1. BÖLÜM
LOGARİTMA

Bu bölümde üstel fonksiyon ve onun ters fonksiyonu olan logaritmadan bahsedeceğiz. Üstel fonksiyonlar, tabanı sabit bir sayı ile kuvveti değişken olan fonksiyonlardır. Böyle fonksiyonlar da hem teknoloji de hem de işletme sektöründe kullanılmaktadır.

John Napier
01 Şubat 1550 - 04 Nisan 1617, Merchiston Tower, Edinburgh, Birleşik Krallık

Henry Briggs
01 Şubat 1561, Yorkshire, B. Krallık - 26 Ocak 1630, Oxford, Birleşik Krallık

Logaritma, 1614 yılında John Napier tarafından e tabanına göre tanımlanarak "Minifici Logaritmorum Canonis Descripto" adlı eserde İngiltere'nin Edinburg ilinde yayınlamıştır. Daha sonra 10 tabanına göre logaritma almanın daha kolay olacağını düşündü ve onu da bir matematik profesörü olan arkadaşı Henry Briggs 1624 yılında yayınladı.

Kelime olarak "logos arithmos" tan gelir, sayıların mantığı demektir. Napier, kemiklerden yaptığı çubuk şeklindeki karşılaştırma tabloları ile bu yöntemi geliştirmiştir. Logaritma cetvelini de hazırlamıştır. Napier eğitimini Saint Andrews Üniversitesinde tamamlamıştır.

Jost Burgi
28 Şubat 1552, Lichtensteig, İsviçre – 31 Ocak 1632, Kassel, Almanya

Yine John Napier'den habersiz Jost Burgi tarafından 1610 yılında İsviçre'de logaritmayı hesaplamış ve 1620 de "Aritmetik ve Geometrik Diziler" adı ile eserde yayınlamıştır.

ÜSTEL FONKSİYONLAR

1.1. Tanım: $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon denir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^x$, $f(t) = 4^{t+1}$, $f(m) = \sqrt{5}^m$ birer üstel fonksiyonlardır.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = (-2)^x$ bir üstel fonksiyon değildir. Çünkü $a = -2 < 0$ dır. //

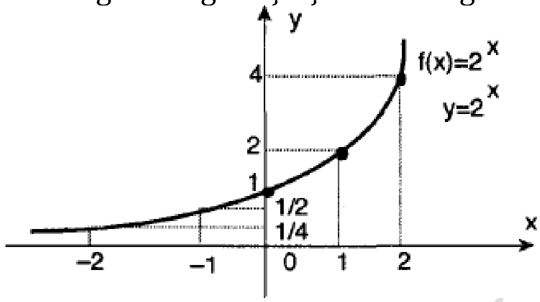
Dikkat edilirse burada üstel fonksiyonun tabanı sabit sayı üstü değişkendir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Bu fonksiyonun grafiğini çizebilmek için x'e değer vererek $y = f(x)$ in değerlerini bulalım. Buna göre grafiğin çizelim.

x	$-\infty$		-2	-1	0	1	2		$+\infty$
$y = f(x)$	0		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4		$+\infty$

bulunur. Elde edilen bu değerlere göre şu şekilde bir grafik çıkar.

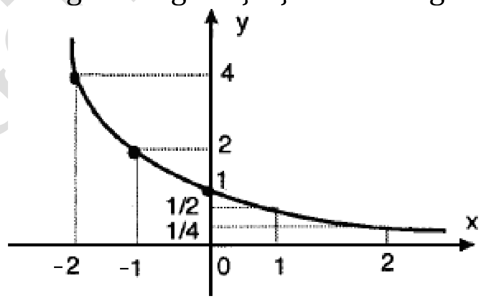


Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Bu fonksiyonun grafiğini çizebilmek için x'e değer vererek $y = f(x)$ in değerlerini bulalım. Buna göre grafiğin çizelim.

x	$-\infty$	...	-2	-1	0	1	2	...	$+\infty$
$y = f(x)$	$+\infty$	...	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...	0

bulunur. Elde edilen bu değerlere göre şu şekilde bir grafik çıkar.



//

Görüldüğü gibi üstel fonksiyonun grafiği 1−1 ve örtendir. Şu halde bu fonksiyonunun tersi mevcuttur. Buna da logaritma fonksiyonu denir.

1.1. Not: Bu kısımda $\pm\infty$ ifadesi $\pm\infty$'a yakınsama anlamına geliyor.

LOGARİTMA FONKSİYONU

Logaritmanın tanımına geçmeden önce şu bilgiler yorumlamak gerekir:

$2^x = 7$ denkleminde x değeri önceki bilgilerle bulunamamaktadır. x değerini bulmak için logaritma geliştirilmiştir. Burada $x = \log_2 7 = 2{,}807$ olarak alınarak ifade edilecektir.

1.2. Tanım: $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonun ters fonksiyonu $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ şeklinde tanımlanmasına logaritma fonksiyonu kısaca logaritma denir. Buna göre şu eşitliği elde ederiz:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Örnek: 1. $\log_2 8 = x \Leftrightarrow 8 = 2^x \Leftrightarrow 2^3 = 2^x \Leftrightarrow 3 = x$

2. $\log_a 64 = 3 \Leftrightarrow 64 = a^3 \Leftrightarrow 4^3 = a^3 \Leftrightarrow 4 = a$

3. $\log_4 x = -2 \Leftrightarrow 4^{-2} = x \Leftrightarrow \frac{1}{4^2} = x \Leftrightarrow \frac{1}{16} = x$

4. $\log_5(-125) = m \Leftrightarrow 5^m = (-5)^3 \Leftrightarrow m \notin \mathbb{R}^+$

Örnek: $\log_7\left(\log_3(\log_2 x)\right) = 0$ ise x in değeri nedir?

Çözüm: $\log_7\left(\log_3(\log_2 x)\right) = 0$
$\log_3(\log_2 x) = 7^0 = 1$
$\log_2 x = 3^1 = 3$
$x = 2^3 = 8$

Örnek: $\log_{(3-x)}\left(\log_2(x^2 - 14)\right) = 0$ olduğuna göre x'in değeri nedir?

Çözüm: $3 - x > 0$ ise $x < 3$
$3 - x \neq 1$ ise $x \neq 2$

olacağından

$$\log_{(3-x)}\left(\log_2(x^2-14)\right)=0$$
$$\log_2(x^2-14)=(3-x)^0=1$$
$$x^2-14=2^1$$
$$x=\pm 4$$

bulunur. $x=4$ eşitliği $x<3$ şartını sağlamadığından denklemi sağlamaz. Ama $x=-4$ eşitliği denklemi sağlar.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ f(x)=5^{2x-1}$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

Çözüm: Bir fonksiyonun tersi bulunurken, x görünen yere y, y görülen yere x yazılarak y çekilmeye çalışılır.

$$x=5^{2y-1}$$
$$2y-1=\log_5 x$$
$$y=\frac{1}{2}(1+\log_5 x)$$
$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(1+\log_5 x)$$

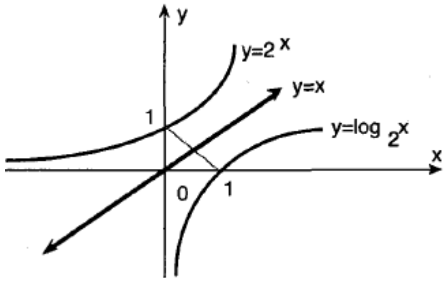
Örnek: $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_2(2x-4)$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

Çözüm: $x=\log_2(2y-4)$

$$2y-4=2^x$$
$$y=\frac{1}{2}(2^x+4)$$
$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(2^x+4)$$

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ f(x)=2^x,\ f^{-1}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\log_2 x$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Çözüm: $f(x)=2^x$ fonksiyonun grafiği yukarıda verilmiştir. Logaritma fonksiyonu üstel fonksiyonun tersi olduğun $y=x$ grafiğine göre simetrisi olacağından $f^{-1}(x)=\log_2 x$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki biçiminde olacaktır.



