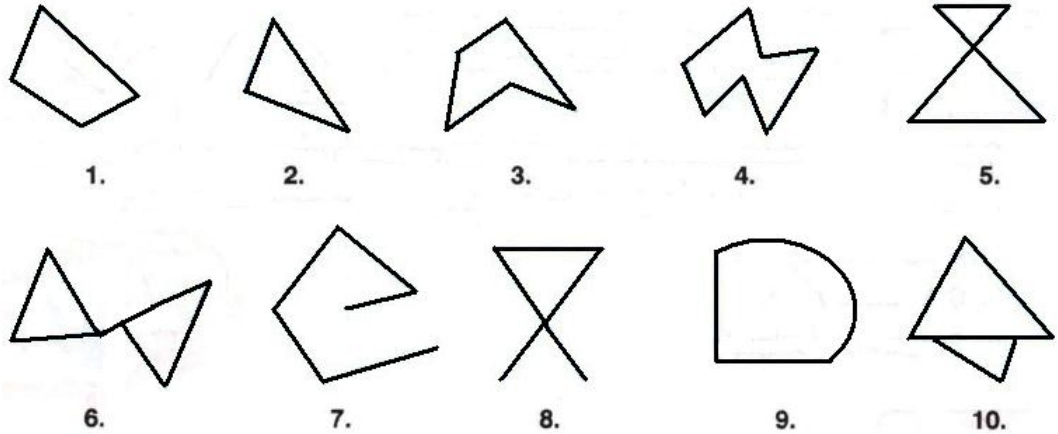
15. BÖLÜM
ÇOKGENLER

ÇOKGEN KAVRAMI

Çokgen tanımını yapmadan önce, aşağıdaki şekiller yardımıyla çokgen hakkında fikir edinmeye çalışalım.



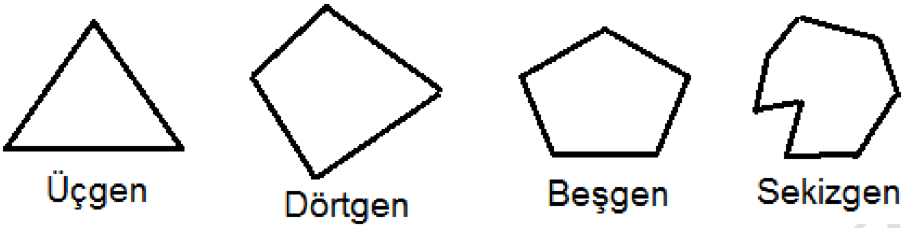
Bir geometrik şekle çokgen denilebilmesi için o şeklin aşağıda verilen özellikleri taşıması gerekir.

1. Kenarları doğru parçalarından oluşur.
2. Aynı noktada kesişen iki kenarı, aynı doğru üzerinde değildir.
3. Kenarları sadece uç noktalarında kesişir.
4. Bir uç noktası yalnız iki doğru parçası üzerindedir.
5. Kenarların oluşturduğu şekiller birer kapalı bölge sınırlar.

Bu özelliklere göre üstteki şekillerden, 1., 2., 3. ve 4. şekiller birer çokgendir. Diğer şekiller ise çokgen değildir.

15.1. Tanım: $n \in \mathbb{N}^+$ ve $n \geq 3$ olmak üzere, aynı düzlemdeki herhangi üçü doğru olmayan $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ noktalarında kesişen, $[A_1 A_2]$, $[A_2 A_3]$, … , $[A_n A_1]$ doğru parçalarının birleşim kümesine çokgen denir. $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ noktalarına çokgenin köşeleri; $[A_1 A_2]$, $[A_2 A_3]$, … , $[A_n A_1]$ doğru parçalarına çokgenin kenarları, kenarların oluşturduğu açılara da çokgenin açıları denir.

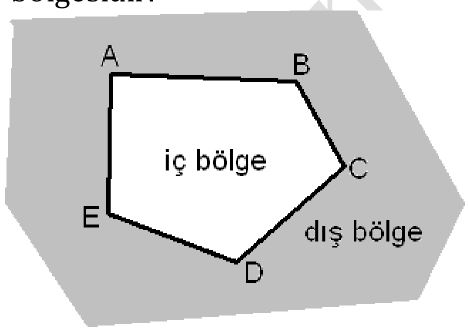
Çokgenler kenarları yardımıyla adlandırılırlar. Örneğin, kenar sayısı 3 olan çokgene üçgen, kenar sayısı 4 olan dörtgen, kenar sayısı 5 olan çokgene beşgen denir.



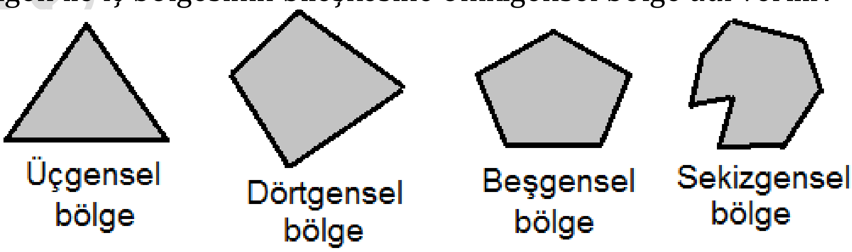
Çokgenlerin köşeleri, okumada kolaylık olması bakımından $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ yerine A,B,C,D, ... gibi büyük harflerle gösterilir. Kenarları ise a, b, c, ... gibi küçük harflerle gösterilir.

Her bir çokgen, içinde bulunduğu düzlemi üç ayrı kümeye ayırır. Bu kümeler;

1. Çokgenin iç bölgesi,
2. Çokgenin kendisi,
3. Çokgenin dış bölgesidir.

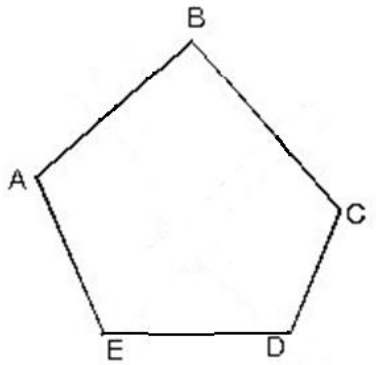


15.2. Tanım: Bir çokgenin kendisi ile içbölgesinin bileşkesine çokgensel bölge denir. Eğer üçgen ise üçgen ile içbölgesinin bileşkesine üçgensel bölge, dörtgen ise dörtgen ile iç bölgesinin bileşkesine dörtgensel bölge, onikigen ise onikigen ile iç bölgesinin bileşkesine onikigensel bölge adı verilir.

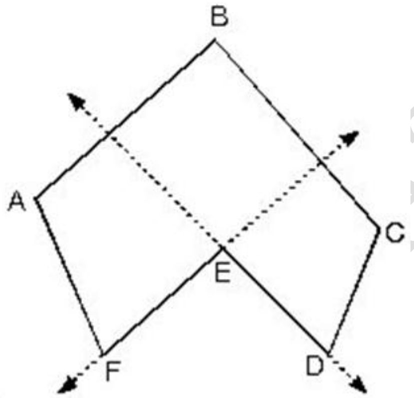


ÇOKGENLERDE İÇBÜKEYLİK ve DIŞBÜKEYLİK

15.3. Tanım: Herhangi bir çokgenin bütün kenarlarını uzattığımızda, bu uzantılar çokgeni kesmiyorsa bu çokgene dışbükey (konveks) çokgen, uzantılardan en az biri çokgeni kesiyorsa bu çokgene de içbükey (konkav) çokgen denir.

