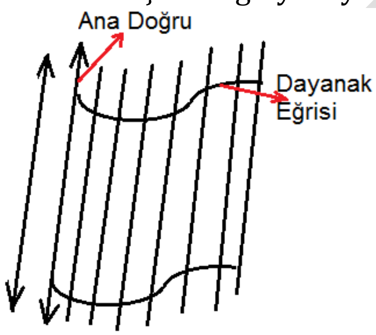
17. BÖLÜM
ÜÇ BOYUTLU CİSİMLER
(SİLİNDİR, KONİ ve KÜRE)

SİLİNDİR

17.1. Tanım: Uzayda düzlemsel bir eğri ile bu eğrinin düzlemine paralel olmayan bir ℓ doğrusu alalım. Eğri üzerindeki her noktadan ℓ doğrusuna paralel olarak çizilen doğruların oluşturduğu yüzeye **silindirik yüzey** denir.

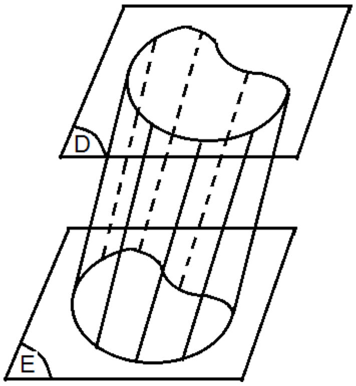


17.2. Tanım: Düzlemsel eğriye silindirik yüzeyin dayanak eğrisi, ℓ doğrusuna paralel eğri üzerindeki doğrulara da silindirik yüzeyin ana doğrusu denir.

17.3. Tanım: Dayanak eğrisi kapalı bir eğri olan silindirik bir yüzeyin ana doğrularını kesen ve birbirine paralel iki düzlem arasında kalan cisme **silindir** denir.

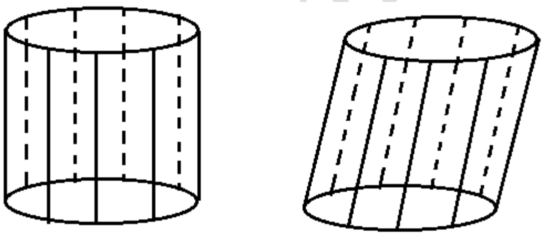
17.4. Tanım: Paralel düzlemlerin silindirik yüzeyin içinde kalan parçalarına silindirin tabanları, taban düzlemleri arasındaki uzaklığa silindirin yüksekliği, tabanların çevrelerini birleştiren eğri yüzeye **silindirin yanal yüzeyi** denir.

17.5. Tanım: Bir dairesel silindirin iki tabanı arasındaki uzaklığa yükseklik denir.



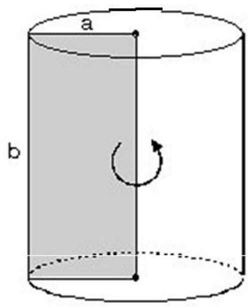
Silindir tabanlarına göre adlandırılır. Dairesel silindir, eliptik silindir gibi. Biz bu kısımda kapalı eğri olarak daire üzerine inşa edilen silindirleri inceleyeceğiz. Benzer şekilde diğer eğriler de incelenir.

17.6. Tanım: Ana doğruları dik olan silindire **dik silindir** ya da dönel silindir, dik olmayan silindirlere **eğik silindir** denir.



Dik dairesel silindir   Eğik dairesel silindir

Bir eğrinin, bir eksen etrafında 360^0 döndürülmesiyle dönel cisimler oluşur. Dönel cisimlerin, eksenlere dik düzlemler ile tüm kesitleri birer çemberdir.



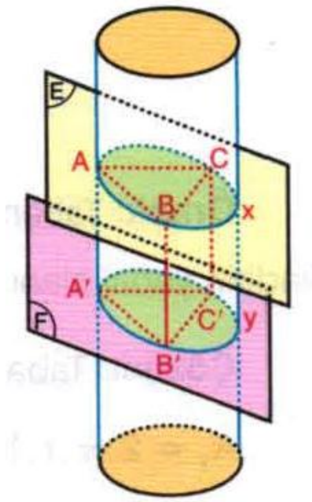
Bir dikdörtgen levha bir kenarı etrafında döndürüldüğünde silindir elde edilir.

Bir silindir, taban kenarları sonsuz sayıda n-gen prizmalardır.

Bir dairesel silindirin düzlemle kesitlerinde şu özellikleri aşikârdır:

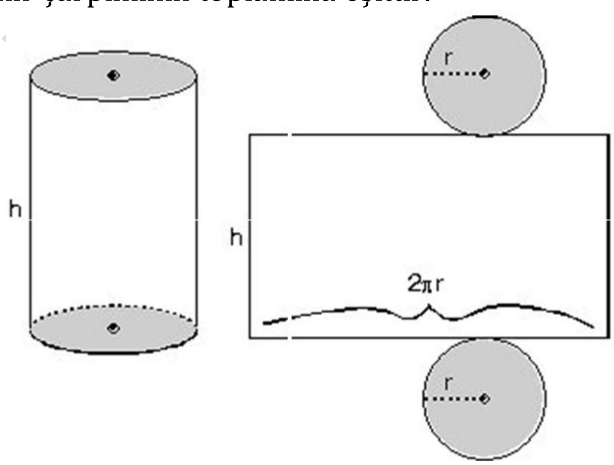
1. Dik dairesel silindirin tabanına paralel bir düzlemle ara kesiti tabanlara eş bir dairedir.

2. Bir dairesel silindir birbirine paralel düzlemlerle kesilirse, ara kesitler birbirine eş olur.



Dik Dairesel Silindirin Alanı

17.1. Teorem: Bir dik dairesel silindirin taban alanları ile taban çevresinin yüksekliğinin çarpımının toplamına eşittir.



$$A = 2\pi r(r + h)$$

İspat: Dik dairesel silindir açılımı şekildeki gibidir. Silindirin açılımı bir dikdörtgen ve iki daireden oluşmaktadır. Dikdörtgenin ayrıtları $2\pi r$ ve h dir. Buna göre dikdörtgen olan yanal alan,

$$A_Y = 2\pi rh$$

dir. İki tane taban daireler vardır. O halde toplam alan,

$$A = A_T + A_Y = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

dir.

Örnek: Taban yarıçapı 8 cm olan dik dairesel silindirin yüksekliği 15 cm dir. Buna göre silindirin yanal alanını ve toplam alanını bulunuz.

Çözüm: $r = 8\text{ cm}, h = 15\text{ cm}$

$$A_Y = 2\pi rh = 2\pi \cdot 8 \cdot 15 = 240\pi\text{ cm}^2$$
$$A = 2\pi \cdot 8(8 + 15) = 368\pi\text{ cm}^2$$

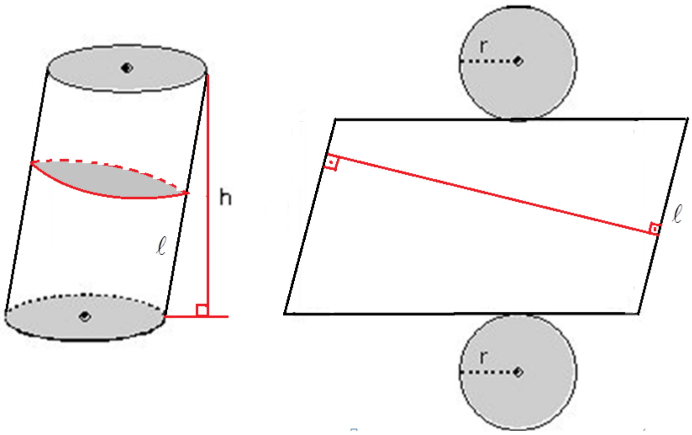
Örnek: Bir dairesel eğik silindirin dik kesitinin yarıçapı 4 cm ve ana doğrusunun uzunluğu 10 cm ise bu silindirin alanını bulunuz.

Çözüm: $r = 4\text{ cm}, h = 10\text{ cm}$

$$A_Y = 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 10 = 80\pi\text{ cm}^2$$
$$A = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 4(4 + 10) = 112\pi\text{ cm}^2$$

Eğik Silindirin Alanı

17.2. Teorem: Bir eğik dairesel silindirin taban alanları ile taban çevresinin ayrıtının çarpımının eğiminin sünüşünün toplamına eşittir.



$$A = 2\pi r(r + \ell \sin\alpha)$$

İspat: $\sin\alpha = \frac{h}{\ell}$ ise $h = \ell \sin\alpha$ olduğundan, eğik silindirin yanal alanı,

$$A_Y = 2\pi rh = 2\pi r\ell \sin\alpha$$

dir. İki tane taban daireler vardır. O halde toplam alan,

$$A = A_T + A_Y = 2\pi r^2 + 2\pi r\ell \sin\alpha = 2\pi r(r + \ell \sin\alpha)$$

dir.