Örnek: $f(x) = \log_2(3x + m)$ ve $f^{-1}(4) = 2$ ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: Logaritma fonksiyonunun tersi üstel fonksiyon olduğundan

$$f^{-1}(4) = 2 \text{ ise } f(2) = 4$$
$$f(2) = \log_2(3 \cdot 2 + m) = 4$$
$$6 + m = 2^4$$
$$m = 10$$

bulunur.

1.1. Sonuç: 1. $\log_a a = 1$

2. $\log_a 1 = 0$

3. $\log_a 0 = -\infty$'a yakınsar.

ÜSTEL ve LOGARİTMİK FONKSİYON GENELLEMESİ

1.3. Tanım: $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

i) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

ii) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

özelliklerini taşıyan fonksiyonlar logaritmik fonksiyonlardır.

1.4. Tanım: $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

i) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

ii) $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$

özelliklerini taşıyan fonksiyonlar üstel fonksiyonlardır.

Örnek: $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ ve $f(4) = 2$ ise $f(16)$ kaçtır?

Çözüm: $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ ise logaritmik fonksiyon olup $f(x) = \log_a x$ dir.

$$f(4) = \log_a 4 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

olur. Buna göre $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonudur. Şu halde;

$$f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4$$

elde edilir.

Örnek: $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$ ve $f(3) = 5$ ise $f(27)$ kaçtır?

Çözüm: $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$ ise üstel fonksiyon olup $f(x) = a^x$ dir.

$$f(3) = a^3 = 5$$

dir. Buna göre;

$$f(27) = (a^3)^9 = 5^9$$

elde edilir.

ÖZEL LOGARİTMALAR

1.5. Tanım: 10 tabanına göre yazılan logaritmaya bayağı (adi) logaritma denir. $\log_{10} x = \log x$ şeklinde gösterilir. Yani 10 tabanındaki logaritmada taban yazılmayabilir. Bayağı logaritmada şu verilere dikkat etmek gerekir.

$$\log 1 = 0$$
$$\log 10 = 1$$
$$\log 100 = 2$$
$$\log 1\,000 = 3$$
$$\log 10\,000 = 4$$
$$\ldots$$

olduğundan,

$$0 \leq x < 1 \text{ ise } -\infty < \log x < 0$$
$$1 \leq x < 10 \text{ ise } 0 \leq \log x < 1$$
$$10 \leq x < 100 \text{ ise } 1 \leq \log x < 2$$
$$100 \leq x < 1\,000 \text{ ise } 2 \leq \log x < 3$$
$$1\,000 \leq x < 10\,000 \text{ ise } 3 \leq \log x < 4$$
$$10\,000 \leq x < 100\,000 \text{ ise } 4 \leq \log x < 5$$
$$\ldots$$

biçimindedir.

Örnek: $\log 3 = 0{,}477$ olduğuna göre 9^{50} sayısının kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

Çözüm: $\log 3 = 0{,}477$ ise $3 = 10^{0{,}477}$

$$9^{50} = 3^{100} = (10^{0{,}477})^{100} = 10^{47{,}7} = \underbrace{10^{47}}_{48\text{ Basamak}} \cdot 10^{0{,}7}$$

dir. Ayrıca $10^{0{,}7}$ sayısı 1 basamaklıdır. O halde 9^{50} sayısı 48 basamaklıdır.

Leonhard Euler
(15 Nisan 1707, Basel, İsviçre - 18 Eylül 1783, St. Petersburg, Rusya)

1.6. Tanım: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2{,}718288182845 \cdots$ olmak üzere, e tabanına göre yazılan logaritmaya doğal logaritma denir. $\log_e x = \ln x$ şeklinde gösterilir.

LOGARİTMANIN TANIM ARALIĞI

Logaritma fonksiyonunun tanım kümesi pozitif reel sayılar olduğundan tanım aralığı pozitif reel sayılar olmalıdır. Buna göre logaritma fonksiyonunun tanım aralığı ile ilgili problemler şu şekilde çözülür.

Örnek: $f(x) = \ln \sqrt{9 - x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: Logaritma fonksiyonu pozitif reel sayılarda tanımlıdır.

$$9 - x^2 > 0$$

ve taban 1'den farklı olduğundan eşitsizliğin çözüm kümesi,

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
f(x)		$-$	o	$+$	o	$-$	

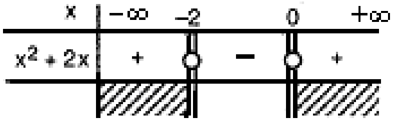
biçimindedir. Buna göre çözüm kümesi $A = (-3, 3)$ dir.

Örnek: $f(x) = 5^{\log_3 (x^2+2x)}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: Logaritma fonksiyonu pozitif reel sayılarda tanımlıdır.

$$x^2 + 2x > 0$$

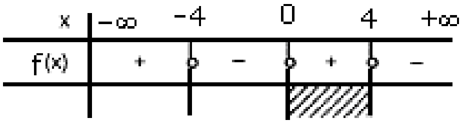
ve taban 3 olup 1'den farklı olduğundan eşitsizliğin çözüm kümesi,



biçimindedir. Buna göre çözüm kümesi $A = \mathbb{R} - [-2, 0]$ dir.

Örnek: $f(x) = \log_x(16 - x^2)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $16 - x^2 > 0, x > 0, x \neq 1$ olmalıdır.



biçimindedir. Buna göre çözüm kümesi $A = (0, 4) - \{1\}$ dir.

LOGARİTMANIN ÖZELLİKLERİ

1.1. Teorem: $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, x, y \in \mathbb{R}^+, f(x) > 0, g(x) > 0$ olmak üzere

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

tir.

İspat: $f(x) > 0, g(x) > 0$, f ve g birer bir olduğundan ters fonksiyon tanımı gereğince,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$$
$$\Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

olur.

Örnek: $\log_2 a = \log_{\frac{1}{2}} b$ olduğuna göre $a + b$ nin değeri nedir?

Çözüm: $2^a = \left(\frac{1}{2}\right)^b$

$$2^a = \frac{1}{2^b}$$
$$2^a 2^b = 1$$
$$2^{a+b} = 2^0$$
$$a + b = 0$$

1.2. Teorem: $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

şeklindedir.

İspat: $\log_a(xy) = k,\ \log_a x = m,\ \log_a y = n$ olarak seçelim. Bu takdirde logaritmanın tanımından dolayı,

$$xy = a^k, x = a^m, y = a^n$$
$$a^k = a^m \cdot a^n$$
$$a^k = a^{m+n}$$

bulunur. Üstlü ifadelerde "tabanlar eşitse üstler eşittir (çift kat kök göz önüne alınmaz)" kaidesi gereği $k = m + n$ dir. Buna göre;

$$k = m + n$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

elde edilir.

1.3. Teorem: $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

şeklindedir.

İspat: $\log_a \frac{x}{y} = k,\ \log_a x = m,\ \log_a y = n$ olarak seçelim. Bu takdirde logaritmanın tanımından dolayı,

$$\frac{x}{y} = a^k, x = a^m, y = a^n$$
$$a^k = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

bulunur. Üstlü ifadelerde "tabanlar eşitse üstler eşittir (çift kat kök göz önüne alınmaz)" kaidesi gereği $k = m - n$ dir. Buna göre,

$$k = m - n$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

elde edilir.

1.4. Teorem: $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, x, y \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x$$

şeklindedir.

İspat: $\log_a x^m = \log_a (\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{\text{m tane}})$

$$= \underbrace{\log_a x + \log_a x + \log_a x + \cdots + \log_a x}_{\text{m tane}}$$
$$= m \cdot \log_a x$$

1.5. Teorem: $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$$\log_{(a^n)} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

şeklindedir.

