16. BÖLÜM
ÜÇ BOYUTLU CİSİMLER
(PRİZMA ve PİRAMİT)

ÜÇ BOYUTLU CİSİMLER ve SINIFLANDIRILMASI

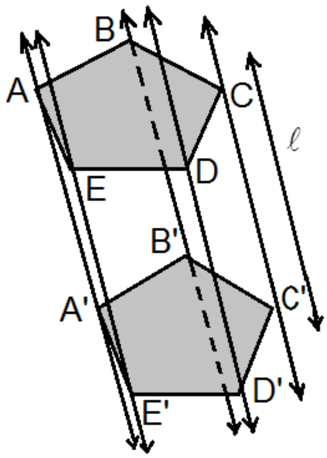
16.1. Tanım: Üç boyutlu uzayda yer kaplayan tüm nesnelere üç boyutlu cisim (katı cisim) ya da kısaca cisim denir. Belli bir geometrik şekle göre üç boyutlu cisimler gruplandırılır. Bunlar;

1- Prizma
   a) Dik Prizma
   b) Eğik Prizma
   c) Dikdörtgenler Prizması
   d) Kare Prizma
   e) Üçgen Prizma
   f) Küp
2- Piramit
   a) Düzgün Piramit
   b) Düzgün Dörtyüzlü
   c) Düzgün Sekizyüzlü
3- Silindir
   a) Dik Silindir
   b) Eğik Silindir
4- Küre
5- Koni

şeklinde sınıflandırılır.

PRİZMA

16.2. Tanım: Uzayda, düzlemsel bir çokgen ile bu çokgenin düzlemine paralel olmayan bir ℓ doğrusu verilsin. ℓ doğrusuna paralel olarak çokgenin kenarları üzerinde hareket eden d doğrusunun oluşturduğu yüzeye **prizmatik yüzey** denir.



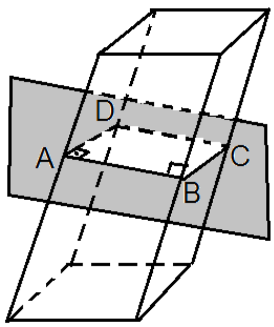
Beşgen prizmatik yüzey, [AA'], [BB'], [CC'], [DD'], [EE'] ayrıtları

16.3. Tanım: ℓ doğrusuna paralel, çokgenin kenarlarına dayanak hareket eden d doğrusuna **prizmatik yüzeyin ana doğrusu** denir.

16.4. Tanım: Çokgenin köşelerinden geçen ve ℓ doğrusuna paralel olan doğrulara **yan ayrıtlar** denir. Ardışık iki yan ayrıt arasında kalan düzlem parçalarına prizmanın yan yüzleri denir. Prizmatik **yüzeyin yan yüzleri**, çokgenin kenar sayısı kadardır.

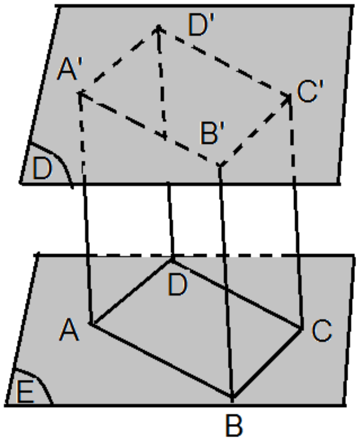
Yukarıdaki şeklin d doğrularının oluşturduğu 5 tane yan yüzeyi vardır.

16.5. Tanım: Prizmatik yüzeyin bir düzlemde ara kesitine bu **prizmatik yüzeyin bir kesiti** denir. Bir prizmatik yüzeyin kesit düzlemi yan ayrıtlarına dik ise prizmatik yüzeyin dik kesiti oluşur.



Şekilde, ABCD dörtgenine bir dik kesittir.

16.6. Tanım: Bir prizmatik yüzey paralel iki düzlemle kesilirse, bu düzlemler arasında kalan kapalı cisme **prizma** denir. Birbirine eş bu düzlem parçasına da prizmanın tabanları denir.

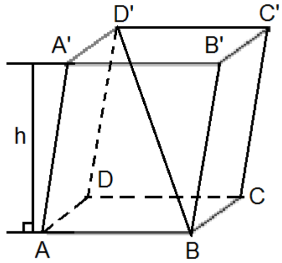


16.7. Tanım: Prizmanın taban köşelerinden geçen ve ana doğrusuna paralel olan doğru parçalarına **prizmanın yan ayrıtları**, taban kenarlarına **taban ayrıtları**, ardışık iki yan ayrıt arasında kalan düzlem parçasına da **prizmanın yan yüzleri** denir.

Yukarıdaki şekilde ABCD dörtgen prizmada;
ABCD dörtgeni alt taban,
A'B'C'D' dörtgeni üst taban,

[AA'], [BB'], [CC'], [DD'] doğru parçaları yan ayrıtlar,
[AB], [BC], [CD], [DA] doğru parçaları taban ayrıtlar,
ABB'A', BCC'B', CDD'C' ve ADD'A' dörtgenleri yan yüzler,

16.8. Tanım: Bir prizmada bir köşe ile bu köşeden geçmeyen yüzlerin ortak noktalarını birleştiren doğru parçasına **cisim köşegeni** denir.



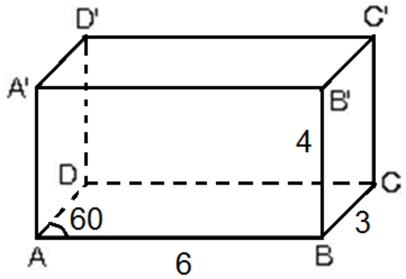
Şekle göre [D'B] doğrusu bir cisim köşegenidir

16.9. Tanım: Prizmanın taban düzlemleri arasındaki uzaklığa prizmanın yüksekliği denir.

Yukarıdaki şekle göre h yüksekliktir.

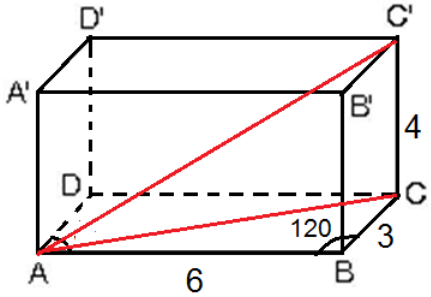
Prizmalar tabanlarını oluşturan çokgenlere ve yan ayrıtlarının taban düzlemi ile konumlarına göre adlandırılır. Prizmanın tabanı üçgense, üçgen prizma; dörtgense, dörtgen prizma, ... n-gense, n-gen prizma gibi. Eğer prizmanın tabanı düzgün ise düzgün prizma olarak adlandırılır. Mesela, tabanlar düzgün beşgen ise düzgün beşgen prizma gibi.

Örnek: Şekildeki dik paralel yüzlünün tabanı bir paralelkenar olup, dar açısı 60^0 ve ayrıtları 6 cm, 3 cm ve 4 cm'dir.



Verileri kullanarak [AC'] cisim köşegeninin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Önce [AC] köşegenini çizelim. Kosünüs teoreminden,



$$|AT|^2 = 6^2 + 3^2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$
$$|AT| = 3\sqrt{7}$$

dir. $[AC] \perp [CC']$ olduğundan, ACC' dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

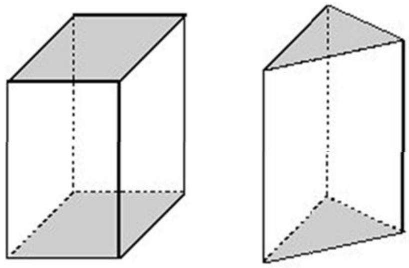
$$|AC'|^2 = |AC|^2 + |CC'|^2$$
$$|AC'|^2 = (3\sqrt{7})^2 + 4^2$$
$$|AC'| = \sqrt{79}$$

bulunur.

16.10. Tanım: Bir prizmanın bütün yan yüzlerinin alanları toplamına prizmanın yanal alanı denir. Alt ve üst tabanların alanları ile yanal alanların toplamına prizmanın toplam alanı denir.

Dik ve Eğik Prizmalar

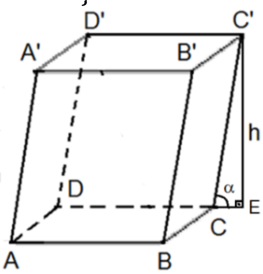
16.11. Tanım: Yan ayrıntıları taban düzlemine dik olan prizmaya **dik prizma** denir. Dik prizmanın yan yüzleri birer dikdörtgendir. Yan ayrıtlarının uzunlukları aynı zamanda prizmanın yüksekliğidir.