Örnek: Bir dairesel eğik silindirin yarıçapı 5 cm, eğimi 30^0, uzunluğu 16 cm ise bu silindirin yanal alanını ve toplam alanını bulunuz.

Çözüm: $r = 5$ cm, $\ell = 16$ cm, $\alpha = 30^0$

$$A_Y = 2\pi r\ell \sin\alpha = 2\pi \cdot 5 \cdot 16 \cdot \sin 30 = 80\pi \text{ cm}^2$$

$$A = 2\pi r(r + \ell \sin\alpha) = 2\pi \cdot 5(5 + 16 \cdot \sin 30) = 130\pi \text{ cm}^2$$

Silindirin Hacmi

17.3. Teorem: Bir dairesel silindirin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

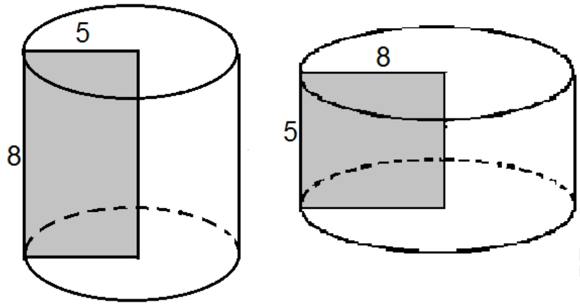
İspat: Silindir özel bir prizma olduğunu yukarıda söylemiştik. Buna göre,

$$V = \pi r^2 h$$

bulunur.

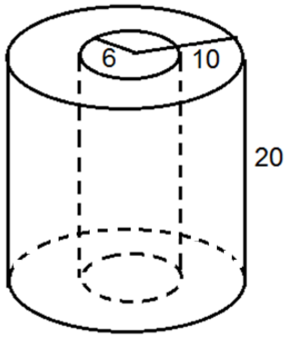
Örnek: Kenar uzunlukları 5 cm ve 8 cm olan bir dikdörtgen kenarları etrafında ayrı ayrı 360^0 döndürülüyor. Oluşan silindirlerin alanlarını ve hacimlerini bulunuz.

Çözüm: Birinci dik silindir $r = 5$ cm, $h = 8$ cm ve ikinci dik silindir $r = 8$ cm, $h = 5$ cm olduğundan,



$V = \pi 5^2 8 = 200\pi\ cm^2$
$V = \pi 8^2 5 = 320\pi\ cm^2$
bulunur.

Örnek: Taban yarıçapları 10 cm ve 4 cm olan iki borunun yükseklikleri 20 cm dir. Bu içi boru küçük çaplı olan büyük çaplının içine taban merkezleri çakışık olacak şekilde yerleştiriliyor. İki boru arasına su dolduruluyor. İç kısımdaki boru alındığında suyun yüksekliğinin borunun içinde kaç cm olacağını bulunuz.



Çözüm: Büyük çaplı borunun hacminden küçük çaplı borunun hacmi çıkarılırsa suyun hacmi bulunur.

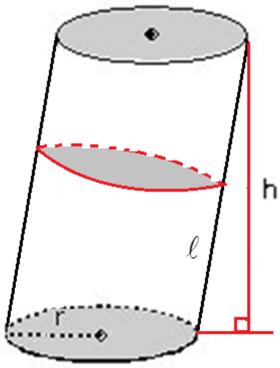
$V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h = V = \pi 10^2 20 - \pi 6^2 20 = 1\ 280\pi\ cm^2$

bulunur. İç kısımdaki boru alındığında suyun yüksekliği düşecektir, yeni durumu da suyun yüksekliği h olsun. Buna göre suyun yüksekliği,

$V = \pi r_1^2 h$
$1280\pi = \pi 10^2 h$
$h = 12{,}8$

olur.

17.4. Teorem: Bir eğik dairesel silindirin hacmi, taban alanı ile ayrıtının sünüsünun çarpımına eşittir.

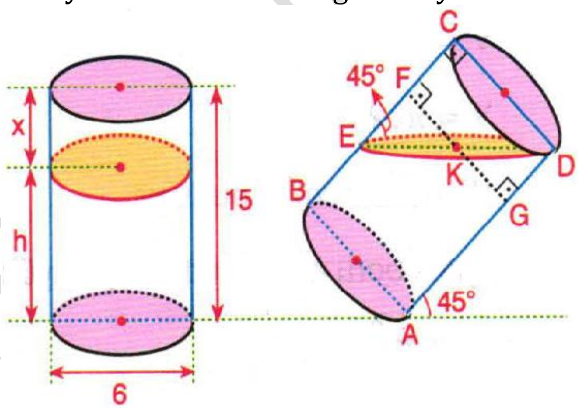


İspat: Eğik silindirin yüksekliği $h = \ell \sin\alpha$ olduğundan,

$$V = \pi r^2 \ell \sin\alpha$$

bulunur.

Örnek: Taban çapı 6 cm, yüksekliği 15 cm bir dik silindir kavanoz bir miktar yağ vardır. Bu kavanoz 45^0 lik açı yapacak şekilde eğildiğinde, yağın yüzeyi kabın ağzına dayanmaktadır. Buna göre suyun hacmi kaç cm^{2}dir.



Çözüm: Kavanoz dik durumdan eğik duruma getirilirse şekildeki gibi EDC üçgeni ikizkenar dik üçgen olur.

$$|EC| = |CD| = 6 \text{ cm}$$

dir. Eğik şekil dik konuma getirilirse yağ yüzeyi, [ED] nun orta noktasından [CD] na çizilen paralel olur. Buradan, A.K.A. eşlik teoremi gereği,

$$|EC| = |CD| = 6 \text{ cm ise } h = 15 - 3 = 12 \text{ cm}$$

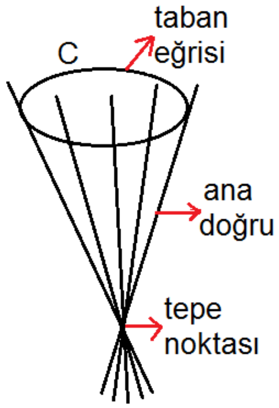
olur. Buna göre,

$$V = \pi r^2 h = \pi 3^2 12 = 108\pi \text{ cm}^2$$

elde edilir.

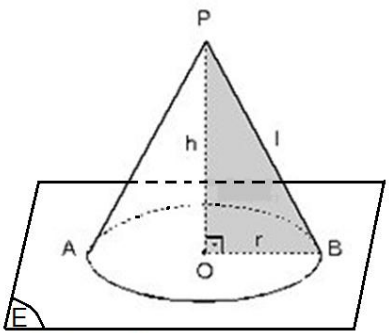
KONİ

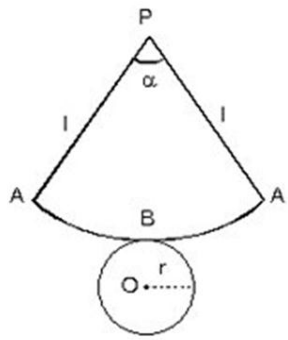
17.7. Tanım: Uzayda, düzlemsel kapalı bir C eğrisi ile, bu düzlemin dışında bir T noktası verilsin. T noktası ile C eğrisinin her noktasından geçen doğruların oluşturduğu yüzeye **konik yüzey** denir.



17.8. Tanım: Konik yüzeyde tanımlı düzlemsel kapalı C eğrisine **taban eğrisi (dayanak eğrisi)**, C eğrisinin düzlemi dışındaki T noktasına, bu konik yüzeyin tepe noktası, **tepe noktası** ile C eğrisinin her noktasından geçerek konik yüzeyi oluşturan doğru parçasına ise, konik yüzeyin **ana doğruları** denir.

17.9. Tanım: Taban eğrisi kapalı bir eğri olan konik yüzeyin tüm ana doğrularını kesen bir düzlemle tepe noktası arasında kalan cisme koni denir.





Şekilde E düzlemi ile konik yüzeyin kesitine **koninin tabanı**, tepe noktasının tabana uzaklığına **koninin yüksekliği**, tabanının çevresini tepeye birleştiren eğri yüzeye de **koninin yanal yüzeyi** denir.

