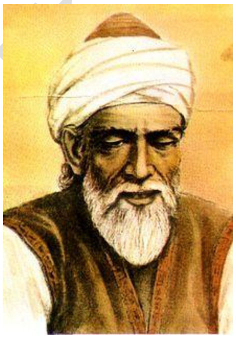
2. BÖLÜM
TRİGONOMETRİYE GİRİŞ

Ebu Abdullah Muhammed bin Cabir bin Sinan er-Rekki es-Sabi el-Battani
858, Harran, Şanlıurfa - 929, Samarra, Irak

Trigonometri milattan önce eski mısır döneminde kullanıldığı bilinmektedir. Ama Trigonometrinin kurucusu Battani kabul edilmektedir. Battani bugün ki Şanlıurfa'nın Harran ilçesinde yaşamış, sinüs ve kosinüs kavramlarını astronomi çalışmalarını hesaplarken kullanmıştır. Battani kosinüs teoremini ispatlamıştır. Sinüs kelimesi Arapça kıvrım, kucak, cep anlamına gelen "Cayb" kelimesini kullanmıştır.



Ebu'l Vefa el-Buzcani
(10 Haziran 940, Buzgan, İran - 15 Temmuz 998, Bağdat, Irak)

İlk defa tanjant ve kotanjantın tanımını Ebu Vefa Burcani tarafından yapılmıştır. Tanjant kelimesi Arapça dokunma anlamına gelen "lamis" olarak kullansa da, Fransızca tanjant olarak sonradan değiştirilmiştir. Ebu Vefa Burcani Sinüs teoremini ispatlamıştır.

Nasîrüddin Tûsî
(24 Şubat 1201, Tus, İran - 26 Haziran 1274, Al Yassin Cami, Bağdat, Irak)

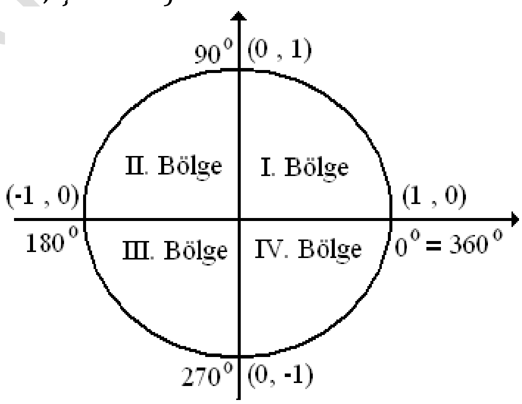
Trigonometrik cetveli, Nasirettin Tusi hazırlamıştır.

TRİGONOMETRİ KAVRAMI

2.1. Tanım: Trigonometri, dik üçgenlerin birbiri arasındaki oranlar ve o oranların sağladığı denklemleri inceleyen konudur. İnşaat, jeoloji, mekanik, elektrik–elektronik, bilgisayar gibi pek çok bilimlerde son derece önemlidir. Trigonometri konusuna girmeden önce geometri konusunda açı ölçüsü birimlerini hatırlamak gerekir.

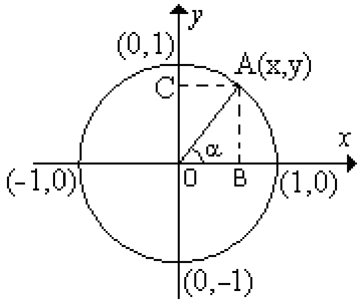
BİRİM (TRİGONOMETRİK) ÇEMBER

2.2. Tanım: Kartezyen koordinat sisteminde merkezi koordinat eksenlerin kesiştiği nokta (orijin) ve yarıçapı 1 birim olan çembere birim (trigonometrik) çember denir. Trigonometrik çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 1$ dir. (Bkz. Analitik Geometri, Çember)



TRİGONOMETRİK DEĞERLER

2.3. Tanım: Birim çember üzerinde $A(x, y)$ noktasını alalım ve $m(A\widehat{O}B) = \alpha$ olsun. A noktasının apsisine α açısının kosünüsü denir ve $\cos\alpha$ ile gösterilir. Ordinatına α açısının sinüsü denir ve $\sin\alpha$ ile gösterilir.



$\sin\alpha = |AB|$ ve $\cos\alpha = |OB|$

0^0 nin koordinatları $(1, 0)$ olduğundan $\cos 0 = 1$ ve $\sin 0 = 0$ dır.
90^0 nin koordinatları $(0, 1)$ olduğundan $\cos 90 = 0$ ve $\sin 90 = 1$ dır.
180^0 nin koordinatları $(-1, 0)$ olduğundan $\cos 180 = -1$ ve $\sin 180 = 0$ dır.
270^0 nin koordinatları $(0, -1)$ olduğundan $\cos 270 = 0$ ve $\sin 270 = -1$ dır.
dır.

Örnek: $\frac{\cos 360+\sin 90}{\cos 180+\sin 270}$ eşitliğini sağlayan kaç tane y tamsayı vardır.

Çözüm: $\frac{\cos 360+\sin 90}{\cos 180+\sin 270} = \frac{1+1}{(-1)+(-1)} = -2$

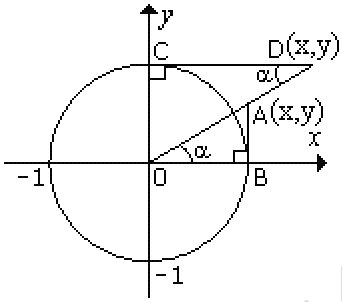
Örnek: $y = \frac{5\sin 4x-3}{2}$ eşitliğini sağlayan kaç tane y tamsayı vardır.

Çözüm: $-1 \le \sin\alpha \le 1$ ve $-1 \le \cos\alpha \le 1$ olduğunu tanımdan çıkmaktadır.

$2y = 5\sin 4\alpha - 3$
$2y + 3 = 5\sin 4\alpha$
$\frac{2y+3}{5} = \sin 4\alpha$
$-1 \le \frac{2y+3}{5} \le 1$
$-5 \le 2y + 3 \le 5$
$-8 \le 2y \le 2$
$-4 \le y \le 1$

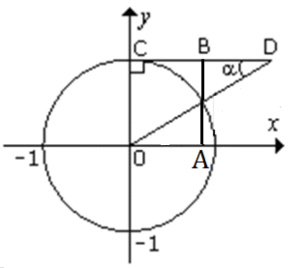
olduğundan $y \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ olur.

2.4. Tanım: Birim çemberin dışında AOB üçgenini $|OB| = 1$ br olacak şekilde çizelim, $A(x, y)$ noktasını alalım ve $m(A\widehat{O}B) = \alpha$ olsun. A noktasının ordinatına α açısının tanjantı denir ve $\tan\alpha$ ya da $\operatorname{tg}\alpha$ ile gösterilir. Yine birim çemberin dışında CDO üçgenini $|OC| = 1$ cm olacak şekilde çizelim, $D(x, y)$ noktasını alalım ve $m(C\widehat{D}O) = \alpha$ olsun. D noktasının apsisine α açısının kotanjantı denir ve $\cot\alpha$ ya da $\operatorname{ctg}\alpha$ ile gösterilir.



$\tan\alpha = |AB|$ ve $\cot\alpha = |CD|$

Örnek:



Verilere göre $|BD|$ uzunluğu kaç birimdir?

Çözüm: $m(A\widehat{O}D) = m(O\widehat{D}C) = \alpha$ olduğunan

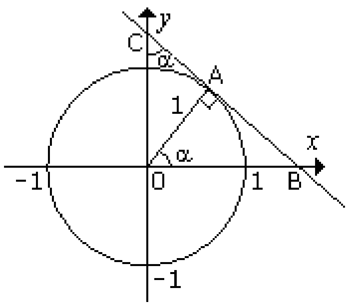
$$|OA| = |CB| = \cos\alpha$$
$$|CD| = \cot\alpha$$

olduğunan

$$|CD| = |CD| - |OA| = \cot\alpha - \cos\alpha$$

elde edilir.

2.5. Tanım: Birim çember üzerinde bir A noktasından geçen CB teğetini alalım. $|OA| = 1$ olmak üzere $m(A\widehat{O}B) = \alpha$ olsun. B noktasının apsisine α açısının sekantı denir ve $\sec\alpha$ ile gösterilir. C noktasının ordinatına α açısının kosekantı denir ve $\csc\alpha$ ya da $\operatorname{cosec}\alpha$ ile gösterilir.



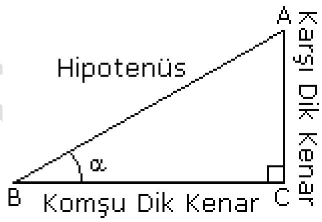
$\sec\alpha = |OB|$ ve $\csc\alpha = |0C|$

Secant kelimesi latince kesme manasına gelen secan kelimesinden türetilmiştir.

DİK ÜÇGENLERDE DAR AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI

Yukarıda tanımlanan trigonometrik değerleri şimdi dik üçgenlerde dar açılar üzerine uygulamaya çalışalım.

2.6. Tanım: Bir dik üçgen dik açının karşısındaki kenara "Hipotenüs", açının yanındaki kenara "Komşu Dik Kenar", açının karşısındaki kenara "Karşı Dik Kenar" olarak tanımlanır.



2.2. Teorem: $0^0 < \alpha < 90^0$ olmak üzere,

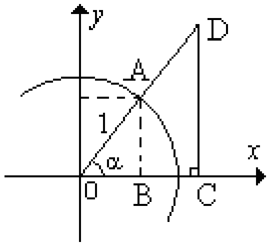
$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Komşu Dik Kenar}}, \quad \cot\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Komşu Dik Kenar}}, \quad \csc\alpha = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$$

dir.

