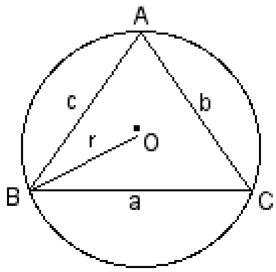
3. BÖLÜM
TRİGONOMETRİ DENKLEMLERİ

SİNÜS, KOSİNÜS ve TANJANT TEOREMLERİ

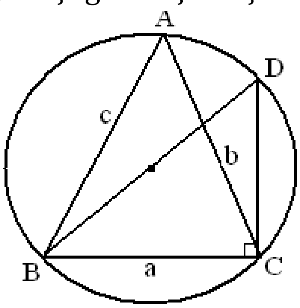
1. Sinüs Teoremi

3.1. Teorem: Bir üçgende her kenar, karşısındaki açının sinüsü ile doğru orantılıdır. Bu oranın değeri, o üçgenin çevrel çemberinin çapına eşittir.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

İspat: i) $m(\hat{A}) < 90^0$ ise aşağıdaki şekil çizilebilir.



$m(\hat{A}) = m(\hat{D})$, $m(B\hat{C}D) = 90$ ve $|BD|$ yarıçap olacağından,

BCD dik üçgeninde, $\sin D = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{a}{2r}$

dir. $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$ olduğundan

$$\sin A = \sin D = \frac{a}{2r}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2r$$

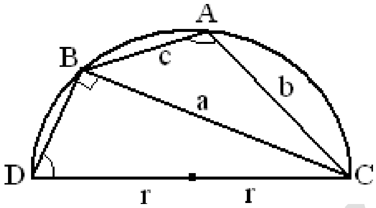
olur. A açısı için bulunduğumuz bu sonuç, B ve C açıları için de benzer biçimde bulunur.

$$\frac{b}{\sin B} = 2r \ \text{ ve } \frac{c}{\sin C} = 2r$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

olur.

ii) $m(\hat{A}) > 90^0$ ise aşağıdaki şekil çizilebilir.



Yağı gören çevre açı $m(D\hat{B}C) = 90^0$ ise,

$$\text{DBC dik üçgeninde, } \sin D = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{a}{2r}$$

dir. ABCD kirişler dörtgeni olduğundan $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180$ dir. Burada $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$ olduğundan

$$\sin A = \sin D = \frac{a}{2r}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2r$$

olur. A açısı için bulunduğumuz bu sonuç, B ve C açıları için de benzer biçimde bulunur.

$$\frac{b}{\sin B} = 2r \ \text{ ve } \frac{c}{\sin C} = 2r$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

olur.

Örnek: Bir çevrel çemberin yarıçapı 5 cm olan bir ABC üçgeninin de $|BC| = 5$ cm ise $m(\hat{A})$ açısını bulunuz.

Çözüm: $r = 5$ ve $|BC| = 5$ cm ise $\frac{5}{\sin A} = 10$

$$\sin A = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$m(\hat{A}) = 30^0$$

Örnek: Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 45^0$, $m(\widehat{B}) = 60^0$ ve $b = 5$ birim ise a kenarını bulunuz.

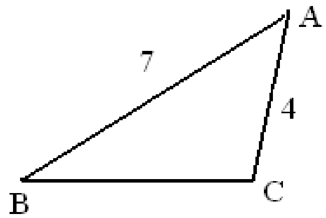
Çözüm: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

$$\frac{a}{\sin 45} = \frac{b}{\sin 60}$$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$a = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

Örnek:



$|AB| = 7$ cm , $|AC| = 4$ cm, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) - 90^0$ ise tan C nin değeri nedir?

Çözüm: $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$$\frac{7}{\sin(C-90)} = \frac{4}{\sin C}$$

$$\frac{7}{\cos C} = \frac{4}{\sin C}$$

$$\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{4}{7}$$

$$\tan C = \frac{4}{7}$$

3.2. Teorem: ABC bir dik üçgen ve $m(\widehat{A}) = 90^0$ ise,

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$$

dir.

İspat: Sünis teoremine göre,

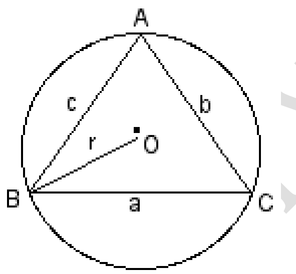
$$a = 2r \sin A, b = 2r \sin B, c = 2r \sin C$$

olacağından Pisagor teoremine göre,

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$4r^2 \sin^2 A = 4r^2 \sin^2 B + 4r^2 \sin^2 C$$
$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$$

elde edilir.

3.3. Teorem: Bir ABC üçgeninin çevrel çemberin yarıçapı r olmak üzere, ABC üçgeninin alanı;



$$A(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{abc}{4r}$$

dir.

İspat: Geometride üçgenin alan bulma formüllerinden biri,

$$A(ABC) = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

biçimindedir. Yine sinüs teoremi,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

olduğuna göre,

$$\sin C = \frac{c}{2r}$$

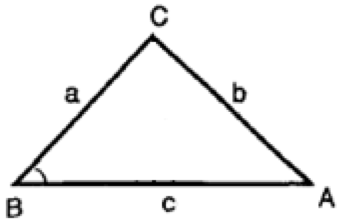
yazılır. Bu eşitlik alan denkleminde yerine yazılırsa,

$$A(ABC) = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{2r} = \frac{abc}{4r}$$

bulunur.

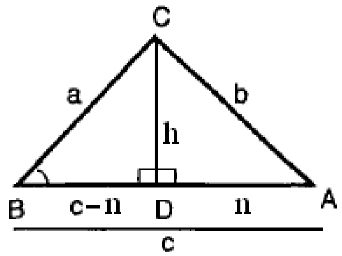
2. Kosünüs Teoremi

3.4. Teorem: Bir üçgende bir kenarın karesi, diğer iki kenarın kareleri toplamından, bu iki kenar ile bu kenarlar arasındaki açının kosinüsü çarpımının iki katı eksiğine eşittir.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos C$$

İspat: i) $m(\widehat{A}) < 90^0$ ise aşağıdaki şekil çizilebilir.



Pisagor teoremine göre,

$$a^2 = (c-n)^2 + h^2, b^2 = n^2 + h^2$$

dir. Bu iki eşitlikten,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn \qquad (1)$$

bulunur. CAD üçgeninde

$$\cos A = \frac{n}{b} \text{ ise } n = b\cos A \qquad (2)$$

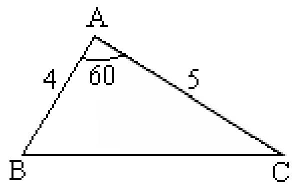
dir. (2) eşitliğini (1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

elde edilir.

ii) $m(\widehat{A}) > 90^0$ durumunun ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: ABC üçgenin de $m(\widehat{A}) = 60^0$, $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm ise;



$|BC|$ uzunluğunu bulunuz.

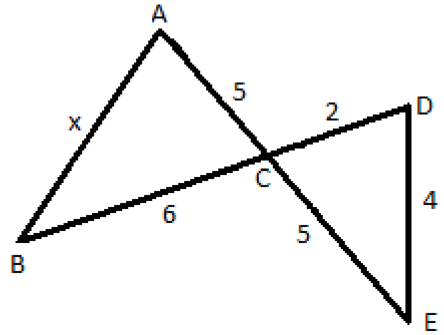
Çözüm: $|BD| = a$ denirse, $\cos 60 = \frac{1}{2}$ olduğundan

$$a^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos 60 = 21$$

$$a = \sqrt{21}$$

dir.

Örnek: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $|AC| = 5$ cm, $|BC| = 6$ cm ve $\overset{\Delta}{DCE}$ üçgeninde $|DC| = 2$ cm, $|CE| = 5$ cm, $|DE| = 4$ cm ise $|AB|$ kaç cm'dir?