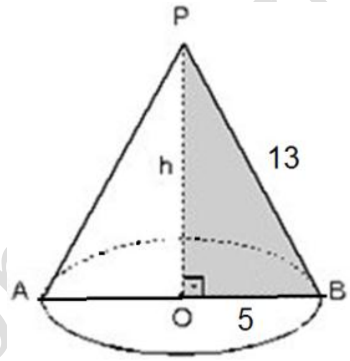
Konikler tabanlarına göre; dairesel koni ya da eliptik şeklinde adlandırılırlar.

17.10. Tanım: Tabanı daire olan ve yüksekliği tabanın merkezi ile tepe noktasından geçen koniye **dik dairesel koni** denir. Yükseklik ayağı taban merkezinden geçmeyen koniye de **eğik dairesel koni** denir.

Dik dairesel konide bütün ana doğrular birbirine eşittir ve yüksekliği simetri eksenini oluşturur.

Örnek: Taban yarıçapı 5cm olan bir dik dairesel koninin ana doğrusunun uzunluğu 13 cm dir. Bu koninin simetri ekseninden geçen düzlemle ara kesiti olan üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm: Bir dik dairesel koninin merkezinden geçen düzlemle kesiti ikizkenar üçgendir. $5-12-13$ üçgeninden $h=12$ cm



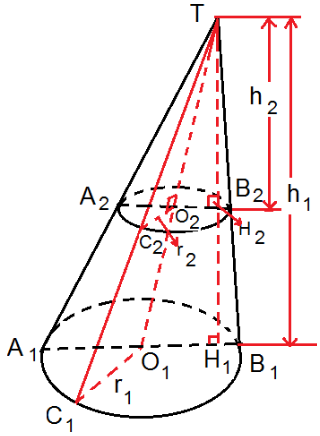
$$A(T\overset{\Delta}{A}B)=\frac{|AB|\cdot|PO|}{2}=\frac{10\cdot 12}{2}=60\text{ cm}^2$$

elde edilir.

17.1. Sonuç: Bir koninin, tepe noktası ile tabanını kesen düzlemle kesiti her zaman bir üçgendir.

17.2. Sonuç: Bir dairesel koninin tabanına paralel bir düzlemle kesiti yine bir dairedir.

17.5. Teorem: Bir dairesel koninin tabanına paralel bir düzlemle kesitinin yarıçapları oranı, tepe noktasından bu kesitlere olan uzaklıklarının oranına eşittir.



Tepe noktası T ve tabanı A_1B_1 çaplı daire olan koninin taban düzlemi ile O_2 merkezli A_2B_2 çaplı çemberin düzlemi paralel olduğundan,

$$[C_1O_1]//[C_2O_2] \text{ ve } [C_1H_1]//[C_2H_2]$$

dir. A.A.A. benzerlik teoreminden $T\overset{\Delta}{C_2}O_2 \sim T\overset{\Delta}{C_1}O_1$ olup,

$$\frac{|TO_2|}{|TO_1|} = \frac{|O_2C_2|}{|O_1C_1|} = \frac{r_2}{r_1}$$

ve $T\overset{\Delta}{C_2}H_2 \sim T\overset{\Delta}{C_1}H_1$ olup,

$$\frac{|TO_2|}{|TO_1|} = \frac{|TH_2|}{|TH_1|} = \frac{h_2}{h_1}$$

dir. O halde, $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_2}{h_1}$ eşitliği ispatlamış olur.

Örnek: Yüksekliği 15 cm ve tabanının yarıçapı 6 cm olan bir koni, taban düzlemine paralel bir düzlemle tabandan 10 cm uzaklıkta kesiliyor. Düzlemde koninin kesiti olan dairenin yarıçapını bulunuz.

Çözüm: 17.5. teoremden $h_1 = 15\ cm$ olduğundan $h_2 = 15 - 10 = 5$ cm' dir. Buna göre,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$\frac{r_2}{6} = \frac{5}{15}$$

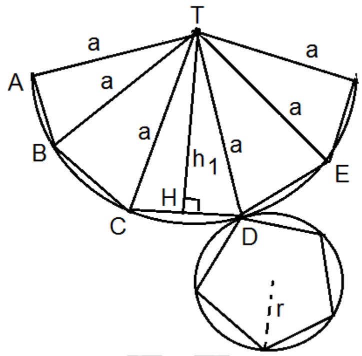
$$r_2 = 2 \text{ cm}$$

dir.

Dik Dairesel Koninin Alanı

Koni, taban kenar sayısı sonsuza yaklaşan bir piramittir. Bu yüzden koninin alan ve hacim hesaplarında piramidin alan ve hacim hesaplarını kullanarak ispat yapacağız.

17.6. Teorem: Bir dairesel koninin yanal alanı, taban çevresi ile ana doğrusunun uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir.



$$A = \pi r a$$

İspat: Koninin yan yüzeyini [AB], [BC], [CD], … , [EF] eş tabanlı üçgenlere ayırırsak,

$$A_Y = \frac{h_1(|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EF|)}{2}$$

dir. Koninin tabanının kenar sayısı sonsuza giderse, $a = r_1$ olur ve $|AB|, |BC|, |CD|, |DE|, |EF|$ uzunlukları sıfıra yaklaşarak $m(\overset{\frown}{AF})$ yayını oluştururlar. $m(\overset{\frown}{AF}) = 2\pi r$ olduğundan,

$$A_Y = \frac{2\pi r a}{2} = \pi r a$$

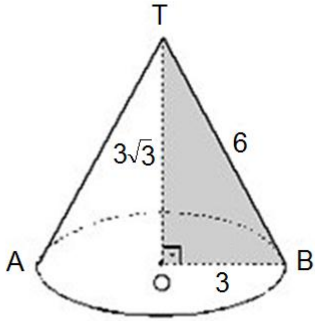
bulunur.

17.3. Sonuç: Bir dik dairesel koninin alanı,

$$A = \pi r a + \pi r^2 = \pi r(a + r)$$

dır.

Örnek: Bir dik dairesel koninin taban yarıçapı 3 br ve yüksekliği $3\sqrt{3}$ br olduğuna göre, bu koninin yanal alanını ve toplam alanını bulunuz.



Çözüm: Yandaki şekilde, TOB dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$|TB|^2 = (3\sqrt{3})^2 + 3^2 \text{ ise } |TB| = 6 \text{ cm}$$

bulunur. Dik dairesel koninin yanal alanı,

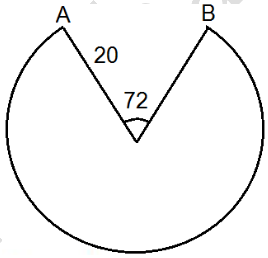
$$A = \pi ra = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi \text{ br}^2$$

toplam alan,

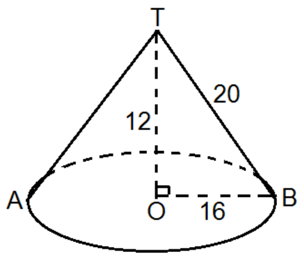
$$A = \pi r(a + r) = \pi \cdot 3 \cdot (3\sqrt{3} + 3) = 9(\sqrt{3} + 1)\pi \text{ cm}^2$$

bulunur.

Örnek: Yandaki şekil, tepe noktası T ve ana doğrusunun uzunluğu 20 cm olan bir dik dairesel koninin yan yüzerinin açılımıdır. Buna göre bu koninin tabanının yarıçap uzunluğunu bulunuz.



Çözüm:



AB yay parçasının uzunluğu koninin tabanının çevresine eşit olacağından; T merkezli dairenin çevresi 40π olup,

$$|AB| = \frac{288 \cdot 40\pi}{360} = 32\pi \text{ cm}^2$$

dir. $2\pi r = 32\pi$ ise $r = 16$ cm bulunur. O halde koninin tabanının alanı,

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 16^2 = 256\pi \text{ cm}^2$$

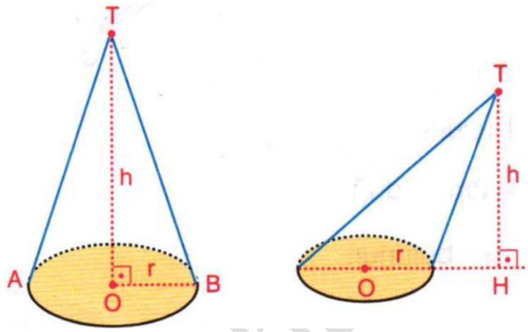
bulunur.