İspat: i) Birim çember üzerinde AOB üçgenini ve birim çemberin dışında EOD üçgenini çizelim.



AOB ~ DOC benzer olduğundan

$$\frac{|AO|}{|DO|} = \frac{|AB|}{|DC|}$$

$$\frac{1}{|DO|} = \frac{\sin\alpha}{|DC|}$$

$$\sin\alpha = \frac{|DC|}{|DO|}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

ve

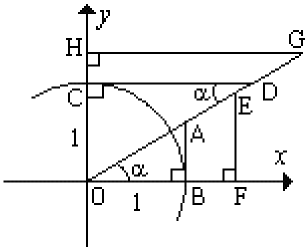
$$\frac{|AO|}{|DO|} = \frac{|OB|}{|OC|}$$

$$\frac{1}{|DO|} = \frac{\cos\alpha}{|OC|}$$

$$\cos\alpha = \frac{|DO|}{|OC|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

ii) Birim çember üzerinde AOB ve ODF üçgenleri ve birim çemberin dışında EOF ve OGH üçgenlerini çizelim.



AOB ~ EOF benzer olduğundan

$$\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|OB|}{|OF|}$$

$$\frac{\tan\alpha}{|EF|} = \frac{1}{|OF|}$$

$$\tan\alpha = \frac{|EF|}{|OF|}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$$

ODF ~ OGH benzer olduğundan

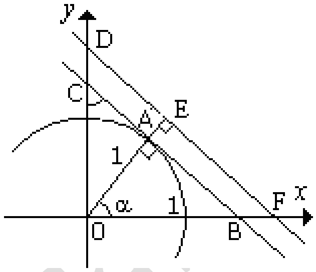
$$\frac{|CD|}{|HG|} = \frac{|OC|}{|OH|}$$

$$\frac{\cot\alpha}{|HG|} = \frac{1}{|OH|}$$

$$\cot\alpha = \frac{|HG|}{|OH|}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$$

iii) Birim çember üzerinde AOB ve OAC üçgenleri ve birim çemberin dışında OEF ve OED üçgenlerini çizelim.



AOB ~ OEF benzer olduğundan

$$\frac{|OA|}{|OE|} = \frac{|OB|}{|OF|}$$

$$\frac{1}{|OE|} = \frac{\sec\alpha}{|OF|}$$

$$\sec\alpha = \frac{|OE|}{|OF|}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$$

OAC ~ OED benzer olduğundan

$$\frac{|OA|}{|OE|} = \frac{|OC|}{|OD|}$$

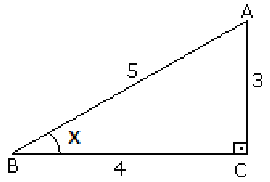
$$\frac{1}{|OE|} = \frac{\csc\alpha}{|OD|}$$

$$\csc\alpha = \frac{|OE|}{|OD|}$$

$$\csc\alpha = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$$

Örnek: $0^0 < x < 90^0$ olmak üzere $\sin x = \frac{3}{5}$ ise cos x, tan x, cot x, sec x ve csc x yı bulunuz.

Çözüm: Sinüsün tanımı gereğince karşı dik kenar uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna eşittir. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ olduğundan Pisagor teoremi gereğince komşu dik kenar 4 olarak bulunur

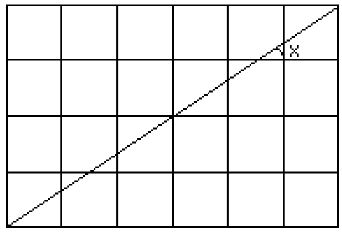


Bu üçgene göre,

$$\cos x = \frac{4}{5}, \tan x = \frac{3}{4}, \cot x = \frac{4}{3}, \sec x = \frac{5}{4}, \csc x = \frac{5}{3}$$

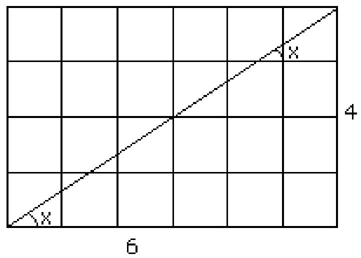
elde edilir.

Örnek: Her bir kareden oluşan dikdörtgen şekildeki gibi çizilmiştir.



Buna göre tan x i bulunuz.

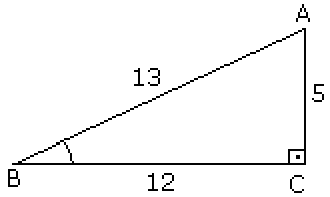
Çözüm: Şekildeki dikdörtgenin içindeki üçgenin iç açıları yöndeş açılarından şekildeki gibidir.



Bu üçgene göre $\tan x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ bulunur.

Örnek: $0^0 < x < 90^0$ olmak üzere $\tan x = \frac{5}{12}$ ise $\sin x + \cos x$ i bulunuz.

Çözüm: Tanjantın tanımı karşı dik kenarın uzunluğunun komşu dik kenarın uzunluğuna oranıydı. Buna göre

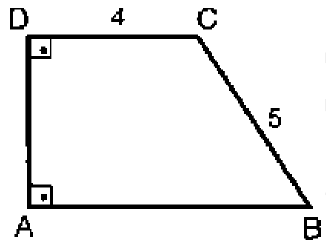


bulunur. Şu halde;

$$\sin x + \cos x = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{17}{13}$$

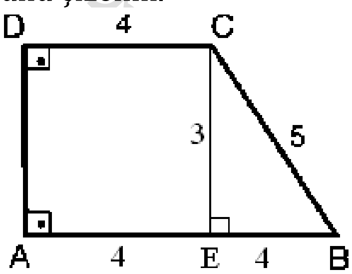
dir.

Örnek:



ABCD dik yamuğunda $|DC| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, $\sin B = \frac{3}{5}$ ise ABCD yamuğun alanı kaç cm^2 dir?

Çözüm: $|CE|$ doğrusunu çizelim.



$\sin B = \frac{3}{5}$ ve $|BC| = 5$ cm olduğundan $|CE| = 3$ cm dür. $3-4-5$ üçgeninden $|BE| = 4$ cm olarak bulunur. Buna göre;

$$A(ABCD) = \frac{(|AB|+|CD|)|AD|}{2} = \frac{(4+8)\cdot 3}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

dir.

2.1. Sonuç: $0^0 \leq x \leq 360^0$ olmak üzere (işlemleri tanımsız yapan değerler hariç)

$$1.\ \tan x \cdot \cot x = 1 \text{ veya } \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

2. $\sec x \cdot \cos x = 1$ veya $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
3. $\csc x \cdot \sin x = 1$ veya $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$
4. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
5. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

dir.

Örnek: $\tan x + \cot x = 4$ ise $\tan^2 x + \cot^2 x$ nin değeri nedir?

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafının karesini alalım.

$(\tan x + \cot x)^2 = 4^2$
$\tan^2 x + 2\tan x \cdot \cot x + \cot^2 x = 16$
$\tan^2 x + 2 \cdot 1 + \cot^2 x = 16$ (2.1. Sonuç 1'den)
$\tan^2 x + \cot^2 x = 14$

Örnek: $\cos x + \sec x = 2$ ise $\cos^2 x + \sec^2 x$ nin değeri nedir?

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafının karesini alalım.

$(\cos x + \sec x)^2 = 2^2$
$\cos^2 x + 2\cos x \cdot \sec x + \sec^2 x = 4$
$\cos^2 x + 2 \cdot 1 + \sec^2 x = 4$ (2.1. Sonuç 1'den)
$\cos^2 x + \sec^2 x = 2$

Örnek: $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = 3$ ve $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ olduğuna göre $\cot x$ kaçtır?

Çözüm: $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = 3$

$\cos x + \sin x = 3\cos x - 3\sin x$

$4\sin x = 2\cos x$

$\dfrac{4}{2} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\cot x = 2$

Örnek: $\frac{1}{1+\tan x}+\frac{1}{1+\cot x}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{1}{1+\tan x}+\frac{1}{1+\cot x}=\frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}+\frac{1}{1+\frac{\cos x}{\sin x}}$$
$$=\frac{1}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}+\frac{1}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}$$
$$=\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}+\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$$
$$=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}$$
$$=1$$

2.2. Sonuç: $0^0 \leq x \leq 360^0$ olmak üzere,

1. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
2. $\sec^2 x-\tan^2 x=1$
3. $\csc^2 x-\cot^2 x=1$

dir.

Örnek: $\frac{1-\sin^2 x}{\cot^2 x}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

Çözüm: $\frac{1-\sin^2 x}{\cot^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{\cos^2 x}{1}.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sin^2 x$

Örnek: $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}+\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}-\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}-\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$$
$$=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)}-\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)}$$
$$=(1+\cos x)-(1+\sin x)$$
$$=\cos x-\sin x$$

Örnek: $\frac{1+\cos x-\sin^2 x}{1+\cos x}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

Çözüm: $\frac{1+\cos x-\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1+\cos x-\left(1-\cos^2 x\right)}{1+\cos x}$

$$= \frac{\cos x+\cos^2 x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x)}{(1+\cos x)}$$

$$= \cos x$$

Örnek: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\frac{1}{\sin x+\cos x \cdot \cot x} = \frac{2}{3}$ ise $\sin x$ in değerini bulunuz.