İspat: $\log_{(a^n)} x = t$ olsun. Bu takdirde;

$$x = a^{tn}$$

yazılabilir. Köklü ifadenin tanımı gereği

$$x^{1/n} = a^t$$

olur. Burada her iki tarafın a tabanında logaritması alınırsa;

$$\log_a x^{1/n} = \log_a a^t$$
$$\frac{1}{n} \cdot \log_a x = t \cdot \log_a a$$
$$t = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

bulunur.

Örnek: $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 2 \cdot 5 = \log_{10} 10 = 1$

Örnek: $\log 500 - \log 5 = \log \frac{500}{5} = \log 10^2 = 2 \cdot \log_{10} 10 = 2$

Örnek: $\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 4^{1/3} = \log_2 2^{2/3} = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$

Örnek: $\log ab = 3$ ve $\log \frac{a}{b} = 1$ ise a'nın değeri nedir?

Çözüm: $\log ab = 3$ ve $\log \frac{a}{b} = 1$

$$\left.\begin{aligned} \log a + \log b &= 3 \\ \log a - \log b &= 1 \end{aligned}\right\}$$

dir. Yok etme metodunu kullanarak taraf tarafa toplarsak,

$$2 \cdot \log a = 4$$
$$\log a = 2$$
$$a = 10^2 = 100$$

elde edilir.

Örnek: $\log_{25}125 = \log_{5^2}5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}$

Örnek: $\log_5 \frac{99}{20} - \log_5 \frac{11}{4} - \log_5 \frac{9}{5}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm: $\log_5 \frac{99}{20} - \log_5 \frac{11}{4} - \log_5 \frac{9}{5} = \log_5 \frac{\frac{99}{20}}{\frac{11}{4}.\frac{9}{5}} = \log_5 1 = 0$

Örnek: $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ ise $\log 72$ nin değeri nedir?

Çözüm:
$$\begin{aligned}\log 72 &= \log 8 \cdot 9\\ &= \log 8 + \log 9\\ &= \log 2^3 + \log 3^2\\ &= 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3\\ &= 3 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477\\ &= 1{,}857\end{aligned}$$

Örnek: $\log 3 = 0{,}477$ ise $\log 900$ ün değerini bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}\log 900 &= \log 9 \cdot 100\\ &= \log 9 + \log 100\\ &= \log 3^2 + \log 10^2\\ &= 2 \cdot \log 3 + 2 \cdot \log 10\\ &= 2 \cdot 0{,}477 + 2 \cdot 1\\ &= 2{,}954\end{aligned}$$

Örnek: $\log 4 = 0{,}602$ ise $\log 0{,}004$ ün değerini bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}\log 0{,}004 &= \log \frac{4}{1\,000}\\ &= \log 4 - \log 1\,000\\ &= \log 4 - \log 10^3\\ &= \log 4 - 3 \cdot \log 10\\ &= 0{,}602 - 3 \cdot 1\\ &= -2{,}398\end{aligned}$$

Örnek: $\log 0{,}6 = -0{,}221$ ise $\log 600$ ü bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}\log 600 &= \log 0{,}6 \cdot 1\,000\\ &= \log 0{,}6 + \log 1\,000\\ &= \log 0{,}6 + \log 10^3\\ &= \log 0{,}6 + 3 \cdot \log 10\\ &= -0{,}221 + 3 \cdot 1\\ &= 2{,}779\end{aligned}$$

Örnek: $\log_4 x^2 = 9 + \log_4 \frac{1}{x}$ eşitliğinde x i bulunuz.

Çözüm: $\log_4 x^2 = 9 + \log_4 \frac{1}{x}$
$$2 \cdot \log_4 x = 9 + \log_4 1 - \log_4 x$$
$$3 \cdot \log_4 x = 9$$
$$\log_4 x = 3$$
$$x = 4^3 = 64$$

Örnek: Yıllık %40 bileşik faiz oranı ile faize yatırılan 5 000 ₺ nin kaç yıl sonra 15 000 ₺ ye ulaşır.

Çözüm: B_F bileşik faiz, A anapara, n faiz oranı, t faizin vadesi olmak üzere bileşik faiz;
$$B_F = A(1+n)^t$$
olduğu bilinmektedir. $n = 0{,}40$, $A = 5\,000$ ₺ , $B_F = 15\,000$ ₺ olduğuna göre
$$15\,000 = 5\,000(1+0{,}4)^t$$
$$3 = 1{,}4^t$$
$$\log 3 = \log 1{,}4^t$$
$$\log 3 = t \cdot \log 1{,}4$$
$$t = \frac{\log 3}{\log 1{,}4} = \frac{0{,}477}{0{,}146} = 3{,}265 \text{ yıl}$$
bulunur. Burada 0,265'i 360 ile çarparsak, 95 gün olarak buluruz. Buna göre,

3 yıl 3 ay 5 gün

faizde kalmalıdır.

Örnek: $k > 0$, radyoaktif partikülün başlangıçtaki büyüklüğü Q_0 olmak üzere:

$$Q\,(t) = Q_0 e^{-kt}$$

denklemi üstel azalma seyri izleyen radyoaktif bir partikülün yarı yaşamının süresi $t = \frac{\ln 2}{k}$ kadar olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Gerekli zamanı ararken amacımız $Q(t) = \frac{1}{2}Q_0$ eşitliğini sağlayacak t değerini hesaplamak olacaktır. Öyleyse: $\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-kt}$ denkliğini doğrulayacak t değerini hesaplamak gereklidir. Bu eşitliğin her iki tarafını Q_0 ile böldüğümüzde, $\frac{1}{2} = e^{-kt}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının da doğal logaritmasını alırsak, $\ln e = 1$ olduğundan, $\ln\frac{1}{2} = -kt$ sağlanmış olur. Artık yarı-yaşam için gerekli süreyi bulmakta tek iş, bu eşitlikte t'yi yalnız bırakmak olacaktır. Böylece yarı-yaşam, $t = \frac{-\ln\frac{1}{2}}{k} = \frac{\ln 2}{k}$ olarak hesaplanır.

Örnek: $10^x + 100^x = 1000^x$ denkleminde x'in değeri nedir?

Çözüm: $10^x + 100^x = 1000^x$

$$10^x + (10^x)^2 = (10^x)^3$$

olur. Burada $10^x > 0$ olacağından ve $10^x = t$ alınırsa

$$t + t^2 = t^3$$
$$t^3 - t^2 - t = 0$$
$$t(t^2 - t - 1) = 0$$
$$t^2 - t - 1 = 0, t = 0$$
$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0, t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0, t = 0$$
$$10^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\log 10^x = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

bulunur.

1.6. Teorem: (Taban Değiştirme Kuralı) $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a, b, c \neq 1$ olmak üzere,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

dir.

İspat: $a^y = b$ olsun. Eşitliğin her iki yanını bir kez a, bir kez de c tabanına göre alalım.

$$\log_a a^y = \log_a b$$
$$y \cdot \log_a a = \log_a b$$
$$y = \log_a b \qquad (1)$$

ve

$$\log_c a^y = \log_c b$$
$$y \cdot \log_c a = \log_c b$$
$$y = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitliğini birbirine kıyaslarsak,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

elde edilir. Eğer $c = 10$ alınırsa 3. eşitlik $c = e$ alınırsa 4. eşitlik elde edilir. Şu halde,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

biçimindedir.

Örnek: $\log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8 = \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 7}{\log 5} \cdot \frac{\log 8}{\log 7}$$
$$= \frac{\log 8}{\log 2}$$
$$= \frac{\log 2^3}{\log 2}$$
$$= \frac{3 \cdot \log 2}{\log 2}$$
$$= 3$$

Örnek: $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 8 = 0$ denkleminin kökleri bulalım.

Çözüm: $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 8 = 0$ ise $3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 8 = 0$

$a = 3^x$ alınırsa $a^2 = 3^{2x}$

$$a^2 - 6 \cdot a + 8 = 0$$
$$a = 2, a = 4$$

olur. Buna göre,

$$3^x = 2, 3^x = 4$$
$$\log 3^x = \log 2, \log 3^x = \log 4$$

$$x \cdot \log 3 = \log 2,\ \ x \cdot \log 3 = \log 4$$
$$x = \frac{\log 2}{\log 3},\ \ x = \frac{\log 4}{\log 3}$$
$$x = \log_3 2,\ \ x = \log_3 4$$

dir.