Şekilde dörtgen ve üçgen tabanlı dik iki prizma verilmiştir.

16.12. Tanım: Yan ayrıntıları taban düzlemine dik olmayan prizmaya **eğik prizma** denir. Eğik prizmanın yan yüzleri birer paralelkenardır. Eğik prizmanın dik kesit tabanlara eş değildir.

16.1. Teorem: Eğik prizmanın yüksekliği yan ayrıtı ile prizmanın taban ayrıtlarının kosünüsün çarpımına eşittir.

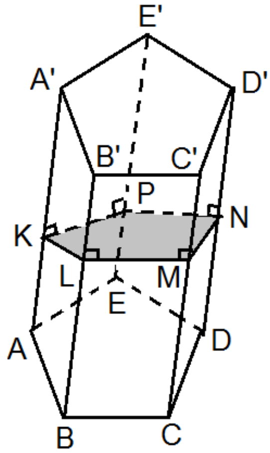


$$h = |AA'| \cos \alpha = |BB'| \cos \alpha = |CC'| \cos \alpha = \cdots$$

Bu teoremin ispatı kosünüsün tanımından çıktığından okuyucuya bıra-kılmıştır.

16.2. Teorem: Bir eğik prizmanın yanal alanı, dik kesit çevresi ile yan ayırt uzunluğunun çarpımına eşittir.

İspat: Şekildeki gibi beğen eğik prizmayı inceleyelim.



Eğik prizmanın yan yüzleri birer paralelkenardır. A'ABB', B'BCC', … Bu paralelkenarların yüksekliklerinin ayaklarını taşıyan kenarlar

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| = |EE'| = \cdots$$

olduğundan,

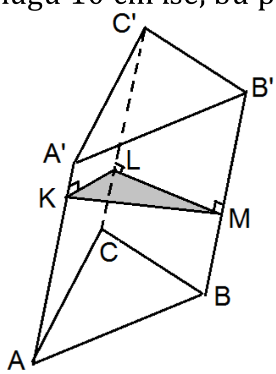
$$A(A'ABB') = |KL| \cdot |AA'|$$
$$A(B'BCC') = |LM| \cdot |BB'| = |LM| \cdot |AA'|$$
$$A(C'CDD') = |MN| \cdot |CC'| = |MN| \cdot |AA'|$$
$$A(D'DEE') = |NP| \cdot |DD'| = |NP| \cdot |AA'|$$
$$A(E'EFF') = |PK| \cdot |EE'| = |PK| \cdot |AA'|$$

bulunur. Buna göre,

$$A_Y = |AA'|(|KL| + |LM| + |MN| + |NP| + |PK|)$$
$$A_Y = |AA'|(\text{Dik Kesit Çevresi})$$

elde edilir.

Örnek: Dik kesiti, kenar uzunluğu 4 cm bir eşkenar üçgen olan eğik prizmanın yan ayrıtının uzunluğu 10 cm ise, bu prizmanın alanını bulunuz.



Çözüm: Prizma kesitinin çevresi $Ç(KLM) = 3 \cdot 4 = 12$ cm
Prizmanın yanal alanı $A_Y = 12 \cdot 10 = 120\ cm^2$

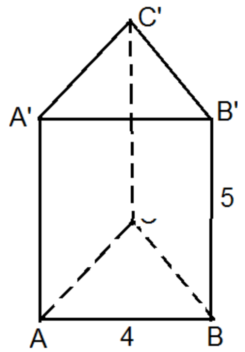
Prizmanın tabanları alanı $A_T = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Toplam Alan $A_T = 120 + 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
bulunur.

16.1. Sonuç: Bir dik prizmanın yanal alanı, taban çevresi ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

Örnek: Bir kenarı 4 cm olan üçgen dik prizmanın tabanları eşkenar üçgen ve yüksekliği 5 cm ise, bu prizmanın yanal alanını bulunuz.

Çözüm: $Ç(ABC) = 3 \cdot 4 = 12$ cm



$A_Y = 12 \cdot 5 = 60\ \text{cm}^2$
dir.

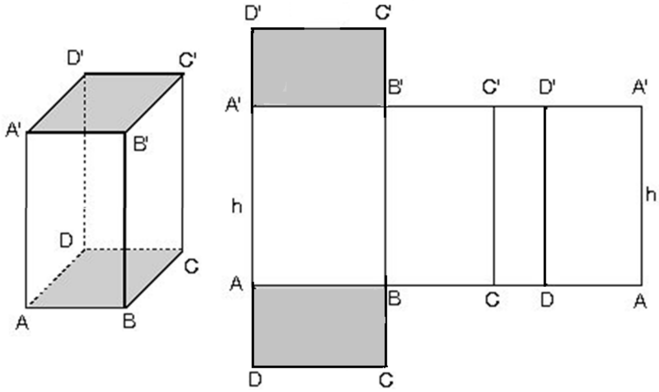
16.2. Sonuç: Bir dik prizmanın toplam alanı, yanal alanı ile taban alanının iki katının toplamına eşittir. A_Y: Prizmanın yanal alanı, A_T: Prizmanın taban alanı olmak üzere;

$$A = A_Y + 2A_T$$

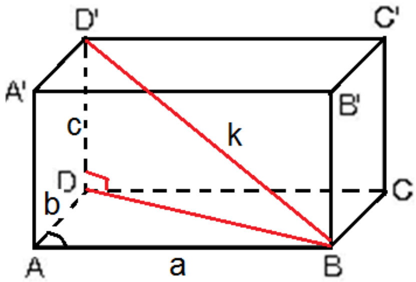
dir.

Dikdörtgenler Prizması ve Hacim Kavramı

16.13. Tanım: Tabanları dikdörtgen olan dik prizmaya dikdörtgenler prizması denir. Dikdörtgenler prizması tabanın şekillerine göre çeşitli isimler alırlar. Eğer tabanlar kare ise kare prizma, eğer taban eşkenar üçgen ise eşkenar üçgen prizma, eğer taban dik üçgen ise dik üçgen prizma denir. Dikdörtgenler prizmasında yanal ayrıt uzunluğu aynı zamanda dikdörtgenler prizmasının yüksekliğidir.



16.3. Teorem: Ayrıtları a, b ve c olan dikdörtgenler prizmasının cisim köşegeninin uzunluğu,



$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

dir.

İspat: $|AB| = a, |AD| = b, \ |DD'| = c$

dir. [DB] taban köşegeni, [BD'] cisim köşegenidir. BAD ve D'DB dik üçgenlerinden faydalanarak,

$$|BD'|^2 = |BD|^2 + |DD'|^2$$

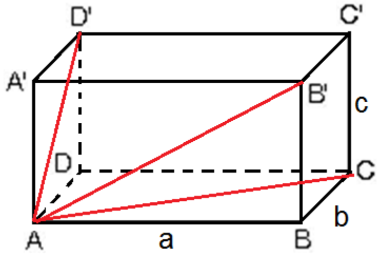
$$|BD'|^2 = a^2 + b^2$$

$$|BD'| = k = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

bulunur.

Örnek: Bir dikdörtgenler prizmasında, farklı üç yan yüzün köşegenlerinin uzunluklarının kareleri toplamı 32 br^2 ise cisim köşegeninin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



Bu dikdörtgenler prizmasının ayrıntıları $|AB| = a, |BC| = b,\ |CC'| = c$ olsun. Farklı üç yan yüzün köşegen uzunlukları ise [AC], [AB'] ve [AD'] olacaktır.

$$|AC|^2 = a^2 + b^2, |AB'|^2 = a^2 + c^2, |AD'|^2 = b^2 + c^2$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$|AC|^2 + |AB'|^2 + |AD'|^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) = 32$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 16$$

olur. Cisim köşegeni,

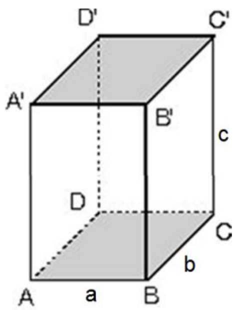
$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ br}^3$$

bulunur.

16.4. Teorem: Ayrıtlarının uzunlukları a, b ve c br olan dikdörtgenler prizmasının tüm alanı,

$$A = 2(ab + bc + ca) \text{ br}^2$$

dir.



İspat: 16.3. sonuca göre,

Prizmanın yanal alanı $A_Y = 2(ac + bc)$

Prizmanın tabanları alanı $A_T = 2ab$

Toplam Alan $A = 2(ab + bc + ca)\ br^2$

bulunur.