Çözüm: $\frac{1}{\sin x+\cos x \cot x} = \frac{2}{3}$

$$\frac{1}{\sin x+\cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{2}{3}$$

$$\sin x = \frac{2}{3}$$

Örnek: $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

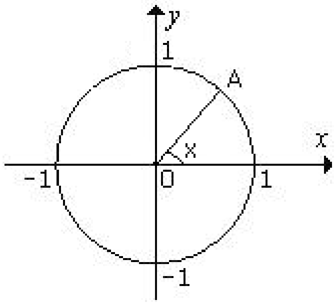
$$\sec^2 x - \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 \; //$$

Üçgen üzerinde tanımlanan trigonometrik değerler, bazen işlemler yaparken sıkıntı çıkartmaktadır. Özellikle 0^0 ve 90^0 gibi derecelerin trigonometrik değerlerini bulmada beklenmedik problemler oluşturmaktadır. Bu durumda trigonometrik değerleri birim çember üzerinde taşımakta fayda vardır.

2.1. Not: Bu bölümde $\pm\infty$ ifadesi $\pm\infty$'a yakınsama anlamına geliyor.

1. BÖLGE

2.7. Tanım: 1. bölge $0^0 \leq x \leq 90^0$ arasındaki açıların oluşturduğu bölgeye denir. Daha önceden sünüs ve kosünüs fonksiyonlarını tanımlarken, "kosünüs değeri x ekseni üzerinde sinüs değeri y ekseni üzerindedir" demiştik. Buna göre 1. bölgede alınan bir A açısı A(cos x, sin x) şeklindedir.



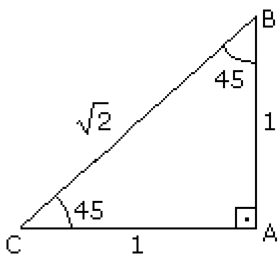
Şimdi burada önemli açıların trigonometrik değerlerini bulalım. Önemli açılar 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0 dir.

2.3. Teorem: 45^0 derecenin trigonometrik değerleri;

$$\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45 = 1,$$
$$\cot 45 = 1 , \sec 45 = \sqrt{2}, \csc 45 = \sqrt{2}$$

dir.

İspat:



Şekildeki gibi ikizkenar dik üçgen çizelim. Burada $m(A\hat{C}B) = 45^0$ için $|AB| = |AC| = 1$ br seçilirse, $|AB| = \sqrt{2}$ olur. Şu halde,

$$\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45 = \frac{1}{1} = 1,$$
$$\cot 45 = \frac{1}{1} = 1 , \sec 45 = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}, \csc 45 = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

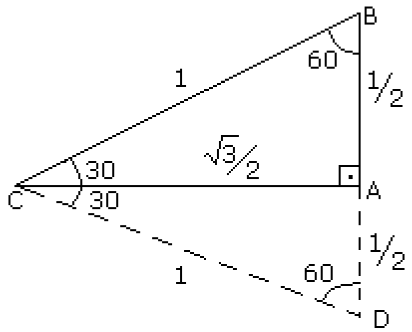
olur.

2.4. Teorem: 30^0 ve 60^0 derecelerin trigonometrik değerleri;

$$\sin 30 = \frac{1}{2}, \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\cot 30 = \sqrt{3}\,, \sec 30 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \csc 30 = 2$$
$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60 = \frac{1}{2}, \tan 60 = \sqrt{3},$$
$$\cot 60 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,, \sec 60 = 2, \csc 60 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

dir.

İspat:



Şekildeki gibi eşkenar üçgen çizelim. Burada $|CD| = |DB| = |CD| = 1$ br, $|AB| = |AD| = \frac{1}{2}$ br ve $|AC| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ br bulunur. Şu halde;

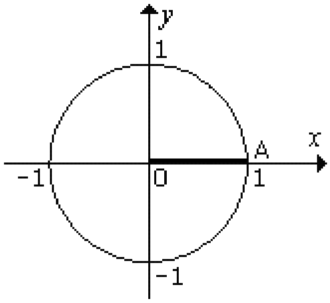
$$\sin 30 = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \cos 30 = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30 = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\cot 30 = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}\,, \sec 30 = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \csc 30 = \frac{1}{1/2} = 2$$
$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60 = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \tan 60 = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3},$$
$$\cot 60 = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,, \sec 60 = \frac{1}{1/2} = 2, \csc 60 = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

olur.

2.5. Teorem: 0^0 derecenin trigonometrik değerleri;
$$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \tan 0 = 0, \cot 0 = \pm\infty\,, \sec 0 = 1, \csc 0 = \pm\infty$$

dir.

İspat:



Şekildeki gibi birim çember üzerinden $|AO| = 1$ br doğrusunu ele alalım. Bu 0^0 olduğundan,

$$\sin 0 = \frac{0}{1} = 0, \cos 0 = \frac{1}{1} = 1, \tan 0 = \frac{0}{1} = 0,$$
$$\cot 0 = \frac{1}{0} = \pm\infty\ , \sec 0 = \frac{1}{1} = 1, \csc 0 = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

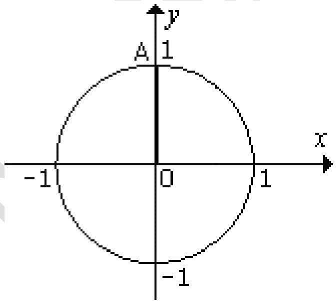
şeklindedir.

2.6. Teorem: 90^0 derecenin trigonometrik değerleri;

$$\sin 90 = 1, \cos 90 = 0, \tan 90 = \pm\infty, \cot 90 = 0\ , \sec 90 = \pm\infty, \csc 90 = 1$$

dir.

İspat:



Şekildeki gibi birim çember üzerinden $|AO| = 1$ doğrusunu ele alalım. Bu 90^0 olduğundan,

$$\sin 90 = \frac{1}{1} = 1, \cos 90 = \frac{0}{1} = 0, \tan 90 = \frac{1}{0} = \pm\infty,$$
$$\cot 90 = \frac{0}{1} = 0\ , \sec 90 = \frac{1}{0} = \pm\infty, \csc 90 = \frac{1}{1} = 1$$

şeklindedir. //

Elde ettiğimiz bu açıların tablosunu şu şekilde yazabiliriz.

	A = 0^0	A = 30^0	A = 45^0	A = 60^0	A = 90^0
sin A	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos A	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

tan A	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
cot A	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0
sec A	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$
csc A	$\pm\infty$	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1

Örnek: $\sin(2x - 20) = \frac{1}{2}$ eşitliğini sağlayan birinci bölgedeki en küçük x açısını bulunuz.

Çözüm: 1. bölgede x açısı 30^0 dir.

$$2x - 20 = 30$$
$$2x = 50$$
$$x = 25$$

bulunur.

2.3. Sonuç: $a + b = 90^0 = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere;

$$\sin a = \cos b, \tan a = \cot b, \sec a = \csc b$$

şeklindedir.

Örnek: $\sin^2 22 + \sin^2 22 = \sin^2 22 + \cos^2 22 = 1$

Örnek: $\tan 35 \cdot \tan 55 = \tan 35 \cdot \cot 35 = 1$

Örnek: $\frac{\csc 50}{\sec 40} = \frac{\sec 40}{\sec 40} = 1$

Örnek:

$\sin^2 10 + \sin^2 20 + \sin^2 30 + \sin^2 40 + \sin^2 50 + \sin^2 60 + \sin^2 70 + \sin^2 80$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$\sin 80 = \cos 10, \sin 70 = \cos 20, \sin 60 = \cos 30, \sin 50 = \cos 40$ olduğundan

$$\sin^2 10 + \sin^2 20 + \sin^2 30 + \sin^2 40 + \sin^2 50 + \sin^2 60 + \sin^2 70 + \sin^2 80$$
$$\sin^2 10 + \sin^2 20 + \sin^2 30 + \sin^2 40 + \cos^2 40 + \cos^2 30 + \cos^2 20 + \cos^2 10$$
$$= 4 //$$

Şimdi 1. bölgeye ait denklemlere örnek verelim.

Örnek: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $9^{2\sin x} = 27^{\cos x}$ ise $\sin x$ in değerini bulunuz.

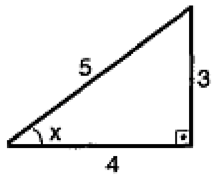
Çözüm: $9^{2\sin x} = 27^{\cos x}$

$$3^{4\sin x} = 3^{3\cos x}$$

$$4\sin x = 3\cos x$$

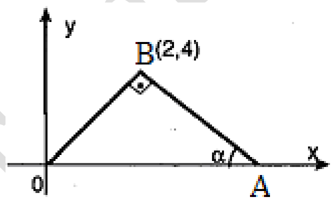
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$$

$$\tan x = \frac{3}{4}$$



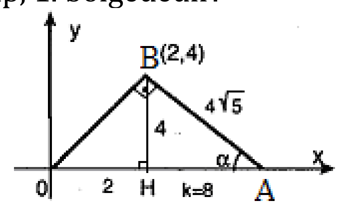
$$\sin x = \frac{3}{5}$$

Örnek:



Şekildeki dik üçgende B(2, 4) tür. $m(O\widehat{A}B) = \alpha$ ise $\sin\alpha$ nın değeri nedir?

Çözüm: $\alpha < 90^0$ olup, 1. bölgededir.



Öklid teoreminden $|BH|^2 = |OH||HA|$ dan $16 = 2k$ ise $k = 8$ dir.

$A\overset{\Delta}{H}B$ üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$|AB|^2 = 4^2 + 8^2 = 80$$

$$|AB| = 4\sqrt{5}$$

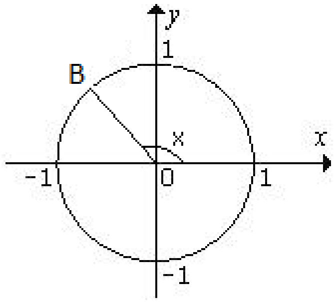
olur. Şu halde;

$$\sin \alpha = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

elde edilir.