Dik Dairesel Koninin Hacmi

17.7. Teorem: Bir dairesel koninin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ br}^3$$

İspat: Dairesel koni, taban kenar sayısı sonsuza giden bir piramit olarak düşünebileceğinden, hacmi de piramitlerde olduğu gibi taban alan ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşit olur. Tabanının yarıçapı r, yüksekliği h olan dairesel koninin hacmi,



$$V = \frac{1}{3}A_T h = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ br}^3$$

olur. (Bu formül hem dik hem de eğik koniler için geçerlidir.)

Örnek: Tabanının yarıçap uzunluğu 8 cm ve ana doğrusunun uzunluğu 17 cm olan dik dairesel koninin toplam alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm: $5-15-17$ üçgeninden, $h = 15$ cm olur. Buna göre dik dairesel koninin toplam alanı,

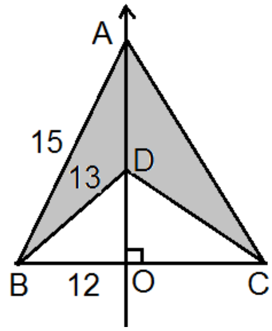
$$A = \pi r(a + r) = \pi \cdot 8 \cdot (8 + 17) = 200\pi \text{ cm}^2$$

bulunur. Dik dairesel koninin yüksekliği $h = 15$ cm olduğundan hacmi,

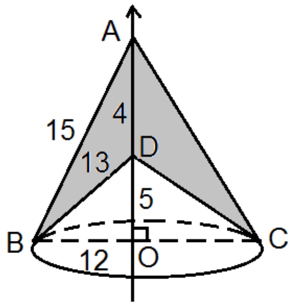
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 8^2 15 = 300\pi \text{ br}^3$$

elde edilir.

Örnek: Şekilde ABCD bir iç bükey dörtgendir. $[AD] \perp [BC]$, $|AB| = 15$ cm, $|BD| = 13$ cm ve $|BO| = |OC| = 12$ cm olduğuna göre, bu dörtgen AO doğrusu etrafına 180^0 döndürüldüğünde, oluşan cismin hacmini bulunuz.



Çözüm: ABCD içbükey dörtgeninin AO doğrusu etrafında 180^0 döndürülmesiyle oluşan cisim, tabanı O merkezli, yarıçapı 12 cm olan daire ile yükseklikleri 5 ve 9 cm olan içiçe iki dik dairesel konidir. Büyük koninin hacmini V_1 ve küçük koninin hacmini V_2 dersek,

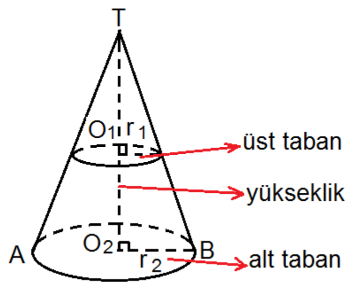


$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi(12^2 \cdot 9 - 12^2 \cdot 5) = 192\pi \text{ cm}^2$$

bulunur.

Kesik Koni

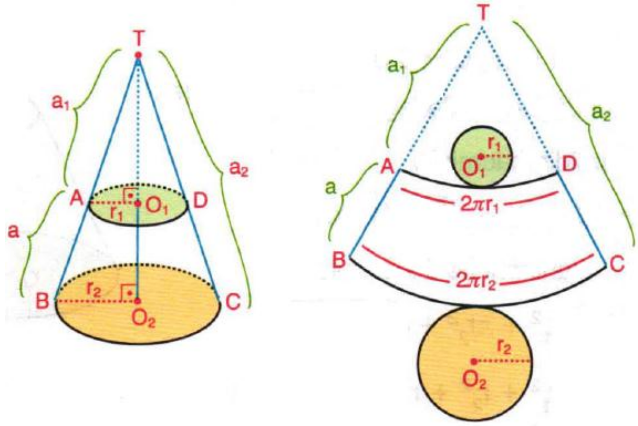
17.11. Tanım: Bir koni taban düzlemine paralel bir düzlemle kesildiğinde kesit ile taban düzlemi arasında kalan cisme **kesik koni** denir. Kesik koninin kesite üst taban, iki taban arasındaki uzaklığa kesik koninin yüksekliği denir.



Kesik koniler dik ve eğik olmak üzere iki çeşittir.

Dik Dairesel Kesik Koninin Alanı

17.8. Teorem: Dik dairesel kesik koninin yanal alanı, tabanların çevrelerinin toplamı ile ana doğrusunun uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir.



$$A_Y = \pi a(r_1 + r_2)$$

İspat: Kesik koninin yanal alanı, tepe noktası T ve tabanı O_2 merkezli daire olan büyük koninin yanal alanı ile, tepe noktası T ve tabanı O_1 merkezli daire olan küçük koninin yanal alanının farkına eşit olacağından,

$$A_Y = \pi r_2 a_2 - \pi r_1 a_1 \qquad (1)$$

dir. $T\overset{\triangle}{B}O_2 \sim T\overset{\triangle}{A}O_1$ benzerliğinden, $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{r_2}{r_1}$ dir. Orantı özelliğinden,

$$\frac{a_2}{r_2} = \frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2 - a_1}{r_2 - r_1} = \frac{a}{r_2 - r_1}$$

dir. Buna göre,

$$\frac{a_2}{r_2} = \frac{a}{r_2 - r_1} \text{ olduğundan } a_2 = \frac{a \cdot r_2}{r_2 - r_1} \qquad (2)$$

$$\frac{a_1}{r_1} = \frac{a}{r_2 - r_1} \text{ olduğundan } a_1 = \frac{a \cdot r_1}{r_2 - r_1} \qquad (3)$$

olur. (2) ve (3) değerleri (1) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} A_Y &= \pi r_2\left(\frac{a \cdot r_2}{r_2 - r_1}\right) - \pi r_1\left(\frac{a \cdot r_1}{r_2 - r_1}\right) \\ &= \frac{\pi \cdot a}{r_2 - r_1}(r_2^2 - r_1^2) \\ &= \pi a(r_1 + r_2) \end{aligned}$$

bulunur.

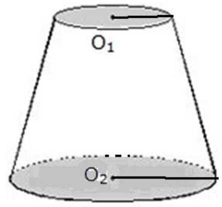
17.4. Sonuç: Dik dairesel kesik koninin toplam alanı, alt ve üst tabanlarının alanları ile yanal alanının toplamına eşit olacağından,

$$A = \pi r_2^2 + \pi r_1^2 + \pi a(r_1 + r_2)$$

dir.

Dairesel Kesik Koninin Hacmi

17.9. Teorem: Taban yarıçapları r_1 ve r_2, yüksekliği h olan herhangi bir dairesel kesik koninin hacmi,



$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

dir.

İspat: Dairesel kesik koni, tabanlarının kenar sayıları sonsuza giden kesik piramit gibi düşünelim. Kesik piramidin hacminin,

$$V = \frac{1}{3}(G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 G_2}) \cdot h_1$$

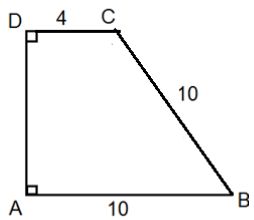
olduğunu 16.13. teoremde ispatlanmıştı, G_1 ve G_2 alanlarını koni için bulup yazarsak,

$$V = \frac{1}{3}(\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \pi r_2^2}) \cdot h$$

$$V = \frac{\pi}{3}(r_1^2 + r_2^2 + \sqrt{r_1^2 r_2^2}) \cdot h$$

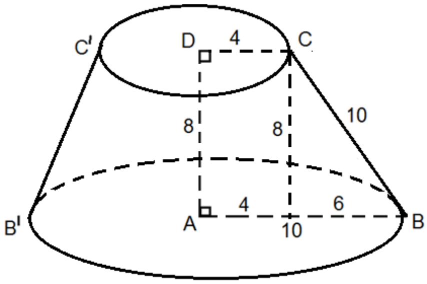
bulunur.

Örnek: ABCD dik yamuğunda $m(\widehat{A}) = 90^0$, $|AB| = |CB| = 10$ cm, $|DC| = 4$ cm'dir.



Bu yamuğun [AD] kenarı etrafında 360^0 döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini ve toplam alanını bulunuz.

Çözüm: ABCD dik yamuğu, [AD] kenarı etrafında 360^0 döndürülmesiyle oluşan cisim, bir dik dairesel kesik konidir.



