4. BÖLÜM
TOPLAM ve ÇARPIM SEMBOLÜ

TOPLAM SEMBOLÜ

4.1. Tanım: $r, n \in \mathbb{Z}$ ve $r \leq n$ olmak üzere, $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots, a_n$ terimleri verilsin. Bu terimlerin toplamı,

$$a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_n = \sum_{k=r}^{n} a_k$$

biçiminde gösterilir. Bu gösterimde kullandığımız Σ (sigma) harfine toplam sembolü denir. Burada r'ye alt sınır, n'ye üst sınır, k ya da değişken adı verilir.

Örnek: $a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{20} = \sum_{k=4}^{20} a_k$

Örnek: $10^4 + 11^4 + 12^4 + \cdots + 24^4 = \sum_{k=10}^{24} k^4$

Örnek: $\sum_{k=1}^{50} 3k+1$ ifadesinin açılımını yapınız.

Çözüm: $\sum_{k=1}^{50} 3k+1 = 4 + 7 + 10 + \cdots + 151$ şeklindedir.

Örnek: $\sum_{m=3}^{8} \sqrt{m}$ ifadesinin açılımını yapınız.

Çözüm: $\sum_{m=3}^{8} \sqrt{m} = \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8}$

Örnek: $\sum_{k=1}^{8} 5$ ifadesinin açılımını yapınız.

Çözüm: $\sum_{m=1}^{8} 5 = \underbrace{5+5+5+5+5+5+5+5}_{8 \text{ tane}} = 40$

Örnek: $f(x) = 2x + 5$ fonksiyonuna göre, $\sum_{k=0}^{3} f(k)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm: $f(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$
$f(1) = 2 \cdot 1 + 5 = 7$
$f(2) = 2 \cdot 2 + 5 = 9$
$f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$

olduğundan

$$\sum_{k=0}^{3} f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 5 + 7 + 9 + 11 = 32$$

bulunur.

Örnek: $\sum_{k=1}^{24} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: Bu ifadenin açılımını yaparsak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{24} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{25} - \sqrt{24} \\ &= \sqrt{25} - \sqrt{1} \\ &= 4\end{aligned}$$

Örnek: $\sum_{k=3}^{20} \ln\frac{k+1}{k}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: Bu ifadenin açılımını yaparsak

$$\sum_{k=3}^{20} \ln\frac{k+1}{k} = \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ln\frac{6}{5} + \cdots + \ln\frac{21}{20}$$

$$= \ln\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{21}{20}$$
$$= \ln 7$$

bulunur.

Örnek: $\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=2}^{4}\left(\frac{\ell}{k}\right)$ toplamının sonucu nedir?

Çözüm: Bu işlemlerde öncelikle iç kısımdaki ℓ değişkenine göre işlem yapılır, sonra k değişkenine göre işlem yapılır.

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=2}^{5}\left(\frac{\ell}{k}\right)=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}+\frac{5}{k}\right)$$
$$=14.\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}$$
$$= 14\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{77}{3}$$

Örnek: $\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}k^{m}$ toplamının sonucu nedir?

Çözüm: Bu işlemlerde öncelikle iç kısımdaki k değişkenine göre işlem yapılır, sonra m değişkenine göre işlem yapılır.

$$\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}k^{m}=\sum_{m=1}^{2}(1^{m}+2^{m})=(1^1+2^1)+(1^2+2^2)=8$$

4.1. Teorem: $\sum_{k=r}^{n}c\cdot a_k = c\cdot\sum_{k=r}^{n}a_k$

İspat: $\sum_{k=r}^{n}c\cdot a_k = c\cdot a_r + c\cdot a_{r+1} + c\cdot a_{r+2} + \cdots + c\cdot a_n$

$$= c(a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_n)$$
$$= c\cdot\sum_{k=r}^{n}a_k$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{4} 5 \cdot k^2 = 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2$

$$= 5 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$

$$= 5 \cdot \sum_{k=1}^{4} k^2$$

4.2. Teorem (Dağılma Özelliği): $\sum_{k=r}^{n} a_k \pm b_k = \sum_{k=r}^{n} a_k \pm \sum_{k=r}^{n} b_k$

İspat:

$$\sum_{k=r}^{n} a_k \pm b_k = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + \cdots + (a_n \pm b_n)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

$$= \sum_{k=r}^{n} a_k \pm \sum_{k=r}^{n} b_k$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{20} 5 \cdot k^3 - 2k^2 = 5 \cdot \sum_{k=1}^{20} k^3 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} k^2$

Örnek: $\sum_{k=0}^{29} k.k!$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: Burada öncelikle,

$$k \cdot k! = k \cdot k! + k! - k!$$

$$= k!\,(k+1) - k!$$

$$= (k+1)! - k!$$

olduğunu faktöriyel kavramından hatırlayalım. Buna göre,

$$\sum_{k=0}^{29} k.k! = \sum_{k=0}^{29} (k+1)! - k!$$

$$= 1! - 0! + 2! - 1! + 3! - 2! + \cdots + 30! - 29!$$

$$= +30! - 1$$

dir.