2. BÖLGE

2.8. Tanım: 2. bölge $90^0 \leq x \leq 180^0$ arasındaki açıların oluşturduğu bölgeye denir. 2. bölgede alınan bir B açısı $B(-\cos x, \sin x)$ şeklindedir.



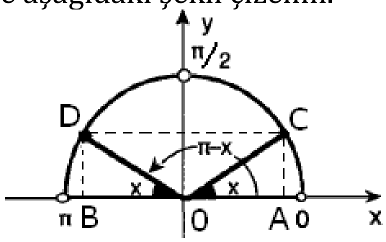
Şimdi 2. bölgedeki bir açıyı 1. bölgeye çevirerek değerini elde edelim.

2.7. Teorem: $0^0 \leq x \leq 90^0$ olmak üzere,

i) $\sin(180 - x) = \sin x$
ii) $\cos(180 - x) = -\cos x$
iii) $\tan(180 - x) = -\tan x$
iv) $\cot(180 - x) = -\cot x$
v) $\sec(180 - x) = -\sec x$
vi) $\csc(180 - x) = \csc x$

şeklindedir.

İspat: Verilere göre aşağıdaki şekli çizelim.



i) $|OA| = |OB|$ ve $B(-\cos x, \sin x)$ olduğuna göre,

$$\cos(180 - x) = -\cos x$$

dir.

ii) $|AC| = |BD|$ ve $B(-\cos x, \sin x)$ olduğuna göre,

$$\sin(180-x) = \sin x$$

dir.

iii) $\tan(180-x) = \frac{\sin(180-x)}{\cos(180-x)} = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\tan x$

iv, v, vi özellikleri iii gibi ispatlanır.

Örnek: sin 135, cot 150 ve sec 120 yi bulunuz.

Çözüm: $\sin 135 = \sin(180-45) = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cot 150 = \cot(180-30) = -\cot 30 = -\sqrt{3}$
$\sec 120 = \sec(180-60) = -\sec 60 = -2$

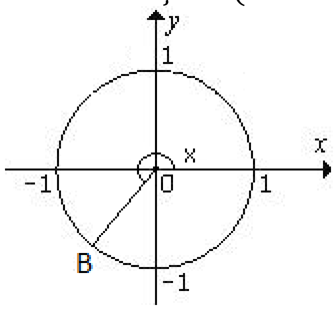
2.4. Sonuç: $0^0 \le x \le 90^0$ olmak üzere,

i) $\sin(90+x) = \cos x$
ii) $\cos(90+x) = -\sin x$
iii) $\tan(90+x) = -\cot x$
iv) $\cot(90+x) = -\tan x$
v) $\sec(90+x) = -\csc x$
vi) $\csc(90+x) = \sec x$

şeklindedir.

3. BÖLGE

2.9. Tanım: 3. bölge $180^0 \le x \le 270^0$ arasındaki açıların oluşturduğu bölgeye denir. 3. bölgede alınan bir B açısı $B(-\cos x, -\sin x)$ şeklindedir.



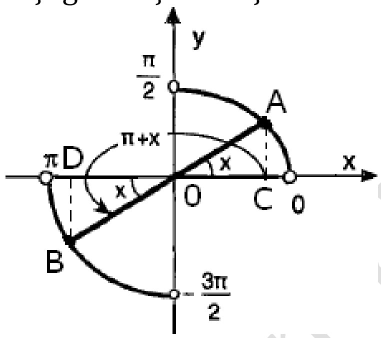
Şimdi 3. bölgedeki bir açıyı 1. bölgeye çevirerek değerini elde edelim.

2.8. Teorem: $90^0 \leq x \leq 180^0$ olmak üzere,

i) $\sin(180+x) = -\sin x$
ii) $\cos(180+x) = -\cos x$
iii) $\tan(180+x) = \tan x$
iv) $\cot(180+x) = \cot x$
v) $\sec(180+x) = -\sec x$
vi) $\csc(180+x) = -\csc x$

şeklindedir.

İspat: Verilere göre aşağıdaki şeklini çizelim.



i) $|OC| = |OD|$ ve $B(-\cos x, -\sin x)$ olduğuna göre,

$$-\cos(180+x) = \cos x$$
$$\cos(180+x) = -\cos x$$

dir.

i) $|AC| = |BD|$ ve $B(-\cos x, -\sin x)$ olduğuna göre,

$$-\sin(180+x) = \sin x$$
$$\sin(180+x) = -\sin x$$

dir.

iii) $\tan(180+x) = \dfrac{\sin(180+x)}{\cos(180+x)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$

iv, v, vi özellikleri iii gibi ispatlanır.

Örnek: cos 210, sin 270 ve tan 240 yi bulunuz.

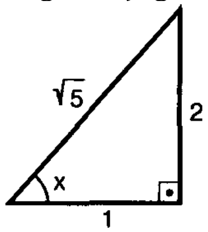
Çözüm: $\cos 210 = \cos(180+30) = -\cos 30 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 270 = \sin(180+90) = -\sin 90 = -1$

$\tan 240 = \tan(180+60) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$

Örnek: 3. Bölgede $\tan x = 2$ olduğuna göre $\cos^2 x = \cos x \cdot \sin x$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm: $\tan x = 2$ olduğuna göre aşağıdaki üçgen çizilir.



Şu halde,

$$\cos^2 x = \cos x \cdot \sin x = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{5}$$

bulunur.

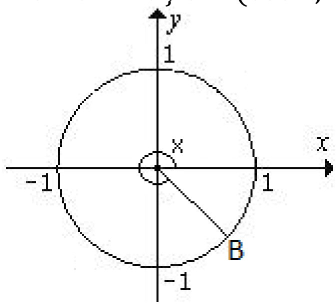
2.5. Sonuç: $0^0 \leq x \leq 90^0$ olmak üzere,

i) $\sin(270 - x) = \cos x$
ii) $\cos(270 - x) = -\sin x$
iii) $\tan(270 - x) = -\cot x$
iv) $\cot(270 - x) = -\tan x$
v) $\sec(270 - x) = -\csc x$
vi) $\csc(270 - x) = \sec x$

şeklindedir.

4. BÖLGE

2.10.Tanım: 4. bölge $270^0 \leq x \leq 360^0$ arasındaki açıların oluşturduğu bölgeye denir. 4. bölgede alınan bir B açısı $B(\cos x, -\sin x)$ şeklindedir.



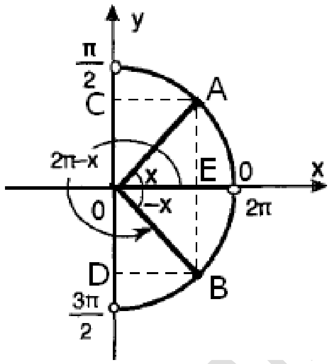
Şimdi 4. bölgedeki bir açıyı 1. bölgeye çevirerek değerini elde edelim.

2.9. Teorem: $0^0 \leq x \leq 90^0$ olmak üzere,

i) $\sin(360 - x) = -\sin x$
ii) $\cos(360 - x) = \cos x$
iii) $\tan(360 - x) = -\tan x$
iv) $\cot(360 - x) = -\cot x$
v) $\sec(360 - x) = \sec x$
vi) $\csc(360 - x) = -\csc x$

şeklindedir.

İspat: Verilere göre aşağıdaki şeklini çizelim.



i) $|AC| = |DB|$ ve $B(\cos x, -\sin x)$ olduğuna göre,

$$\cos(360 - x) = \cos x$$

dir.

ii) $|AE| = |BE|$ ve $B(\cos x, -\sin x)$ olduğuna göre,

$$-\sin(360 - x) = \sin x$$
$$\sin(360 - x) = -\sin x$$

dir.

iii) $\tan(360 - x) = \dfrac{\sin(360-x)}{\cos(360-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

iv, v, vi özellikleri iii gibi ispatlanır.

Örnek: sin 330, tan 315 ve csc 300 yi bulunuz.

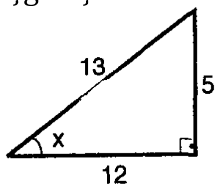
Çözüm: $\sin 330 = \sin(360 - 30) = -\sin 30 = -\dfrac{1}{2}$

$\tan 315 = \tan(360 - 45) = -\tan 45 = -1$

$\csc 300 = \csc(360 - 60) = -\csc 60 = -2$

Örnek: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ve $\cos x = \frac{12}{13}$ ise tan x in değeri nedir?

Çözüm: x, IV. Bölgede olduğundan kosünüs pozitif (+), kotanjant negatif (−) dir. Buna göre aşağıdaki üçgen çizilir.



Şu halde $\tan x = -\frac{5}{12}$ dir.

2.6. Sonuç: $0^0 \leq x \leq 90^0$ olmak üzere,

i) $\sin(270 + x) = -\cos x$
ii) $\cos(270 + x) = \sin x$
iii) $\tan(270 + x) = -\cot x$
iv) $\cot(270 + x) = -\tan x$
v) $\sec(270 + x) = \csc x$
vi) $\csc(270 + x) = -\sec x$

şeklindedir. //

Şimdi de önemli açıların değerlerini çizelim:

	$A = 0^0$	$A = 90^0$	$A = 180^0$	$A = 270^0$	$A = 360^0$
sin A	0	1	0	−1	0
cos A	1	0	−1	0	1
tan A	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
cot A	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
sec A	1	$\pm\infty$	−1	$\pm\infty$	1
csc A	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	−1	$\pm\infty$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Trigonometride, derecenin değerine göre trigonometrik değerler değişir. Buna göre oluşan değerlerden şu tanımlar yapılır.