Çözüm: $\overset{\Delta}{DCE}$ üçgenine cosünüs teoremini uygularsak,

$4^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cos \alpha$ eşitliğinden $\cos \alpha = \frac{13}{20}$

bulunur. Bunu $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenine uygularsak,

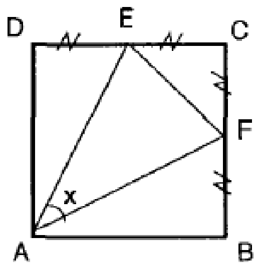
$$x^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos \alpha$$

$$x^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{13}{20}$$

$$x = \sqrt{22} \text{ cm}$$

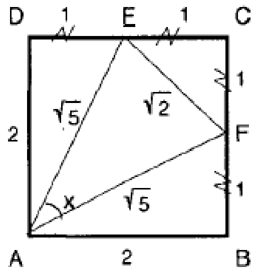
elde edilir.

Örnek: Şekilde verilen ABCD karesinde; E, F orta noktalardır.



cos x in değerini bulunuz.

Çözüm: Verilere göre bir kenarı 2 birim olsun. Buna göre şekilde aşağıdaki değerler bulunur.



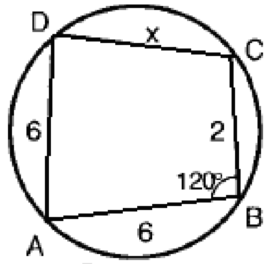
Buna göre AEF'de kosinüs teoremi uygulanırsa;

$$\sqrt{2}^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cos \alpha$$

$$\cos x = \frac{4}{5}$$

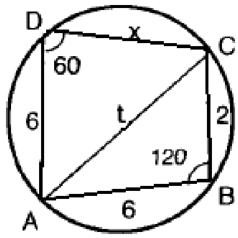
olarak bulunur.

Örnek: ABCD kirişler dörtgeninde; $|AB| = |AD| = 6$ cm, $|BC| = 2$ cm, $m(A\widehat{B}C) = 120^0$ dir.



$|DC| = x$ kaç cm'dir?

Çözüm: $|AC|$ köşegenini çizelim. Ayrıca kirişler dörtgeninde karşılıklı açılar bütünler olacağından $m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180^0$ ise $m(\widehat{D}) = 60^0$ olur.



Buna göre ABC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned} t^2 &= 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \cos 120 \\ &= 40 - 24\,(-\cos 60) \\ &= 40 + 24\ \cdot \cos 60 \\ &= 40 + 24 \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ACD üçgenine kosinüs teoremi uygulanırsa

$$t^2 = 6^2 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \cos 60$$
$$52 = 36 + x^2 - 12 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$
$$x^2 - 6x + 16 = 0$$
$$x_1 = 8 \text{ ve } x_2 = -2$$

dir.

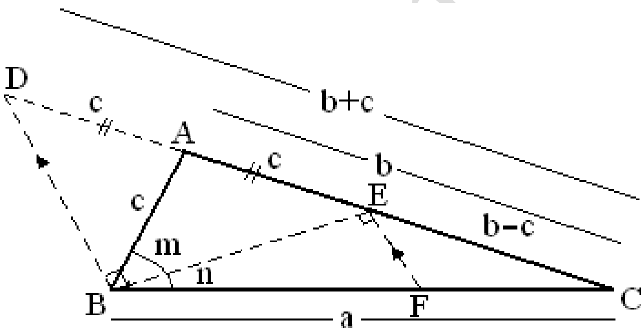
3. Tanjant Teoremi

3.5. Teorem: Bir üçgende iki kenar toplamının, bu kenarlar farkına oranı, bu kenarlar karşısındaki açıların, yarıları toplamı tanjantının, bu açıların yarıları farkı tanjantına oranına eşittir.

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

dir.

İspat:



ABC üçgeninde, $a > b > c$ olsun. $|AB| = |AD| = |AE| = c$ alalım. Buradan EBD dik üçgen olur. Yani, $m(E\hat{B}D) = 90^0$ dir. $|BD| = |EF|$ çizersek $m(B\hat{E}F) = 90^0$ olur.

$$m(E\hat{B}A) = m(A\hat{E}B) = m \text{ ve } m(C\hat{B}E) = n$$

olsun. BEC üçgeninde $m = n + \hat{C}$ bulunur. Ayrıca $m + n = \hat{B}$ ise,

$$m = \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} \text{ ve } n = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$$

bulunur. DEC dik üçgeninde,

$$\tan\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} = \frac{|BD|}{|BE|}$$

ve BEF dik üçgeninde,

$$\tan\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = \frac{|EF|}{|BE|}$$

dir. Elde edilen iki eşitliği taraf tarafa bölelim.

$$\frac{\tan\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}}{\tan\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}} = \frac{\frac{|BD|}{|BE|}}{\frac{|EF|}{|BE|}} = \frac{|BD|}{|EF|}$$

olur. $\overset{\Delta}{DBC} \sim \overset{\Delta}{EFC}$ olduğundan $\frac{|BD|}{|EF|} = \frac{|CD|}{|CE|}$ dir. O halde,

$$\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}} = \frac{b+c}{b-c}$$

elde edilir.

Örnek: Bir ABC üçgeninde $\frac{b+c}{b-c} = \sqrt{3}$ ve $m(\widehat{A}) = 90^0$ ise B açısının ölçüsü kaç derecededir?

Çözüm: $m(\widehat{A}) = 90^0$ ise $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90^0$ dir. Tanjant teoremine göre,

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}} = \frac{\tan 45}{\tan\frac{B-C}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

olur. Buna göre $m(\widehat{B}) - m(\widehat{C}) = 60^0$ bulunur. Bu iki denklem çözülürse $m(\widehat{B}) = 75^0, m(\widehat{C}) = 15^0$ olur.

Örnek: ABC üçgende $|AB| = 3$ cm, $m(\widehat{B}) = 105^0$, $m(\widehat{C}) = 15^0$ ise $|AC| = b$ nin değeri nedir?

Çözüm: $\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2} = \frac{105+15}{2} = 60^0$ ve $\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2} = \frac{105-15}{2} = 45^0$

ABC üçgeninde tanjant teoreminde yazılırsa,

$$\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}} = \frac{b+c}{b-c}$$

$$\frac{\tan 60}{\tan 45} = \frac{b+3}{b-3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{b+3}{b-3}$$

$$b=6+3\sqrt{3}$$

bulunur.

TRİGONOMETRİK TOPLAM ve FARK FORMÜLLERİ

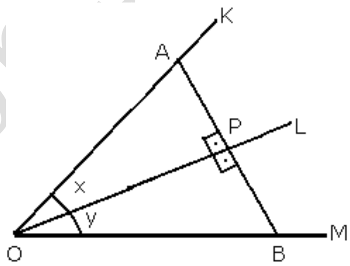
Augustin Louis Cauchy
21 Ağustos 1789, Paris, Fransa - 23 Mayıs 1857, Scaux, Frans

3.6. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x$$

dir.

İspat:



[OL üzerinde alınan P noktasından [OL 'ye AB dikmesini çizelim. Geometride üçgenin alan bulma formüllerine göre,

$$A(O\overset{\Delta}{A}B)=A(O\overset{\Delta}{A}P)+A(O\overset{\Delta}{B}P)$$

$$\frac{1}{2}|OA||OB|\sin(x+y)=\frac{1}{2}|OA||OP|\sin x+\frac{1}{2}|OB||OP|\sin y$$

$$|OA||OB|\sin(x+y)=|OA||OP|\sin x+|OB||OP|\sin y$$

eşitliğin her iki tarafı $|OA||OB|$ çarpımına bölünürse,

$$\sin(x+y) = \frac{|OP|}{|OB|}\sin x + \frac{|OP|}{|OA|}\sin y \qquad (1)$$

bulunur. Burada $\cos y = \frac{|OP|}{|OB|}$ ve $\cos x = \frac{|OP|}{|OA|}$ olduğundan (1) eşitliği,

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

şeklindedir.

3.1. Sonuç: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

dir.

Örnek: $\sin 48 \cdot \cos 42 + \sin 42 \cdot \cos 48$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm: $\sin 48 \cdot \cos 42 + \sin 42 \cdot \cos 48 = \sin(48+42) = 1$

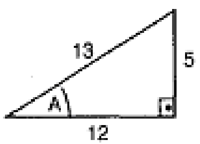
Örnek: $\sin 105$ in değerlerini 45^0 ve 60^0 derecelerin sinüs ve kosinüs değerlerini kullanarak bulunuz.