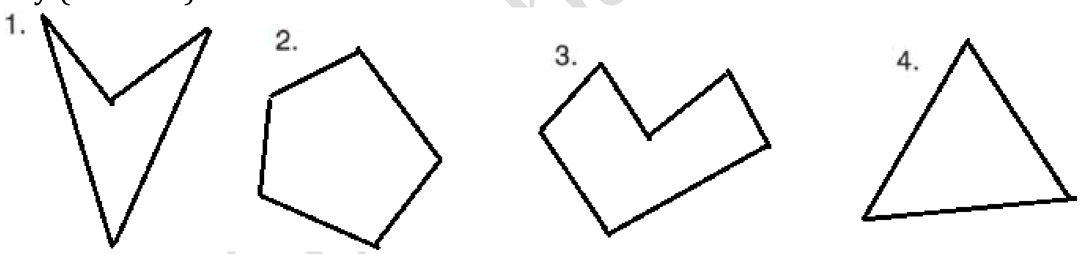


(Konveks-Dışbükey Çokgen)



(Konkav-İçbükey Çokgen)

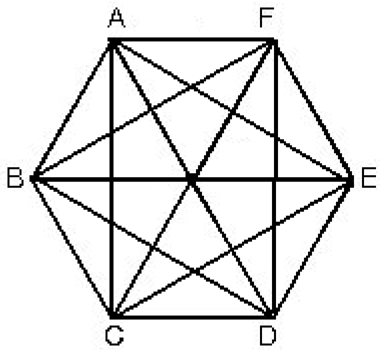
Örnek: Aşağıdaki şekillerden 1. ve 3. İçbükey (konkav), 2. ve 4. Dışbükey (konveks) dır.



KONVEKS ÇOKGENLERİN GENEL ÖZELLİKLERİ

15.4. Tanım: Bir çokgenin kenarları dışında köşeleri birleştiren doğru parçalarına çokgenin köşegenleri denir. Köşegenler çokgenin komşu olmayan iki köşesini birleştiren doğru parçalarıdır.

Örnek:



ABCDEF altıgenin [AC], [AD], [AE], [BD], [BE], [BF], [CE], [CF], [DF] köşegenleridir. Altıgenin 9 tane köşegeni vardır. A köşesinden geçen 3 tane köşegen vardır.

15.1. Teorem: n kenarlı bir dışbükey çokgenin köşegen sayısı,

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki çokgen $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ köşelerine sahip olsun.

A_1 noktasının köşegenleri

$$\{[A_1\ A_2], [A_2\ A_3], \ldots\ , [A_n\ A_1]\} \setminus \{[A_1\ A_2], [A_n\ A_1]\}$$

A_2 noktasının köşegenleri

$$\{[A_1\ A_2], [A_2\ A_3], \ldots\ , [A_n\ A_1]\} \setminus \{[A_1\ A_2], [A_2\ A_3]\}$$

A_3 noktasının köşegenleri

$$\{[A_1\ A_2], [A_2\ A_3], \ldots\ , [A_n\ A_1]\} \setminus \{[A_2\ A_3], [A_3\ A_4]\}$$

...

A_n noktasının köşegenleri

$$\{[A_1\ A_2], [A_2\ A_3], \ldots\ , [A_n\ A_1]\} \setminus \{[A_{n-1}\ A_n], [A_n\ A_1]\}$$

Buna göre bir çokgenin bütün köşegenlerinin birleştirilmesiyle elde edilen doğru parçalarının sayısı, ikişer ikişer kümelendirme yapılacağından n elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir. Bu doğru parçalarından n tanesi kenar diğerleri köşegendir. O halde, n kenarlı çokgenin köşegen sayısı,

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

olur.

Örnek: Altıgenin köşegen sayısını bulunuz.

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{6(6-3)}{2} = 9$$

tanedir.

Örnek: Köşegen sayısı 14 olan çokgenin kenar sayısını nedir?

Çözüm: $\frac{n(n-3)}{2} = 14$

$n^2 - 3n - 28 = 0$

$(n-7)(n+4) = 0$

$n = 7$

kenarlıdır.

15.1. Sonuç: n kenarlı bir çokgende, bir köşeden geçen köşegen sayısı $(n-3)$ tanedir.

Örnek: 12 kenarlı bir çokgenin;

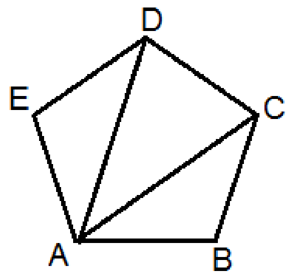
a) Bir köşesinden geçen köşegen sayısını,
b) Tüm köşelerinin sayısını bulunuz.

Çözüm: a) $n - 3 = 12 - 3 = 9$ tanedir.
b) $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{12(12-3)}{2} = 54$ tanedir.

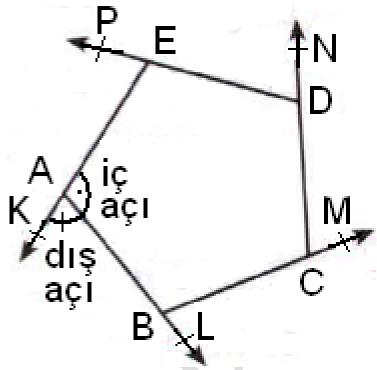
15.2. Teorem: n kenarlı bir çokgende, bir köşe, çokgeni $(n-2)$ tane üçgensel bölgeye ayırır.

İspat: n kenarlı bir çokgende, köşegen tanımına göre bir köşeden geçen köşegen sayısı $(n-3)$ tanedir. Bir köşeden geçen bu köşegenler $(n-2)$ tane üçgensel bölge olur.

Örnek: ABCDE beşgeninde A noktası, beşgeni $n - 2 = 5 - 2 = 3$ tane üçgensel bölgeye ayırır.



15.5. Tanım: Bir çokgenin komşu iki kenarının oluşturduğu açılara, çokgenin iç açıları, aynı köşedeki iç açının komşu bütünlerine de çokgenin dış açıları denir.



Şekilde $E\widehat{A}B, A\widehat{B}C, B\widehat{C}D, C\widehat{D}E, D\widehat{E}A$ iç açılar, $K\widehat{A}B, L\widehat{B}C, M\widehat{C}D, N\widehat{D}E, P\widehat{E}A$ dış açılardır.

15.1. Aksiyom: Bir iç açı ile dış açının toplamı 180^0 dir.

Bu kısımda üçgenin iç açıları toplamına ihtiyacımız vardır. Bu sebeple üçgenlerin iç açıları toplamı incelenecektir.

15.3. Teorem: n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı,

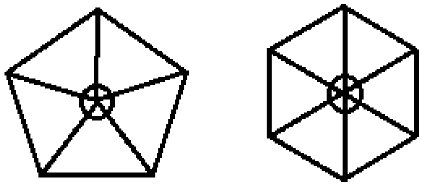
$$(n-2)\cdot 180^0$$

dir.