2.11. Tanım:

a) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona sinüs fonksiyonu denir.

b) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona kosinüs fonksiyonu denir.

c) $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} - \mathbb{R}, f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona tanjant fonksiyonu denir.

d) $f : \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} - \mathbb{R}, f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona kotanjant fonksiyonu denir.

e) $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} - \mathbb{R}, f(x) = \sec x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona sekant fonksiyonu denir.

f) $f : \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} - \mathbb{R}, f(x) = \csc x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona kosekant fonksiyonu denir.

Örnek: $2m - \sin x + 1 = 0$ eşitliğinde m reel sayılarının alabileceği değer kümesi nedir?

Çözüm: $\sin x = 2m + 1$
denkleminde her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \sin x \le 1$ olduğundan,

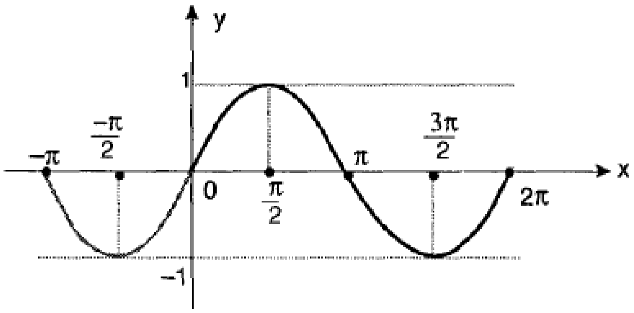
$$-1 \le 2m + 1 \le 1$$
$$-2 \le 2m \le 0$$
$$-1 \le m \le 0$$

bulunur.

TRİGOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

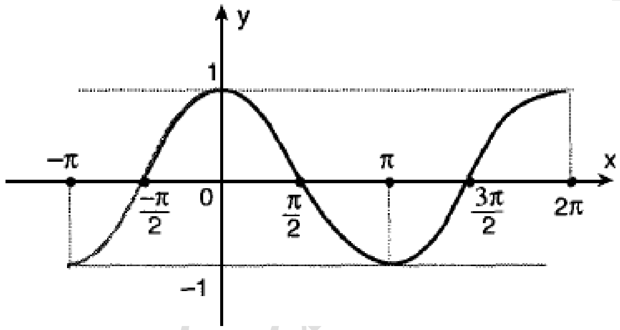
1. Sinüs fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sinx	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0



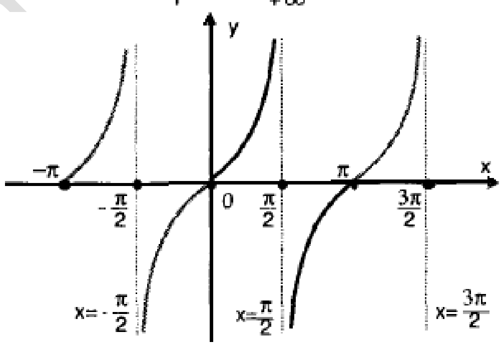
2. Kosünüs fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cosx	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



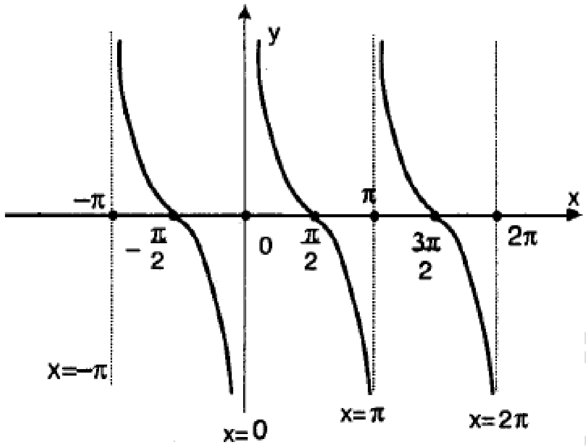
3. Tanjant fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
tanx	0	$\nearrow$	$\Vert$ $+\infty$ $-$	$\nearrow$	0



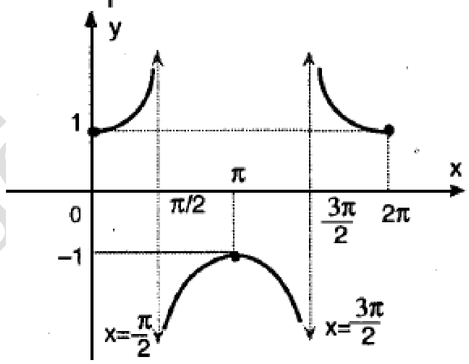
4. Kotanjant fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cot x$	$\parallel$ $\infty +$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\parallel$ $-\infty$



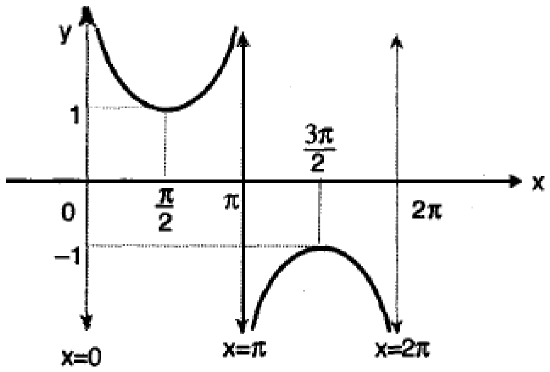
5. Sekant fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\frac{1}{\cos x}=\sec x$	1	$\nearrow$	$\parallel$ $+\infty -$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\parallel$ $-\infty +$	$\searrow$	1



6. Kosekant fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

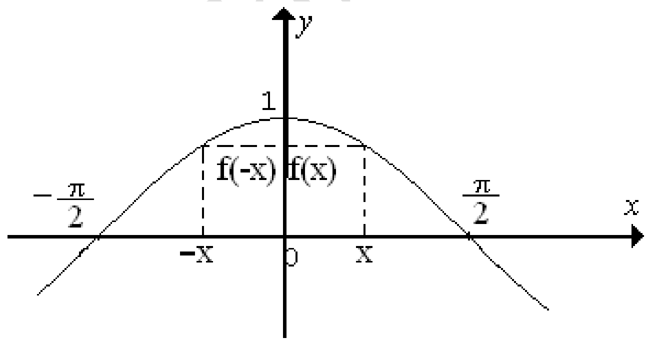
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x$	$\parallel$ $\infty +$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\parallel$ $+\infty -$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\parallel$ $-\infty$



TRİGONOMETDE TEK ve ÇİFT FONKSİYONLAR

2.10. Teorem: Her x için $\cos(-x) = \cos x$ olup kosünüs fonksiyonu çift fonksiyondur.

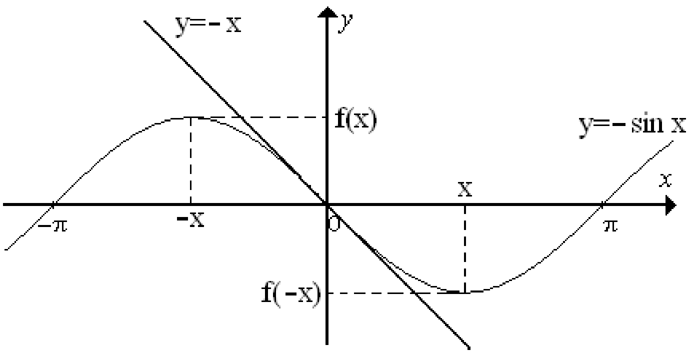
İspat: Fonksiyonların İrdelenmesi 10.11. teoremine göre bir f fonksiyonu çift fonksiyon ise f fonksiyonunun grafikleri $x = 0$ doğrusuna simetriktir. Şimdi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $f(x) = \cos x$ fonksiyonun grafiğini çizelim.



Grafikten de görüleceği gibi $f(-x) = f(x)$ olduğundan $\cos(-x) = \cos x$ olup kosünüs fonksiyonu çift fonksiyondur.

2.11. Teorem: Her x için $\sin(-x) = -\sin x$ olup sinüs fonksiyonu tek fonksiyondur.

İspat: Fonksiyonların İrdelenmesi 10.11. teoremine göre bir f fonksiyonu tek fonksiyon ise f fonksiyonunun grafikleri $y = -x$ doğrusuna simetriktir. Şimdi $[-\pi, \pi]$ aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonun grafiğini çizelim.



Grafikten de görüleceği gibi $f(-x) = -f(x)$ olduğundan $\sin(-x) = -\sin x$ olup sünüs fonksiyonu tek fonksiyondur.

2.7. Sonuç: Sekant fonksiyonu çift fonksiyon olup, tanjant, kotanjant ve kosekant fonksiyonları tek fonksiyonlardır.

Örnek: a) $\sin(-30)$
b) $\cos(-45)$
c) $\tan(-60)$
d) $\cot(-405)$

Çözüm: a) $\sin(-30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$
b) $\cos(-45) = \cos 45 =$
c) $\tan(-60) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$
d) $\cot(-405) = -\cot 405 = -\cot(45 + 360) = -\cot 45 = -1$

Örnek: $f(x) = \cos x + \tan x$ fonksiyonun tanımlı olduğu değerler için tek veya çift olduğunu araştırınız.

Çözüm: $f(-x) = \cos(-x) + \tan(-x) = \cos x - \tan x$ olur ki, bu bize f fonksiyonunun ne tek ne de çift olduğunu gösterir.

Örnek: $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon haline getiriniz.

Çözüm: $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ fonksiyonunda;
$g(x) = \sin|x|$
$h(x) = |\sin x|$

alalım ve parçalı olarak tanımlayalım. Buna göre $f(x) = g(x) + h(x)$ olur. Ayrıca sinüs fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan;

$$g(x) = \sin|x| = \begin{cases} \sin(-x), & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\sin x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$h(x) = |\sin x| = \begin{cases} -\sin x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = h(x) = \begin{cases} -2\sin x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 2\sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

elde edilir.