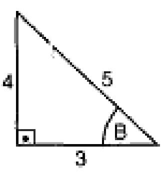
Çözüm:
$$\begin{aligned}\sin 105 &= \sin(60+45)\\ &= \sin 60 \cdot \cos 45 + \cos 60 \cdot \sin 45\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Örnek: $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{4}{5}\right) = x$ ise x kaçtır?

Çözüm: $\arcsin\frac{5}{13} = m$ ve $\arcsin\frac{4}{5} = n$

$\sin m = \frac{5}{13}$ ve $\sin n = \frac{4}{5}$





$\cos m = \frac{12}{13}$ ve $\cos n = \frac{3}{5}$

$\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{4}{5}\right) = \sin(m+n)$

$$= \sin m \cdot \cos n + \cos m \cdot \sin n$$
$$= \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5}$$
$$= \frac{63}{65}$$

3.7. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin y \cdot \sin x$$
dir.

İspat: $a + b = \frac{\pi}{2}$ olduğunda $\sin a = \cos b$ ve $\cos(-a) = \cos a$, $\sin(-a) = -\sin a$ olduğundan 3.6. teorem gereği;

$$\cos(x+y) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (x+y)\right]$$
$$= \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right]$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(-y) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(-y)$$
$$= \cos x \cdot \cos y - \sin y \cdot \sin x$$

bulunur.

3.2. Sonuç: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için
$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin y \cdot \sin x$$
dir.

Örnek: $\cos 52 \cdot \cos 68 - \sin 52 \cdot \sin 68$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:
$$\cos 52 \cdot \cos 68 - \sin 52 \cdot \sin 68 = \cos(52+68)$$
$$= \cos 120 \quad , \quad \text{(2. bölge olduğundan)}$$
$$= \cos(180-60)$$
$$= \cos 60$$
$$= -\frac{1}{2}$$

Örnek: $\cos 15$ in 30^0 ve 45^0 derecelerin sinüs ve kosinüs değerlerini kullanarak bulunuz.

Çözüm: $\cos 15 = \cos(45-30)$
$$= \cos 45 \cdot \cos 30 + \sin 45 \cdot \sin 30$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

3.8. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

dir.

İspat: $\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$

$$= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

$$= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

3.3. Sonuç: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

dir.

Örnek: $\tan 75$ in değerini $\tan 45$ ve $\tan 30$ kullanarak bulunuz.

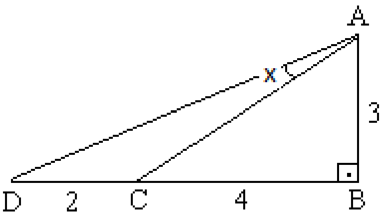
Çözüm: $\tan 75 = \tan(45+30)$

$$= \frac{\tan 45 + \tan 30}{1 - \tan 45 \tan 30}$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

Örnek: $|AB| = 3$ cm, $|DC| = 2$ cm, $|CB| = 4$ cm, $m(D\widehat{A}C) = x$ olduğuna göre, $\tan x$'in değerini bulunuz.



Çözüm: $m(D\widehat{A}C) = x$, $m(C\widehat{A}B) = y$ ve $m(D\widehat{A}B) = z$ kabul edilirse,

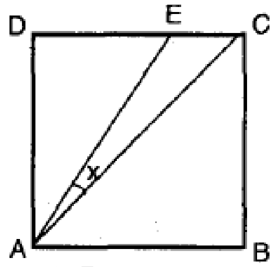
$$\tan y = \frac{4}{3} \text{ ve } \tan z = \frac{6}{3} = 2$$

bulunur. $x = z - y$ olduğundan

$$\tan x = \tan(z-y) = \frac{\tan z - \tan y}{1 + \tan z \cdot \tan y} = \frac{2-\frac{4}{3}}{1+2\cdot\frac{4}{3}} = \frac{2}{11}$$

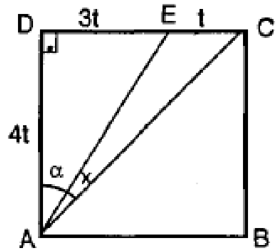
bulunur.

Örnek: ABCD karesi aşağıdaki biçiminde ve $|EC| = \frac{|DC|}{4}$ şartını sağlayan olsun.



Bu takdirde $\tan x$'in değeri nedir?

Çözüm: $|DC| = |AD| = 4t$ ise $|EC| = t$ dir. Buna göre ABCD karesi,



biçiminde olur. Şu halde $\alpha + x = 45^0$ olacağından,

$$\tan(\alpha + x) = 1$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan x}{1 - \tan\alpha \cdot \tan x} = 1$$

$$\frac{\frac{3t}{4t}+\tan x}{1-\frac{3t}{4t}\cdot\tan x} = 1$$

$$\frac{3}{4} + \tan x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \tan x$$

$$3 + 4\tan x = 4 - 3\tan x$$

$$\tan x = \frac{1}{7}$$

bulunur.

3.9. Teorem: Her x,y ∈ ℝ için

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$$

dir.

İspat: $\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}$

$$= \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$$

$$= \frac{\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} - \frac{\sin x \sin y}{\sin x \sin y}}{\frac{\sin x \cos y}{\sin x \sin y} + \frac{\cos x \sin y}{\sin x \sin y}}$$

$$= \frac{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\cos y}{\sin y} - 1}{\frac{\cos y}{\sin y} + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$$

3.4. Sonuç: Her x, y ∈ ℝ için

$$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{-\cot x + \cot y}$$

dir.

Örnek: $\cot(-15)$ in değerini $\cot 30$ ve $\cot 45$ kullanarak bulunuz.

Çözüm: $\cot(-15) = \cot(30 - 45)$

$$= \frac{\cot 30 \cot 45 + 1}{-\cot 30 + \cot 45}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot 1+1}{1-\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{1-3}$$
$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$
$$= -2-\sqrt{3}$$

TRİGONOMETRİK YARIM AÇI FORMÜLLERİ

3.10. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

a) $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

c) $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

d) $\cot 2x = \frac{(\cot^2 x)-1}{2\cot x}$

dir.

İspat: a) 3.6. teoreminde $x = y$ alınırsa,

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$
$$\sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x$$
$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

bulunur.

b) 3.7. teoreminde $x = y$ alınırsa,

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin y \cdot \sin x$$
$$\cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

bulunur.

c) 3.8. teoreminde $x = y$ alınırsa,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$
$$\tan(x+x) = \frac{\tan x+\tan x}{1-\tan x\tan x}$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

bulunur.

d) 3.9. teoreminde $x = y$ alınırsa,

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x\cdot\cot y-1}{\cot x+\cot y}$$

$$\cot(x+x) = \frac{\cot x \cdot \cot x - 1}{\cot x + \cot x}$$
$$\cot 2x = \frac{(\cot^2 x) - 1}{2\cot x}$$

bulunur.

Örnek: $2 \cdot \sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8}$ ifadesinin sonucu nedir?

Çözüm: 1. özellik gereğince,

$$2 \cdot \sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8} = \sin 2\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bulunur.

Örnek: $(\cos 15 - \sin 15)(\cos 15 + \sin 15)$ ifadesinin sonucu nedir?

Çözüm: İki kare farkı ve 2. özellik gereğince;

$$\begin{aligned}(\cos 15 - \sin 15)(\cos 15 + \sin 15) &= \cos^2 15 - \sin^2 15 \\ &= \cos(2 \cdot 15) \\ &= \cos 30 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $\sin 40 = m$ ise $\sin 10 \cdot \sin 80 \cdot \sin 70$ ifadesinin değeri m türünden nedir?

Çözüm: $\sin 80 = \cos 10$ ve $\sin 70 = \cos 20$

$$\begin{aligned}\sin 10 \cdot \sin 80 \cdot \sin 70 &= \sin 10 \cdot \cos 10 \cdot \sin 70 \\ &= \frac{1}{2}\sin 20 \cdot \sin 70 \\ &= \frac{1}{2}\sin 20 \cdot \cos 70 \\ &= \frac{1}{4}\sin 40 \\ &= \frac{m}{4}\end{aligned}$$

Örnek: $\dfrac{\sin 108}{\sin 24} - \dfrac{\sin 18}{\cos 24}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\sin 108 = \sin(180-72) = \sin 72 = \cos 18$ ve $\cos 42 = \sin 48$

$$\frac{\sin 108}{\sin 24} - \frac{\sin 18}{\cos 24} = \frac{\cos 18}{\sin 24} - \frac{\sin 18}{\cos 24}$$
$$= \frac{\cos 18 \cdot \cos 24 - \sin 18 \cdot \sin 24}{\sin 24 \cdot \cos 24}$$
$$= \frac{\cos(18+24)}{\frac{1}{2}\sin 2 \cdot 24}$$
$$= \frac{2\cos 42}{\sin 48}$$
$$= \frac{2\cos 42}{\cos 42}$$
$$= 2$$

Örnek: tan 22,5 un değerini bulunuz.