4.3. Teorem (Parçalama Özelliği): $r, m, n \in \mathbb{Z}$ ve $r \leq m \leq n$ olmak üzere,

$$\sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{k=r}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

İspat:

$$\sum_{k=r}^{n} a_k = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_n$$
$$= (a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_n)$$
$$= \sum_{k=r}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

Örnek: $\sum_{k=8}^{100} k^5 = \sum_{k=8}^{40} k^5 + \sum_{k=41}^{100} k^5$

Örnek: $\sum_{k=10}^{80} k^6 = \sum_{k=10}^{50} k^6 + \sum_{k=51}^{80} k^6$

4.4. Teorem: $m, n, r, t \in \mathbb{Z}$ ve $r \leq n$ ve $t < m$ olmak üzere,

$$\sum_{k=r}^{n}\sum_{\ell=t}^{m} a_{k\ell} = \sum_{\ell=t}^{m}\sum_{k=r}^{n} a_{k\ell}$$

dir.

İspat:

$$\sum_{k=r}^{n}\sum_{\ell=t}^{m} a_{k\ell}$$
$$= \sum_{k=r}^{n} (a_{kt} + a_{k(t+1)} + a_{k(t+2)} + \ldots + a_{km})$$
$$= \left(a_{rt} + a_{r(t+1)} + a_{r(t+2)} + \cdots + a_{rm}\right) +$$
$$+\left(a_{(r+1)t} + a_{(r+1)(t+1)} + a_{(r+1)(t+2)} + \cdots + a_{(r+1)m}\right) +$$
$$+\left(a_{(r+2)t} + a_{(r+2)(t+1)} + a_{(r+2)(t+2)} + \cdots + a_{(r+2)m}\right) +$$
$$\cdots$$
$$+\left(a_{nt} + a_{n(t+1)} + a_{n(t+2)} + \cdots + a_{nm}\right)$$
$$= \left(a_{rt} + a_{(r+1)t} + a_{(r+1)t} + \cdots + a_{nt}\right) +$$
$$+\left(a_{r(t+1)} + a_{(r+1)(t+1)} + a_{(r+1)(t+1)} + \cdots + a_{n(t+1)}\right) +$$
$$+\left(a_{r(t+2)} + a_{(r+1)(t+2)} + a_{(r+1)(t+2)} + \cdots + a_{n(t+2)}\right) +$$
$$\cdots$$

$$+\left(a_{rm} + a_{(r+1)m} + a_{(r+1)m} + \cdots + a_{nm}\right)$$
$$= \sum_{l=t}^{m} \left(a_{rl} + a_{(r+1)l} + a_{(r+2)l} + \ldots + a_{nl}\right)$$
$$= \sum_{\ell=t}^{m} \sum_{k=r}^{n} a_{k\ell}$$

Örnek: $\displaystyle\sum_{k=5}^{100} \sum_{\ell=2}^{60} 5^{k\ell} = \sum_{\ell=2}^{60} \sum_{k=5}^{100} 5^{k\ell}$

Örnek: $\displaystyle\sum_{k=1}^{23} \sum_{\ell=-2}^{40} \sin k\ell = \sum_{\ell=-2}^{40} \sum_{k=1}^{23} \sin k\ell$

4.5. Teorem: $n, r, p \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
$$\sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{k=r+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=r-p}^{n-p} a_{k+p}$$
dir.

İspat: $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} a_k = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_n$
$$= a_{(r+p)-p} + a_{(r+1+p)-p} + a_{(r+2+p)-p} + \cdots + a_{(n+p)-p}$$
$$= \sum_{k=r+p}^{n+p} a_{k-p}$$
(Benzer şekilde $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{k=r-p}^{n-p} a_{k+p}$ de gösterilir.)

Örnek: $\displaystyle\sum_{k=4}^{20} 3k$ ifadesi $k = 1$ den başlanırsa nasıl olur?

Çözüm: $\displaystyle\sum_{k=4}^{20} 3k = \sum_{k=4-3}^{20-3} 3(k+3) = \sum_{k=1}^{17} 3k + 9$

Örnek: $\sum_{k=-5}^{10} k^2$ ifadesi $k = 0$ den başlanırsa nasıl olur?