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Trigonometrik fonksiyonlar 1–1 ve örten değildir. 1–1 ve örten olmayan fonksiyonların tersi yoktur. Ama belirli aralıkta 1–1 ve örtendirler. Bu aralıkta terslerinden söz edilebilir.

2.12. Tanım:

a) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], y = \sin x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$$f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x = \arcsin y$$

biçimindedir. Bu yazıma sinüs fonksiyonun tersi, $x = \arcsin y$ ya da $x = \sin^{-1} y$ ile gösterilir.

b) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], y = \cos x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$$f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x = \arccos y$$

biçimindedir. Buna kosinüs fonksiyonun tersi $x = \arccos y$ ya da $x = \cos^{-1} y$ ile gösterilir.

c) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, y = \tan x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x = \arctan y$$

biçimindedir. Buna tanjant fonksiyonun tersi, $x = \arctan y$ ya da $x = \tan^{-1} y$ ile gösterilir.

d) $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}, y = \cot x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to [0, \pi], x = \operatorname{arccot} y$$

biçimindedir. Buna kotanjant fonksiyonun tersi, $x = \operatorname{arccot} y$ ya da $x = \cot^{-1} y$ ile gösterilir.

e) $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}, y = \sec x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$f^{-1}: \mathbb{R} \to [0, \pi], x = \operatorname{arcsec} y$

biçimindedir. Buna sekant fonksiyonun tersi $x = \operatorname{arcsec} y$ ya da $x = \sec^{-1} y$ ile gösterilir.

f) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, y = \csc x$

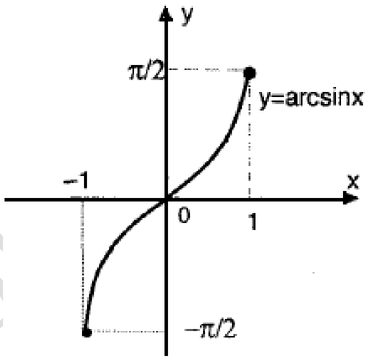
şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x = \operatorname{arccsc} y$

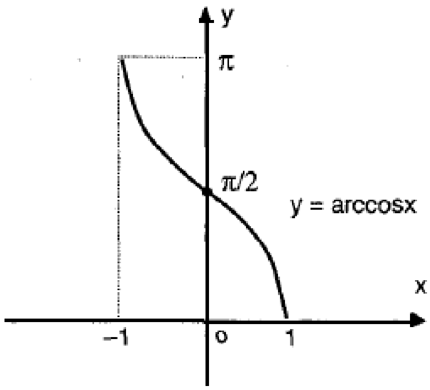
biçimindedir. Buna kosekent fonksiyonun tersi, $x = \operatorname{arccsc} y$ ya da $x = \csc^{-1} y$ ile gösterilir.

Şimdi tanımlanan bu ters fonksiyonların grafiklerini inceleyelim.

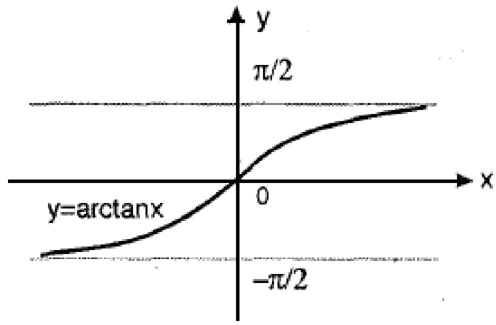
1. $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y = \arcsin x$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



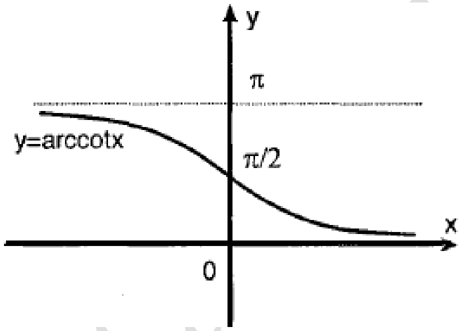
2. $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y = \arccos x$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



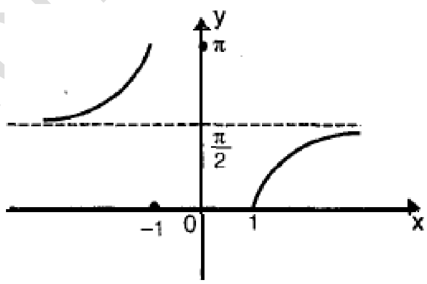
3. f: $\mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y = \arctan x$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



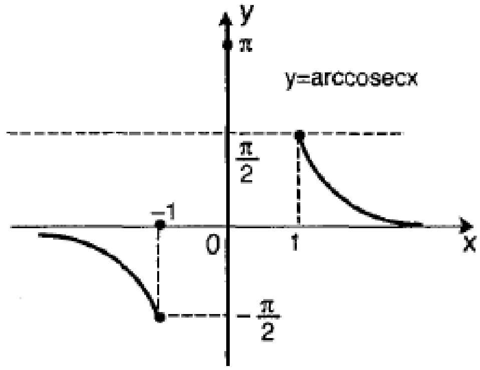
4. f: $\mathbb{R} \to [0, \pi]$, $y = \operatorname{arccot} x$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



5. f: $\mathbb{R} \to [0, \pi]$, $y = \operatorname{arcsec} x$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



6. f: $\mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y = \operatorname{arccsc} x$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Örnek: $\sin 30 = \frac{1}{2}$ ise $\arcsin\frac{1}{2} = 30^0$ dir.

Örnek: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ nin $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki değeri nedir?

Çözüm: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{x}$ ise $\cos \mathrm{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olup $\mathrm{x} = 30^0 = \frac{\pi}{6}$ dır.

Örnek: $A = \arccos\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ise A'nın değeri nedir?

Çözüm: $A = \arccos\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$A = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

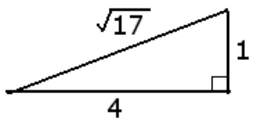
olduğundan kosünüs 1. ve 4. bölgelerde pozitif olup,

$$A = \frac{\pi}{4} \text{ ve } A = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

dir.

Örnek: $0 < \mathrm{x} < \frac{\pi}{2}$ ve $\operatorname{arccot} 4 = \mathrm{x}$ ise $\cos \mathrm{x}$ nedir?

Çözüm: $\operatorname{arccot} 4 = \mathrm{x}$ ise $\cot \mathrm{x} = 4$ olduğundan Pisagor teoreminden aşağıdaki şekil çizilir.



Şu halde $\cos x = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$ dir.

Örnek: $\sin\left(\pi - \arctan\sqrt{3}\right)$ ün değeri nedir?

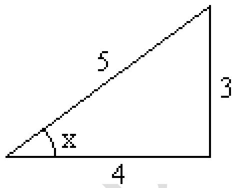
Çözüm: $\arctan\sqrt{3} = x$ seçilirse $\tan x = \sqrt{3}$ ise $x = 60^0$ bulunur. Bunu yerine yazarsak;

$$\sin\left(\pi - \arctan\sqrt{3}\right) = \sin(180 - 60) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

elde edilir.

Örnek: 1. bölgede $\tan\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm: $\arccos\frac{4}{5} = x$ seçilirse aşağıdaki şekil çizilir.



$$\tan\left(\arccos\frac{4}{5}\right) = \tan x = \frac{3}{4}$$

Örnek: $f(x) = \dfrac{x+2}{\arcsin x}$ fonksiyonun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $\arcsin x$ fonksiyonunun tanım kümesi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ idi. Verilen fonksiyonun en geniş tanım kümesi olması için $\arcsin x = 0$ olmalıdır. $\arcsin x = 0$ ise fonksiyonun tanımsız olacağı en geniş tanım kümesi

$$A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

olur.

Örnek: $f(x) = \sqrt{\arctan x}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözüm: $y = \sqrt{f(x)}$ şeklindeki fonksiyonlar $f(x) \geq 0$ için tanımlı olduğundan $\arctan x \geq 0$ olmalıdır.

$$x \geq 0 \text{ ise } 0 \leq \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

eşitsizliğinin her iki yanın tanjantını alırsak;

$$\tan 0 \leq \tan(\arctan x) < \tan\frac{\pi}{2}$$
$$0 \leq x < +\infty$$

olacağından en geniş tanım kümesi $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dir.

Örnek: arccot 1 ifadesi birinci bölgedeki değeri nedir?

Çözüm: $\operatorname{arccot} 1 = x$

$$\cot x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{4}$$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Trigonometri Oranları

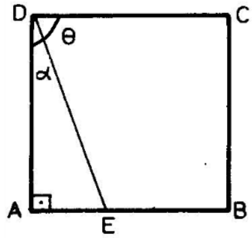
1. Birinci bölgede $\tan x = \frac{1}{5}$ ise $\cot x$ nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

Cevap: E

2. ABCD bir kare, $|DC| = 4|AE|$ olduğuna göre $\tan\theta$ kaçtır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

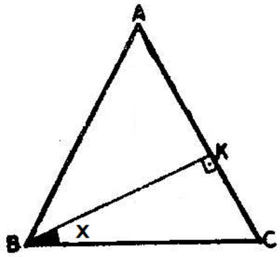
Çözüm: $\alpha + \theta = 90^0$ ise $\tan\theta = \cot\alpha$ dır. Ayrıca $|AE| = 1$ br ise $|DC| = |AD| = 4$ br dir.

$$\tan\theta = \cot\alpha = \frac{4}{1} = 4$$

olur.