Çözüm: Bu teoremin c. özelliği gereğince,

$\tan 45 = \tan 2 \cdot 22{,}5 = \dfrac{2\tan 22{,}5}{1-\tan^2 22{,}5}$

oluşur. Burada $\tan 45 = 1$ unutmayalım ve $\tan 22{,}5 = x$ seçilirse

$$1 = \frac{2x}{1-x^2}$$
$$1 - x^2 = 2x$$
$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{2} \text{ ve } x_2 = -1 - \sqrt{2}$$

bulunur. Yalnız burada $\tan 22{,}5 > 0$ olduğundan $\tan 22{,}5 = 1 + \sqrt{2}$ dir.

Örnek: $\sin 15 + \cos 15$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\sin 15 + \cos 15 = x$ seçilirse her iki tarafın karesi alınabilir.

$$x^2 = \sin^2 15 + 2\sin 15 \cos 15 + \cos^2 15$$
$$x^2 = 1 + \sin 2 \cdot 15$$
$$x^2 = 1 + \sin 30$$
$$x^2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$x^2 = \frac{3}{2}$$
$$x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

3.5. Sonuç:
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

TRİGONOMETRİK İNDİRGEME FORMÜLLERİ

3.11. Teorem: a) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

b) $\cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

İspat: 2.2. Sonuçta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ olduğu verilmiştir. Yine 3.10. Teoreme göre $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ olduğunu bilinmektedir. Buna göre,

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ise $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ olduğuna göre,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

dir.

b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ise $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ olduğuna göre,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

dir.

Örnek: $\cos^4 x$ in değerini 1. dereceden kosünüs olarak bulunuz.

Çözüm: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 \\ &= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}}{4} \\ &= \frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8} \end{aligned}$$

elde edilir.

TRİGONOMETRİK DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ

3.12. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

a) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

b) $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

dir.

İspat: 3.6. Teorem ve 3.4. Sonuca göre,

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

eşitlikleri taraf tarafa bir defa toplar ve bir defa çıkarırsak,

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cdot \cos b$$
$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \cdot \sin b$$

bulunur. Burada,

$$a+b = x \text{ ve } a-b = y$$

alınırsa,

$$a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{x-y}{2}$$

elde edilir. Elde edilen bu değerler yerine yazarsak,

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

bulunur.

3.13. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

a) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

b) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

dir.

İspat: 3.7. Teorem ve 3.5. Sonuca göre,

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

eşitlikleri taraf tarafa bir defa toplar ve bir defa çıkarırsak,

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cdot \cos b$$
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \cdot \sin b$$

bulunur. Burada,

$$a+b = x \text{ ve } a-b = y$$

alınırsa,

$$a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{x-y}{2}$$

elde edilir. Elde edilen bu değerler yerine yazarsak,

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

bulunur.

Örnek: $\dfrac{\sin 75-\sin 15}{\sin 75+\sin 15}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm: $\dfrac{\sin 75-\sin 15}{\sin 75+\sin 15} = \dfrac{2\sin\frac{75-15}{2}\cos\frac{75+15}{2}}{2\sin\frac{75+15}{2}\cos\frac{75-15}{2}}$

$$= \frac{\sin 30\cos 45}{\sin 45\cos 30}$$
$$= \tan 30$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Örnek: $\dfrac{\cos 6+\cos 18+\cos 30}{\sin 6+\sin 18+\sin 30}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{\cos 6+\cos 18+\cos 30}{\sin 6+\sin 18+\sin 30} = \frac{(\cos 6+\cos 30)+\cos 18}{(\sin 6+\sin 30)+\sin 18}$$
$$= \frac{\left(2\cos\frac{30+6}{2}\cos\frac{30-6}{2}\right)+\cos 18}{\left(2\sin\frac{30+6}{2}\cos\frac{30-6}{2}\right)+\sin 18}$$
$$= \frac{(2\cos 18\cos 12)+\cos 18}{(2\sin 18\cos 12)+\sin 18}$$
$$= \frac{\cos 18(1+2\cos 12)}{\sin 18(1+2\cos 12)}$$
$$= \cot 18$$

Örnek: $\dfrac{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}{\cos 0+\cos 2x+\cos 4x}$ kesrinin en sade hali nedir?

Çözüm:

$$\frac{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}{\cos 0+\cos 2x+\cos 4x} = \frac{(\sin 6x+\sin 2x)+\sin 4x}{1+\cos 2x+\cos 4x}$$
$$= \frac{2\sin\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2}+\sin 4x}{1+\cos 2x+\cos 4x}$$

$$= \frac{2\sin 4x\cos 2x+\sin 4x}{1+\cos 2x+2\cos^2 2x-1}$$
$$= \frac{\sin 4x(2\cos 2x+1)}{\cos 2x(1+2\cos 2x)}$$
$$= \frac{2\sin 2x\ \cos 2x}{\cos 2x}$$
$$= 2\sin 2x$$

Örnek: $\frac{\cos 5x+\cos 3x}{\sin 5x-\sin 3x}$ ifadesinin $x = \frac{\pi}{4}$ için değeri nedir?

Çözüm: $\frac{\cos 5x+\cos 3x}{\sin 5x-\sin 3x} = \frac{2\cos\frac{5x+3x}{2}\ \cos\frac{5x-3x}{2}}{2\sin\frac{5x-3x}{2}\ \cos\frac{5x+3x}{2}}$
$$= \frac{\cos 4x\ \cos x}{\sin x\ \cos 4x}$$
$$= \cot x$$
$$= \cot\frac{\pi}{4}$$
$$= 1$$

TERS TRİGONOMETRİK DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ

3.14. Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

a) $\sin x\ \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \cos(x-y)]$

b) $\cos x\ \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

c) $\sin x\ \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

dir.

İspat: a) 3.6. Teorem ve 3.4. Sonuca göre,
$$\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \sin x\cdot\cos y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \sin x\cdot\cos y$$
eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,
$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cdot\cos y$$
$$\sin x\ \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \cos(x-y)]$$
bulunur.

b) 3.7. Teorem ve 3.5. Sonuca göre,
$$\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y$$

$$\cos x \ \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

bulunur.

c) 3.7. Teorem ve 3.5. Sonuca göre,

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \cdot \sin y$$

$$\sin x \ \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

bulunur.

Örnek: $\frac{\cos 65 \cdot \cos 25}{\cos 40}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{\cos 65 \cdot \cos 25}{\cos 40} = \frac{\frac{1}{2}[\cos(65+25)+\cos(65-25)]}{\cos 40}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{[\cos 90+\cos 40]}{\cos 40}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Örnek: $\sin a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ olduğuna göre $\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+a+\frac{\pi}{4}-a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+a-\frac{\pi}{4}+a\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} + \cos 2a\right]$$

$$= \frac{1}{2}[1 - 2\sin^2 a]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{3}{10}$$

Örnek: $\sin 20 \cdot \sin 40 + \frac{1}{2}\cos 20$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sin 20 \cdot \sin 40 &= \frac{1}{2}[\cos(40+20) - \cos(40-20)]\\ &= \frac{1}{2}[\cos 60 - \cos 20]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \cos 20\right]\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 20\end{aligned}$$

işlemini denklemde yazarsak,

$$\sin 20 \cdot \sin 40 + \frac{1}{2}\cos 20 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 20 + \frac{1}{2}\cos 20 = \frac{1}{4}$$

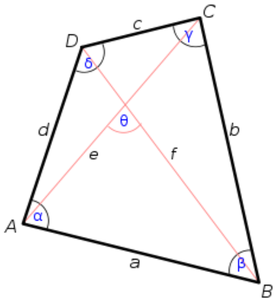
bulunur.