Örnek: $\log_2 3 = a$ ise $\log_6 72$ nin a türünden değeri nedir?

Çözüm: $\log_6 72 = \dfrac{\log_2 72}{\log_2 6}$

$$= \frac{\log_2(2^3 \cdot 3^2)}{\log_2(2 \cdot 3)}$$
$$= \frac{3 \cdot \log_2 2 + 2 \cdot \log_2 3}{\log_2 2 + \log_2 3}$$
$$= \frac{3+2a}{1+a}$$

1.2. Sonuç: $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a, b \neq 1$ olmak üzere,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

dir.

Örnek: $xyz = 1\ 000$ olmak üzere $\dfrac{1}{\log_x 10} + \dfrac{1}{\log_y 10} + \dfrac{1}{\log_z 10}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{1}{\log_x 10} + \frac{1}{\log_y 10} + \frac{1}{\log_z 10} = \log_{10} x + \log_{10} y + \log_{10} z$$
$$= \log_{10} xyz$$
$$= \log_{10} 10^3$$
$$= 3 \cdot \log_{10} 10$$
$$= 3$$

elde edilir.

Örnek: $\log_3 x + 4 \cdot \log_x 3 = 4$ olduğuna göre, x değerini bulunuz.

Çözüm: $\log_3 x = a$ seçilirse;

$$\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 4$$
$$a + \frac{1}{a} = 4$$
$$\frac{a^2+4}{a} = 4$$
$$a^2 + 4 = 4a$$
$$a^2 - 4a + 4 = 0$$
$$(a-2)^2 = 0$$
$$a = 2$$

bulunur. Buna göre,

$$\log_3 x = 2$$
$$x = 3^2 = 9$$

elde edilir.

1.7. Teorem: $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a^{\log_a x} = x$ dir.

İspat: $a^{\log_a x} = y$ olsun.

$\log a^{\log_a x} = \log y$ (Her iki tarafın logaritmasını alarak)

$\log_a x \log a = \log y$ (1.3. teorem gereği)

$\dfrac{\log x}{\log a} \log a = \log y$ (Taban değiştirme kuralı gereği)

$\log x = \log y$

$x = y$

Örnek: $3^{\log_3 8} = 8$, $10^{\log 5} = 5$, $e^{\ln 7} = 7$

Örnek: $27^{\log_3 2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm: $27^{\log_3 2} = 3^{3 \cdot \log_3 2} = 3^{\log_3 2^3} = 3^{\log_3 8} = 8$

Örnek: $\sqrt{7}^{\log_7 16}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm: $7^{\frac{1}{2}\log_7 16} = 7^{\log_7 16^{1/2}} = 7^{\log_7 4} = 4$

Örnek: $3^{\log_3 x} + 5^{\log_5 2} = \log_2 32$ ise x neye eşittir?

Çözüm: $x+2=\log_2 2^5$

$x+2=5\cdot\log_2 2$

$x+2=5$

$x=3$

1.8. Teorem: $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, $a,b,c\neq 1$, $x\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ dir.

İspat: $a^{\log_b c}=x$ olsun.

$\log a^{\log_b c}=\log x$	(Her iki tarafın logaritmasını alarak)
$\log_b c\cdot\log a=\log x$	(1.3. teoremden)
$\dfrac{\log c}{\log b}\log a=\log x$	(Taban değiştirme kuralından)
$\dfrac{\log a}{\log b}\log c=\log y$	
$\log_b a\cdot\log c=\log x$	(Taban değiştirme kuralından)
$\log c^{\log_b a}=\log x$	(1.3. teoremden)
$c^{\log_b a}=x$	

Şu halde,

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

bulunur.

Örnek: $16^{\log_4 10}=10^{\log_4 16}=10^{\log_4 4^2}=10^{2\cdot\log_4 4}=10^2=100$

1.9. Teorem: $0<x<y$ olmak üzere $\log x<\log y$ dir.

İspat: $x=10^m$ ve $y=10^n$ olsun. $m=\log x$ ve $n=\log y$ olur.

$$\begin{aligned} x<y &\Leftrightarrow 10^m<10^n\\ &\Leftrightarrow \log 10^m<\log 10^n\\ &\Leftrightarrow m<n\\ &\Leftrightarrow \log x<\log y \end{aligned}$$

ÜSTEL ve LOGARİTMA FONKSİYONLARIN MONOTONLUĞU

1.10. Teorem: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$ ve $f^{-1}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_a x$ fonksiyon için

a) $a>1$ ise f ve f^{-1} artan,

b) $0 < a < 1$ ise f ve f^{-1} azalandır.

İspat: Her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2$ olsun.

a) $a > 1$ ise

$a^{x_1} < a^{x_2}$ ve $\log_a x_1 < \log_a x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$ ve $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$

olduğundan f ve f^{-1} artandır.

b) $0 < a < 1$ ise

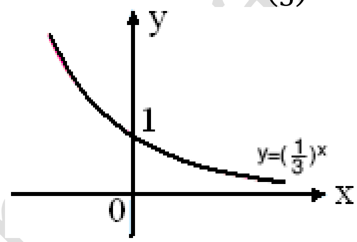
$a^{x_1} > a^{x_2}$ ve $\log_a x_1 > \log_a x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$ ve $f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$

olduğundan f ve f^{-1}azalandır.

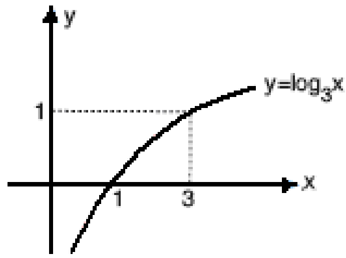
Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonunun artan ve azalanlığını inceleyiniz.

Çözüm: $0 < \frac{1}{n} < 1$ olduğundan $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonunu azalandır.



Örnek: $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_3 x$ fonksiyonunun artan ve azalanlığını inceleyiniz.

Çözüm: $a = 3 > 1$ olduğundan $f^{-1}(x) = \log_3 x$ fonksiyonunu artandır.



LOGARİTMA FONKSİYONUN GRAFİĞİ

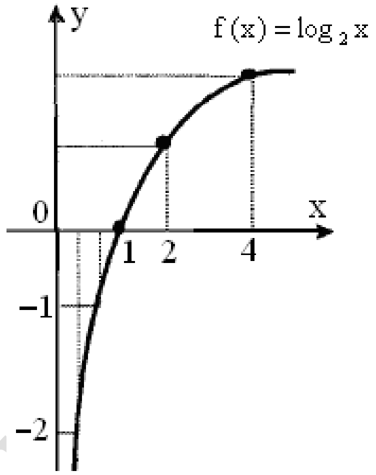
Logaritma fonksiyonun tersinin grafiğini değer vererek örneklerle çizelim.

Örnek: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Bu fonksiyonun grafiğini çizebilmek için x'e değer vererek $y = f(x)$ nin değerlerini bulalım. Buna göre grafiğin çizelim.

x	0	1	2	4	8	…	$+\infty$
$y = f(x)$	$-\infty$	0	1	2	3	…	$+\infty$

bulunur. Elde edilen bu değerlere göre şu şekilde bir grafik çıkar.

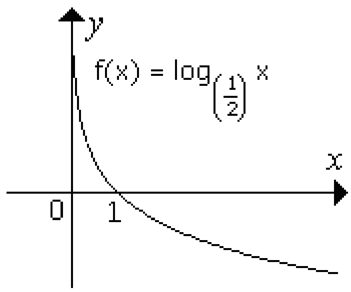


Örnek: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Bu fonksiyonun grafiğini çizebilmek için x'e değer vererek $y = f(x)$ in değerlerini bulalım. Buna göre grafiğin çizelim.

x	0	1	2	4	8	…	$+\infty$
$y = f(x)$	$+\infty$	0	-1	-2	-3	…	$-\infty$

bulunur. Elde edilen bu değerlere göre şu şekilde bir grafik çıkar.