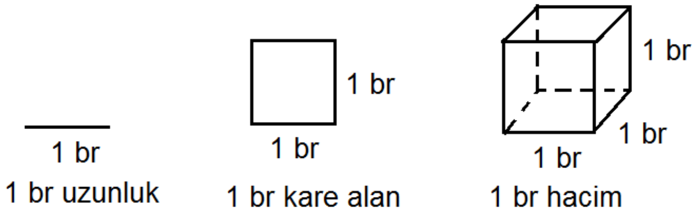
Örnek: Yanal alanı 100 cm² olan bir dik prizmanın tabanının çevresi 20 cm'dir. Bu prizmanın yüksekliğini bulunuz.

Çözüm: Bir dik prizmanın yüksekliği,

$$h = \frac{\text{Yanal Alan}}{\text{Taban Çevresi}} = \frac{100}{20} = 5 \text{ cm}$$

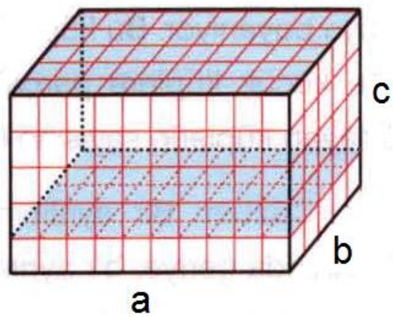
bulunur.

16.14. Tanım: Bir ayrıtının uzunluğu 1 birim ve ayrıtları arasındaki tüm açıları 90^0 olan prizmaya, 1 birim küp denir ve 1 br^3 şeklinde gösterilir.



16.15. Tanım: Bir cimin içine yerleştirilebilen 1 br^3 lük küplerin sayısına o cismin hacmi denir. Cisim santimetre türünden ise kapladığı bölgenin hacmi cm^3, metre türünden ise kapladığı bölgenin hacmi m^3, kilometre türünden ise kapladığı bölgenin hacmi km^3 gibi br^3 (birim kare) türünden yazılır.

16.1. Aksiyom: Ayrıtlarının uzunlukları a, b, c br olan dikdörtgenler prizmasının hacmi,



$$V = a \cdot b \cdot c \ br^3$$

tür.

16.3. Sonuç: Bir dik prizmanın hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

Örnek: Ayrıtlarının uzunlukları, bir geometrik dizi olan dikdörtgenler prizmasının toplam alanı 32 cm^2 ve hacmi ise 8 cm^2 tür. Buna göre, bu dikdörtgenler prizmasının ayrıtlarının uzunluklarını bulunuz.

Çözüm: Bu dikdörtgenler prizmasının ayrıtları a, $a \cdot r$, $a \cdot r^2$ geometrik dizileri olsun.

$$V = a \cdot a \cdot r \cdot a \cdot r^2 = 8 \text{ ise } a \cdot r = 2 \text{ cm}$$

$$A = 2(a \cdot a \cdot r + a \cdot r \cdot a \cdot r^2 + a \cdot r^2 \cdot a) = 32$$
$$A = 2 \cdot a \cdot r(a + a \cdot r + a \cdot r^2) = 32$$
$$A = 2 \cdot 2(a + a \cdot r + a \cdot r^2) = 32$$
$$a + a \cdot r + a \cdot r^2 = 8$$
$$a + 2 + 2r = 8$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafını r ile çarparsak

$$a \cdot r + 2 \cdot r + 2r^2 = 8r$$
$$2 - 6 \cdot r + 2r^2 = 0$$
$$r^2 - 3r + 1 = 0$$

olur. Bu 2. dereceden denklem çözülürse,

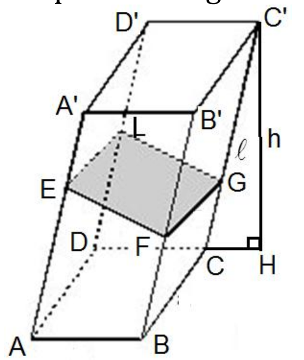
$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5, r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a = \frac{2}{r} = \frac{2}{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} = 3 \pm \sqrt{5}$$

bulunur.

16.5. Teorem: Bir eğik prizmanın hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

İspat: Eğik dikdörtgenler prizmasını göz önüne alalım.



Şekilde EFGL kesit alanı, ABCD taban alanının dik kesit düzlemi üzerindeki iz düşümü olarak alınırsa,

$$A(EFGL) = A(ABCD) \cdot \cos\alpha$$

DD'H dik üçgeninde, $\cos\alpha = \frac{h}{\ell}$ olduğundan,

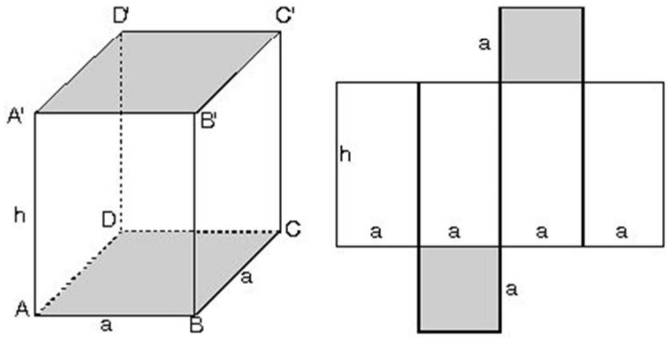
$$V = A(EFGL) \cdot \ell = A(ABCD) \cdot \cos\alpha \cdot \ell = A(ABCD) \cdot \cos\alpha \cdot \ell \cdot \frac{h}{\ell} = A_T \cdot h$$

bulunur.

Örnek: Dik kesit alanı 24 cm^2 olan bir eğik prizmanın yan ayrıtının uzunluğu 10 cm olduğuna göre, hacmini bulunuz.

Çözüm: V = (dik kesit alanı)(yan ayrıtının uzunluğu)
$= 24 \cdot 10$
$= 240 \text{ cm}^3$

Kare Prizma

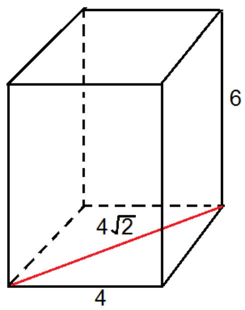


16.4. Sonuç: Bir taban ayrıtı a olan kare prizmanın,

a) Yanal alanı; $A_Y = 4 \cdot a \cdot h \text{ br}^2$
b) Toplam alanı; $A_T = 4 \cdot a \cdot h + 2a^2 \text{ br}^2$
c) Hacmi; $V = a^2 \cdot h \text{ br}^3$
d) Cisim Köşegeni; $e = \sqrt{2a^2 + h^2} \text{ br}^2$

dir.

Örnek: Taban köşegeninin uzunluğu $4\sqrt{2}$ cm olan bir kare dik prizmanın yüksekliği 6 cm olduğuna göre;



a) Prizmanın yanal alanını,
b) Prizmanın toplam alanını,
c) Prizmanın hacmini bulunuz.

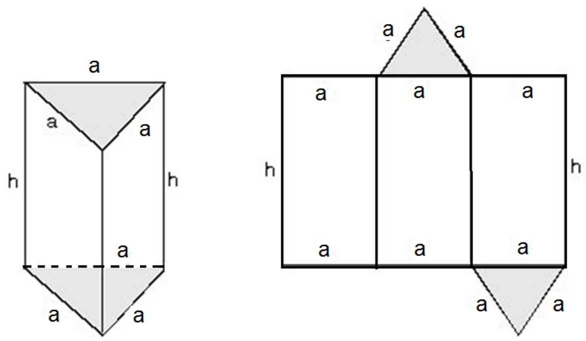
Çözüm: a) Tabanı kare olan dik prizmanın taban ayrıntının uzunluğu 4 cm'dir.

$$A_Y = 4 \cdot 4 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$$

b) Prizmanın toplam alan, $A = 2 \cdot 16 + 96 = 128 \text{ cm}^2$

c) Prizmanın hacmi, $V = 4^2 \cdot 6 = 128 \text{ cm}^3$

Eşkenar Üçgen Prizma



16.5. Sonuç: Bir taban ayrıtları a, b, c olan üçgen prizmanın,

a) Yanal alanı; $A_Y = 3 \cdot a \cdot h \text{ br}^2$

b) Toplam alanı; $A_T = 3 \cdot a \cdot h + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ br}^2$

c) Hacmi; $V = \dfrac{a^2 h\sqrt{3}}{4} \text{ br}^3$

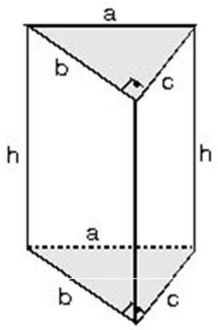
dir.