İspat: n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden çizilen köşegenler, çokgeni n tane üçgene ayırdığından, bu üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı, çokgenin iç açıları ölçüleri toplamından 360^0 fazladır. Buna göre iç açılarının ölçüleri toplamı,

$$n\cdot 180-360=(n-2)\cdot 180^0$$

olur.



Örnek: Bir dörtgenin iç açıları toplamı;

$$(n-2)\cdot 180 = (4-2)\cdot 180 = 360$$

Bir beşgenin iç açıları toplamı;

$$(n-2)\cdot 180 = (5-2)\cdot 180 = 540$$

olur.

Örnek: İç açılar toplamı 720^0 olan çokgenin kenar sayısı nedir?

Çözüm: $(n-2)\cdot 180 = 720$

$$n-2 = \frac{720}{180}$$

$$n = 6$$

altıgendir.

15.4. Teorem: n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı, 360^0 dir.

İspat: n kenarlı bir çokgenin iç ve dış açılarının ölçüleri toplamı $n\cdot 180$ dir. Bu toplamdan iç açıların ölçüleri toplamı olan $(n-2)\cdot 180^0$ çıkarılırsa,

$$n\cdot 180-(n-2)\cdot 180 = n\cdot 180 - n\cdot 180 + 360 = 360^0$$

olur.

Örnek: Dış açılarının ölçüleri toplamının iç açılarının ölçüleri toplamına oranı $\frac{2}{3}$ olan çokgenin kenar sayısını bulunuz.

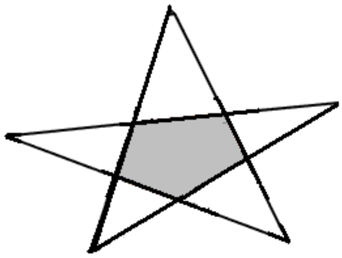
Çözüm: $\dfrac{360}{(n-2)180} = \dfrac{2}{3}$

$$\frac{2}{n-2} = \frac{2}{3}$$

$$n = 5$$

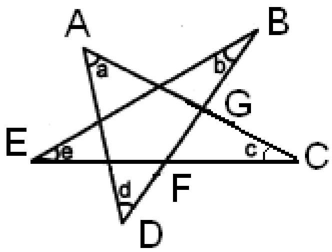
beşgendir.

15.6. Tanım: $n \in \mathbb{N}^{+}$ ve $n > 4$ olmak üzere dışbükey bir çokgenin kenarlarının uzatılmasıyla meydana gelen şekle yıldızıl denir.



Beşgen bir yıldızıl

15.5. Teorem: Beşgen olarak tanımlanan yıldızılın iç açılarının toplamı 180^0 dir.



$$a + b + c + d + e = 180^0$$

İspat: Bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir teoreminden

ADG üçgenine göre $m(F\widehat{G}C) = a + d$

EBF üçgenine göre $m(G\widehat{F}C) = b + e$

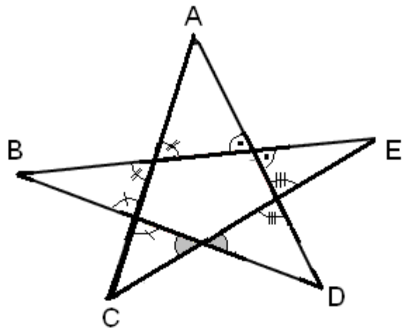
dir. CFG üçgenin iç açılar toplamından

$$a + b + c + d + e = 180^0$$

bulunur.

15.6. Teorem: n köşeli bir yıldızılın köşelerindeki açıların ölçüleri toplamı $(n - 4) \cdot 180^0$ dir.

İspat: Şekilde ABCDE çokgenin kenarlarının uzatılmasıyla çokgenin dışında 5 tane üçgen meydana gelir. Bu üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı, $5 \cdot 180^0$ dir. Bu toplam çokgenin dış açılarını ölçülerinin toplamının iki katı ile yıldızıl köşelerindeki açıların ölçüleri toplamıdır. Buna göre,

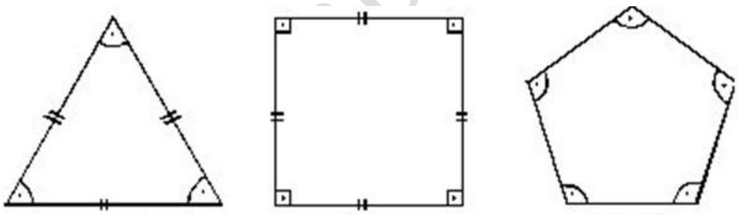


$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) + m(\hat{E}) + 2 \cdot 360 = 5 \cdot 180$$
$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) + m(\hat{E}) = 180$$

bulunur. Buna göre n köşeli bir yıldızılın köşelerindeki açıların ölçüleri toplamı $(n - 4) \cdot 180^0$ dir.

DÜZGÜN ÇOKGENLER

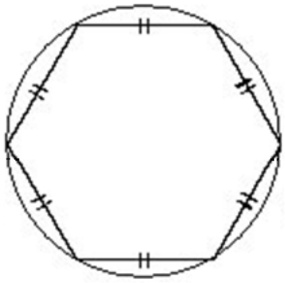
15.7. Tanım: Tüm açılarının ölçüleri ve kenarlarının uzunlukları birbirine eşit olan çokgenlere, düzgün çokgen denir. Düzgün çokgenler, düzgün üçgen (eşkenar üçgen), düzgün dörtgen (kare), düzgün beşgen, düzgün altıgen, … gibi adlandırılır.



eşkenar üçgen (düzgün üçgen) — Kare (düzgün dörtgen) — düzgün beşgen

15.2. Aksiyom: Her düzgün çokgenin tüm köşeleri bir çember üzerindedir.

Örnek: Düzgün altıgen şekildeki gibidir.



15.2. Sonuç: n kenarlı düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü,

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$$

dir.

Örnek: Düzgün bir üçgenin (eşkenar üçgenin) bir iç açısının ölçüsü;

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = \frac{(3-2)\cdot 180}{n} = 60^0$$

Düzgün bir dörtgenin (karenin) bir iç açısının ölçüsü;

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = \frac{(4-2)\cdot 180}{n} = 90^0$$

Düzgün bir beşgenin bir açısının iç ölçüsü;

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = \frac{(5-2)\cdot 180}{n} = 108^0$$

Düzgün bir altıgenin bir açısının iç ölçüsü;

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = \frac{(6-2)\cdot 180}{n} = 120^0$$

olur.

Örnek: Bir iç açısının ölçüsü 140^0 olan düzgün çokgenin kaç kenarlı olduğunu bulunuz.

Çözüm: Çokgenin kenar sayısı n olsun.

$$\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = 140$$

$$180n - 360 = 140n$$

$$n = 9$$

dokuzgen olur.

15.3. Sonuç: n kenarlı düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü,

$$\frac{360^0}{n}$$

dir.