//

Her iki örnekten de görüldüğü gibi $x = 0$ doğrusu verilen fonksiyona sonsuzda teğettir. Bu "Bir doğruya sonsuzda teğet olmaya" ileri de asimptot denilecektir. Ama logaritmanın grafiğinin çizilmesinde asimptotlara ihtiyaç vardır. Buna göre bir fonksiyonun grafiğin çizerken şu şekilde yapılır:

1. Logaritma fonksiyonun tanım aralığını bulunur.

2. $f(x) = \log_{v(x)} u(x)$ şeklindeki bir fonksiyonda $u(x) = 0$ ı sağlayan x değeri asimptotları vereceğinden asimptotu bulunur.

3. Grafiğin $x = 0$ için OY eksenini kesim noktası ve $y = 0$ için OX eksenini kesim noktası bulunur.

4. Logaritmanın artan-azalan durumunu incelenir. Artan ve azalan fonksiyon olduğu tespit edilir.

Örnek: $y = 1 + \ln(x - 2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1. $x - 2 > 0$ için $x > 2$

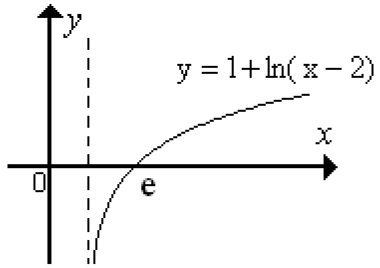
2. $x - 2 = 0$ ise $x = 2$ asimptottur

3. $x = 0$ için $y = 1 + \ln(0 - 2)$ tanımsız olduğundan OY eksenini kesmez,

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ için } 0 &= 1 + \ln(x - 2) \\ -1 &= \ln(x - 2) \\ e^{-1} &= x - 2 \\ x &= e^{-1} + 2 \end{aligned}$$

OX eksenini kesim noktasıdır.

4. $v(x) = e = 2{,}718 \ldots > 1$ olduğundan artan fonksiyondur.



Örnek: $y = 2\log_{1/2}(x+1)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1. $x + 1 > 0$ için $x > -1$

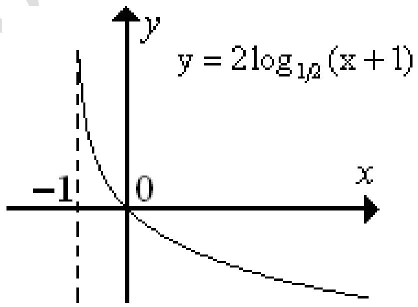
2. $x + 1 = 0$ ise $x = -1$ asimptottur

3. $x = 0$ için $y = 2\log_{1/2}(0+1) = 0$, OY ekseninin kesim noktasıdır,
   $y = 0$ için $0 = 2\log_{1/2}(x+1)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = x + 1$$
$$x = 0$$

OX eksenini kesim noktasıdır.

4. $v(x) = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan azalan fonksiyondur.



Örnek: $f(x) = -\log_2|x|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $f(x) = -\log_2|x| = \log_{(2^{-1})}|x| = \log_{1/2}|x|$

1. $|x| > 0$ için $x \in \mathbb{R}$

2. $x = 0$ asimptottur

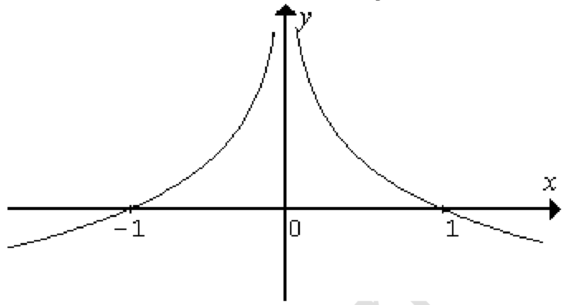
3. $x = 0$ için OY ekseninin kesim noktası yoktur,
$y = 0$ için $0 = \log_{1/2}|x|$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = |x|$$

$$x = 1 \text{ ve } x = -1$$

OX eksenini kesim noktalarıdır.

4. $x < 0$ de artan $x > 0$ da azalan fonksiyondur.



LOGARİTMADA EŞİTSİZLİKLER

1.1. Aksiyom: $f(x) = \log_{v(x)} u(x) < 0$ fonksiyonda;
i) $v(x) > 1$ ise $0 < u(x) < 1$
ii) $0 < v(x) < 1$ ise $u(x) > 0$
dir.

Örnek: $\ln\left(\frac{2x-1}{3}\right) < 0$ eşitsizliklerinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $v(x) = e > 1$

$$\ln\left(\frac{2x-1}{3}\right) < 0$$

$$0 < \frac{2x-1}{3} < 1$$

$$0 < 2x - 1 < 3$$

$$1 < 2x < 4$$

$$\frac{1}{2} < x < 2$$

$$Ç = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} < x < 2\right\}$$

Örnek: $\log_{1/2}\left(\frac{x^2+6}{5x}\right) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm: $0 < v(x) = \frac{1}{2} < 1$

$$\log_{1/2}\left(\frac{x^2+6}{5x}\right) < 0$$
$$\frac{x^2+6}{5x} > 1$$
$$\frac{x^2-5x+6}{5x} > 0$$

bulunur. Bu eşitsizliğin tablosu aşağıdaki şekildeki çizilmiştir.

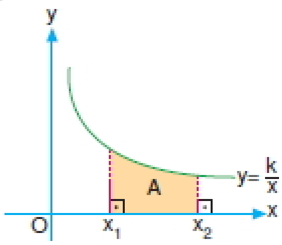
x	$-\infty$		0		2		3		∞
f(x)		−		+		−		+	

$$Ç = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 2 \ \wedge x > 3\}$$

biçimindedir.

LOGARİTMA İLE ALAN HESAPLAMA

1. 11. Teorem: $[x_1; x_2]$ aralığında $y = \frac{k}{x}$ fonksiyonunun altında kalan alan

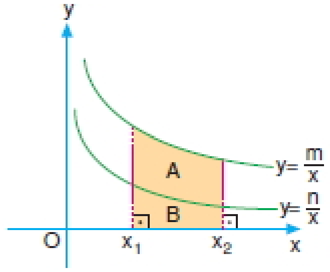


$$A_{Taralı} = k \cdot \ln\frac{x_2}{x_1}$$

dir.

Bu teoremin ispatı integral de $A_{Taralı} = k \cdot \ln\frac{x_2}{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{k}{x}dx$ ile yapılmaktadır. İntegral konusu işlenince okuyucu rahatlıkla görecektir.

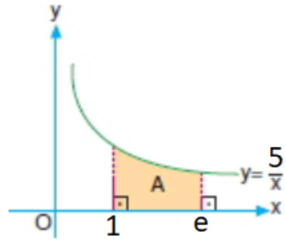
1.3. Sonuç: Şekildeki gibi iki eğri verilsin.



1. $A = (m-n) \cdot \ln \frac{x_2}{x_1}$

2. $\frac{A}{B} = \frac{m-n}{n}$

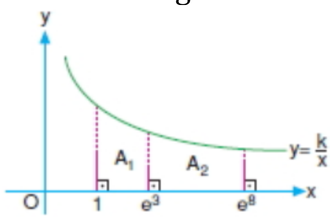
Örnek:



A bulunduğu bölgenin alanını nedir?

Çözüm: $A = k \cdot \ln \frac{x_2}{x_1} = 5 \cdot \ln \frac{e}{1} = 5 \text{ br}^2$

Örnek: A_1 ve A_2 bulundukları bölgenin alanını göstermektedir.



$A_1 = 18 \text{ br}^2$ olduğuna göre A_2 nin değeri kaç birim karedir?