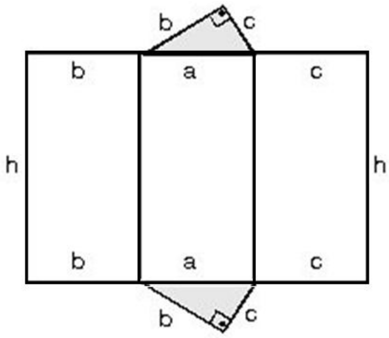
Örnek: Yüksekliği $2\sqrt{3}$ cm ve taban ayrıtının uzunluğu 4 cm olan eşkenar üçgen dik prizmanın toplam alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm: $A_T = 3 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} + \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 28\sqrt{3} \text{ br}^2$

$$V = \frac{4^2 \cdot 2\sqrt{3}\sqrt{3}}{4} = 24 \text{ cm}^3$$

Dik Üçgen Prizma





16.6. Sonuç: Bir taban ayrıtları a, b, c olan üçgen prizmanın,

a) Yanal alanı; $A_Y = (a + b + c) \cdot h \text{ br}^2$

b) Toplam alanı; $A_T = (a + b + c) \cdot h + \frac{b \cdot c}{4} \text{ br}^2$

c) Hacmi; $V = \frac{b \cdot c \cdot h}{2} \text{ br}^3$

dir.

Örnek: Taban ayrıtları 6 cm, 8 cm ve 10 cm, yüksekliği 5 cm üçgen dik prizmanın,

a) Yanal alanını,
b) Toplam alanını,
c) Hacmini bulunuz.

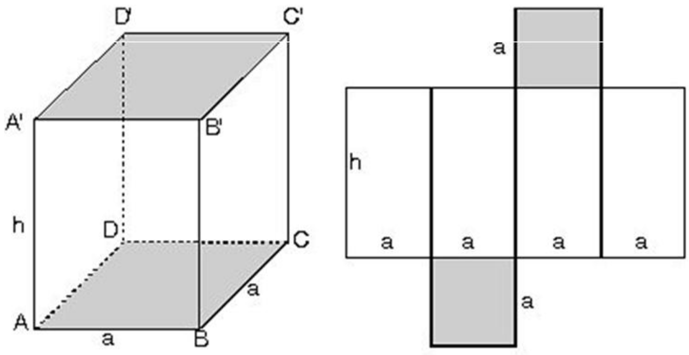
Çözüm: a) $A_Y = (6 + 8 + 10) \cdot 5 = 120 \text{ cm}^2$

b) $A_T = (6 + 8 + 10) \cdot 5 + \frac{6 \cdot 8}{4} = 144 \text{ cm}^2$

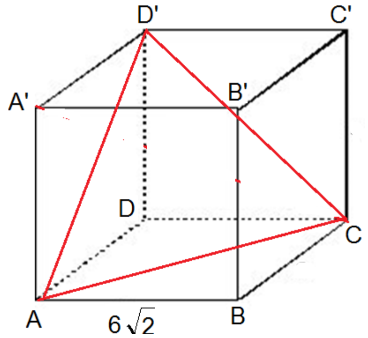
c) $V = \frac{6 \cdot 8 \cdot 5}{2} = 120 \text{ cm}^3$

Küp

16.16. Tanım: Bütün ayrıtları uzunluğu birbirine eşit olan dikdörtgenler prizmasına küp denir.



Örnek: Şekilde bir ayrıtının uzunluğu $\mathbf{6\sqrt{2}}$ **cm** olan küpte, ACD' üçgeninin alanını bulunuz.



Çözüm: Şekilde görüldüğü gibi ACD' üçgeni eşkenar üçgenidir.

$$|AC| = |CD| = |AD'| = 6\sqrt{2}\sqrt{2} = 12 \text{ cm}$$

olur. ACD' eşkenar üçgeninin alanı,

$$A(ACD') = \frac{|AC|^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

bulunur.

16.7. Sonuç: Bir taban ayrıtı a olan küpün,

a) Yanal alanı; $A_Y = 4a^2 \text{ br}^2$

b) Toplam alanı; $A_T = 6a^2 \text{ br}^2$

c) Hacmi; $V = a^3 \text{ br}^3$

d) Cisim Köşegeni; $e = a\sqrt{3}$ br

dir.

Örnek: Cisim köşegeni $6\sqrt{3}$ cm olan küpün;

a) Toplan alanını,

b) Hacmini bulunuz.

Çözüm: Küpün bir ayrıtı a ise

$$a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$
$$a = 6 \text{ cm}$$

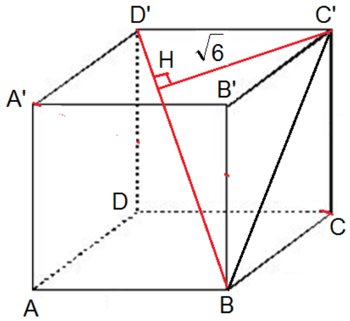
dir. Buna göre,

a) $A_T = 6 \cdot 6^2 = 216 \text{ cm}^2$

b) $V = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$

olur.

Örnek: Şekildeki küpte $[C'H] \perp [BD']$ ve $|C'H| = \sqrt{6}$ br^3 ise küpün cisim köşegenin uzunluğunu bulunuz.



Çözüm: Küpün bir ayrıtının uzunluğu a birim olsun. BC'D' dik üçgeninde $[BC'] \perp [CD']$ dir. BC'D' dik üçgeninde $[C'H] \perp [BD']$ ve Öklid dik kenar teoremine göre,

$$|BC'| \cdot |C'D'| = |BD'| \cdot |C'H'|$$
$$a\sqrt{2} \cdot a = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$$
$$a = 3 \text{ br}$$

olur. Cisim köşegeninin uzunluğu,

$$|BD'| = 3\sqrt{3} \text{ br}$$

bulunur.

Örnek: Alanı 54 cm^2 bir küpün hacmini bulunuz.

Çözüm: Bir ayrıtın uzunluğu a cm olan küpün alanı,

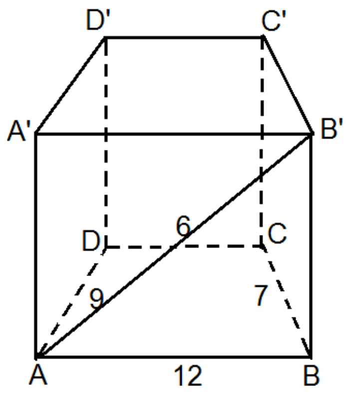
$$A = 6a^2$$
$$54 = 6a^2$$
$$a = 3 \text{ cm}$$

dir. Bir ayrıtının uzunluğu 3 cm olan küpün hacmi;

$$V = 3^3 = 27 \text{ cm}^3$$

olur.

Örnek: Taban yamuk olan bir dik prizmanın taban ayrıtları;



$|AB| = 12$ cm, $|BC| = 7$ cm, $|DC| = 6$ cm, $|AD| = 9$ cm ve ABB'A' yüzeyine ait yan yüz köşegeni $|AB'| = 20$ cm olduğuna göre, prizmanın yanal alanını bulunuz.

Çözüm: Yanal alanını bulacağımız prizmanın yüksekliği, $[BB'] \perp [AB]$ olduğundan AB'B dik üçgeninde Pisagor teoreminden, $h = |BB'| = 16$ cm bulunur. Prizmanın taban çevresi, $Ç_T = 34$ cm dir.

$$A_Y = h \cdot Ç_T = 34 \cdot 16 = 544 \text{ cm}^2$$

bulunur. //

Bonaventura Francesco Cavalieri
(1598, Milano, İtalya – 30 Kasım 1647, Bologna, İtalya)

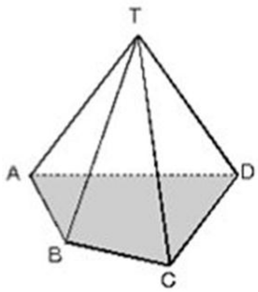
Cavalieri Prensibi (Kavaliye İlkesi)

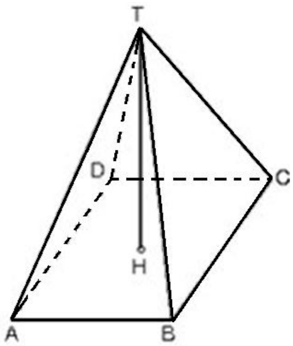
16.2. Aksiyom: Tabanlarının alanları ve yükseklikleri eş olan iki prizmanın tabanlarına paralel ve tabandan aynı uzaklıktaki kesitlerinin alanları eşit olursa, bu iki prizmanın hacimleri de eşit olur.