Çözüm: $\sum_{k=-5}^{10} k^2 = \sum_{k=-5+5}^{10+5} (k-5)^2 = \sum_{k=0}^{15} (k-5)^2$

TOPLAM SEMBOLÜNÜN TEOREMLERİ

Francis Bacon
22 Ocak 1561, Londra, - 09 Nisan 1626, Highgate, Londra, Birleşik Krallık

Toplam sembolünün pek çok teoremi vardır. Bu teoremleri önemli bazılarını şimdi vereceğiz. Bunların birçoğunu ispatı önermeler konusunda bahsedilen tümevarım yöntemi ile yapmaya çalışacağız. Bu kısımda toplam sembolleri herhangi bir tamsayıdan değil, 1 sayısından başlatılacaktır. Ama sorular 1'den başlamayabilir, 1'den başlamayan sorular yukarıdaki teoremler kullanılarak çözülecektir.

4.6. Teorem: $c \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$

İspat: $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{\text{n tane}} = n \cdot c$

Örnek: $\sum_{k=1}^{10} 5 = 10 \cdot 5 = 50$

Örnek: $\sum_{k=-4}^{20} 4 = \sum_{k=1}^{25} 4 = 25 \cdot 4 = 100$

4.7. Teorem: $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

İspat: Bu teoremi tümevarım metoduyla yapalım.

P(1) için $n = 1$ olacağından $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ olup doğrudur.

P(n) için doğru olsun, yani $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ olsun. $P(n+1)$ için doğruluğuna bakacağız.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

olduğundan $P(n+1)$ için de doğrudur.

Örnek: $\sum_{k=1}^{25} k = \frac{25\cdot 26}{2} = 325$

Örnek: $\sum_{k=1}^{10} (3k-2) = 3\sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 2 = 3 \cdot \frac{10\cdot 11}{2} - 2 \cdot 10 = 145$

Örnek: $\sum_{k=1}^{15} (5k+8) = 5\sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} 8 = 5 \cdot \frac{15\cdot 16}{2} + 15 \cdot 8 = 720$

Örnek: $A = 19 + 20 + 21 + 22 + \cdots + 120$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

1. yol: $A = \sum_{k=19}^{120} k$

$$= \sum_{k=19-18}^{120-18}(k+18)$$
$$= \sum_{k=1}^{102}(k+18)$$
$$= \sum_{k=1}^{102}k + \sum_{k=1}^{102}18$$
$$= \frac{102 \cdot 103}{2} + 102 \cdot 188$$
$$= 7\,089$$

2. yol: $A = \sum_{k=1}^{120}k - \sum_{k=1}^{18}k = \frac{120 \cdot 121}{2} - \frac{18 \cdot 19}{2} = 7\,089$

Örnek: $\sum_{k=1}^{20}\frac{k}{105} = \frac{1}{105} \cdot \sum_{k=1}^{20}k = \frac{1}{105} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 2$

Örnek: $\sum_{k=a-2}^{a}(k+1) = 9$ ise a'nın değeri nedir?

Çözüm: İndisi 1 yapmak için $a - 3$ ilavesi yapalım.

$$\sum_{k=a-2-(a-3)}^{a-(a-3)}(k+a-3+1) = 9$$
$$\sum_{k=1}^{3}(k+a-2) = 9$$
$$1 + a - 2 + 2 + a - 2 + 3 + a - 2 = 9$$
$$a = 3$$

4.8. Teorem (Çift Sayıların Toplamı):

$$\sum_{k=1}^{n}2k = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

İspat: 4.8. teoremde $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğu bilindiğine göre,

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

dir.

Örnek: $\sum_{k=1}^{15} 2k = 15 \cdot 16 = 240$

4.9. Teorem (Tek Sayıların Toplamı):

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

İspat: 4.8. teoremde $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğu bilindiğine göre,

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{2n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$$

dir.

Örnek: $\sum_{k=1}^{25} 2k-1 = 25^2 = 625$

Örnek: $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 - 11 + 12 - 13 + 14$ sayısının sonucu nedir?

Çözüm:

$(2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14) - (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13)$

$= \sum_{k=1}^{7} 2k - \sum_{k=1}^{7} 2k-1$

$= 7 \cdot 8 - 7^2$

$= 7$

4.9. Teorem: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

İspat: Bu teoremi tümevarım metoduyla yapalım.

P(1) için $n = 1$ olacağından $\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$ olup doğrudur.