Çözüm: $A_1 = k \cdot \ln \frac{x_2}{x_1}$

$18 = k \cdot \ln \frac{e^3}{1}$

$k = 6$

dir. Buna göre;

$$A_3 = k \cdot \ln \frac{x_3}{x_2} = 6 \cdot \ln \frac{e^8}{e^3} = 6 \cdot \ln e^5 = 30 \text{ br}^2$$

olur.

BAYAĞI LOGARİTMA, KARAKTERİSTİK, MANTİS ve COLOGARİTAMA

10 tabanına göre yazılan logaritamaya bayağı logaritma denildiği 1.5 tanımda verildi. Şimdi burada birkaç ayrıntıdan bahsedilecektir.

1.12. Teorem: 1'den büyük sayının bayağı logaritması pozitiftir.

İspat: $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n > 1$ için $1 < x < 10^n$ olsun.

$$\log 1 < \log x < \log 10^n$$
$$0 < \log x < n$$

olur ki, bu bize 1'den büyük sayının bayağı logaritması pozitif olduğunu gösterir.

1.13. Teorem: 1'den küçük sayının bayağı logaritması negatiftir.

İspat: $n \in \mathbb{Z}^+$ birden küçük x tamsayısı için $10^{-n} < x < 1$ olsun.

$$\log 10^{-n} < \log x < \log 1$$
$$-n < \log x < 0$$

olur ki, bu bize 1'den büyük sayının bayağı logaritması negatif olduğunu gösterir.

Örnek: $\log 352 = 2{,}547$
$\log 0{,}425 = -0{,}372$

1.14. Teorem: 10'un tamsayı kuvveti olmayan bir sayının logaritması, ardışık iki tamsayı arasındadır.

İspat: 10 sayısının tamsayı kuvveti olmayan bir sayı p olsun. p sayısı 10^n ile 10^{n+1} arasında bulunsun. p sayısının onluk logaritmasına x diyelim. $x = \log p$ olsun. $p = 10^n$ yazılır.

$$10^n < p < 10^{n+1} \Leftrightarrow 10^n < 10^x < 10^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow n < x < n+1$$
$$\Leftrightarrow n < \log p < n+1$$

olur. Buda $\log p$ sayısının, ardışık iki tamsayı arasında olduğunu gösterir.

1.7. Tanım: $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $0 \leq m < 1$ olmak üzere bayağı bir logaritmada,

$$\log a = k + m$$

biçiminde yazılabilir. Bu yazılışta k sayısına log a'nın karakteristiği, m sayısına da mantisi denir. k pozitif bir ifade ise k ile gösterilirken, negatif durumda $\bar{k}$ ile gösterilir. Mantisin ondalıklı bir sayı kısmı olduğundan üstlü-köklü işlem yapılarak elde edilebilir. Ama bu zaman kaybı olmaması için logaritmik cetveller hazırlanmıştır. Günümüzde mantis ya logaritmik cetvel, ya da hesap makinesi ile bularak işlem yapılır.

Örnek: log 200 karakteristiğini ve mantisini bulalım.

$$\log 200 = 2{,}301 = 2 + 0{,}301$$

olur. log 200 sayısının karakteristiği $k = 2$, mantisi $m = 0{,}301$ dür.

1.15. Teorem: 1'den büyük sayıların logaritmasının karakteristiği, bu sayının tam kısmındaki basamak sayısının bir eksiğine kadardır.

İspat: $k + 1$ basamaklı bir a sayısı için

$$\log a = \log(n \cdot 10^k)$$

olacak şekilde bir n sayısı mevcuttur. Burada

$$\begin{aligned} \log a &= \log(n \cdot 10^k) \\ &= \log n + k \cdot \log 10 \\ &= \log n + k \cdot \log 10 \end{aligned}$$

yazılır. Bu yazımda $0 \leq \log n < 1$ olup $\log n = m$ alınırsa,

$$\log a = k + m$$

olur ki, burada k basamak sayısının bir eksiğidir.

Örnek: log 734586,14 sayısının karakteristiğini 734586 sayısı 6 basamaklı bir sayı olduğundan karakteristiği $k = 5$ dir.

$$\log 734586{,}14 = 5, m$$

1.15. Teorem: 1'den küçük pozitif sayıların logaritmalarının karakteristiği ondalık ifade de sıfırdan farklı sayının solundaki sıfır sayısının negatifi kadardır.

$$\log \underbrace{0{,}0 \cdots 0}_{\text{k tane}} a = -k + 1 - m$$

Bu teoremin ispatı 1.14. teoreme benzer yöntemle yapılır. //

1'den küçük pozitif sayıların logaritmalarının mantisi elde edilen ondalık sayının 1'e tamamlanmasıyla oluşan ondalıklı sayı kadar olur.

Örnek: $\log 0{,}00641$ sayısının karakteristiği, 6 rakamından önce 3 tane sıfır olduğundan $k = -3 = \bar{3}$ tür. $\log 0{,}00641 = -2{,}193$ değeri hesap makinesi yardımıyla bulunur.

$$\begin{aligned}\log 0{,}00641 &= -2{,}193\\ &= -3 + 1 - 0{,}193\\ &= \bar{3} + 0{,}807\end{aligned}$$

$k = \bar{3}$ ve $m = 0{,}807$

Örnek: $\log 0{,}00025$ sayısının karakteristiği, 2 rakamından önce 4 tane sıfır olduğundan $k = -4 = \bar{4}$ dür. $\log 0{,}00025 = -3{,}602$ değeri hesap makinesi yardımıyla bulunur.

$$\begin{aligned}\log 0{,}00025 &= -3{,}602\\ &= -4 + 1 - 0{,}602\\ &= \bar{4} + 0{,}398\end{aligned}$$

$k = \bar{4}$ ve $m = 0{,}398$

//

Şimdi vereceğimiz örnek, karakteristik ve mantisi anlamamıza yardımcı olacak önemli bir örnektir.

Örnek:

$\log 800 = 2{,}903$	$k = 2$ ve $m = 0{,}903$
$\log 80 = 1{,}903$	$k = 1$ ve $m = 0{,}903$
$\log 8 = 0{,}903$	$k = 0$ ve $m = 0{,}903$
$\log 0{,}8 = -0{,}097 = \bar{1} + 0{,}903$	$k = \bar{1}$ ve $m = 0{,}903$
$\log 0{,}08 = -1{,}097 = \bar{2} + 0{,}903$	$k = \bar{2}$ ve $m = 0{,}903$
$\log 0{,}008 = -2{,}097 = \bar{3} + 0{,}903$	$k = \bar{3}$ ve $m = 0{,}903$

Örnek: $\log 6 = 0{,}778$ ise $\log 0{,}006$ nın karakteristiğini, mantisini ve değerini bulunuz.

Çözüm: $\log 0{,}006$ da 6 rakamından önce 3 tane sıfır olduğundan $k = \bar{3}$ ve $m = 0{,}778$ dir. Buradan,

$$\log 0{,}006 = \bar{3} + 0{,}778$$
$$= -3 + 0{,}778$$
$$= -2{,}222$$

elde edilir.

Örnek: $\log 0{,}004 = -2{,}398$ ise $\log 40$ nın karakteristiğini, mantisini ve değerini bulunuz.

Çözüm: $\log 0{,}004 = -2{,}398$
$$= -3 + 1 - 0{,}398$$
$$= \bar{3}, 602$$

Burada $m = 0{,}602$ olur. Ayrıca 40 sayısı 2 basamaklı olduğundan $k = 2$ dir.

$$\log 40 = 2 + 0{,}602 = 2{,}602$$

elde edilir.

1.8. Tanım: Bayağı logaritmanın toplamaya göre tersine cologaritma denir. Bu tanıma göre;

$$\operatorname{colog} x = \log \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -\log x$$
$$\operatorname{colog} x + \log x = 0$$

denklemleri yazılır.

Örnek: $\operatorname{colog} x = 3{,}468$ ise $\log x$'in değeri nedir?