Örnek: Bir üçgen prizma ile dörtgen prizmanın taban alanları ve yükseklik uzunlukları eşit olsun. Aynı yükseklikteki kesitlerin alanları aynı olduğundan bu üst üste konmuş aynı kattaki dik prizmaların hacimleri de aynı olur. Bu nedenle, hacimce ve sayıca aynı olan prizmaların toplamı durumundaki iki katı cisim, bu Cavalieri prensibi gereğince aynı hacimli olurlar. Bu prensibe özellikle katı cisimlerin hacim hesaplarında sıklıkla rastlanır. Cavalieri (Kavaliye) prensibi olarak isimlendirilir.

PRAMİT

16.17. Tanım: Bir düzlemsel çokgen ve bu çokgensel bölgenin bulunduğu düzlemin dışındaki sabit bir T noktası ile çokgensel bölgenin kenarları üzerindeki noktalardan geçen doğruların oluşturduğu yüzeye **piramidal yüzeyi**, oluşan çokgensel bölgelerle çokgensel bölgenin sınırladığı cisme de **piramit** denir.



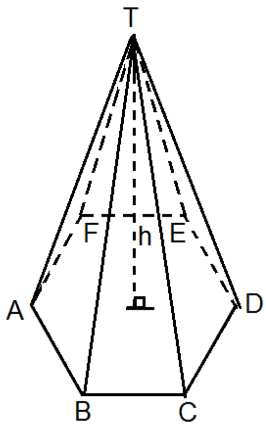


Şekildeki ABCD çeşit kenar dörtgen bölgelerine piramitlerin tabanları; T noktalarına piramitlerin tepe noktası, [TA], [TB], [TC], [TD] doğru parçalarına piramitlerin yay ayrıtları; TAB, TBC, TCD, TCA üçgensel bölgelerine de piramitlerin yan yüzleri denir.

Tepe noktasından taban düzlemine indirilen [TH] dikmesine piramidin yüksekliği, bir yan yüzdeki üçgenin tepe noktasından kendi taban ayrıtına ait yüksekliğine bu yan yüze ait yüksekliği denir.

Piramitler tabanını oluşturan çokgenin kenar sayısına göre adlandırılırlar, üçgen piramit, dörtgen piramit, beşgen piramit, … gibi.

16.18. Tanım: Tabanı düzgün çokgen ve yükseklik ayağı taban merkezinde bulunan piramide düzgün piramit denir.



Verilen şekilde düzgün altıgen piramit görülmektedir. Yüksekliğin ayağı, düzgün altıgenin merkezidir.

Düzgün piramidin şu özellikleri varıdır:

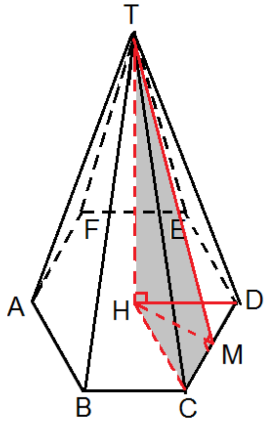
1. Bir düzgün piramidin yan yüzlerinin tümü, birbirine eş ikizkenar üçgenlerdir.

2. Bir düzgün piramidin yan ayrıtlarının uzunlukları eşittir.

3. Düzgün piramidin tabanı düzgün çokgen olduğundan, tabanın çevrel ve iç teğet çemberi vardır.

16.19. Tanım: Bir düzgün piramitte bir yan yüzün yüksekliğine düzgün **piramidin apotemi** denir.

Örnek: Bir düzgün altıgen piramidin taban ayrıtının uzunluğu 6 cm ve yan yüz yüksekliği $5\sqrt{3}$ cm olduğuna göre bu düzgün altıgen piramidin yüksekliğini bulunuz.



Çözüm: Şekilde ABCDEF düzgün altıgen olduğundan, HCD üçgeni eşkenardır. $|CD| = 6$ cm ise $|HM| = 3\sqrt{3}$ cm olur. $[TH] \perp [HM]$ ise THM dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$|TH|^2 + |HM|^2 = |TM|^2$$

$$|TH|^2 + (3\sqrt{3})^2 = (5\sqrt{3})^2$$

$$|TH| = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

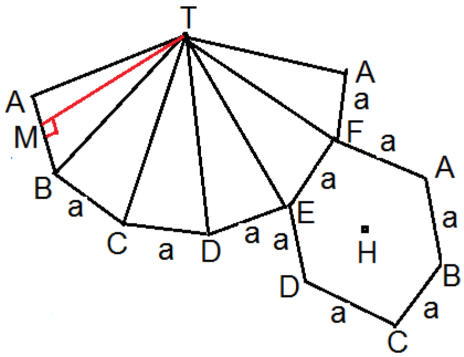
bulunur. //

Piramidin alanı, taban alanı ile yanal alanının toplamına eşittir. Taban alanı A_T ve yanal alanı A_Y olan piramidin tüm alanı, $A = A_T + A_Y$ dir.

16.6. Teorem: Bir düzgün piramidin yanal alanı, taban çevresi ile yan yüz yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir.

İspat: Bu teoremin ispatı özel olarak altıgen piramitler için yapılacaktır. Daha sonra genelleştirilecektir.

Bir taban ayrıtının uzunluğu a ve yan yüz yüksekliği (apotemi) h_1 olan düzgün altıgen piramitin ile onun düzleme açımı çizilmiştir. Düzgün piramitte yan yüzlerin tümü birbirine eş ikizkenar üçgenler olduğundan,



$$A_Y = \frac{6 \cdot a \cdot h_1}{2}$$

dir. 6a verilen piramidin tabanın çevresi olduğundan, bu eşitlik n-gen için yazılırsa,

$$A_Y = \frac{n \cdot a \cdot h_1}{2}$$

bulunur.

16.8. Sonuç: Taban alanı G ve bir ayrıtı a olan düzgün n-gen piramidin alanı,

$$A = G + \frac{n \cdot a \cdot h_1}{2}$$

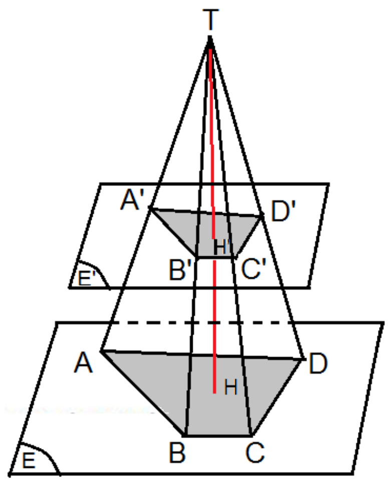
dir. (h_1 yan yüz yüksekliğidir.)

16.7. Teorem: Bir piramit, tabanına paralel bir düzlemle kesildiğinde;

a) Kesik çokgenin tabana benzerdir.

b) Kesik alanının taban alanına oranı, bunların tepe noktalarına olan uzaklıklarının karesi oranına eşittir.

İspat: Bu teoremin ispatı özel olarak dörtgen piramitler için yapalım.



a) Teoremin ispatını dörtgen piramit için yapalım. TABCD (T tepe noktası) piramidin tabana paralel piramit olan E' düzlemi ile ara kesiti olan dörtgeni, A'B'C'D' olsun. A'B'C'D' dörtgeni ile ABCD dörtgeninin karşılıklı kenarları birbirine paralel olduğundan, Tales teoremine göre,

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'D'|}{|CD|} = \frac{|D'A'|}{|DA|}$$

olur. Öyleyse bu iki dörtgen birbirlerine benzerdir.

b) Bu iki benzer ABCD ve A'B'C'D' dörtgenlerinin tepe noktasına olan uzaklıkları sırasıyla |TH| ve |TH'| olsun. Benzer iki çokgenin alanları oranı benzerlikleri oranının karesine eşit olduğundan,

$$\frac{A(A'B'C'D')}{A(ABCD)} = \frac{|A'B'|^2}{|AB|^2}$$

ve

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|TA'|}{|TA|} = \frac{|TH'|}{|TH|}$$

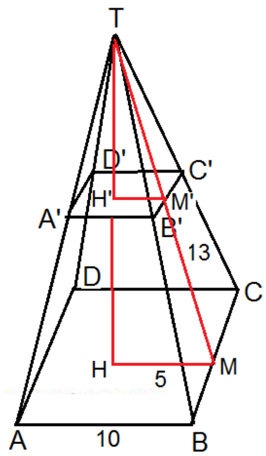
dir. O halde,

$$\frac{A(A'B'C'D')}{A(ABCD)} = \frac{|TH'|^2}{|TH|^2}$$

bulunur.