Örnek: Düzgün bir üçgenin (eşkenar üçgenin) bir dış açısının ölçüsü;

$$\frac{360}{n} = \frac{360}{3} = 120^0$$

Düzgün bir dörtgenin (karenin) bir dış açısının ölçüsü; $\frac{360}{4} = 90^0$

Düzgün bir beşgenin bir dış açısının ölçüsü; $\frac{360}{5} = 72^0$

Düzgün bir altıgenin bir dış açısının ölçüsü; $\frac{360}{6} = 60^0$

olur.

Örnek: Bir dış açısının ölçüsünün, bir iç açısının ölçüsüne oranı $\frac{2}{7}$ olan düzgün çokgenin kaç kenarlı olduğunu bulunuz.

Çözüm: Çokgenin kenar sayısı n ise

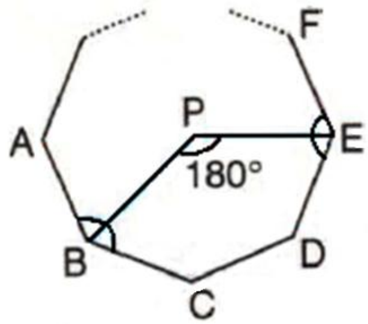
$$\frac{\frac{360}{n}}{\frac{(n-2)\cdot 180}{n}} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{2}{n-2} = \frac{2}{7}$$

$$n = 9$$

olur.

Örnek: Verilen şekilde ABCDE… düzgün çokgendir. [PE] ve [PB] sırasıyla E ile B açılarının açıortaylarıdır. $m(B\widehat{P}E) = 108^0$ olduğuna göre, bu çokgenin kenar sayısını bulunuz.



Çözüm: $m(P\hat{B}A) = m(P\hat{B}C) = m(P\hat{E}D) = m(P\hat{E}F) = x$ alırsak, $m(\hat{C}) = m(\hat{D}) = 2x$ olur.

PBCDE bir beşgen ise

$$2x + 2x + x + x + 108 = (5-2) \cdot 180$$
$$6x + 108 = 540$$
$$x = 10$$

olur.

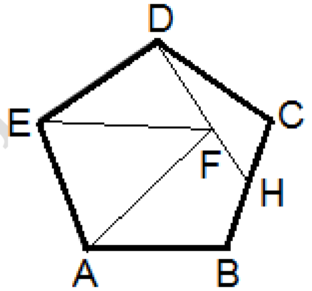
Örnek: Düzgün bir dokuzgenin dış açılarının ölçüleri $\frac{1}{8}$ i kadar büyültülerek yeni bir düzgün çokgen elde ediliyor. Yeni düzgün çokgenin kenar sayısını bulunuz.

Çözüm: Elde edilecek yeni düzgün çokgenin kenar sayısı n olsun.

$$\frac{360}{n} = \frac{360}{9} + \frac{360}{9} \cdot \frac{1}{8} = 40 + 5$$
$$n = 8$$

olur.

Örnek: Yandaki şekilde ABCDE düzgün beşgen, $\overset{\Delta}{AFE}$ ise eşkenar üçgendir. D, F, H noktaları doğrusal ise DHC açısının ölçüsünü nedir?



Çözüm: Düzgün beşgenin bir iç açısının ölçüsü,

$$\frac{(5-2) \cdot 180}{2} = 108^0$$

dir. $m(A\hat{E}F) = 60$, $m(F\hat{E}D) = 108 - 60 = 48$ olur.

Düzgün beşgen olduğundan $|AE| = |ED|$

Eşkenar üçgen olduğundan $|AE| = |EF|$

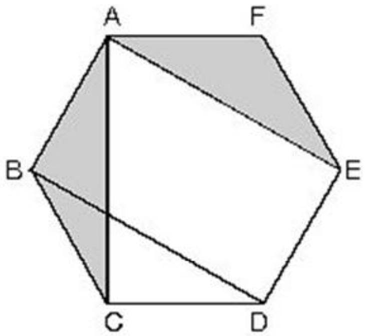
olup $|EF| = |ED|$ dir. Buna göre $\overset{\Delta}{FED}$ ikizkenar üçgen olur. İkizkenar üçgenin tepe açısı 48^0 olduğundan diğer açıları $m(E\hat{D}F) = m(E\hat{F}D) = 66$ olur. O halde,

$$m(H\hat{D}C) = m(E\hat{D}C) - m(E\hat{D}F) = 108 - 60 = 42$$
$$m(H\hat{D}C) + m(D\hat{C}H) + m(D\hat{C}H) = 180$$

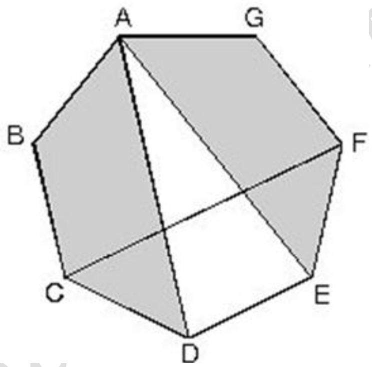
$$42 + 108 + m(D\hat{C}H) = 180$$
$$m(D\hat{C}H) = 30^0$$
elde edilir.

15.2. Aksiyom: Düzgün çokgenlerde eşit sayıda kenarı birleştiren köşegenler birbirine eşittir.

Örnek: Şekilde altıgen ve yedigenin köşegenleri birbirine eşit olduğu görülmektedir.



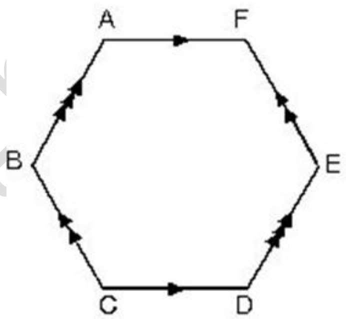
$|AC| = |BD| = |AE|$



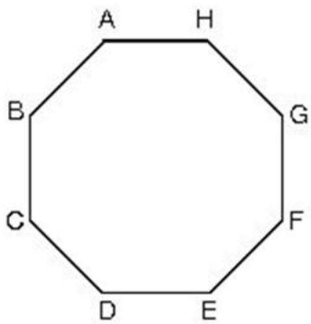
$|AD| = |CF| = |AE|$

15.3. Aksiyom: Kenar sayısı çift olan düzgün çokgenlerde karşılıklı kenarlar paraleldir.

Örnek: Şekilde altıgen ve sekizgenin karşılıklı kenarlar paraleldir.

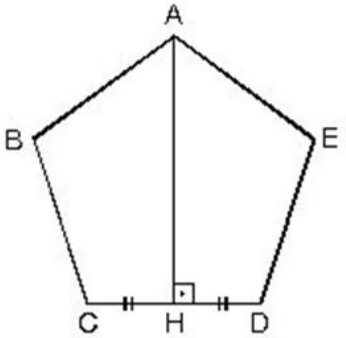


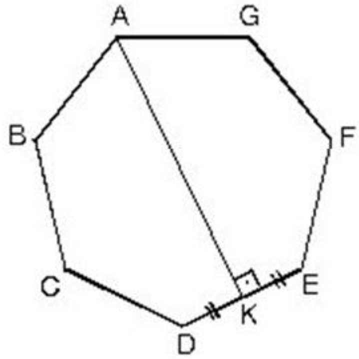
[AF] // [CD], [AB] // [DE], ...



[AH] // [DE], [AB] // [FE], ...