BRETSCHNEİDER FORMÜLÜ

Carl Anton Bretschneider

27 Mayıs 1808, Schneeberg, Almanya- 06 Kasım 1878, Gotha, Almanya

7.15. Teorem: Bir çeşitkenar dörtgenin alanı, kenar uzunlukları a, b, c, d ve çevresi $2u = a + b + c + d$ olmak üzere,



$$A(ABCD) = \sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

dir.

İspat: ABD ve BCD üçgenleri için $A(ABCD) = \frac{ad \sin \alpha}{2} + \frac{bc \sin \gamma}{2}$ olduğu alanlardan gözükür. $A(ABCD) = A$ olarak yazalım;

$$2 \cdot A = ad \sin \alpha + bc \sin \gamma$$
$$4 \cdot A^2 = (ad)^2 \sin^2 \alpha + (bc)^2 \sin^2 \gamma + 2abcd \sin \alpha \sin \gamma$$

bulunur. Ayrıca ABD ve BCD üçgenlerine kosinüs teoremi uygulanırsa;

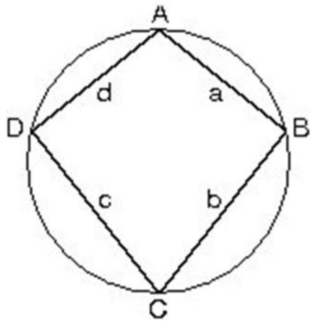
$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$$
$$\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} = (ad)^2 \cos^2 \alpha + (bc)^2 \cos \gamma - 2abcd \cos \alpha \cos \gamma$$
$$4 \cdot A^2 + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} = (ad)^2 \sin^2 \alpha + (bc)^2 \sin^2 \gamma +$$
$$+2abcd \sin \alpha \sin \gamma + (ad)^2 \cos^2 \alpha + (bc)^2 \cos \gamma - 2abcd \cos \alpha \cos \gamma$$
$$\begin{aligned} 4 \cdot A^2 + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} &= (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) \\ &= (ad + bc)^2 - 2abcd - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) \\ &= (ad + bc)^2 - 2abcd\,[1 + \cos(\alpha + \gamma)] \\ &= (ad + bc)^2 - 4abcd \left(\frac{1+\cos(\alpha+\gamma)}{2}\right) \\ &= (ad + bc)^2 - 4abcd \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada şu düzenleme yaparsak;

$$16 \cdot A^2 = 16(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d) - \\ -16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$
$$A^2 = (u - a)(u - b)(u - c)(u - d) - 4abcd \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$
$$A(ABCD) = \sqrt{(u - a)(u - b)(u - c)(u - d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

bulunur.

3.6. Sonuç: Bir teğetler dörtgenin alanı, kenar uzunlukları a, b, c, d ve çevresi $2u = a + b + c + d$ olmak üzere,



$$A(ABCD) = \sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}$$

dir.

TİRİGONOMETRİK PERYOT ve PERİYODİK FONKSİYONLAR

3.13. Tanım: f(x) fonksiyonun tanım kümesindeki her x elemanı için

$$f(x) = f(x+T)$$

eşitliğini sağlayan pozitif T reel sayılardan en küçüğüne f(x) in periyodu denir. f(x) fonksiyonu ise periyodik fonksiyon adını alır. $n \in \mathbb{N}$ için,

i) $f(x) = \sin(x + 2n\pi)$ in periyodu $T = 2\pi$
$f(x) = \cos(x + 2n\pi)$ in periyodu $T = 2\pi$
$f(x) = \tan(x + n\pi)$ in periyodu $T = \pi$
$f(x) = \cot(x + n\pi)$ in periyodu $T = \pi$

dir.

ii) $f(x) = \sin^n(ax \pm b)$ ve $g(x) = \cos^n(ax \pm b)$ fonksiyonlarının periyodu,

n tek sayı ise $T = \frac{2\pi}{a}$
n çift sayı ise $T = \frac{\pi}{a}$

dir.

iii) $f(x) = \tan^2(ax \pm b)$ ve $g(x) = \cot^2(ax \pm b)$ fonksiyonlarının periyodu $T = \frac{\pi}{a}$ dir.

iv) $f(x) \pm g(x)$ fonksiyonunun periyodu f(x) ile g(x) in periyotlarının ortak katlarının en küçüğüne eşittir.

v) $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonlarında periyot bulunurken önce $f(x) \pm g(x)$ e dönüştürülür, sonra iv. madde uygulanır.

Örnek: a) $\sin(x+4\pi) = \sin x$ denkleminin periyodu $T = 2\pi$
b) $\cos(x+6\pi) = \cos x$ denkleminin periyodu $T = 2\pi$
c) $\tan(x+3\pi) = \tan x$ denkleminin periyodu $T = \pi$
d) $\cot(x+12\pi) = \cot x$ denkleminin periyodu $T = \pi$

Örnek: $f(x) = \sin^3(4x+3)$ fonksiyonunun periyodu nedir?

Çözüm: $n = 3$ olup tek sayı olduğundan periyodu,

$$T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

dir.

Örnek: $f(x) = \cos^4\left(\frac{3x}{2}+1\right)$ fonksiyonunun periyodu nedir?

Çözüm: $n = 4$ olup çift sayı olduğundan periyodu,

$$T = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

dir.

Örnek: $f(x) = \sin^2(2x+5) + \cos^3(3x-4)$ fonksiyonun periyodunu bulunuz.

Çözüm:
$\sin^2(2x+5)$ de $n = 2$ olup çift sayı olduğundan periyodu, $T = \frac{\pi}{2}$
$\cos^3(3x-4)$ de $n = 3$ olup tek sayı olduğundan periyodu, $T = \frac{2\pi}{3}$

$$\text{OKEK}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) = \text{OKEK}\left(\frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}\right) = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$$

Örnek: $f(x) = 3\cos^2(5\pi x+9) + 12$ fonksiyonun periyodu nedir?

Çözüm: $n = 2$ çift sayı olduğundan periyodu $T = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{5\pi} = \frac{1}{5}$

Örnek: $h(x) = \sin(8\pi x) + \cos(6\pi x + 8)$ fonksiyonun periyodu nedir?

Çözüm:

$\sin(8\pi x)$ tek kuvvet olduğundan periyodu $T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$

$\cos(6\pi x + 8)$ tek kuvvet olduğundan periyodu $T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$

$$\text{OKEK}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) = \text{OKEK}\left(\frac{3}{12}, \frac{4}{12}\right) = \frac{12}{12} = 1$$

Örnek: $f(x) = \sin^3 3x + \cos 5x + \sin\frac{3x}{2}$ fonksiyonunun periyodu nedir?

Çözüm:

$\sin^3 3x$ ifadesinde $n = 2$ çift olup periyodu $T = \frac{\pi}{3}$

$\cos 5x$ ifadesinde $n = 1$ tek olup periyodu $T = \frac{2\pi}{5}$

$\sin\frac{3x}{2}$ ifadesinde $n = 1$ tek olup periyodu $T = \frac{4\pi}{3}$

$$\text{OKEK}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{3}\right) = \text{OKEK}\left(\frac{5\pi}{15}, \frac{6\pi}{15}, \frac{20\pi}{15}\right) = \frac{60\pi}{15} = 4\pi$$

Örnek: $f(x) = \cos 7x \cdot \cos 3x$ fonksiyonunun periyodu nedir?

Çözüm: 3.14. teorem b şıkkı gereği,

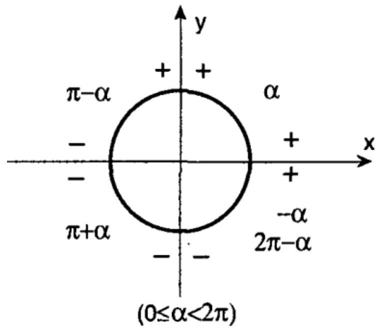
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 7x \cdot \cos 3x \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(7x + 3x) + \cos(7x - 3x)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos 10x + \cos 4x\right] \end{aligned}$$

$\cos 10x$ ifadesinde $n = 1$ tek olup periyodu $T = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

$\cos 4x$ ifadesinde $n = 1$ tek olup periyodu $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$\text{OKEK}\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right) = \text{OKEK}\left(\frac{2\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}\right) = \frac{10\pi}{10} = \pi$$

TRİGONOMETRİK DENKLEM ÇÖZME



1. sin x = sin α Denklerinin Çözümü: $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ve $x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$,

$\sin x = -\sin\alpha \Leftrightarrow x = (\pi + \alpha) + 2k\pi$ ve $x = (2\pi - \alpha) + 2k\pi$
dir.