C noktasından, [AB] na bir dik inildiğinde, $|DC| = |AH| = 4$ cm olacağından $|HB| = 6$ cm ve CHB dik üçgeninde Pisagor teoreminden, $|CH| = |DA| = 8$ cm bulunur. Buna göre, dik dairesel kesik koninin taban yarıçapları $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 40$ cm ve yükseklik $h = 8$ cm olduğundan, bu kesik koninin hacmi;

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) \\ &= \frac{1}{3}\pi 8(10^2 + 4^2 + 10 \cdot 4) \\ &= 416\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

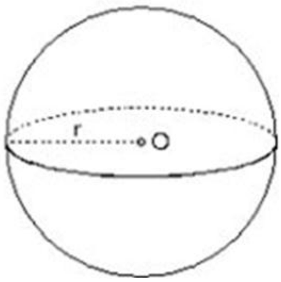
bulunur. Dönel kesik koninin toplam alanı ise;

$$\begin{aligned} A &= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi a(r_1 + r_2) \\ &= \pi 10^2 + \pi 4^2 + \pi 10(10 + 4) \\ &= 256\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

bulunur.

KÜRE

17.12. Tanım: Uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine küre yüzeyi, küre yüzeyi ile sınırlanan cisme de küre denir.

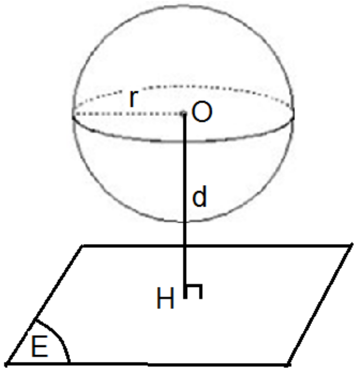


Uzayda alınan bu sabit noktaya **kürenin merkezi**, küre yüzeyi ile merkezi arasındaki sabit uzaklığa **kürenin yarıçapı**, küre yüzeyinde alınan farklı iki noktayı birleştiren doğru parçasına **kürenin kirişi**, merkezden geçen kirişe de **kürenin çapı** denir.

Bir Küre İle Bir Düzlemin Birbirlerine Göre Konumları

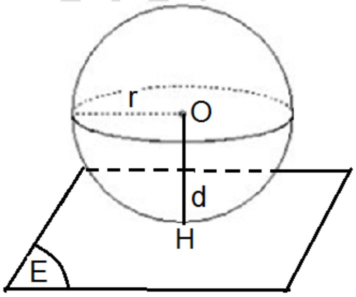
Bir küre ile düzlemin birbirine göre üç farklı konumu vardır. Yarıçapı r ve kürenin merkezinin düzleme uzaklığı d olmak üzere;

1. $d > r$ ise, küre ile düzlemin ara kesiti boş kümedir.



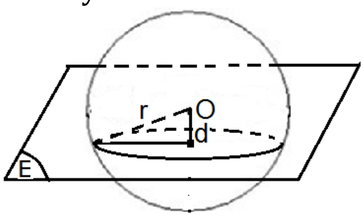
d > r

2. $d = r$ ise, küre bir T noktasında düzleme teğettir. Bu durumda, küre ile düzlemin ara kesiti bir noktadır. Bu noktaya değme noktası, düzleme de teğet düzlemi denir.



d = r

3. $d < r$ ise, düzlem küreyi keser ve ara kesiti bir dairedir.



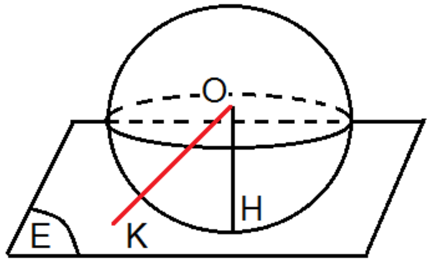
d < r

Bu ara kesit dairenin yarıçapı;

$$|AO_1| = \sqrt{r^2 - d^2}$$

dır.

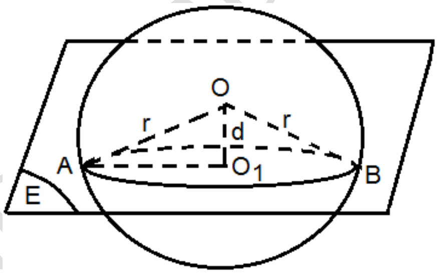
17.10. Teorem: O merkezli küre H noktasında E düzlemine teğet ise [OH] ⊥ E dir.



O merkezli küre ile E düzleminin ara kesiti H noktası ⇔ [OH] ⊥ E dir.

İspat: K noktasının küre düzleminin ara kesiti olan H noktasından farklı bir nokta olduğunu varsayalım. Bu durumda [OH] ⊥ E olduğundan, OKH üçgeni dik üçgendir. Buradan |OK| > |OH| olur. Oysa küre ile düzlem teğet olduğundan, düzlem ile kürenin merkezi arasındaki en kısa uzaklık |OK| olur. Bu çelişkiden, H noktası K noktası ile çakışıktır.

17.11. Teorem: Bir küre yüzeyinin bir düzlemle ara kesiti bir çember, kürenin düzlemle ara kesiti bir dairedir.

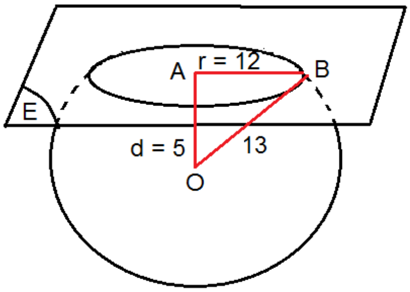


İspat: Merkezi O noktası ve yarıçapı r olan bir küre E düzlemi ile kesiliyor. d, küre merkezinin düzleme uzaklığıdır. Küre ile düzlemin ara kesiti üzerinde alınan bir A noktası için, küre merkezinin düzleme uzaklığı, $|OO_1| = d$ ve $[OO_1] \perp [AB]$ olduğundan, $|AO_1| = r_1$ olmak üzere OAO_1 dik üçgeninde Pisagor teoreminden;

$$|AO_1| = \sqrt{|OA|^2 - |OO_1|^2}$$
$$r_1 = \sqrt{r^2 - d^2}$$

olur. O halde, ara kesit üzerindeki A noktaları, sabit O_1 noktasına eşit uzaklıkta bulunurlar. Buna göre, ara kesit kümesi bir çemberdir. Bu çemberle sınırlanan düzlemsel bölge de daire olur.

Örnek: Yarıçapı 13 cm olan bir kürenin merkezinden, $d = 5$ cm uzaklıkta bulunan düzlemle ara kesiti bir dairedir. Bu dairenin alanını bulunuz.



Çözüm: Şekilde görüldüğü gibi $|OA| = d = 5$ cm ve $|OB| = 13$ cm olduğundan OAB dik üçgeninde, $|AB| = 12$ cm bulunur. A merkezli dairenin yarıçapı 12 cm olup alanı,

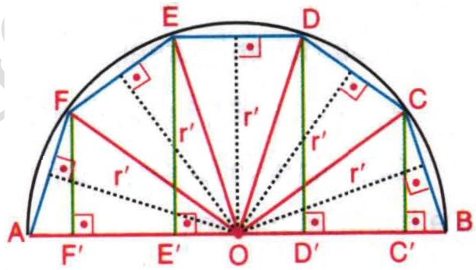
$$A = \pi r^2 = 144\pi \text{ cm}^2$$

bulunur.

Kürenin Alanı

17.12. Teorem: Yarıçap uzunluğu r olan bir kürenin yüzey alanı, $A = 4\pi r^2$ dir.

İspat: $|AB| = 2r$ çaplı yarım çemberin, [AB] etrafında 360^0 döndürülmesiyle oluşan r yarıçaplı küre yüzeyinin alanıdır. Bu yarım çemberin içine, herhangi bir yarım düzgün BCDEFA çokgenini çizelim. Bu düzgün çokgenin iç teğet çemberinin yarıçapına r' diyelim.



BCDEFA düzgün yarım çokgenin [AB] etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin alanına Y diyelim ve bu alan [AF], [FE], [ED], [DC], [CB] nın döndürülmesiyle oluşan alanların toplamına eşit olacağından,

$$Y = 2\pi r'|AF'| + 2\pi r'|F'E'| + 2\pi r'|E'D'| + 2\pi r'|D'C'| + 2\pi r'|C'B|$$

$$Y = 2\pi r' \underbrace{(|AF'| + |F'E'| + |E'D'| + |D'C'| + |C'B|)}_{2r}$$

$$Y = 4\pi r' r$$

bulunur. Burada düzgün yarım çokgenin kenarlarının sayısı sonsuz sayıda artırılırsa, [AB] çaplı yarım çember oluşur. Bu durumda yarım çokgenin çevresi [AB] çaplı çemberin çevresine, r' yarıçapı r yarıçapına ve Y alanı da kürenin alanına erişir. O halde, r' için

$$A = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

elde edilir.