Örnek: Tabanının bir kenarı 10 cm olan bir düzgün kare piramidin yan yüz yüksekliği 13 cm'dir. Bu piramidin tepesinden 3 cm uzaklıkta tabanına paralel bir düzlemle kesiyor. Elde edilen kesitin alanını bulunuz.

Çözüm:



Çözüm: Şekilde görüldüğü gibi,

$$[TM] \perp [BC] \text{ ve } [TH] \perp [HM]$$

dir. $|HM| = 5$ cm ve $|TM| = 13$ cm olduğundan, THM dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$\mathbf{|TM|^2 = |TH|^2 + |HM|^2}$$

$$\mathbf{13^2 = |TH|^2 + 5^2}$$

$$\mathbf{|TH| = 12\ cm}$$

ise

$$\frac{A(A'B'C'D')}{A(ABCD)} = \frac{|TH'|^2}{|TH|^2}$$

$$\frac{A(A'B'C'D')}{100} = \frac{3^2}{12^2}$$

$$A(A'B'C'D') = \frac{25}{4}\,\text{cm}^2$$

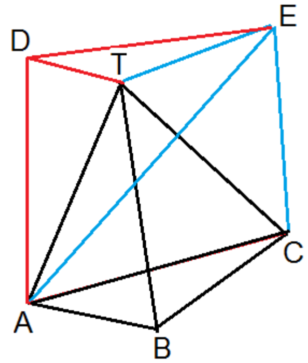
bulunur.

16.8. Teorem: Bir piramidin hacmi, tabanının alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir.

$$V = \frac{A_Y \cdot h}{3}$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatı özel olarak üçgen piramitler için yapılacaktır. Daha sonra genelleştirilecektir. Şekildeki gibi piramidin tabanı üçgen olsun.



TABC üçgen piramidini ABCDETE pirizmasına tamamlayalım. TABC üçgen piramidi ile ABCDTE prizması aynı taban ve yüksekliktedir.

Cavalieri prensibi gereği, TABC (T tepeli) ve ADTE (A tepeli) piramitleri taban alanları ve yükseklikleri eşit olduğundan, hacimleri eşittir. Üçgen prizmadan ADTE piramidini çıkarırsak, geriye TBCE paralelkenar tabanlı piramit kalır. Bu TBCE paralelkenar tabanlı piramit ise, ATBC ve ATCE piramitleri ayrıdır. Bu iki üçgen piramidin hacimleri eşittir.

Burada, üçgen prizmanın verilen piramidin hacmine eşit üç eşit hacimli piramide ayrılabildiği görülmektedir.

Üçgen prizmanın hacmi, $V = A(ABC) \cdot h$ olacağından, üçgen piramidin hacmi,

$$V = \frac{1}{3} A(ABC) \cdot h$$

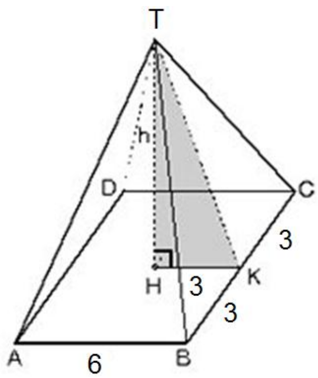
bulunur. Elde edilen bu sonuç genelleştirilirse, taban alanı A_T ile gösterirsek,

$$V = \frac{1}{3} A_T \cdot h$$

elde edilir.

Örnek: Bir düzgün kare piramidin tabanının bir kenarı 6 cm ve yanal alanı 60 cm^2 olduğuna göre, bu piramidin hacmini bulunuz.

Çözüm:



Verilen şekilde düzgün kare piramidin yüksekliğinin ayağı, taban karesinin merkezi O noktasıdır. Yan yüzleri, dört adet ikizkenar üçgenden meydana geldiğinden, TBC ikizkenar üçgeninin alanı,

$$A(TBC) = \frac{|BC||TC|}{2}$$

$$\frac{60}{4} = \frac{6|TC|}{2}$$

$$\mathbf{|TC| = 5\ cm}$$

bulunur. THE dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$\mathbf{|TE|^2 = |HE|^2 + |TO|^2}$$

$$\mathbf{|TO| = 4\ cm}$$

olur. Taban alanı 36 cm^2 ve yüksekliği 4 cm olan bir düzgün kare piramidin hacmi,

$$V = \frac{A_Y \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48\ cm^2$$

bulunur.

16.9. Sonuç: Bir taban ayrıtı a, yüksekliği h ve yan yüz yüksekliği h_1 olan kare piramidin,

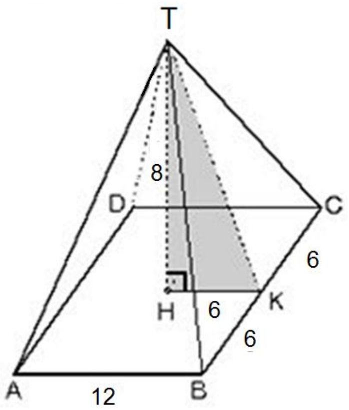
a) Yanal alanı; $A_Y = 2 \cdot a \cdot h_1\ br^2$

b) Toplam alanı; $A_T = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_1\ br^2$

c) Hacmi; $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h\ br^3$

dir.

Örnek: Taban kenarı 12 cm, yüksekliği 8 cm olan düzgün kare piramidin yanal alanını, tüm alanını ve hacmini bulunuz.



Çözüm: Şekildeki düzgün kare piramitte, TBC ikizkenar üçgeninde [TK] yan yüz yüksekliğini çizersek, THK dik üçgeninden,

$$|\mathbf{TK}|^2 = |\mathbf{TH}|^2 + |\mathbf{HK}|^2$$

$$|\mathbf{TK}|^2 = \mathbf{8^2 + 6^2}$$

$$|\mathbf{TK}| = \mathbf{10\ cm}$$

bulunur.

a) Alan, $A_T = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_1 = 12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 10 = 384\ cm^2$

b) Hacim, $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 = 384\ cm^3$

16.10. Sonuç: Bir taban ayrıtı a, yüksekliği h ve yan yüz yüksekliği h_1 olan eşkenar üçgen piramidin,

a) Yanal alanı; $A_Y = \frac{3}{2} \cdot a \cdot h_1\ br^2$

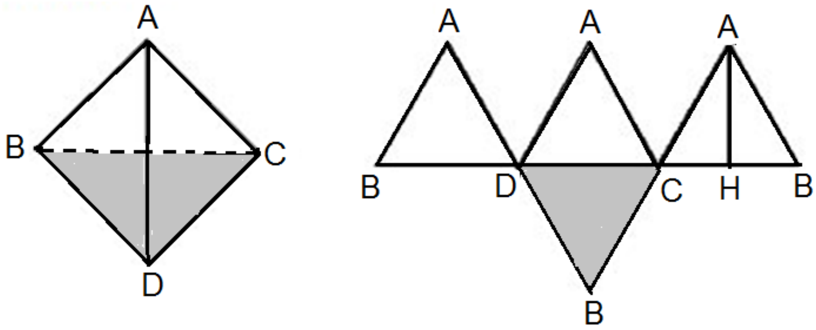
b) Toplam alanı; $A_T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \cdot a \cdot h_1\ br^2$

c) Hacmi; $V = \frac{a^2 h\sqrt{3}}{12}\ br^3$

dir.

Düzgün Dörtyüzlü

16.20. Tanım: Dört yüzü de eşkenar üçgenlerden oluşan piramitlere düzgün dörtyüzlü denir. Düzgün dörtyüzlüde yükseklik, tabanı oluşturan üçgenin ağırlık merkezine iner. Düzgün dörtyüzlünün bütün yüzleri eş kenar üçgen olduğundan bütün ayrıtları eşittir.



16.9. Teorem: Bir ayrıtının uzunluğu a birim olan düzgün dörtyüzlünün;

a) Yan yüz yüksekliği, $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ br

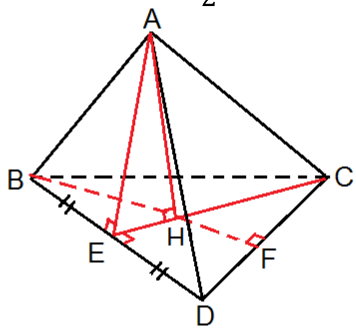
b) Cisim yüksekliği, $|AH| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ br

c) Alanı, $A = a^2\sqrt{3}$ br^2

d) Hacmi, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ br^3

tür.