Örnek: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: 1. bölgede sinüsü $\frac{\sqrt{3}}{2}$ olan açı $60^0 = \frac{\pi}{3}$ dır.

$\sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ve $x = (\pi - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$

$Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \wedge x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
elde edilir.

Örnek: $\sin x = -\frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: 1. bölgede sinüsü $\frac{1}{2}$ olan açı $30^0 = \frac{\pi}{6}$ dır.

$$\sin x = -\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ veya } x = (2\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ veya } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$Ç = \left\{x : x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \wedge x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
elde edilir.

Örnek: $\sin 3x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $2x + \frac{\pi}{3}$ açısını α olarak alalım.

$$\sin 3x = \sin\alpha \Leftrightarrow 3x = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ve } 3x = (\pi - 2x - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ve } 5x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ve } x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi$$

$$Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \wedge \ x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$
elde edilir.

Örnek: $\sin^2 x + 6\sin x + 9 = 0$ denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığındaki çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $\sin x = t$ olsun. Bu takdirde denklem,
$$t^2 + 6t + 9 = 0$$
şekline dönüşür. Bu denklem çözülürse $t = -3$ olarak bulunur. Şu halde
$$\sin x = -3$$
dir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \sin x \le 1$ olduğundan çözüm kümesi $Ç = \varnothing$ dir.

Örnek: $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $\sin x = t$ olsun. Bu takdirde denklem,
$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$
$$(2t - 1)(t - 3) = 0$$
şekline dönüşür. Bu denklem çözülürse $t = \frac{1}{2}$ ve $t = 3$ olarak bulunur. Şu halde;

$\sin x = \frac{1}{2}$ ve $\sin x = 3$;

$\sin x = 3$ denkleminin çözüm kümesi $Ç = \varnothing$,

$\sin x = \frac{1}{2}$ için $Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \wedge \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

dir.

2. $\cos x = \cos\alpha$ Denklerinin Çözümü: $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ve } x = (2\pi - \alpha) + 2k\pi,$$

$$\cos x = -\cos\alpha \Leftrightarrow x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \text{ ve } x = (\pi + \alpha) + 2k\pi$$

dir.

Örnek: $\cos x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: π'nin tek katlarında kosünüs –1 olduğundan $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ dir. Buna göre,

$$Ç = \{x : x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

Örnek: $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $\sin x = t$ olsun. Bu takdirde denklem,

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$
$$(2t-1)(t-3) = 0$$

şekline dönüşür. Bu denklem çözülürse $t = \frac{1}{2}$ ve $t = 3$ olarak bulunur. Şu halde

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ve } \cos x = 3;$$

$\cos x = 3$ denkleminin çözüm kümesi $Ç = \varnothing$,

$\cos x = \frac{1}{2}$ için $Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \wedge x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

dir.

Örnek: $\cos 2x = \sin\frac{\pi}{8}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ olduğundan

$$\sin\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{3\pi}{8}$$

olur. Buna göre,

$$\cos 2x = \cos\frac{3\pi}{8}$$
$$2x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \text{ ve } 2x = \left(2\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + 2k\pi$$
$$x = \frac{3\pi}{16} + k\pi \text{ ve } x = \frac{13\pi}{16} + k\pi$$

$$Ç = \left\{x : x = \frac{3\pi}{16} + k\pi \ \wedge \ x = \frac{13\pi}{16} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

elde edilir.

Örnek: $2\cos 2x + \sin x + 3 = 0$ denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığındaki çözüm kümesi nedir?

Çözüm: Yarım açı formülünden

$$2\cos 2x + \sin x + 3 = 0$$
$$2(1 - 2\sin^2 x) + \sin x + 3 = 0$$
$$2 - 4\sin^2 x + \sin x + 3 = 0$$
$$4\sin^2 x - \sin x - 5 = 0$$

olur. $\sin x = t$ alınırsa,

$$4t^2 - t - 5 = 0$$

denklemi çözülürse,

$$t_1 = \frac{5}{4} \text{ ve } t_2 = -1$$
$$\sin x = \frac{5}{4} \text{ ve } \sin x = -1$$
$$Ç = \varnothing \text{ ve } x = 270^0$$

bulunur.

3. $\tan x = \tan \alpha$ ve $\cot x = \cot \alpha$ Denklerinin Çözümü: $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{l} \tan x = \tan \alpha \\ \cot x = \cot \alpha \end{array}\right\} \text{ ise } x = \alpha + k\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan x = -\tan \alpha \\ \cot x = -\cot \alpha \end{array}\right\} \text{ ise } x = (\pi - \alpha) + k\pi$$

dir.

Örnek: $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

elde edilir.

Örnek: $\tan 3x \cdot \cot\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ olduğunu hatırlarsak,

$$\tan 3x \cdot \frac{1}{\tan\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)} = 1$$

$$\tan 3x = \tan\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$4x - \frac{\pi}{3} = 3x + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

elde edilir.

Örnek: $\tan 4x = -\sqrt{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\tan 4x = -\tan\frac{\pi}{3}$

$$4x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + k\pi$$

$$4x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}$$

$$Ç = \left\{x : \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{4},\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

elde edilir.

4. $\mathbf{a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c}$ Denklerinin Çözümü: $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

Bu grup eşitliklerde her iki yanı a ile bölünerek

$$\cos x + \frac{b}{a} \cdot \sin x = \frac{c}{a}$$

biçimine çevrilir. Sonra $\frac{b}{a}$ sayısını $\tan \alpha$ türünden

$$\cos x + \tan \alpha \cdot \sin x = \frac{c}{a}$$

biçiminde yazılır. Son olarak bu denklem çözülmeye çalışılır.

Örnek: $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = \sqrt{6}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = \sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cos x + \frac{3}{\sqrt{3}}\sin x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$
$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$$

olur. $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ olduğundan

$$\cos x + \tan\frac{\pi}{3}\sin x = \sqrt{2}$$
$$\cos x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin x = \sqrt{2}$$
$$\frac{\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\sin x}{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$
$$x-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi \text{ ve } x-\frac{\pi}{3} = 2\pi-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$
$$x = \frac{7\pi}{12}+k\cdot 2\pi \text{ ve } x = \frac{25\pi}{12}+k\cdot 2\pi\,,\quad \left(\frac{25\pi}{12} = \frac{\pi}{12}\right)$$

$$Ç = \left\{x : x = \frac{7\pi}{12}+k\cdot 2\pi \;\wedge\; x = \frac{\pi}{12}+k\cdot 2\pi,\; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

elde edilir.

Örnek: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ denkleminin 1. bölgedeki kökünü bulunuz.

Çözüm: $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ olduğundan

$$\sin x + \tan\frac{\pi}{3}\cos x = \sqrt{2}$$
$$\sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x = \sqrt{2}$$
$$\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x}{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$$
$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

dir.

5. Diğer Denklerinin Çözümü:

Örnek: $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığında kaç kökü vardır?

Çözüm: $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$ olduğundan

$$1 - \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$
$$\sin^2 x - \sin x = 0$$
$$\sin x\,(\sin x - 1) = 0$$
$$\sin x = 0 \ \wedge \ \sin x = 1$$
$$\sin x = 0 \ \text{ ise } x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$$
$$\sin x = 1 \ \text{ ise } x_4 = \frac{\pi}{2}$$

bulunup 4 kökü vardır.

Örnek: $\sin^3 x - \frac{1}{16}\sin x = 0$ denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığında kaç kökü vardır?