Çözüm: $\operatorname{colog} x = 3{,}468$
$$-\log x = 3{,}468$$
$$\log x = -3{,}468$$
$$\log x = \bar{4} + 1 - 0{,}468$$
$$\log x = \bar{4}, 532$$

1.4. Sonuç: $\log a = k + m$ bayağı logaritmasında k karakteristik, m mantis olsun. Bu takdirde;

$$\operatorname{colog} a = \overline{k+1} + 1 - m$$

olur.

Örnek: $\log x = 1{,}212$ ise $\log x$'in değeri nedir?

Çözüm: $\operatorname{colog} x = \overline{1+1} + 1 - 0{,}212 = \bar{2}, 788$

Örnek: $\text{colog}\, x = \bar{3},286$ ise $A = x^4$ kaç basamaklıdır?

Çözüm: $\text{colog}\, x = \bar{3},286$ ise $\log x = 2 + 1 - 0{,}286 = 2{,}714$ olur.

$$A = x^4$$
$$\log A = \log x^4$$
$$\log A = 4 \cdot \log x$$
$$\log A = 4 \cdot 2{,}714$$
$$\log A = 10{,}856$$

A sayısı 11 basamaklıdır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $2^{\log_{2\sqrt{2}} 27}$ işleminin sonucu nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) 27

Çözüm:

$$\begin{aligned} 2^{\log_{2\sqrt{2}} 27} &= 2^{\log_{2^{3/2}} 27} \\ &= 2^{\frac{2}{3}\log_2 3^3} \\ &= 2^{\log_2 (3^3)^{2/3}} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Cevap: C

2. $\log 300 = 2{,}477$ ise $\log \sqrt{3}$ 'ün değeri nedir?

A) 0,2385 B) 0,477 C) 1,477 D) 1,732 E) 2

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log \sqrt{3} &= \log 3^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \log 3 \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{300}{100} \\ &= \frac{1}{2} (\log 300 - \log 10^2) \\ &= \frac{1}{2} (\log 300 - 2 \cdot \log 10) \\ &= \frac{1}{2} (2{,}477 - 2) \end{aligned}$$

$= 0{,}2385$

Cevap: A

3. $\log 2 = a$ ve $2^{2x+1} = 10$ ise x'in a türünden değeri nedir?

A) $-a$ B) $\frac{1-a}{2a}$ C) $\frac{1+a}{2a}$ D) $\frac{1-a}{a}$ E) $\frac{1+a}{a}$

Çözüm:

$$2^{2x+1} = 10$$
$$\log 2^{2x+1} = \log 10$$
$$(2x+1)\log 2 = \log 10$$
$$(2x+1)\,a = 1$$
$$2x = \frac{1}{a} - 1$$
$$x = \frac{1-a}{2a}$$

Cevap: B

4. $\log 2 = 0{,}301$ ise $\log 5$ 'in değeri nedir?

A) 0,289 B) 0,379 C) 0,459 D) 0,699 E) 0,739

Çözüm:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$$

Cevap: D

5. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_4\left(\frac{x}{2}\right)$ ise $f^{-1}(x)$ nedir?

A) -2^x B) 2^{x+1} C) 2^{2x-1} D) 2^{2x} E) 2^{2x+1}

Çözüm Bir fonksiyonun tersini bulurken x görülen yere y, y görülen yere x yazılır. Sonra burada logaritma fonksiyonunu üstel fonksiyona çevrilir.

$$x = \log_4\left(\frac{y}{2}\right)$$
$$4^x = \frac{y}{2}$$
$$2^{2x} \cdot 2 = y$$
$$y = 2^{2x+1}$$
$$f^{-1}(x) = 2^{2x+1}$$

Cevap: E

6. $\log_2 x^4 = 8$ ise x'in değerler kümesi nedir?

A) $\{-1, 1\}$ B) $\{-2, 2\}$ C) $\{-3, 3\}$ D) $\{-4, 4\}$ E) $\{-5, 5\}$

Çözüm:

$$\log_2 x^4 = 8$$
$$4 \cdot \log_2 |x| = 8$$
$$\log_2 |x| = 2$$
$$|x| = 2^2 = 4$$
$$x = 4 \ \wedge x = -4$$

Cevap: D

7. $\log 5 = 0{,}699$ ise $A = 25^{20}$ sayısı kaç basamaklıdır?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

Çözüm:

$$A = 25^{20} = (5^2)^{20}$$
$$\log A = \log 5^{40} = 40 \cdot \log 5 = 40 \cdot 0699 = 27{,}96$$

O zaman A sayısı 28 basamaklıdır.

Cevap: E

8. $3^{2+\log_9 16}$ nin sonucu nedir?

A) 34 B) 35 C) 36 D) 38 E) 40

Çözüm:

$$x = 3^{2+\log_9 16} = 3^2 3^{\log_{(3^2)} 16} = 9 \cdot 3^{\frac{1}{2}\log_3 16} = 9 \cdot 3^{\log_3 (16)^{\frac{1}{2}}} = 9 \cdot 3^{\log_3 4} = 9 \cdot 4$$

Cevap: C

9. $4^x - 2^{x+1} = 48$ denkleminin çözüm kümesinin bir tanesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

Çözüm: $2^x = t$ olsun.

$$4^x - 2^{x+1} = 48$$
$$2^{2x} - 2^x \cdot 2 - 48 = 0$$
$$t^2 - 2t - 48 = 0$$

$(t-8)(t+6)=0$
$t=8,\ t=-6$,(negatif tanımlı olmaz)
$2^x=8$
$2^x=2^3$
$x=3$

Cevap: B

10. $\log_2(x^2-x-16)=\log_2(x-1)$ denkleminin çözümü nedir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm:
$\log_2(x^2-x-16)=\log_2(x-1)$
$x^2-x-16=x-1$
$x^2-2x-15=0$
$(x-5)(x+3)=0$
$x=5, x=-3$

Cevap: A

11. $\log_{12}(\log_4\log_2 16)$ işleminin sonucu nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:
$$\begin{aligned}\log_{12}(\log_4\log_2 16) &= \log_{12}(\log_4\log_2 16)\\ &= \log_{12}(\log_4\log_2 2^4)\\ &= \log_{12}(\log_4 4\log_2 2)\\ &= \log_{12}(\log_4 4)\\ &= \log_{12}1\\ &= 0\end{aligned}$$

Cevap: A

12. $\log 5=a$ ise $\log 8$ in değeri nedir?

A) $3+a$ B) $3-a$ C) $1-3a$ D) $1+3a$ E) $3-3a$

Çözüm:
$$\log 8=\log 2^3=3\cdot\log 2=3\cdot\log\frac{10}{5}=3\cdot(\log 10-\log 5)=3(1-a)$$

Cevap: E

13. $x^2 + 8x + 2\log_2 n$ ifadesinin tam kare olması için n ne olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 2^4 D) 2^8 E) 2^{12}

Çözüm: $x^2 + 8x + 2\log_2 n = x^2 + 8x + 16$ olmasıyla mümkündür.

$$2\log_2 n = 16$$
$$\log_2 n = 8$$
$$n = 2^8$$

Cevap: D

14. $10^{1-x} = 2$ eşitliğini sağlayan x değerini nedir?

A) 1 B) 2 C) $1 - \log 2$ D) $1 + \log 2$ E) $\log 2$

Çözüm:

$$10^{1-x} = 2$$
$$\log 10^{1-x} = \log 2$$
$$(1 - x)\log 10 = \log 2$$
$$1 - x = \log 2$$
$$1 - \log 2 = x$$

Cevap: C

15. $f(x) = \log_{1-x}(x^2 - x - 6)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini nedir?