Cevap: D

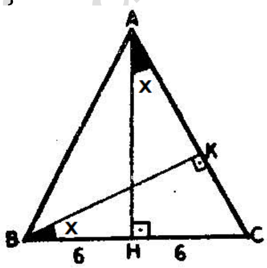
3.



ABC ikizkenar üçgen $|AB| = |AC| = 10$ cm, $|BC| = 5$ cm, $[BK] \perp [AC]$ olduğuna göre, cos x in değeri nedir?

A) 1 B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

Çözüm: $[AH] \perp [BC]$ yi çizelim.



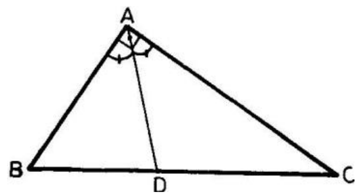
$A\overset{\Delta}{H}C \sim B\overset{\Delta}{K}C$ olduğundan $m(C\widehat{B}K) = m(C\widehat{A}H) = x$ dır. $|BH| = |HC| = 6$ cm dir. 3-4-5 üçgeninden $|AH| = |BK| = 8$ cm dir.

$$\cos x = \frac{|BK|}{|BC|} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

olur.

Cevap: B

4. $A\overset{\Delta}{B}C$ dik üçgen, $[AD]$ açıortaydır.



$\tan B = \frac{6}{5}$ ise $\frac{|BD|}{|DC|}$ oranı nedir?

A) 1 B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{3}{6}$ E) $\frac{3}{5}$

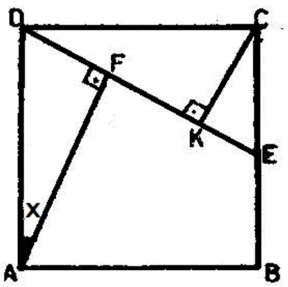
Çözüm: $\tan B = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{6}{5}$ olduğundan açıortay teoremine göre;

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{5}{6}$$

elde edilir.

Cevap: C

5. ABCD bir kare, $[AF] \perp [DE]$, $[CK] \perp [DE]$ dir.



$2|DF| = |DK|$, $m(D\widehat{A}F) = x$ olduğuna göre cot x in değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $m(D\widehat{A}F) = m(C\widehat{D}K) = x$ ise A.K.A. aksiyomu gereği

$D\overset{\Delta}{A}F \cong C\overset{\Delta}{D}K$ dır. $|AF| = |DK| = 2|DF|$ olur. $D\overset{\Delta}{A}F$ dik üçgeninde;

$$\cot x = \frac{|AF|}{|DF|} = \frac{3|DF|}{|DF|} = \frac{3}{1} = 3 \text{ br}$$

elde edilir.

Cevap: A

Trigonometrik Oranların Sonuçları

6. $\sec^2 18 - \cot^2 72$ değeri nedir?

A) 0 B) 1 C) sec 18 D) tan 18 E) cot 18

Çözüm: $\tan 18 = \cot 72$ ve $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ olduğunu hatırlayalım.

$$\sec^2 18 - \cot^2 72 = \sec^2 18 - \tan^2 18 = 1$$

Cevap: B

7. $\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$ in en sade hali nedir?

A) $\cot^2 x$ B) $\tan^2 x$ C) cot x D) tan x E) 1

Çözüm:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x$$

Cevap: A

8. $\dfrac{1+\tan 42 \cdot \tan 48}{\sin^2 28+\sin^2 62}$ işleminin en sade hali nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\tan 48 = \cot 42$ ve $\sin 62 = \cos 28$ dir.

$$\frac{1+\tan 42 \cdot \tan 48}{\sin^2 28+\sin^2 62} = \frac{1+\tan 42 \cdot \cot 42}{\sin^2 28+\cos^2 28} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Cevap: C

9. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \tan x$ eşiti nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) tan x E) sec x

Çözüm:

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} + \tan x = \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x+\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)}$$
$$= \frac{1}{\cos x}$$
$$= \sec x$$

Cevap: E

10. $\dfrac{\sin x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$ eşiti nedir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$ D) 1 E) 0

Çözüm:
$$\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = \frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Cevap: D

Bölge Değerleri

11. $\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6} \cdot \cot\frac{\pi}{6}$ işleminin sonucu nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:
$$\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6} \cdot \cot\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Cevap: A

12. $\tan\frac{5\pi}{4} + \cot\frac{5\pi}{4}$ işleminin sonucu nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:
$$\tan\frac{5\pi}{4} + \cot\frac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4}$$
$$= 2$$

Cevap: B

13. sin 230 un eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin 50$ B) $\sin 40$ C) $-\sin 40$ D) $-\cos 40$ E) $\cos 40$

Çözüm: $\sin 230 = \sin(180 + 50) = -\sin 50 = -\cos 40$

Cevap: D

14. $a = \sin 80, b = \sin 120\,, c = -\sin 220$ denkleminin sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $b < c < a$ B) $b < c < a$ C) $a < b < c$
D) $c < a < b$ E) $c < b < a$

Çözüm:
$\sin 120 = \sin(180 - 60) = \sin 60$
$-\sin 220 = -\sin(180 + 40) = \sin 40$
Ayrıca sinüsün fonksiyonu birinci bölgede artan olduğundan;
$\sin 40 < \sin 60 < \sin 80$
$c < b < a$
dir.

Cevap: E

15. tan 315 aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\tan 135$ B) $\tan 225$ C) $-\tan 45$ D) $\cot 225$ E) $\cot 45$

Çözüm: $\tan 315 = \tan(360 - 45) = -\tan 45 = -1$
A) $-\tan 135 = -\tan(180 - 45) = \tan 45 = 1$
B) $\tan 225 = \tan(180 + 45) = \tan 45 = 1$
C) $-\tan 45 = -1$
D) $\cot 225 = \cot(180 + 45) = \cot 45 = 1$
E) $\cot 45 = 1$

Cevap: C

16. $a = \sin 123, b = \sin 194\,, c = \sin 236$ denkleminin işaretleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $+, -, +$ B) $-, -, +$ C) $+, +, -$ D) $-, +, +$ E) $+, -, -$

Çözüm: $a = \sin 123 = +, b = \sin 194 = -, c = \sin 286 = -$

Cevap: E

17. $\dfrac{\cos 200 \cdot \sin 350}{\cos 80 \cdot \cos 20}$ ifadesinin en sade hali nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:

$$\frac{\cos 200 \cdot \sin 350}{\cos 80 \cdot \cos 20} = \frac{\cos(180+20) \cdot \sin(36-10)}{\sin 10 \cdot \cos 20}$$
$$= \frac{(-\cos 20) \cdot (-\sin 10)}{\sin 10 \cdot \cos 20}$$
$$= 1$$

Cevap: B

18. $\sin(12x - 60) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ eşitliğini sağlayan üçüncü bölgedeki en küçük x açısını nedir?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Çözüm: 3. bölgede x açısı 240^0 dir.

$$12x - 60 = 240$$
$$12x = 300$$
$$x = 25$$

olur.

Cevap: C

19. sin 2023 nin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) sin 47 B) cos 43 C) − cos 43 D) − sin 43 E) sin 43

Çözüm: 2023 derecenin esas ölçüsü;

$$2023 \equiv 223 \ (\mathrm{mod}\ 360)$$

dür. Buna göre;

$$\sin 2023 = \sin 223 = \sin(180 + 43) = -\sin 43$$

olur.

Cevap: D

20. tan 1485 nin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: 1485 derecenin esas ölçüsü;

$$1485 \equiv 45 \ (\mathrm{mod}\ 360)$$

dür. Buna göre;

$$\tan 1485 = \tan 45 = 1$$

olur.

Cevap: A

Trigonometrik Fonksiyonlar

21. $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $(-1 < x \leq 1)$ ise $(g^{-1} \circ f)(0)$ in değeri nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ için $f(0) = \frac{1}{0+1} = 1$ dir. Şimdi $(g^{-1} \circ f)(0) = g^{-1}(1)$ ifadesini bulalım.

$$g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$g^{-1}(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin x$$

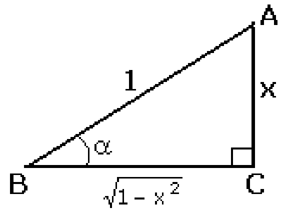
$$g^{-1}(1) = \frac{2}{\pi}\arcsin 1 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1$$

Cevap: B

22. tan (arcsin x) ifadesinin sonucu nedir?

A) tan x B) $\frac{1x}{\sqrt{1-x^2}}$ C) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ D) x E) cot x

Çözüm: $\arcsin x = \alpha$ olsun. Bu takdirde $\sin \alpha = x$ dir. Sinüs tanımından aşağıdaki şekil çizilir.



$$\tan(\arcsin x) = \tan\alpha = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

olur.

Cevap: C

23. $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$ biçiminde tanımlanan sinüs fonksiyonu hakkında hangisi söylenebilir?

A) 1-1 dir B) Tersi vardır C) Tek fonksiyondur
D) Örtendir E) $x = 0$ da simetriktir

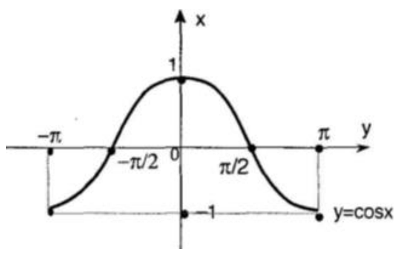
Çözüm: $y \in [-1,1]$ olmak üzere her y için $\exists\, x \in \mathbb{R}$ dir. Yani $[-1,1]$ aralığında seçilen her y için $\sin x = y$ olacak biçimde en az bir tane x reel sayısı vardır. Bu nedenle fonksiyon örtendir. (Diğer şıkların olmadığı okuyucuya bırakılmıştır.)