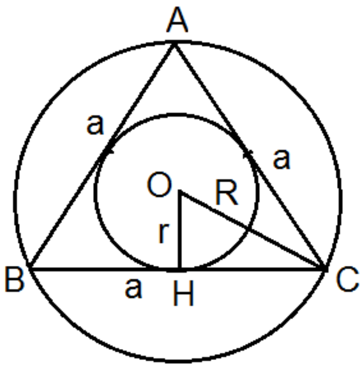
15.4. Aksiyom: Kenar sayısı tek olan düzgün çokgenlerde karşı kenara çizilen dik karşı kenarı ortalar. Buna göre köşeden kenarın ortasına çizilen doğru parçası kenarı diktir.

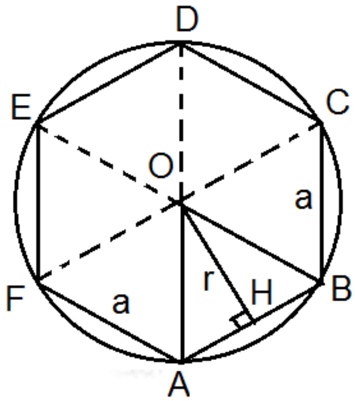




ÇOKGENLERDE ALAN

15.8. Tanım: Her düzgün çokgenin köşelerinden geçen bir çemberi ve kenarlarına teğet olan ikinci bir çemberi vardır. Köşelerinden geçen çemberine düzgün çokgenin çevrel çemberi, kenarlarına teğet olan çemberine de düzgün çokgenin iç teğet çemberi denir.





Üstteki şekilde görüldüğü gibi ABC eşkenar üçgeni ile ABCDEF düzgün altıgenin çevrel çemberi ile iç teğet çemberleri çizilmiştir. Bu iki şekilde de;

- r iç teğet çemberinin yarıçapı,
- R çevrel çemberinin yarıçapı,
- O noktası, çevrel çemberi ile iç teğet çemberinin ortak merkezidir. Bu nokta aynı zamanda düzgün çokgenin de merkezidir.

15.9. Tanım: Düzgün çokgenin merkezi ile bir köşesi arasındaki uzaklığa düzgün çokgenin yarıçapı denir.

15.10. Tanım: Düzgün çokgenin bir kenarını gören merkez açıya, düzgün çokgenin merkez açısı denir.

Yukarıdaki 2. şekilde AOB, BOC, DOE, EOF ve FOA açıları ABCDEF düzgün altıgenin merkez açılarıdır. Bu açıların ölçüleri birbirine eşittir.

15.11. Tanım: Düzgün bir çokgenin merkezinin herhangi bir kenara olan uzaklığına, o düzgün çokgenin iç teğet çemberinin yarıçapı (apotemi) denir.

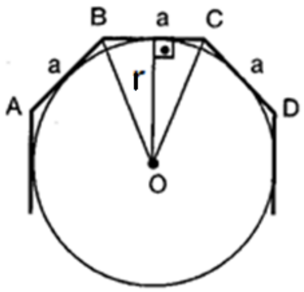
Üstteki şekillerde $|OH| = r$ çokgenin apotemidir. //

15.1. Not: r yarıçaplı bir çemberin içine ve dışına çizilen 6, 12, 24, 48, 96, ... kenarlı düzgün çokgenlerin çevre uzunlukları, çemberin çapı cinsinden hesaplanırsa aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Kenar Sayısı	İçine Çizile Çokgenlerin Çevresi	Dışına Çizile Çokgenlerin Çevresi
6	2r . 3,00000000	2r . 3,46410161
12	2r . 3,10582854	2r . 3,21539030
24	2r . 3,13262861	2r . 3,15965994
48	2r . 3,13935020	2r . 3,14608621
96	2r . 3,14103195	2r . 3,14271459
192	2r . 3,14145247	2r . 3,14187305
384	2r . 3,14155761	2r . 3,14166274
768	2r . 3,14158389	2r . 3,14161017
1536	2r . 3,14159046	2r . 3,14159703

Şimdi düzgün çokgenin alanını bulmak için üç tane teorem verilecektir.

15.8. Teorem: Bir düzgün çokgenin alanı, çevresinin uzunluğu ile iç teğet çemberinin yarıçapının (apoteminin) uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir.



$$A = \frac{n \cdot a \cdot r}{2}$$

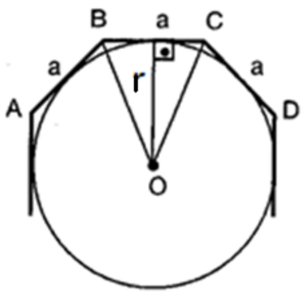
İspat: Şekilde görüldüğü gibi, düzgün bir çokgeni, tepe noktası merkezde olan n kenar sayısı kadar eş üçgenlere ayırabiliriz. Bir kenar uzunluğu a ve kenar sayısı n olan bir düzgün çokgenin çevresi, $Ç = n \cdot a$ olur.

Düzgün çokgenin apotemi r ise n tane ikizkenar üçgenin her birinin alanı $A(B\overset{\Delta}{O}C) = \frac{a \cdot r}{2}$ dir. O halde düzgün çokgenin alanı;

$$A = n \cdot A(B\overset{\Delta}{O}C) = \frac{n \cdot a \cdot r}{2}$$

bulunur.

15.9. Teorem: Bir düzgün alanını, çokgenin iç teğet çemberinin yarıçapı (apotemi) ile çokgen içinde oluşan bir üçgenin kenarlarının çarpımına eşittir.



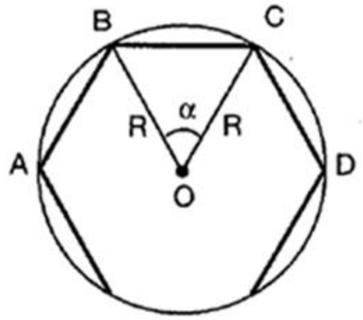
$$A = u \cdot r$$

İspat: 15.8. Teoremde BOC üçgeninde $u = \frac{Ç}{2}$ alınırsa,

$$A = \frac{n \cdot a \cdot r}{2} = \frac{Ç \cdot r}{2} = u \cdot r$$

bulunur.

15.10. Teorem: n kenarlı bir düzgün çokgenin çevrel çemberinin yarıçapı R ve merkez açısının ölçüsü α ise, bu düzgün çokgenin alanı,



$$A = \frac{n \cdot R^2}{2} \sin \alpha$$

dır.

İspat: Şekilde görüldüğü gibi, düzgün çokgen, tepe noktaları O olan, n tane ikizkenar üçgene ayrılır. Trigonometrideki sinüs teoreminden,

$$A(BOC) = \frac{R^2}{2} \sin \alpha$$

dır. n tane üçgen için, düzgün çokgenin alanı,

$$A = n \cdot A(BOC) = \frac{n \cdot R^2}{2} \sin \alpha$$

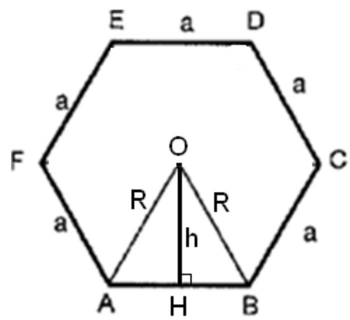
bulunur.