İspat: a) Bir kenarının uzunluğu a birim olan bir eşkenar üçgenin yüksekliği $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ br'dir. Bir düzgün dörtyüzlünün bütün yüzleri eşkenar üçgen olduğundan, yan yüz yüksekliği $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ br olur.



b) ABCD düzgün dörtyüzlünün tabanı BCD eşkenar üçgen ise, H noktası hem BCD eşkenar üçgenin ağırlık merkezi, hem de cisim yüksekliğinin ayağıdır. ABD eşkenar üçgeninde,

$$|BE| = |ED| \text{ ise } [AE] \perp [BD]$$

olur ve $|BD| = a$ olduğundan,

$$|EH| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ br}$$

bulunur. AHE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$|\mathbf{AE}|^2 = |\mathbf{EH}|^2 + |\mathbf{AH}|^2$$

$$|\mathbf{AH}|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

ve buradan $|AH| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ br bulunur.

c) Bir düzgün dörtyüzlünün alanı, dört üçgenin alanları toplamı olacağından,

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}\ br$$

bulunur.

d) Bir piramidin hacmi, tabanının alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşit olduğundan,

$$V = \frac{1}{3} A_T|AH| = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \text{ br}^3$$

bulunur.

Örnek: Taban alanı $16\sqrt{3}$ cm² olan düzgün dörtyüzlünün yan yüz yüksekliğini, cisim yüksekliği, alanı ve hacmini bulunuz.

Çözüm: Düzgün dörtyüzlünün, dört yan yüzü de eş eşkenar üçgenler olduğundan bir ayrıtının uzunluğu,

$$A_T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$a = 8 \text{ cm}$$

dir. Bir ayrıtının uzunluğu a birim olan düzgün dörtyüzlünün;

a) Yan yüz yüksekliği, $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ br

b) Cisim yüksekliği, $|AH| = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ br

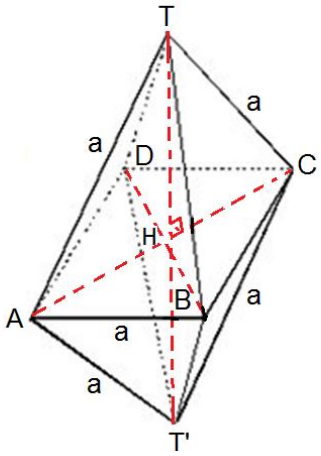
c) Alanı, $A = a^2\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$ br²

d) Hacmi, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8^3\sqrt{2}}{12} = \frac{128\sqrt{2}}{3}$ br³

bulunur.

Düzgün Sekizyüzlü

16.21. Tanım: Tüm ayrıtlarının uzunlukları eşit olan iki kare piramidin tabanlarının birleşmesi ile oluşan cisme düzgün sekizyüzlü denir.



16.11. Sonuç: Düzgün sekizyüzlünün bütün yüzleri birbirine eş olan eşkenar üçgenlerdir. Düzgün sekizyüzlünün, sekiz tane eşkenar üçgen olduğundan toplam alanı;

$$A = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}\ \text{br}^2$$

dir.

16.10. Teorem: Tabanı kare olan düzgün sekizyüzlünün hacmi, tabanı kare olan piramidin hacminin iki katıdır.

ABCD kare, bir ayrıtı a olan sekizyüzlünün hacmi $V = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}\ \text{br}^3$

İspat: $|AB| = a$ br ise $|AH| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ br ve THA dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$|TH|^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$|TH| = \frac{a\sqrt{2}}{2}\ \text{br}$$

bulunur. Piramidin hacmi,

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\ \text{br}^3$$

olur. Düzgün sekizyüzlünün hacmi,

$$v = 2 \cdot V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}\ br^3$$

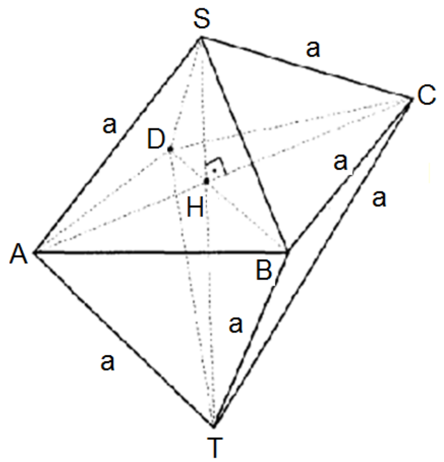
bulunur.

Örnek: Bir ayrıtının uzunluğu 10 cm olan düzgün sekizyüzlünün toplam alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm: a) Alan; $A = 2 \cdot 10^2\sqrt{3} = 200\sqrt{3}\ cm^2$

b) Hacim; $v = \dfrac{10^3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{1\,000\sqrt{2}}{3}\ br^3$

Örnek: En uzak iki köşesi arasındaki uzaklık $6\sqrt{2}$ cm olan düzgün sekizyüzlünün hacmi kaç cm^3 tür?



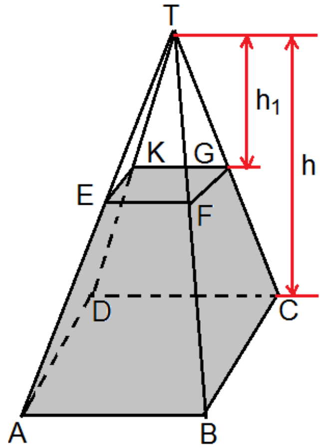
$|ST| = 6\sqrt{2}$ cm olduğundan, $|ST| = 3\sqrt{2}$ cm'dir.

$$a = 3\sqrt{2}\sqrt{2} = 6 \text{ cm}$$

$$v = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{6^2\sqrt{2}}{3} = 72\sqrt{2}\ br^3$$

Kesik Piramit

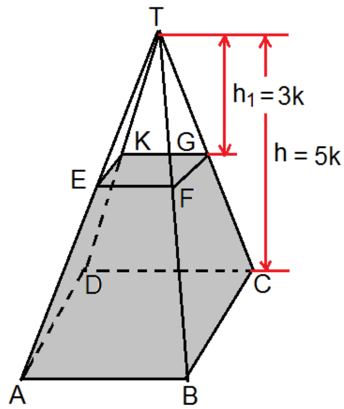
16.22. Tanım: Bir piramit tabanına paralel bir düzlemle kesilirse, kesit düzlemi ve piramidin tabanı arasında kalan cisme kesik piramit denir.



16.23. Tanım: Piramidin tabanı kesik piramidin **alt tabanı**, kesit düzlemi ile ara kesiti ise, kesik piramidin **üst tabanıdır**. Kesik piramidin alt tabanla üst taban birbirine benzer olan çokgenlerdir. Kesik piramidin iki tabanı arasındaki uzaklığa **kesik piramidin yüksekliği**; [AE] , [BF] , [CG] , [DK] doğru parçalarına yan ayrıtları, yan yüzlerdeki yamuklara **yan yüzler** ve bu yamukların yüksekliğine de yan **yüz yüksekliği** denir.

16.12. Sonuç: $\dfrac{A(\text{Üst Piramit})}{A(\text{Tüm Piramit})} = \left(\dfrac{h_1}{h}\right)^2$

Örnek: Tabanı kare olan bir piramit, tabanına paralel ve tabanına uzaklığı yüksekliğinin $\frac{2}{5}$ si kadar olan bir düzlemle kesiliyor. Kesik piramidin üst tabanının alanı 18 cm^2 ise, alt tabanının alanını bulunuz.



Çözüm: Şekle göre,

[AB] // [EF], [BC] // [FG], [CD] // [GK], [DA] // [KE] olduğundan ABCD ~ EFGK dür. Aynı şekilde, $\overset{\Delta}{TFG} \sim \overset{\Delta}{TBC}$ olduğundan,

$$\frac{A(EFGK)}{A(ABCD)} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2$$

$$\frac{18}{A(ABCD)} = \left(\frac{3k}{5k}\right)^2$$

$$A(ABCD) = 50\ \text{cm}^2$$

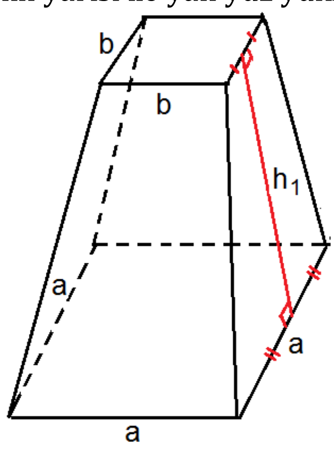
bulunur.