Cevap: D

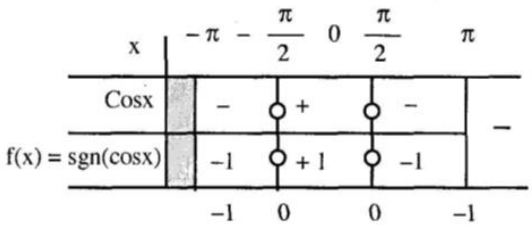
24. $f: [-\pi,\pi] \to [-1,1]$, $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ fonksiyonunun $+1$ olduğu bölge aşağıdakilerden hangisidir?

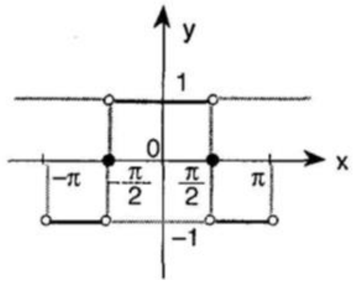
A) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ B) $-\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}$ C) $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}$
D) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ E) $-\pi < x < \pi$

Çözüm: İstenen bölgedeki kosinüs fonksiyonun grafiği aşağıdaki çizilmiştir.



Buna göre $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ fonksiyonunun tablosu ve grafiği aşağıdaki şekildedir.

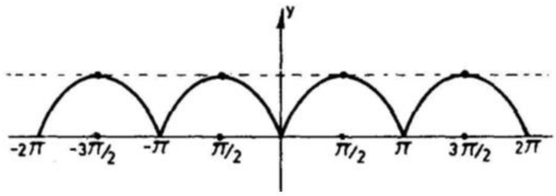




$$f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x) = \begin{cases} -1\,, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \text{ ve } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \\ 0\,, & x = -\frac{\pi}{2} \text{ ve } x = \frac{\pi}{2} \\ +1\,, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Cevap: A

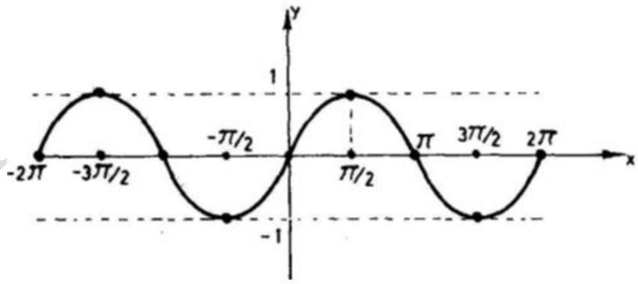
25.



Grafiği verilen fonksiyonun denklemi nedir?

A) $|\cos x|$ B) $|\tan x|$ C) $|\sec x|$ D) $|\cot x|$ E) $|\sin x|$

Çözüm: $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin x|$ fonksiyonun grafiği yukarıdaki şekildeki gibi olur.

Cevap: E

BİRİNCİ BÖLGENİN TRİGOMETRİ ÇETVELİ

derece	sin A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A	derece
00	0,0000	1,0000	0,0000	∞	1,0000	∞	**00**
01	0,0175	0,9998	0,0175	57,289	1,0002	57,298	**01**
02	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	1,0006	28,653	**02**
03	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	1,0014	19,120	**03**
04	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	1,0024	14,327	**04**
05	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	1,0038	11,468	**05**
06	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	1,0055	9,5693	**06**
07	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	1,0076	8,2034	**07**
08	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	1,0098	7,1839	**08**
09	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	1,0124	6,3938	**09**
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	1,0154	5,7604	**10**
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	1,0187	5,2411	**11**
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7047	1,0224	4,8100	**12**
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	1,0263	4,4444	**13**
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	1,0306	4,1339	**14**
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	1,0353	3,8639	**15**
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	1,0353	3,6284	**16**
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	1,0457	3,4199	**17**
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	1,0514	3,2362	**18**
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	1,0576	3,0712	**19**
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	1,0642	2,9239	**20**
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	1,0711	2,7902	**21**
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	1,0785	2,6695	**22**
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	1,0864	2,5595	**23**
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	1,0947	2,4588	**24**
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	1,1034	2,3663	**25**
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	1,1126	2,2810	**26**
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	1,1223	2,2026	**27**
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	1,1326	2,2026	**28**
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	1,1434	2,0627	**29**

30	0,5000	0,8660	0,5773	1,7321	1,1547	2,0000	**30**
31	0,5150	0,8572	0,6008	1,6643	1,1666	1,9417	**31**
32	0,5299	0,8480	0,6248	1,6643	1,1792	1,8871	**32**
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,6003	1,1923	1,8362	**33**
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,5399	1,2063	1,7883	**34**
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4826	1,2207	1,7434	**35**
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	1,2361	1,7013	**36**
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	1,2521	1,6617	**37**
38	0,6157	0,7880	0,7812	1,2799	1,2690	1,6241	**38**
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	1,2868	1,5891	**39**
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	1,3055	1,5557	**40**
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	1,3251	1,5242	**41**
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	1,3457	1,4945	**42**
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,0723	1,3672	1,4663	**43**
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	1,3902	1,4395	**44**
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	1,4142	1,4142	**45**
46	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657	1,4395	1,3902	**46**
47	0,7314	0,6820	1,0723	0,9325	1,4663	1,3672	**47**
48	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004	1,4945	1,3457	**48**
49	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693	1,5242	1,3251	**49**
50	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391	1,5557	1,3055	**50**
51	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098	1,5891	1,2868	**51**
52	0,7880	0,6157	1,2799	0,7812	1,6241	1,2690	**52**
53	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536	1,6617	1,2521	**53**
54	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265	1,7013	1,2361	**54**
55	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002	1,7434	1,2207	**55**
56	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745	1,7883	1,2063	**56**
57	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494	1,8362	1,1923	**57**
58	0,8480	0,5299	1,6003	0,6248	1,8871	1,1792	**58**
59	0,8572	0,5150	1,6643	0,6008	1,9417	1,1666	**59**
60	0,8660	0,5000	1,7321	0,5773	2,0000	1,1547	**60**
61	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543	2,0627	1,1434	**61**

62	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317	2,1299	1,1326	**62**
63	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095	2,2026	1,1223	**63**
64	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877	2,2810	1,1126	**64**
65	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663	2,3663	1,1034	**65**
66	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452	2,4588	1,0947	**66**
67	0,9205	0,3907	2,3559	0,4245	2,5595	1,0864	**67**
68	0,9279	0,3746	2,4751	0,4040	2,6695	1,0785	**68**
69	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839	2,7902	1,0711	**69**
70	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640	2,9239	1,0642	**70**
71	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443	3,0712	1,0576	**71**
72	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249	3,2362	1,0514	**72**
73	0,9563	0,2924	3,2709	0,3057	3,4199	1,0457	**73**
74	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867	3,6284	1,0353	**74**
75	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679	3,8639	1,0353	**75**
76	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493	4,1339	1,0306	**76**
77	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309	4,4444	1,0263	**77**
78	0,9781	0,2079	4,7047	0,2126	4,8100	1,0224	**78**
79	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944	5,2411	1,0187	**79**
80	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763	5,7604	1,0154	**80**
81	0,9877	0,1564	6,3138	0,1584	6,3938	1,0124	**81**
82	0,9903	0,1392	7,1154	0,1405	7,1839	1,0098	**82**
83	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228	8,2034	1,0076	**83**
84	0,9945	0,1045	9,5144	0,1051	9,5693	1,0055	**84**
85	0,9962	0,0872	11,430	0,0875	11,468	1,0038	**85**
86	0,9976	0,0698	14,301	0,0699	14,327	1,0024	**86**
87	0,9986	0,0523	19,081	0,0524	19,120	1,0014	**87**
88	0,9994	0,0349	28,636	0,0349	28,653	1,0006	**88**
89	0,9998	0,0175	57,289	0,0175	57,298	1,0002	**89**
90	1,0000	0,0000	∞	0,0000	∞	1,0000	**90**
derece	**sin A**	**cos A**	**tan A**	**cot A**	**sec A**	**csc A**	**derece**

MEŞHUR AÇILARIN TRİGOMETİK DEĞERLERİ

Derece	Radyan	sin A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A
0^0	0	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
15^0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
75^0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
105^0	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-2-\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}$	$-\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
120^0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
135^0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150^0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
165^0	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-2+\sqrt{3}$	$-2-\sqrt{3}$	$-\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
180^0	π	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$
195^0	$\frac{13\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$-\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$-\sqrt{6}-\sqrt{2}$
210^0	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
225^0	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240^0	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
255^0	$\frac{17\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$-\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$-\sqrt{6}+\sqrt{2}$
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	-1
285^0	$\frac{19\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-2-\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$-\sqrt{6}+\sqrt{2}$

300⁰	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
315⁰	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330⁰	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
345⁰	$\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-2+\sqrt{3}$	$-2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$-\sqrt{6}-\sqrt{2}$
360⁰	π	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Prof. Dr. Şehmus YARDIMCI Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2018, ANKARA.
8. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
9. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
10. George B. THOMAS, Thomas Calculus, Massachusetts Institute of Technology, University of California, Çeviri Recep Korkmaz, Beta, 2009, İstanbul.
11. Doç. Dr. Ali DÖNMEZ, Gerçel Analiz, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1985.
12. Prof. Dr. Necdet SAN, Analiz Dersleri, Baylan Matbaası, 1975, Ankara.
13. Prof. Dr. Rahim OCAK, Reel Analiz, Erzurum, 1998.
14. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
15. Yrd. Doç. Dr. Ersin Erol, Yüksek Matematiğe Giriş, Marmara Üniversitesi Yayınları, 1991, İstanbul.
16. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.