Örnek: Alanı $A = 108\sqrt{3}\ cm^2$ olan düzgün bir altıgenin;

a) Çevrel çemberinin yarıçapının uzunluğu,

b) Apoteminin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



a) Düzgün altıgenin merkez açısının ölçüsü,

$$m(A\widehat{O}B) = \frac{360}{6} = 60^0$$

dir. Buna göre OAB üçgeni eşkenar üçgendir.

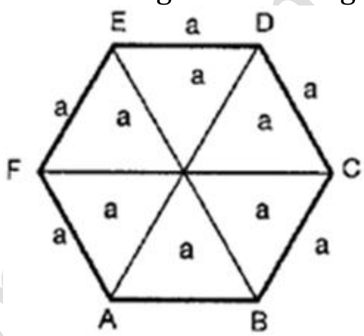
$$A(OAB) = \frac{A(ABCDEF)}{6} = \frac{108\sqrt{3}}{6} = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$
$$A(OAB) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$a = R = 12\ \text{cm}$$

b) Apotemi h ve OAB eşkenar üçgeninin yüksekliği olduğundan,
$$\frac{a \cdot h}{2} = 18\sqrt{3}$$
$$h = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$$
bulunur. //

Şimdi de özel olarak düzgün beşgen ve düzgün altıgenin alanları ve köşegen uzunlukları hakkında bilgi vereceğiz.

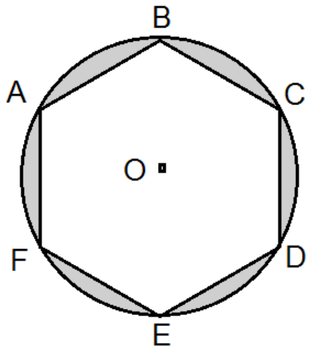
15.11. Teorem: Kenar uzunluğu a olan düzgün altıgenin alanı,



$$A = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$$
dir.

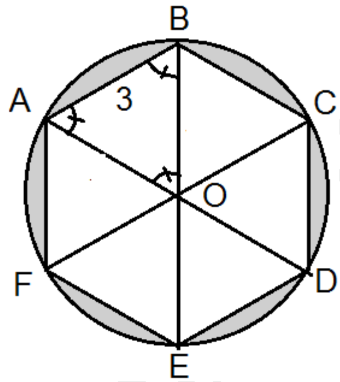
İspat: Düzgün altıgenin alanı, 6 tane eşkenar üçgenin alanına eşittir. Bir kenarı a olan eşkenar üçgenin alanı $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olduğundan,
$$A = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$$
elde edilir.

Örnek: Şekilde, O merkezli çember ABCDEF düzgün altıgenin çevrel çemberidir.



$|AB| = 3$ cm ise taralı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



Şekilde de görüldüğü gibi düzgün altıgenin bir merkez açısı $\frac{360}{6} = 60^0$ dir. Oluşan üçgenlerin hepsi eşkenardır. Buna göre çemberin yarıçapı $r = |OA| = 3$ cm dir. O halde taralı bölgenin alanı,

$$A_T = \pi r^2 - \frac{n \cdot r^2}{2} \sin 60 = \pi 3^2 - \frac{6 \cdot 3^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\pi - \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

bulunur. //

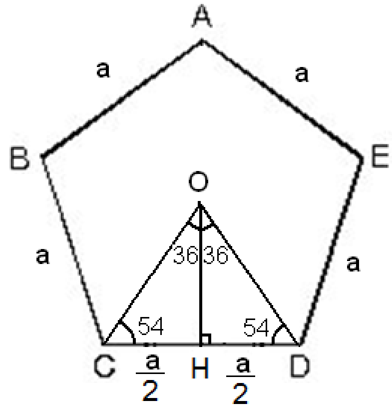
Şimdi verilecek olan teoremin ispatında bazı trigonometrik bilgilere ihtiyaç vardır. (Bu bilgiler için bkz. trigonometri konusu)

15.12. Teorem: Kenar uzunluğu a olan düzgün beşgenin alanı,

$$A_T = \frac{5a^2}{4} \tan 54$$

dir.

İspat: Düzgün bir beşgenin bir açısının iç ölçüsü $\frac{(5-2) \cdot 180}{5} = 108^0$ dir.



Buna göre düzgün beşgende çizilebilecek COD üçgeni şekildeki gibidir. Burada $|\mathrm{OD}| = \mathrm{t}$ seçelim. Bu takdirde,

$$|\mathrm{OH}| = \mathrm{t}\sin 54,\ |\mathrm{HD}| = \mathrm{t}\cos 54$$

olur. Burada

$$|\mathrm{CD}| = 2\mathrm{t}\cos 54 = a$$

olduğundan

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{a}}{2\cos 54},\ |\mathrm{OH}| = \frac{\mathrm{a}\sin 54}{2\cos 54}$$

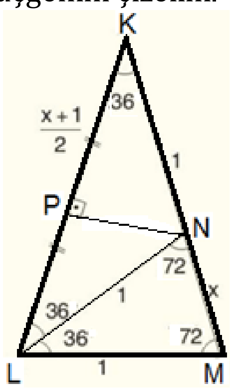
$$\mathrm{A(OCD)} = \frac{|\mathrm{CD}|\cdot|\mathrm{OH}|}{2} = \frac{\mathrm{a}\cdot\frac{\mathrm{a}\sin 54}{2\cos 54}}{2} = \frac{\mathrm{a}^2}{4}\tan 54$$

$$\mathrm{A} = 5\cdot \mathrm{A(OCD)} = \frac{5\mathrm{a}^2}{4}\tan 54$$

bulunur.

15.2. Not: $\sin 54 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos 54 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ve $\tan 54 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$ dir.

Gerçekten; şekildeki gibi KLM üçgenini çizelim.



$|\mathrm{LM}| = 1$ olsun. $\mathrm{N} \in [\mathrm{KM}]$ ve $|\mathrm{LN}| = 1$ olacak şekilde N noktasını işaretleyelim. N'den KL'ye [PN] dikmesini inelim. $m(\widehat{KLN}) = 36^0$ olur. Bu nedenle,

$$|LN| = |KN| = 1$$

ve P orta nokta olur.

$$|MN| = x \text{ ise } |KP| = \frac{|KN|}{2} = \frac{|KM|}{2} = \frac{x+1}{2}$$

dir. $K\overset{\Delta}{L}M \sim L\overset{\Delta}{M}N$ olduğundan

$$\frac{|KL|}{|LM|} = \frac{|LM|}{|MN|} = \frac{|MK|}{|LN|}$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{1}{x}$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

bulunur. Buna göre,

$$|KP| = \frac{x+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

olur. Pisagor teoreminden,

$$|PN| = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\sin 54 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \cos 54 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

$$\tan 54 = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$$

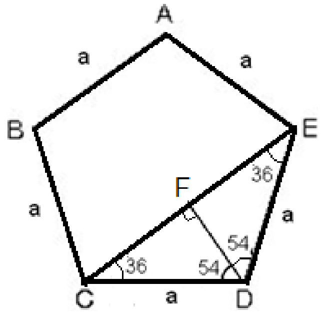
olur.