Düzgün Kesik Piramit

16.24. Tanım: Düzgün bir piramit, tabanına paralel bir düzlemle kesilirse, kesik düzlemi ve düzgün tabanı arasında kalan cisme düzgün kesik piramit denir. Düzgün kesik piramitte, alt tabanla üst taban, kenar sayıları aynı olan benzer iki düzgün çokgendir. Buna göre düzgün kesik piramidin;

1. Yan yüzeyler birbirine eş olan ikizkenar yamuktur.
2. Yan yüz yüksekliklerinin uzunlukları birbirine eşittir.
3. Tabanların ağırlık merkezlerini birleştiren doğru parçası tabanlara diktir ve uzunluğu kesik piramidin yüksekliğine eşittir. Bu uzunluk kesik piramidin yüksekliğini verir.

16.11. Teorem: Bir düzgün kesik piramidin yanal alanı, alt ve üst tabanların çevreleri toplamının yarısı ile yan yüz yüksekliğinin çarpımına eşittir.



İspat: Düzgün kesit piramitte, tabanlar düzgün çokgen ve yan yüzler, birbirine eş olan ikizkenar yamuktur. Düzgün kesik piramidin alt tabanının ayrıtının uzunluğu a birim, üst tabanının ayrıtının uzunluğu b birim ve yan yüzü olan ikizkenar yamuğun yüksekliği h_1 birim olsun. O halde, tabanı, n-gen olan kesik piramitte birbirine eş n tane ikizkenar yamuk olduğundan,

$$A_Y = n \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h_1 = \frac{1}{2}(na + nb) \cdot h_1 = \frac{1}{2}(Ç_{alt} + Ç_{üst}) \cdot h_1 \text{ br}^2$$

bulunur.

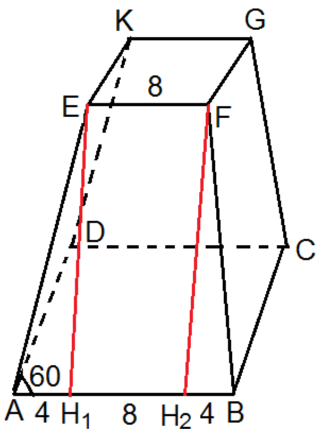
16.13. Sonuç: Bir düzgün kesik piramidin alt taban alanı G_1 br^2 ve üst taban alanı da G_2 br^2 ise, tüm alanı yanal alanı ile alt ve üst taban alanlarının toplamına eşittir. Buna göre;

$$A = G_1 + G_2 + A_Y$$

dir.

Örnek: Bir düzgün kesik kare piramidin alt tabanının alanı 256 cm^2 ve üst tabanının alanı 64 cm^2 dir. Bir yan yüzün düzlemi ile taban düzleminin ölçek açısı 60^0 olduğuna göre kesik piramidin toplam alanını bulunuz.

Çözüm:



Düzgün kesik piramitte yan yüzler ikizkenar yamuk olduğundan,

$$|EF| = |H_1H_2| = 8 \text{ cm ve } |AH_1| = |BH_2| = 4 \text{ cm}$$

dir. Yan yüzeyin taban düzlemi ile ölçek açısı 60^0 olduğundan, $E\overset{\Delta}{A}H_1$, bir $30 - 60 - 90$ üçgenidir ve $|EA| = 8$ cm, $|AH_1| = 4\sqrt{3}$ cm'dir. Kesik piramidin yanal alanı ve toplam alanı;

$$A_Y = \frac{4 \cdot (6+8) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 192\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A = 320 + 192\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

bulunur.

16. 12. Teorem: Yüksekliği h_1, taban alanı G_1, hacmi V_1 olan bir piramit, tabanına paralel bir düzlemle kesildiğinde, elde edilen küçük piramidin yüksekliği h_2, taban alanı G_2, hacmi V_2 ise, $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3$ dir.

İspat: Büyük piramidin hacmi, $V_1 = \frac{G_1 \cdot h_1}{3}$ ve küçük piramidin hacmi, $V_2 = \frac{G_2 \cdot h_2}{3}$ dir. 16.12. Sonuçtan,

$$\frac{G_2}{G_1} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2$$

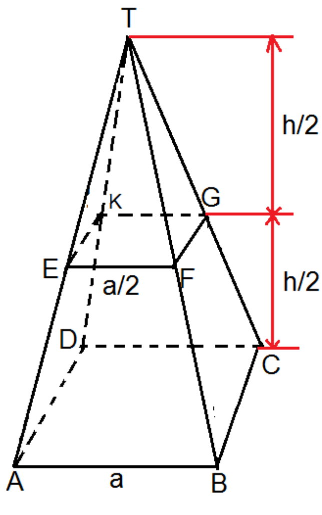
olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{G_2 \cdot h_2}{3}}{\frac{G_1 \cdot h_1}{3}} = \frac{G_2 \cdot h_2}{G_1 \cdot h_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3$$

olarak bulunur.

Örnek: Yüksekliği h birim, tabanının bir kenarı a birim olan bir kare piramit, tepeden $\frac{h}{2}$ birim uzaklıkta tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen kesik piramidin tabanlarının alanı ile hacmini bulunuz.

Çözüm:



Verilen şekilde TAB üçgeninde $[EF] \,//\, [AB]$ ve $|TE| = |EA| = \frac{h}{2}$ olduğundan,

$$|EF| = \frac{|AB|}{2} = \frac{a}{2}$$

dir. Kesik piramidin alt tabanının alanı $A_1 = a^2\ br^2$ ve üst tabanının alanı $A_2 = \frac{a^2}{4}\ br^2$ dir.

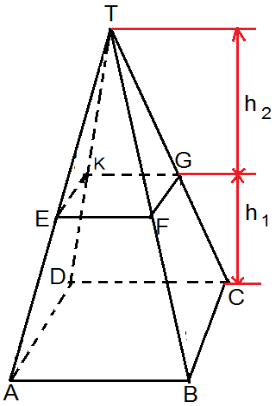
Kesik piramidin hacmi, büyük piramidin (V_b) hacminden küçük piramidin hacminin (V_k) farkına eşit olduğundan,

$$V = V_b - V_k = \frac{1}{3}a^2 h - \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{4}\right)^2 \frac{h}{2} = \frac{7a^2h}{24}\ br^2$$

bulunur.

16.13. Teorem: Alt ve üst taban alanları sırasıyla G_1 ve G_2, yüksekliği h_1 olan kesik piramidin hacmi;

$$V = \frac{1}{3}(G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 G_2}) \cdot h_1$$



dir.

İspat: Bu teoremin ispatı özel olarak kesik kare piramitler için yapılacaktır. Tepe noktası T olan ABCD piramidin hacmi ile tepe noktası T, EFGK küçük piramidin hacimleri farkına eşittir. Küçük piramidin yüksekliğine h_2 ve kesik piramidin yüksekliğine h_1 dersek,

$$V = \frac{1}{3}G_1(h_1 + h_2) - \frac{1}{3}G_2 \cdot h_2$$

$$V = \frac{1}{3}\left[G_1 h_1 + (G_1 - G_2)h_2\right] \qquad (1)$$

olur. ABCD ve EFGK benzer çokgenler olduğundan, benzerlik oranı, $\frac{h_1+h_2}{h_2}$ olur. Buradan,

$$\frac{G_1}{G_2} = \left(\frac{h_1+h_2}{h_2}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}} = \frac{h_1 + h_2}{h_2}$$

elde edilir. Son eşitlikten elde edilecek, $h_2 = \dfrac{h_1\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}}$ eşitliği (1) eşitliğinde yazılırsa;

$$V = \frac{1}{3}\left[G_1 h_1 + (G_1 - G_2)\left(\frac{h_1\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}}\right)\right]$$

$$V = \frac{1}{3}\left[G_1 h_1 + \left(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}\right)\left(\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}\right)\left(\frac{h_1\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}}\right)\right]$$

$$V = \frac{1}{3}\left[G_1 h_1 + \left(\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}\right)h_1\sqrt{G_2}\right]$$

$$V = \frac{1}{3}\left[G_1 h_1 + \sqrt{G_1 G_2}h_1 + G_2 h_1\right]$$

$$V = \frac{1}{3}\left(G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 G_2}\right) \cdot h_1$$

elde edilir.