17.5. Sonuç: Bir kürenin alanı bir büyük dairesinin alanının dört katına eşittir.

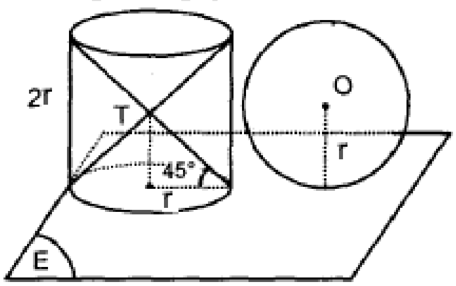
Kürenin Hacmi

17.13. Teorem: Yarıçapı r olan kürenin hacmi;

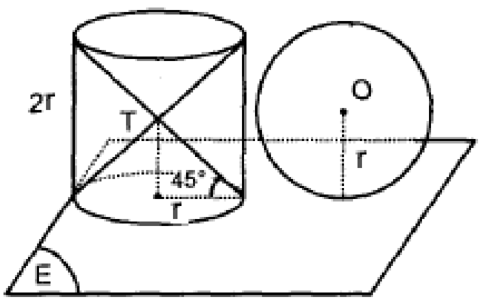
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

tür.

İspat: Bir (Or) küresine teğet olan E düzleminin üzerine, taban yarıçapı r ve yüksekliği 2r olan bir dik silindiri oturtalım. Silindirin merkezi T ise, silindirin tabanlarının T ile ayrı ayrı belirttiği konileri silindirden çıkaralım. Silindirden geri kalan kısım ile kürenin hacmini karşılaştıracağız.



T den d uzaklığında (d < r) ve E ye paralel olan F düzlemi ile bu cisimlerin arakesitlerini inceleyelim.



Silindirden kalan parça ile F nin arakesiti, iç yarıçapı d ve dış yarıçapı r olan bir daire halkası; küre ile F nin arakesiti yarıçapı $\sqrt{r^2-d^2}$ olan bir daire olacaktır. Bunların ayrı ayrı alanlarını bulalım. Halkanın alanı A_1 ve dairenin alanı A_2 olmak üzere,

$$A_1 = \pi r^2 - \pi d^2 \text{ ve } A_2 = \pi(\sqrt{r^2-d^2})^2 = \pi r^2 - \pi d^2$$

olup $A_1 = A_2$ dir. Buna göre, silindirden kalan parça ile kürenin E'ye paralel her düzlemle arakesitlerinin alanları eşit olmaktadır.

O halde, Cavalieri ilkesine göre bu üç boyutlu cisimlerin hacimleri eşittir. Buna göre silindirin hacminden, belirtilen konilerin hacimlerini çıkarırsak geriye kürenin hacmi kalır.

$$V = V_{silindir} - 2 \cdot V_{koni}$$

$$V = \pi r^2 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 r$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

elde edilir.

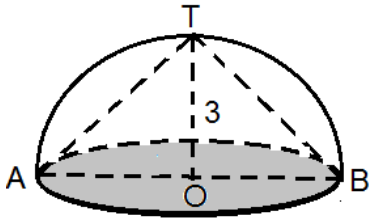
Örnek: Hacmi alanına eşit olan kürenin yarıçapını bulunuz.

Çözüm: $A = 4\pi r^2$ ve $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r = 3 \text{ cm}$$

Örnek: Yarıçapları 3 olan yarım küre ile bu yarım kürenin tabanını taban kabul eden ve tepe noktası küre yüzeyi üzerinde bulunan dik koninin alan ve hacimlerini bulunuz.



Çözüm: Yarım kürenin alanı ve hacmi sırasıyla,

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi 3^2 = 18\pi \text{ cm}^2$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi 3^3 = 18\pi \text{ cm}^2$$

dir. $|AO| = |TO| = 3$ cm ve $a = |AT| = 3\sqrt{2}$ cm olduğundan koninin alanı ve hacmi sırasıyla,

$$A_2 = \pi r(a + r) = \pi 3(3\sqrt{2} + 3) = 9(1 + \sqrt{2})\pi \text{ cm}^2$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

bulunur.

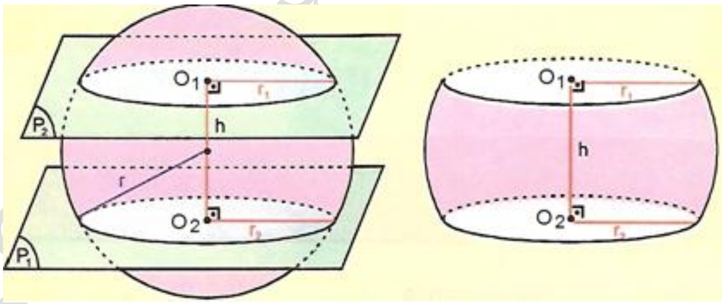
17.14. Teorem: Yarıçapı r_1 ve r_2 olan kürenin alanları oranı $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ ve hacimleri oranı $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$ dir.

İspat: $A_1 = 4\pi r_1^2$ ve $A_2 = 4\pi r_2^2$ olacağından $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ dir.

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^3$ ve $V_2 = \frac{1}{3}\pi r_1^3$ olacağından $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$ dir.

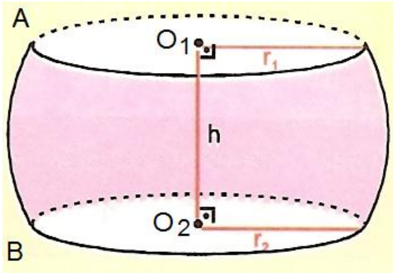
Küre Kuşağı

17.13. Tanım: Bir küre yüzeyinde paralel iki düzlem arasında kalan parçasına **küre tabakası** denir.



Birbirine paralel düzlemsel kesitle kuşağında O_1 ve O_2 merkezli çemberler, küre kuşağında ise çemberlerdir. Bu düzlemsel kesitlere, **küre kuşağının tabanları**, tabanlar arasındaki uzaklığına da **küre kuşağının yüksekliği** denir. Küre kuşağı alttan-üstten açık ve üstü açıktır.

17.15. Teorem: Küre kuşağının alanı, kürenin büyük çemberinin çevresinin uzunluğu ile küre kuşağının yüksekliğinin çarpımına eşittir.



r yarıçaplı h yüksekliğindeki küre kuşağının alanı $\Leftrightarrow$ $A = 2\pi rh$

İspat: Verilen şekilde görülen küre kuşağı AB çember yayının $|O_1O_2| = 2r$ çapı etrafında döndürülmesiyle oluşur. Bu kuşağı alanı, $m(\overset{\frown}{AB})$ düzgün çokgen parçasının oluşturduğu alanının limiti olarak düşünelim. Bu durumda, r yarıçaplı bir küreden kesilen h yüksekliğindeki küre kuşağının alanı;

$$A = 2\pi r|O_1O_2| = 2\pi rh$$

olur.

Küre Kapağı

17.14. Tanım: Bir küre yüzeyinin bir düzlemle kesilmesi sonucu elde edilen parçalardan her birine küre kapağı denir.

Küre kapağı

17.16. Teorem: Bir küre kapağının yarıçapı r ve yüksekliği h ise, bu küre kapağının alanı,

$$A = 2\pi rh$$

dir.

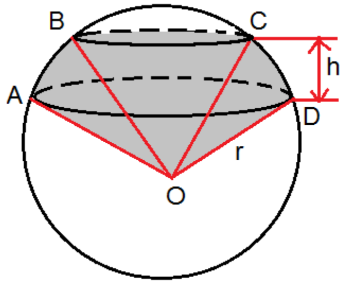
İspat: Şekilde görüldüğü gibi küre kapağı bir tabanı sıfır olan küre kuşağı olduğundan, küre kuşağının alan hesaplaması ile küre kapağının alan hesaplaması aynı olacağından,

$$A = 2\pi rh$$

bulunur.

Küre Kesmesi (Topacı)

17.15. Tanım: Bir daire kesmesinin kendisini kesmeyen bir çap etrafında döndürülmesinden oluşan cisme küre kesmesi (topacı) denir.



Küre kesmesi, ABDC küre kuşağı ile AOD ve BOC koni yüzeyleri tarafından sınırlanan bir cisimdir. Küre kesmesi, tepeleri kürenin merkezinde, tabanları küre kuşağı üzerinde bulunan sonsuz sayıda konilerin toplamı şeklinde düşünülebilir.