15.12. Teorem: Kenar uzunluğu a olan düzgün beşgenin köşegen uzunluğu,

$$A = a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

dir.

İspat:



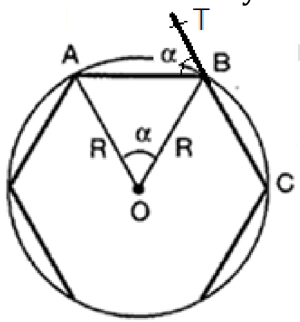
15.11. Teoreminde $36 - 72 - 90$ üçgeninin değeri tespit edilmişti. Buna göre,

$$|CF| = a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$

$$|CE| = 2|CF| = a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

olur.

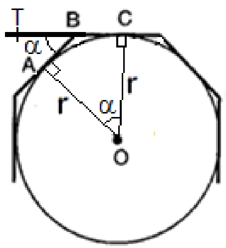
15.13. Teorem: Düzgün bir çokgenin her bir dış açısının ölçüsü, çokgenin kenarlarının çevrel çember üzerinden ayırdığı yayın ölçüsüne eşittir.



$$m(A\widehat{O}B) = m(A\widehat{B}T)$$

İspat: n kenarlı bir düzgün çokgenin her bir kenarına ait merkez açının ölçüsü $\frac{360}{n}$, çember üzerinde ayırdığı yayın ölçüsü de $\frac{360}{n}$ olduğundan eşitlik vardır.

15.14. Teorem: Düzgün bir çokgenin iç teğet çemberinin ardışık iki teğetinin arasında kalan yayın ölçüsü, düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsüne eşittir.



$m(A\hat{O}C) = m(A\hat{B}T)$

İspat: İç teğet çembere teğet olan kenarortaylardan merkeze çizilen yarıçaplar kenarlara dik olduğundan,

$$m(A\hat{O}C) + m(A\hat{B}C) = 180$$

yazılabilir. $m(A\hat{T}B)$ bütünler açı olduğundan,

$$m(A\hat{T}B) + m(A\hat{B}C) = 180$$
$$m(A\hat{O}C) + m(A\hat{B}T) = 180$$

bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Bir onbeşgenin bir köşesinden kaç tane üçgene ayrılır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: 15.2. teorem gereği;

$$n - 2 = 15 - 2 = 13$$

tane bölgeye ayrılır.

Cevap: D

2. 8 kenarlı dışbükey bir çokgenin köşegen sayısı kaçtır?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

Çözüm: $\dfrac{n(n-3)}{n} = \dfrac{8(8-3)}{n} = 20$

Cevap: A

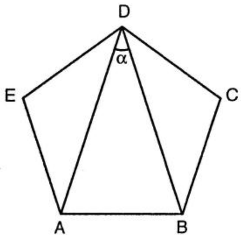
3. 10 kenarlı bir düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 120 B) 121 C) 132 D) 136 E) 144

Çözüm: $\dfrac{(n-2)\cdot 180}{n} = \dfrac{(10-2)\cdot 180}{10} = 144^0$

Cevap: E

4.



ABCDE bir düzgün beşgen.

[AD] ve [DB] köşegen

Verilere göre, $m(A\widehat{D}B) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 35 B) 36 C) 38 D) 40 E) 44

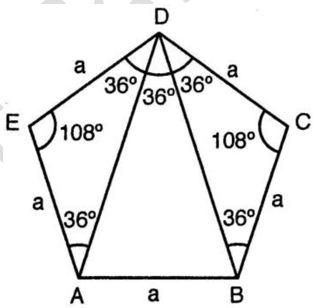
Çözüm: Düzgün beşgenin bir iç açısı 108^0 olduğundan

$$m(\widehat{E}) = m(\widehat{C}) = 108^0$$

olur. AED ve DCB ikizkenar üçgen olduğundan

$$m(E\widehat{A}D) = m(A\widehat{D}E) = m(B\widehat{D}C) = m(C\widehat{B}D) = 36^0$$

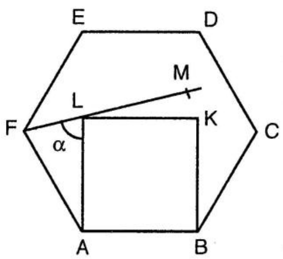
bulunur.



$$m(C\widehat{B}D) = 108 - 36 - 36 = 36^0$$

Cevap: B

5.



ABCDEF düzgün altıgen

ABKL kare

F, L, M noktaları doğrusal

Verilere göre, $m(A\widehat{L}F) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85

Çözüm: Düzgün altıgenin bir iç açısı 120^0 dir. $m(L\widehat{A}B) = 90^0$ olduğundan $m\left(L\widehat{A}F\right) = 120 - 90 = 30^0$ dir.

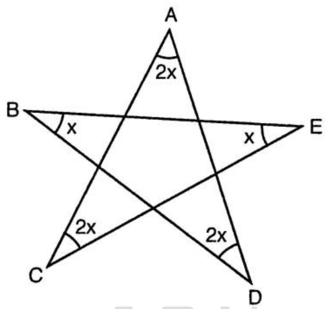
$|FA| = |AB| = |AL|$ ve FAL üçgenin iç açılar toplamında;

$$\alpha = m\left(L\widehat{A}F\right) = \frac{180 - 30}{2} = 75^0$$

bulunur.

Cevap: C

6.



Verilere göre, $m(C\widehat{A}D) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

Çözüm: 15.5. teorem gereğince;

$$2x + x + 2x + 2x + x = 180$$
$$8x = 180$$
$$\alpha = 2x = \frac{8x}{4} = \frac{180}{4} = 45^0$$

bulunur.

Cevap: A

7. Bir konveks çokgenin iç açılar toplamı dış açılar toplamının 3 katıdır. Buna göre, bu çokgen kaç kenarlıdır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Konveks çokgenlerde;

Dış açılar toplamı $= 360^0$

İç açılar toplamı $= (n - 2) \cdot 180^0$

$(n - 2) \cdot 180 = 3 \cdot 360$

$$n = 8$$

kenarlıdır.

Cevap: D

8. Bir konveks çokgenin bir köşesinden 13 adet köşegen çizilebilmektedir. Buna göre, bu çokgenin toplam kaç köşegeni vardır?

A) 102 B) 104 C) 107 D) 108 E) 110

Çözüm: Bütün konveks çokgenlerde bir köşeden (n-3) tane köşegen çizilir. Buna göre;

$$n - 3 = 13 \text{ ise } n = 16$$

onaltıgendir. Köşegen sayısı;

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2} = \frac{16\cdot(16-3)}{2} = 104$$

tanedir.

Cevap: B

9. Bir iç açısının bir dış açısına oranı 3 olan düzgün konveks çokgen kaç kenarlıdır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Çözüm: Düzgün çokgenlerde;

İç açısının ölçüsü, $\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$

Dış açısının ölçüsü, $\frac{360^0}{n}$

ise

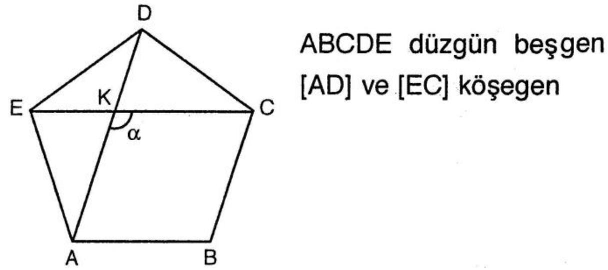
$$\frac{\frac{(n-2)\cdot 180}{n}}{\frac{360}{n}} = 3$$

$$n = 8$$

olur.