Çözüm: $\sin x\left(\sin^2 x - \frac{1}{16}\right) = 0$

$$\sin x = 0 \wedge \sin x = \frac{1}{4} \ \wedge \ \sin x = -\frac{1}{4}$$

i) $\sin x = 0$ ise $x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$ olup 3 kök vardır,

ii) $\sin x = \frac{1}{4}$ ise 1. ve 2. bölgeden birer kök olup 2 kök vardır,

iii) $\sin x = -\frac{1}{4}$ ise 3. ve 4. bölgeden birer kök olup 2 kök vardır,

Buna göre $[0, 2\pi]$ aralığında toplam 7 kök vardır.

TRİGOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

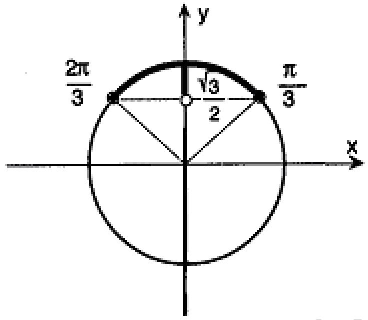
Trigonometrik eşitsizlikler, trigonometrik denklemlerin eşitsizliği olduğundan eşitsizlik mantığı ile çözülür.

Örnek: $2\sin x-\sqrt{3}\geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: sin x yalnız bırakılırsa,

$$\sin x\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin kökleri $x=\frac{\pi}{3}\ \wedge\ x=\frac{2\pi}{3}$ dir. Buna göre,



$$Ç=\left\{x+k\cdot 2\pi:\frac{\pi}{3}\leq x\leq \frac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

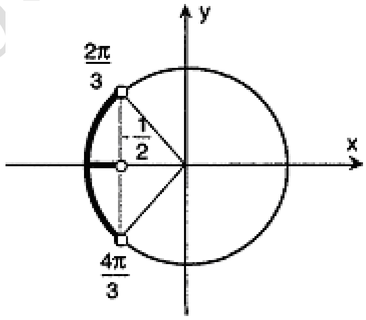
çözüm kümesi olur.

Örnek: $2\cos x+1<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: cos x yalnız bırakılırsa,

$$\cos x<-\frac{1}{2}$$

bulunur. $\cos x=-\frac{1}{2}$ denkleminin kökleri $x=\frac{2\pi}{3}\ \wedge\ x=\frac{4\pi}{3}$ dir. Buna göre,



$$Ç=\left\{x+k\cdot 2\pi:\frac{2\pi}{3}\leq x\leq \frac{4\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

çözüm kümesi olur.

Örnek: $0<x<\pi$ olmak üzere $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

Çözüm: $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) > 0$

$$-\frac{\pi}{2} < x-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2} < x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$$

olur. $0 < x < \pi$ olduğundan $0 < x < \frac{5\pi}{6}$ olmalıdır. Buna göre

$$Ç = \left\{x + k\cdot 2\pi : 0 < x < \frac{5\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

çözüm kümesi olur.

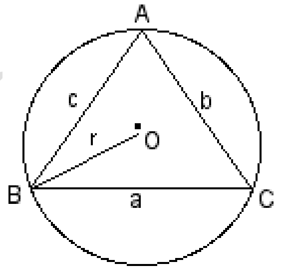
ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Sinüs, Kosinüs ve Tanjant Teoremleri

1. $m(\widehat{A}) = 30^0$ olan bir üçgende a kenarı 10 cm'dir. Çevrel çemberin çapı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 24 E) 25

Çözüm: r, çevrel çemberin yarıçağı, R çapını göstermek üzere sinüs teoremi gereğince,

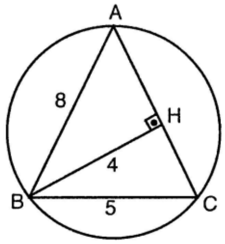


$$\frac{a}{\sin A} = 2r = R$$
$$R = \frac{10}{\sin 30}$$
$$R = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20\text{ cm}$$

dir.

Cevap: A

2.



ABC bir üçgen

[BH] ⊥ [AC]

|AB| = 8 cm

|BC| = 5 cm

|BH| = 4 cm

Yukarıdaki verilere göre, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı kaç cm'dir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Çevrel çemberin yarıçapı R olsun.

$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{8 \cdot 5 \cdot |AC|}{4R}$$

ve

$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{4 \cdot |AC|}{2}$$

dir. Bu iki eşitlikten;

$$\frac{8 \cdot 5 \cdot |AC|}{4R} = \frac{4 \cdot |AC|}{2}$$

$$R = 5 \text{ cm}$$

bulunur.

Cevap: A

3. Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde bir kenar $a = \sqrt{3}r$ (r çevrel çemberin çapı) ise Bu kenarın açısı $\hat{A}$ kaç derece olabilir?

A) 30 B) 37 C) 45 D) 53 E) 60

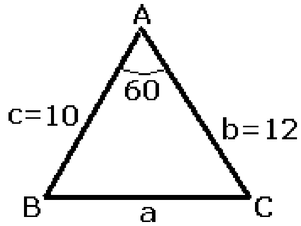
Çözüm: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$ olduğundan $\frac{\sqrt{3}r}{\sin A} = 2r$ olup $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dir. Buna göre $\hat{A} = 60^0$ olur.

Cevap: E

4. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $m(\hat{A}) = 60^0$, $b = 12$ cm, $c = 10$ cm ise, a kenarı $\sqrt{31}$ in kaç katıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Verilere göre aşağıdaki şekil çizilir.



Kosünüs teoremi gereğince,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$a^2 = 12^2 + 10^2 - 2\cdot 12\cdot 10\cos 60$$
$$a^2 = 144 + 100 - 2\cdot 120\,(1/2)$$
$$a^2 = 124$$
$$a = 2\sqrt{31}$$

dir.

Cevap: B

5. Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin kenarları arasında $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ bağıntısı varsa $\widehat{A}$ açısı kaç derecedir?

A) 90 B) 120 C) 135 D) 150 E) 180

Çözüm: Kosinüs teoreminden;

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 + bc$$
$$-2\cos A = 1$$
$$\cos A = -\frac{1}{2}$$
$$\widehat{A} = 120^0$$

bulunur.

Cevap: B

Toplam, Fark ve Yarım Açı Formülleri

6. Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninde $\widehat{B} = 45^0$ ise $\cos A\cos C - \sin A\sin C$ değeri nedir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm: $\cos A \cos C - \sin A \sin C = \cos(A+C)$ dir. $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^0$ olduğundan $\hat{A}+\hat{C} = 135^0$ dir. Buna göre;

$$\cos(A+C) = \cos 135 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

dir.

Cevap: C

7. $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ ise $\sin 2x$ değeri nedir?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm: Her iki tarafın karesini alalım.

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} = 2\sin x \cos x$$

$$\frac{1}{2} = \sin 2x$$

olur.

Cevap: D

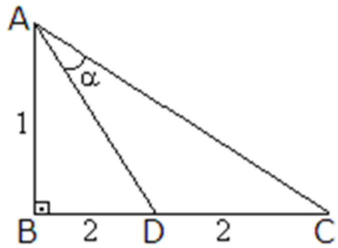
8. $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ve $0 < x < 90^0$ ise, $\cos 2x$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

Cevap: A

9.



Verilen şekle göre $\tan\alpha$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{2}{9}$

Çözüm: $m(B\widehat{A}D) = \beta$ olsun. $\tan\beta = \frac{2}{1} = 2$ ve $\tan(\alpha+\beta) = \frac{4}{1} = 4$ dir. Buna göre $\tan\alpha = a$ seçilirse,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$4 = \frac{\tan\alpha+2}{1-2\tan\alpha}$$

$$4 - 8\tan\alpha = \tan\alpha + 2$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{9}$$

bulunur.

Cevap: E

10. $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$ ise $\cos^3 x - \sin^3 x$ değeri nedir?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) 1

Çözüm: Her iki tarafın karesini alalım.

$$\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x\cos x = \frac{1}{2}$$

$$1 - \sin x\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x\cos x + \sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}$$

Cevap: D

11. Bir ABC üçgeninde $\tan B = 3$, $\tan C = 2$ ise A açısı kaç derecedir?

A) 30 B) 45 C) 53 D) 60 E) 90

Çözüm: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$ olduğundan $\tan(B + C) = -\tan A$ dır.

$\tan(B + C) = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = \frac{3+2}{1-3 \cdot 2} = -1$

$\tan A = 1$

$\widehat{A} = 45^0$

Cevap: B

12. $\cos 2x = p$ ise $\sin^2 x$ nedir?