17.17. Teorem: Bir küre kesmesinin yarıçapı r ve yüksekliği h ise, bu küre kesmesinin hacmi,

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

dir.

İspat: AOD ve BOC koni yüzeylerinin yanal alanları r olacağından küre kuşağının alanı $A = 2\pi rh$ olacağından, küre kesmesinin hacmi;

$$V = \frac{1}{3}Ar = \frac{1}{3}2\pi rhr = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

bulunur.

Küre Parçası

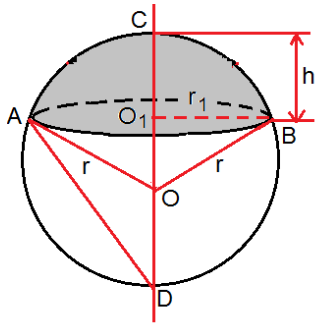
17.16. Tanım: Bir küre kapağı ile bu kapağın taban dairesi tarafından sınırlanan cisme **küre parçası** denir. Yani küre parçası, içi boş küre kapağının içi dolu halidir. Küre parçasının yüzey alanı küre kapağıdır.

17.19. Teorem: Yarıçapı r, yüksekliği h olan küre parçasının hacmi,

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

dir.

İspat:



Küre parçası, (OBCA) küre kesmesiyle (OAB) konisinin hacimleri farkı olacağından,

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r_1^2 (r - h)$$

olur. ACD dik üçgenini Öklid teoremi uygulanırsa $r_1^2 = h(2r - h)$ olacağından,

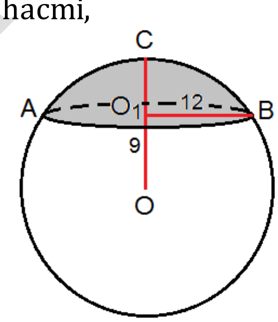
$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi (2r - h)(r - h)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$$

bulunur.

Örnek: Yarıçapı 12 cm olan bir kürenin merkezinden 9 cm uzaklıkta bulunan bir düzlemle kesilerek elde edilen küre kapağının alanı ile küre parçasının hacmini bulunuz.

Çözüm: $h = |CO_1| = 12 - 9 = 3$ cm ve $r = 12$ cm sırasıyla küre kapağının alanı ve küre parçasının hacmi,



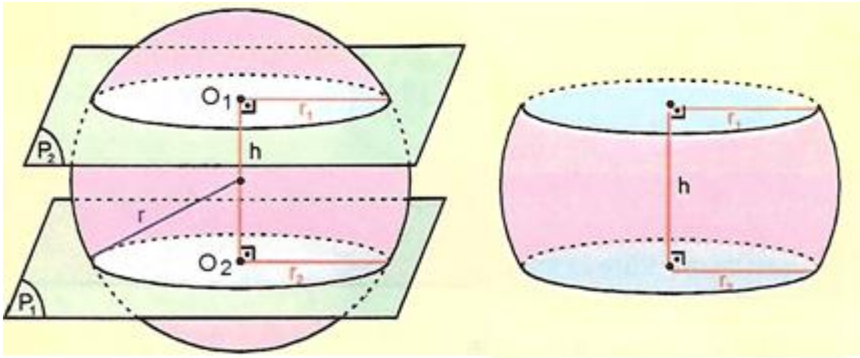
$$A = 2\pi r h = 2\pi \cdot 12 \cdot 3 = 72\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h) = \frac{1}{3}\pi 3^2 (3 \cdot 12 - 3) = 99\pi \text{ cm}^3$$

olur.

Küre Tabakası

17.17. Tanım: Bir kürede paralel iki düzlem arasında kalan parçasına **küre tabakası** denir. Küre kuşağı küre tabakasının yanal yüzü olup, küre kuşağı alttan ve üstten açıkken, küre tabakası ise kapalıdır.



Birbirine paralel düzlemsel kesitle kuşağında O_1 ve O_2 merkezli çemberler, küre tabakasında ise dairelerdir. Bu düzlemsel kesitlere, **küre tabakasının tabanları**, tabanlar arasındaki uzaklığına da **küre tabakasının yüksekliği** denir.

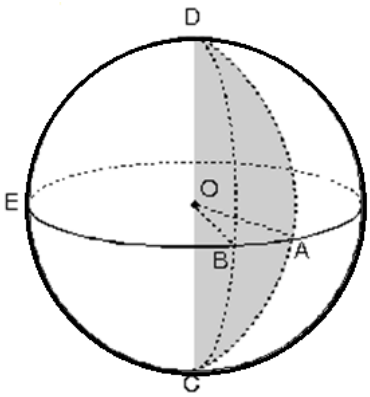
17.20. Teorem: r yarıçaplı h yüksekliğindeki küre tabakasının hacmi,

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$$

dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

17.18. Tanım: Bir kürenin bir çapından geçen iki yarım düzlem arasında kalan kısmında **küre dilimi** denir.



17.21. Teorem: Bir kürenin bir çapından geçen iki yarım düzlem arasındaki merkez açının ölçüsü α ise,

a) Küre diliminin yüzey alanı; $A_1 = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$

b) Küre diliminin tüm alanı; $A = \frac{\pi r^2 \alpha}{90} + \pi r^2$

c) Küre diliminin hacmi; $V = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$

dir.

İspat: a) Düzlem arasındaki merkez açının ölçüsü α ise,

360^0 alanı $A = 4\pi r^2$ ise

α^0 alanı A_1 dir.

……..

$$A_1 = 4\pi r^2 \frac{\alpha}{360} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$

olur.

b) Küre diliminin tüm alanı, kürenin merkezinden kesilen bir karpuz dilimi gibi düşünülürse, küre diliminin yüzey alanı ile iki yan yüzeyin alanı r yarıçaplı dairenin alanı olur.

$$A_1 = \frac{\pi r^2 \alpha}{90} + \frac{2\pi r^2}{2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90} + \pi r^2$$

c) Küre diliminin hacmi,

360^0 alanı $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ise

α^0 alanı V_1 dir.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\alpha}{360} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$$

bulunur.

Örnek: Yarıçapı 6 cm olan bir kürede, merkez açısının ölçüsü 60^0 olan bir küre diliminin alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm: Sırasıyla küre diliminin alanını ve hacmini

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{90} + \pi r^2 = \frac{\pi 6^2 60}{90} + \pi 6^2 = 60\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi r^3 \alpha}{270} = \frac{\pi 6^3 60}{270} = 48\pi \text{ cm}^3$$

bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Yüksekliği 8 cm, hacmi 72π cm^3 olan silindirin yanal yüzeyinin alanı kaç cm^2 dir?

A) 48π B) 50π C) 52π D) 54π E) 56π

Çözüm: $V = 72\pi\ cm^3$ ve $h = 8$ cm ise taban yarıçapı;

$$V = \pi r^2 h$$
$$72\pi = \pi r^2 8$$
$$r = 3 \text{ cm}$$

olur. Yanal yüzeyin alanı ise;

$$A_Y = 2\pi r h$$
$$A_Y = 2\pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi \text{ cm}^2$$

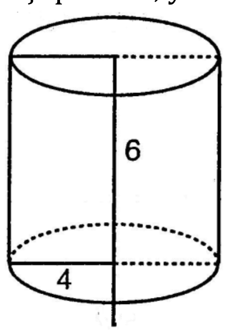
elde edilir.

Cevap: A

2. Kenar uzunlukları 4 cm ve 6 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir levha, uzun kenarı etrafında 360^0 döndürüldüğünde oluşan cismin hacmi kaç cm^3 tür?

A) 88π B) 90π C) 92π D) 94π E) 96π

Çözüm: Oluşan cisim, yarıçapı 4 cm, yüksekliği 6 cm olan bir silindirdir.