Cevap: E

10.



Verilere göre, $m(A\widehat{K}C) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 105 B) 106 C) 108 D) 110 E) 112

Çözüm: Düzgün beşgenin bir iç açısı 108^0 dir.
$|DE| = |DC| = a$ alınırsa EDC üçgeninde

$$m(E\widehat{D}C) = m(D\widehat{C}E) = \frac{180-108}{2} = 36^0$$

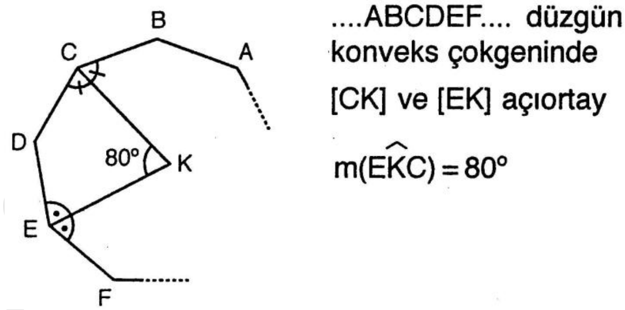
olur. Yine $|EK| = |KD|$ alınırsa EKD üçgeni;

$$\alpha = m(E\widehat{K}D) = m(A\widehat{K}C) = 180 - 36 - 36 = 108^0$$

bulunur.

Cevap: C

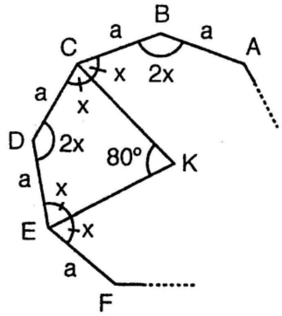
11.



Verilere göre bu çokgen kaç kenarlıdır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Çözüm: Düzgün çokgenin bütün kenarları eşit ölçüde olduğundan aşağıdaki şekil çizilebilir.



CDEK dörtgeninin iç açıları $x + 2x + x + 80 = 360$ ise $x = 70^0$ dir.
Düzgün çokgenin bir iç açısı $2x = 140^0$ dir.
Bu düzgün çokgenin dış açısı $180 - 140 = 40^0$ dir.

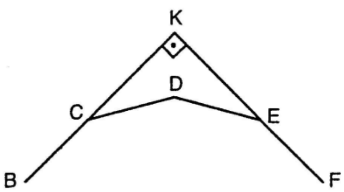
$$\frac{360}{n} = 40$$

$$n = 9$$

olur.

Cevap: D

12.



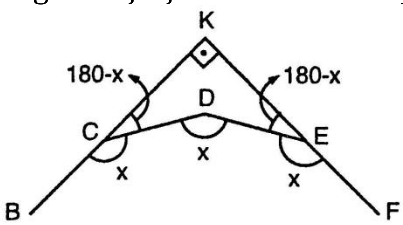
....BCDEF.... düzgün kon-veks çokgen

$m(\widehat{BKF}) = 90^\circ$

Verilere göre bu çokgen kaç kenarlıdır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Çözüm: Düzgün çokgenin iç açıları x alınırsa dış açıları $180 - x$ dir.



2.5. teorem gereği;

$$180 - x + 180 - x + 90 = x$$

$$x = 150^0$$

dir. Bir iç açısı 150^0 ise dış açısı 30^0 dir. Buna göre;

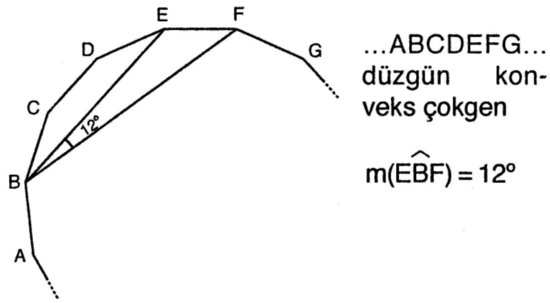
$$\frac{360}{n} = 30$$

$$n = 12$$

olur.

Cevap: A

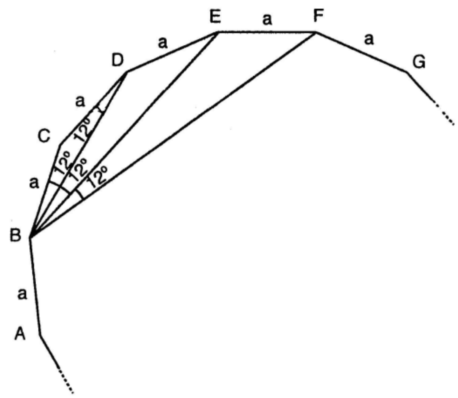
13.



Verilere göre bu çokgen kaç kenarlıdır?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

Çözüm: [BD] doğru parçasını çizersek, aşağıdaki şekli elde ederiz.



$|BC| = |DC| = a$ alınırsa $m(C\hat{B}D) = m(C\hat{D}B) = 12^0$ olur. Buna göre bu çokgenin dış açısı $12 + 12 = 24^0$ olur.

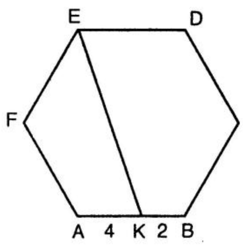
$$\frac{360}{n} = 24$$

$$n = 15$$

olur.

Cevap: C

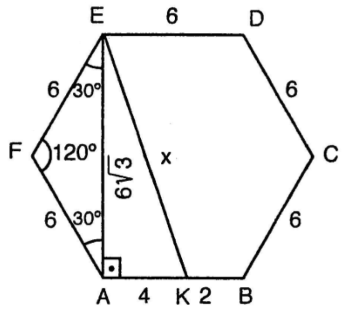
14.



Verilere göre, |EK| kaç cm'dir?

A) $\sqrt{29}$ B) $\sqrt{31}$ C) $2\sqrt{28}$ D) $2\sqrt{29}$ E) $2\sqrt{31}$

Çözüm: Düzgün altıgenin bütün iç açıları 120^0 ve verilere göre bir kenarı 6 cm'dir. [AE] doğrusunu çizersek, AFE üçgeni $30 - 30 - 120$ üçgenini oluşturur.



$|FE| = |FA| = 6$ ise $|AE| = 6\sqrt{3}$
olur. Pisagor teoreminden,

$$|EK|^2 = |EA|^2 + |AK|^2$$
$$= (6\sqrt{3})^2 + 4^2$$
$$|EK| = 2\sqrt{31} \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: E

15. Verilen bir çokgen 15 tane eleman ile belirtilebildiğine göre, kenar sayısı en az kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: n kenarlı bir konveks çokgenin çizilebilmesi için en az (2n−3) elamanı verilmelidir. Buna göre;

$$2n - 3 = 15$$
$$n = 9$$

olarak bulunur.

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.
3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.