A) $(-\infty, -1)$ B) $(-\infty, -2)$ C) $(-\infty, 1)$ D) $(-\infty, 2)$ E) $\varnothing$

Çözüm: $x^2 - x - 6, 1 - x > 0, 1 - x \neq 0$ sisteminin sağlandığı aralık, f(x) in en geniş tanım aralığı olur.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
x^2-x-6		+	o	−		−	o	+	
$1-x$		+ (çözüm)		+	o	−		−	

Ç = $(-\infty, -2)$

Cevap: B

16. $\log_5 \frac{\sqrt{5}}{5} + \log_{0,1} 0,01$ ifadesinin en sade biçimi nedir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) log 2 E) log 5

Çözüm:

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{\sqrt{5}}{5} + \log_{0,1} 0,01 &= \log_5 \sqrt{5} - \log_5 5 + \log_{(10^{-1})}(10)^{-2} \\ &= \log_5 5^{1/2} - 1 + \left(\frac{-2}{-1}\right)\log_{10} 10 \\ &= \frac{1}{2}\log_5 5 - 1 + 2 \\ &= \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Cevap: C

17. $\ln e^3 + 2\ln\sqrt{e} - \ln\frac{1}{e}$ ifadesinin en sade biçimi nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$\begin{aligned}\ln e^3 + 2\ln\sqrt{e} - \ln\frac{1}{2} &= \ln e^3 + 2\ln e^{1/2} - \ln e^{-1} \\ &= 3\ln e + 2\cdot\frac{1}{2}\ln e - (-1)\ln e \\ &= 3 + 1 + 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

Cevap: E

18. $\log_x 3 = a, \log_x 5 = b$ ise $\log_x 675$ in değeri a ve b türünden nedir?

A) $3a + 2b$ B) 1 C) $2a + 3b$ D) log a E) log b

Çözüm:

$$\begin{aligned}\log_x 675 &= \log_x 3^3 5^2 \\ &= \log_x 3^3 + \log_x 5^2\end{aligned}$$

$= 3\log_x 3 + 2\log_x 5$
$= 3a + 2b$

Cevap: A

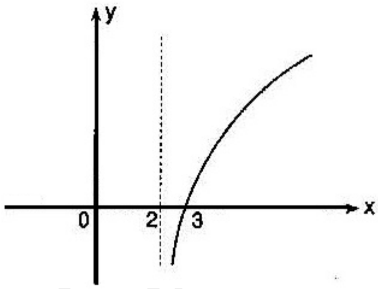
19. $x = \log 99!$ ise $\log 100!$ un x türünden değeri nedir?

A) $2x$ B) $3x$ C) $4x$ D) $2 + x$ E) $2 - x$

Çözüm: $\log 100! = \log 100 \cdot 99!$
$= \log 100 + \log 99!$
$= 2 + x$

Cevap: D

20.



Grafiği verilen fonksiyonun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\log_3(x+2)$ B) $\log_3(x-2)$ C) $\log_2(x-3)$ D) $\log x$ E) 2^x

Çözüm:
i) $x = 2$ doğrusunun sağında yer aldığından $x - 2 > 0$ dır.

ii) Taban 3 olur.
Şu halde $f(x) = \log_3(x-2)$ fonksiyonunu olur.

Cevap: B

21. $\log_2(x+2) - 2\log_4(x-2) = 1$ ise x'in değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:
$\log_2(x+2) - 2\log_4(x-2) = 1$
$\log_2(x+2) - 2\log_{(2^2)}(x-2) = 1$

$\log_2(x+2) - \frac{2}{2}\log_2(x-2) = 1$

$\log_2 \frac{x+2}{x-2} = 1$

$\frac{x+2}{x-2} = 2$

$x + 2 = 2x - 4$

$6 = x$

Cevap: E

22. $\log_x 10 - 6\log_{10} x = 1$ ise x'in değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10^4 B) 10^3 C) 10^2 D) 10^{-1} E) 10^{-2}

Çözüm: $t = \log_x 10$ alınırsa $\log_{10} x = \frac{1}{t}$ olur.

$t - \frac{6}{t} = 1$

$t^2 - 6 = t$

$t^2 - t - 6 = 0$

$(t-3)(t+2) = 0$

$t = 3$ ve $t = -2$

$\log_x 10 = 3$ ve $\log_x 10 = -2$

$10 = x^3$ ve $10 = x^{-2}$

$x = \sqrt[3]{10}$ ve $x = 10^{-1}$

Cevap: D

23. $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} > \left(\frac{5}{2}\right)^{2-3x}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini nedir?

A) $x < -2$ B) $x < -1$ C) $x < 0$ D) $x < 1$ E) $x < 2$

Çözüm:

$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} > \left(\frac{5}{2}\right)^{2-3x}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} > \left(\frac{2}{5}\right)^{3x-2}$

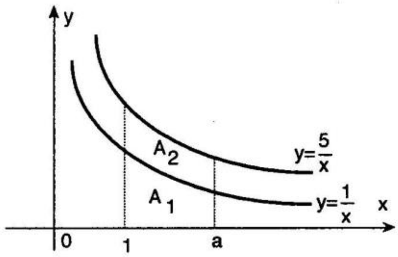
$x - 4 > 3x - 2$

$-2 > 2x$

$x < -1$

Cevap: B

24.



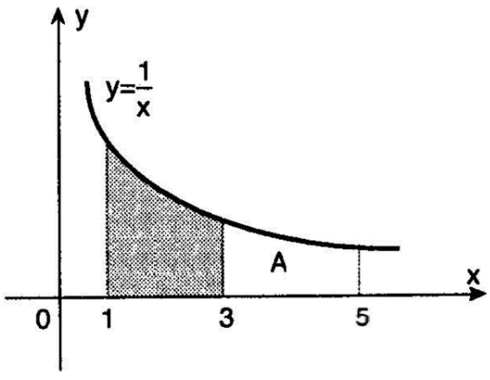
Verilere göre $A_1 = 8\ \text{br}^2$ olduğuna göre A_2 bölgesinin alanı nedir?

A) 32 B) 36 C) 40 D) 44 E) 48

Çözüm: Alan kavramından $A_1 = \ln x = 8$ bulunur.
$A_1 + A_2 = 5 \cdot \ln x$
$8 + A_2 = 5 \cdot 8$
$A_2 = 32\ \text{br}^2$

Cevap: A

25.



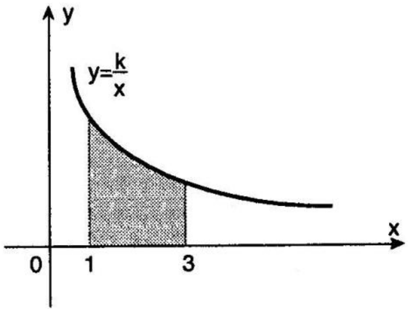
Verilere göre A bölgesinin alanı nedir?

A) $\ln\frac{3}{5}$ B) $\ln\frac{9}{4}$ C) $\ln\frac{9}{5}$ D) $\ln\frac{4}{5}$ E) $\ln\frac{4}{9}$

Çözüm: $A = \ln\frac{3}{1} - \ln\frac{5}{3} = \ln\frac{9}{5}\ \text{br}^2$

Cevap: C

26.



Verilere göre taralı bölge ln 9 br^2 olduğuna göre k'nın değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $k \cdot \ln\frac{3}{1} = \ln 9$ ise $k \cdot \ln 3 = \ln 3^2$ olup $k = 2$ dir.

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Prof. Dr. Şehmus YARDIMCI Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2018, ANKARA.
8. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
9. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
10. George B. THOMAS, Thomas Calculus, Massachusetts Institute of Technology, University of California, Çeviri Recep Korkmaz, Beta, 2009, İstanbul.
11. Doç. Dr. Ali DÖNMEZ, Gerçel Analiz, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1985.

12. Prof. Dr. Necdet SAN, Analiz Dersleri, Baylan Matbaası, 1975, Ankara.
13. Prof. Dr. Rahim OCAK, Reel Analiz, Erzurum, 1998.
14. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
15. Yrd. Doç. Dr. Ersin Erol, Yüksek Matematiğe Giriş, Marmara Üniversitesi Yayınları, 1991, İstanbul.
16. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.