A) $-p$ B) 0 C) p D) $\frac{1-p}{2}$ E) $\frac{1+p}{2}$

Çözüm: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$p = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1-p}{2}$

Cevap: D

13. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\tan x = \frac{4}{3}$ ise $\tan\frac{x}{2}$ nin değeri nedir?

A) -1 B) -2 C) 1 D) 2 E) 0

Çözüm: $\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$

$\frac{4}{3} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2}$

$4 - 4\tan^2\frac{x}{2} = 6\tan\frac{x}{2}$

$2\tan^2\frac{x}{2} + 3\tan\frac{x}{2} - 2 = 0$

$\tan\frac{x}{2} = \frac{-3 \mp \sqrt{9+4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \mp 5}{4}$

$\tan\frac{x}{2} = -2 \wedge \tan\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

Cevap: B

14. $\left(\frac{\cos 80 \cos 50+\sin 80 \sin 50}{\sin 18 \cos 12+\cos 18 \sin 12}\right)^2$ işleminin sonucu nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$\left(\frac{\cos 80 \cos 50+\sin 80 \sin 50}{\sin 18 \cos 12+\cos 18 \sin 12}\right)^2 = \left(\frac{\cos(80-50)}{\sin(18+12)}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\cos 30}{\sin 30}\right)^2$$
$$= (\cot 30)^2$$
$$= \left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$= 3$$

Cevap: C

15. $\frac{2\ \sin 75 \cos 75}{\sin^2 30-\cos^2 30}$ kesrinin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$\frac{2\ \sin 75 \cos 75}{\sin^2 30-\cos^2 30} = \frac{2 \sin 75 \cos 75}{-(\cos^2 30-\sin^2 30)}$$
$$= \frac{\sin 150}{-\cos 30}$$
$$= \frac{\sin(180-30)}{-\cos 60}$$
$$= \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1$$

Cevap: A

Dönüşüm ve Ters Dönüşüm Formülleri

16. $\cos 35 + \cos 85$ nin değeri nedir?

A) $\sin 25$ B) $\cos 20$ C) $\cos 20$ D) $-\cos 25$ E) $\cos 25$

Çözüm: Kösinüs çift fonksiyon olduğunu hatırlayalım. Dönüşüm teoremleri gereği;

$$\cos 35 + \cos 85 = 2\cos\left(\frac{35+85}{2}\right)\cos\left(\frac{35-85}{2}\right)$$
$$= 2\cos 60 \cos(-25)$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(-25)$$
$$= \cos 25$$

olur.

Cevap: E

17. $\sin 110 - \sin 50 - \sin 10$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\sin 10 = \cos 80$ olduğunu hatırlarsak;

$$\sin 110 - \sin 50 - \sin 10 = 2\sin\left(\frac{110-50}{2}\right)\cos\left(\frac{110+50}{2}\right) - \sin 10$$
$$= 2\sin 30 \cos 80 - \sin 10$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\cos 80 - \cos 80$$
$$= 0$$

bulunur.

Cevap: A

18. $10x = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\frac{\cos 4x - \cos 8x}{\cos 4x \cos 8x}$ ifadesi nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $6x + 4x = \frac{\pi}{2}$ ve $\sin 6x = \cos 4x$

$2x + 8x = \frac{\pi}{2}$ ve $\sin 2x = \cos 8x$

olmak üzere;

$$\frac{\cos 4x - \cos 8x}{\cos 4x \cos 8x} = \frac{-2\sin 6x \sin(-2x)}{\cos 4x \cos 8x}$$
$$= \frac{2\sin 6x \sin 2x}{\cos 4x \cos 8x}$$
$$= 2$$

olur.

Cevap: C

19. $\cos 80 \cdot \cos 20 + \frac{1}{2}\sin 20$ ifadesinin en sade biçimi nedir?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm: Ters dönüşüm formüllünü uygularsak;

$$\begin{aligned}\cos 80 \cdot \cos 20 + \tfrac{1}{2}\sin 20 &= \tfrac{1}{2}[\cos(80+20)+\cos(80-20)] + \tfrac{1}{2}\cos 80\\ &= \frac{1}{2}[\cos 100 + \cos 60] + \frac{1}{2}\cos 80\\ &= \frac{1}{2}\left[-\cos 80 + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\cos 80\\ &= -\frac{1}{2}\cos 80 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 80\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

bulunur.

Cevap: E

Trigonometrik Denklemler

20. $2\sin x - 1 = 0$ denkleminin çözüm elemanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir.

A) 0 B) 30 C) 37 D) 45 E) 53

Çözüm: $2\sin x - 1 = 0$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ve } x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Cevap: B

21. $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$ denklemininin bir özel kökü nedir?

A) 75 B) 90 C) 105 D) 120 E) 135

Çözüm: $\cos x = t$ olsun.

$2t^2 + 5t + 2 = 0$ ise $t_{1,2} = \frac{-5\mp\sqrt{25-16}}{2\cdot 2}$

$t_1 = -\frac{1}{2}$ için $\cos x = -\frac{1}{2}$ ise $x = 120^0$

$t_2 = -2$ için $\cos x = -2$ ise $x = \varnothing$

Cevap: D

22. $0 \leq x \leq 360^0$ olmak üzere $4\sin^2 x = 3$ denkleminin çözüm kümesi elemanlarından biri değildir?

A) 60 B) 120 C) 210 D) 240 E) 300

Çözüm: $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = 60^0, x_2 = 120^0, x_3 = 240^0, x_4 = 300^0$$

Cevap: C

23. $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ denkleminin 4. Bölgedeki çözümü nedir?

A) 270 B) 285 C) 300 D) 315 E) 330

Çözüm: Kosinüs çift fonksiyon ve $\sin x = \text{cosin}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ olduğunu hatırlarsak;

$$\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$2x = \frac{\pi}{6} - x \quad \text{veya } 2x = -\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$x = \frac{\pi}{18} = 10^0 \quad \text{veya } x = -\frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} = 330^0$$

bulunur.

Cevap: E

24. $0 < x < 90^0$ olmak üzere $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$ denklemde x kaçtır?

A) 30 B) 37 C) 45 D) 53 E) 60

Çözüm: $\sqrt{3} = \tan 60 = \frac{\sin 60}{\cos 60}$ yazalım.

$$\cos x + \frac{\sin 60}{\cos 60}\sin x = \frac{\sin 60}{\cos 60}$$

$$\cos x \ \cos 60 + \sin 60 \ \sin x = \sin 60$$

$\cos(x-60)=\cos 30$
$x-60=30$ ve $x-60=-30$
$x_1=90$ ve $x_2=30$

Cevap: A

25. $y=4\sin(3x+20)$ fonksiyonunun periyodu nedir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) 2π E) π

Çözüm: $T=\frac{2\pi}{3}$

Cevap: C

26. $y=2\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ fonksiyonunun periyodu nedir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) 2π E) π

Çözüm: $a=\frac{1}{3}$ olacağından $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

Cevap: D

27. $y=10\sin^4(x+45)$ fonksiyonunun periyodu nedir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) 2π E) π

Çözüm: 4 çift sayı olduğundan $T=\frac{\pi}{1}=\pi$

Cevap: E

28. $f(x)=5\cos 4x+3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ fonksiyonunun periyodu nedir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) 2π C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) π

Çözüm:

$\cos 4x$ in periyodu $T_1 = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ in periyodu $T_2 = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

$\text{OKEK}(T_1, T_2) = 2\pi$

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Prof. Dr. Şehmus YARDIMCI Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2018, ANKARA.
8. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
9. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
10. George B. THOMAS, Thomas Calculus, Massachusetts Institute of Technology, University of California, Çeviri Recep Korkmaz, Beta, 2009, İstanbul.
11. Doç. Dr. Ali DÖNMEZ, Gerçel Analiz, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1985.
12. Prof. Dr. Necdet SAN, Analiz Dersleri, Baylan Matbaası, 1975, Ankara.
13. Prof. Dr. Rahim OCAK, Reel Analiz, Erzurum, 1998.
14. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
15. Yrd. Doç. Dr. Ersin Erol, Yüksek Matematiğe Giriş, Marmara Üniversitesi Yayınları, 1991, İstanbul.
16. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.