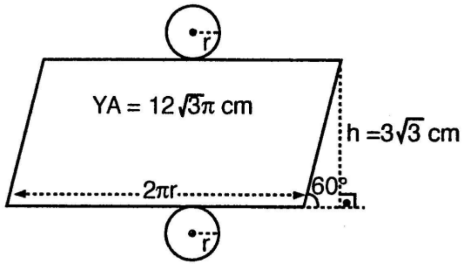
$$V = \pi r^2 h = \pi 4^2 6 = 96\pi \text{ cm}^3$$

Cevap: E

3. Yanal alanı $12\sqrt{3}\pi$ cm^2, yüksekliği $3\sqrt{3}$ cm olan silindir taban düzlemi ile 60^0 lik açı yaptığına göre, silindirin taban yarıçapı kaç cm'dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 4

Çözüm:



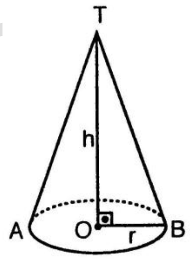
$$A_Y = 2\pi rh$$
$$12\sqrt{3}\pi = 2\pi r 3\sqrt{3}$$
$$r = 2 \text{ cm}$$

Cevap: B

4. Ana doğrusunun taban yarıçapına oranı $\sqrt{5}$ olan bir dik koninin hacmi 18π cm^3 olduğuna göre, yarıçapı kaç cm'dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 4

Çözüm: $V = 18\pi$ cm^3, $|TB|$: Ana doğru, $h = |TB|$, $r = |OB|$



TOB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$|TO|^2 + |OB|^2 = |TB|^2$$
$$h^2 + r^2 = (r\sqrt{5})^2$$
$$h = 2r$$

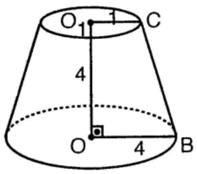
olur. Yükseklik ise;

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$18\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 2r$$
$$27 = r^3$$
$$r = 3 \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: C

5.



$[O_1C] \perp [OO_1]$

$[OB] \perp [OO_1]$

$|O_1C| = 1$ cm

$|OB| = |OO_1| = 4$ cm

Verilere göre, kesik koninin yan yüzey alanı nedir?

A) 21π B) 22π C) 24π D) 25π E) 26π

Çözüm: $|O_1C| = r_1 = 1$ cm, $|OB| = r = 4$ cm'dir. C'den [OB] ye [CH] dikmesini indirirsek $OHCO_1$ dikdörtgeni oluşur.

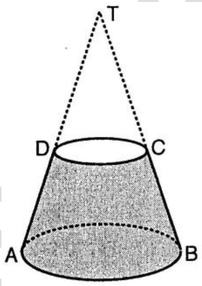
$|O_1C| = |OH| = 1$ cm, $|OO_1| = |CH| = 4$ cm

olur. CHB dik üçgeninde $3 - 4 - 5$ kuralı gereği $|BC| = 5$ cm'dir.

$A_Y = \pi(r + r_1)|BC| = \pi(1 + 4)5 = 25\pi$ cm^2

Cevap: D

6.



$|TC| = 3.|BC|$

Verlere göre, kesik koninin hacminin, kesilen kısmının hacmine oranları farkı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

Çözüm: Kesilmiş olan TDC konisinin hacmi V_1, kesik koninin ACD hacmi V_2 olsun. TDC konisi, TAB konisine benzer olduğundan;

$$\frac{V_1}{V_1+V_2} = \left(\frac{3k}{4k}\right)^3$$

$$\frac{V_1}{V_1+V_2} = \frac{27}{64}$$

$$64V_1 = 27V_1 + 27V_2$$

$37V_1 = 27V_2$

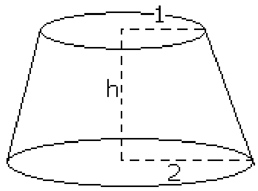
O halde oranları farkı 10’dur.

Cevap: E

7. Taban yarıçapı 1 ve 2, yüksekliği 3 olan kesik koninin hacmi nedir?

A) 6π B) 7π C) 8π D) 9π E) 10π

Çözüm:



$r_1 = 1, r_2 = 2, h = 3$ olduğuna göre, kesik konu hacim formülüne göre,

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = \frac{1}{3}\pi 3(2^2 + 1^2 + 2\cdot 1) = 7\pi \text{ br}^2$$

bulunur.

Cevap: B

8. Hacimleri eşit iki silindirin yan alanları arasındaki oran aşağıdakiler-den hangisidir?

A) $\frac{r_1}{r_2}$ B) $\frac{h_1}{h_2}$ C) $\frac{r_1}{\sqrt{r_2}}$ D) $\frac{\sqrt{r_1}}{r_2}$ E) $\frac{2r_1}{r_2}$

Çözüm: Silindirlerin hacmi $V_1 = \pi r_1^2 h_1$ ve $V_2 = \pi r_2^2 h_2$ olarak kabul edelim. Hacimler eşit olduğundan $V_1 = V_2$ ise $\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ olur. Diğer taraftan bu iki silindirin yan alanları s_1 ve s_2 olsun. Bu takdirde,

$$s_1 = 2\pi r_1 h_1 \text{ ve } s_2 = 2\pi r_2 h_2$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1 h_1}{r_1 h_2} = \frac{r_1 r^2}{r_2 r^2} = \frac{r_1}{r_2}$$

bulunur.

Cevap: A

9. Çapı R olan kürenin hacmi çap cinsinden yazılsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ B) $V=\frac{1}{3}\pi R^3$ C) $V=\frac{1}{6}\pi R^3$
D) $V=\frac{2}{3}\pi R^3$ E) $V=\frac{1}{2}\pi R^3$

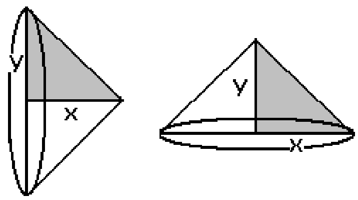
Çözüm: Kürenin hacmi yarıçap r ise $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ dür. $R=2r$ ise $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\pi R^3$ olarak bulunur.

Cevap: C

10. Dik kenarları x, y olan bir dik üçgen, önce x dik kenarı, sonra y dik kenarı etrafında döndürülürse elde edilen konilerin hacimleri oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{xy}$ B) πxy C) xy D) $\frac{y}{x}$ E) $\frac{x}{y}$

Çözüm: Dik kenarları x, y olan bir dik üçgen, önce x dik kenarı, sonra y dik kenarı etrafında döndürülürse,



şekilleri elde edilir. x ekseni etrafında döndürülünce $r=y, h=x$ olduğuna göre,

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi y^2 x$$

y ekseni etrafında döndürülünce $r=x, h=y$ olduğuna göre,

$$V_2=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi x^2 y$$

bulunur. Bulunan bu konilerin hacimleri oranı,

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi y^2 x}{\frac{1}{3}\pi x^2 y}=\frac{y}{x}$$

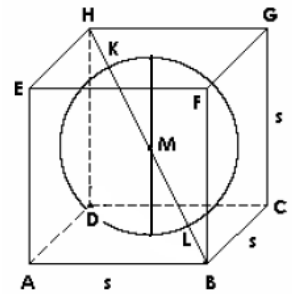
elde edilir.

Cevap: D

11. Ayrıtlarından biri s uzunluğunda olan bir küpün içine, teğet bir küre çiziliyor. Küpün bir köşesinin, kürenin yüzüne olan uzaklığı kaç s eder?

A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

Çözüm: Verilere göre aşağıdaki şekil çizilebilir.



Kürenin yarıçapı $= \frac{s}{2}$

Köşeden kürenin merkezine uzaklığı $= \frac{\sqrt{3}s}{2}$

Köşeden kürenin yüzeyine uzaklığı $= \frac{\sqrt{3}s}{2} - \frac{s}{2} = \frac{s(\sqrt{3}-1)}{2}$

dir.

Cevap: C

12. Bir silindirin yanal alanı 20π ve yüksekliği 10 birim olduğuna göre hacmi kaç birim küptür?

A) 2π B) 20π C) 10π D) 40π E) 200π

Çözüm: Yanal alan $= 2\pi rh$

$20\pi = 2\pi r \cdot 10$

$r = 1$

Silindirin hacmi ise,

$$V = \pi r^2 h = \pi 1^2 \cdot 10 = 10\pi \text{ cm}^3$$

olarak bulunur.

Cevap: C

KAYNAKÇA

1. Ömer Efser Sarıgül, Hasan Kılıçaslan, Suavi Tokerler, Lise Geometri 2, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2000.
2. Şaban Bilgiç, Zeki Kıyak, Jale Gökçen, Lise Geometri 1, Devlet Kitapları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 2001.

3. Tahsin Çizenel, Geometri, Lise 1, Lise 2, Zafer-Tuna Yayınları, 4. Baskı, 1961.
4. Alaaddin ALTUNTAŞ, ÖSS Geometri, Birey Eğitim Yayınları, İstanbul, 2006.
5. Halil BIYIK, Nevzat ASMA, Geometri, Esen Yayınları, Ankara.
6. ÖSS Geometri Cep Kitabı, Final Yayınları, Komisyon, İstanbul, 1986.
7. Mehmet BARIŞ, Çözümlü Lise Geometri 1 ve 2, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2001, İstanbul.