P(n) için doğru olsun, yani $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olsun. $P(n+1)$ için doğruluğuna bakacağız.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

olduğundan $P(n+1)$ için de doğrudur.

Örnek: $\sum_{k=1}^{20} k^2 - 4k = \sum_{k=1}^{20} k^2 - 4\sum_{k=1}^{20} k = \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6} - 4\cdot\frac{20\cdot 21}{2} = 2\,030$

Örnek: $\sum_{k=1}^{10} 6k^2 - 1 = 6\sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} 1 = 6\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} - 10 = 2\,300$

Örnek:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 4k + 1) \\ &= 4.\sum_{k=1}^{10} k^2 - 4\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 4\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} - 4\cdot\frac{4\cdot 10}{6} + 10 \\ &= 1470\end{aligned}$$

Örnek: $A = 1 - 1 + 2 - 4 + 3 - 9 + 4 - 16 + \cdots + 10 - 100$ toplamının sonucu nedir?

Çözüm: $A = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10) - (1 + 4 - 9 + 16 + \cdots + 100)$
$$= \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$= \frac{10 \cdot 11}{2} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6}$$
$$= -330$$

4.9. Teorem: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

İspat: Bu teoremi tümevarım metoduyla yapalım.

P(1) için $n = 1$ olacağından $\sum_{k=1}^{1} k^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1$ olup doğrudur.

P(n) için doğru olsun, yani $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ olsun. $P(n + 1)$ için doğruluğuna bakacağız.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$
$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

olduğundan $P(n + 1)$ için de doğrudur.

Örnek: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 40^3$ işlemi,

$$\sum_{k=1}^{40} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 40^3 = \left[\frac{40 \cdot 41}{2}\right]^2 = 672\,400$$

olarak bulunur.

Örnek: $\sum_{k=-4}^{10} k^3$ işlemi,

$$\sum_{k=-4}^{10} k^3 = \sum_{k=-4}^{0} k^3 + \sum_{k=1}^{10} k^3$$

$$
\begin{aligned}
&= (-4)^3 + (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + \left[\frac{10\cdot 11}{2}\right]^2 \\
&= -64 - 27 - 8 - 1 + 55^2 \\
&= 2\,925
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

4.10. Teorem: $\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$, $(0 < r < 1)$

İspat: Bu teoremi tümevarım metoduyla yapalım.

P(1) için $n = 1$ olacağından $\sum_{k=1}^{1} r^{k-1} = \frac{1-r^1}{1-r} = 1$ olup doğrudur.

P(n) için doğru olsun, yani $\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$ olsun. P(n + 1) için doğruluğuna bakacağız.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} r^{k-1} &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n \\
&= \frac{1-r^n}{1-r} + r^n \\
&= \frac{1-r^n+r^n-r^{n+1}}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{n+1}}{1-r}
\end{aligned}
$$

olduğundan P(n + 1) için de doğrudur.

Örnek: $\sum_{k=1}^{8} 2^{k-1} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^7 = \frac{1-2^8}{1-2} = 255$

Örnek: $\sum_{k=4}^{13} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ işlemi,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{13} \left(\frac{1}{4}\right)^k &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{13} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^9\right]
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^9}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{4^9-1}{3\cdot 4^{12}}$$
olarak bulunur.

4.11. Teorem:
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

İspat: Bu teoremi tümevarım metoduyla yapalım.

P(1) için $n = 1$ olacağından $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 1$ olup doğrudur.

P(n) için doğru olsun, yani $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ olsun. $P(n+1)$ için doğruluğuna bakacağız.
$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$
$$= \frac{(n+1)(n^2+2n+3n+6)}{3}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$
olduğundan $P(n+1)$ için de doğrudur.

Örnek:
$$\sum_{k=1}^{30} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + 30\cdot 31 = \frac{30\cdot 31\cdot 32}{3} = 9\,920$$

4.1. Sonuç: Yukarıdaki tümevarım metoduyla benzer şekilde aşağıdaki teoremlerde ispatlanır.

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)}$

2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

3. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$

4.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

5. $\sum_{k=1}^{n} k.k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n+1)! - 1$

6. $\sum_{k=1}^{n} \sin kt = \sin t + \sin 2t + \sin 3t + \cdots + \sin nt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$

7. $\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \sin\left(n\frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{n+1}{2}\right)t$

Örnek: $\sum_{k=1}^{20} \frac{21}{k(k+1)} = 21 \cdot \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)} = 21 \cdot \frac{20}{21} = 20$

BASİT KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİNİN TOPLAM SEMBOLÜNE UYGULANMASI

Polinomlar konusunda basit kesirlere ayırma yönteminden bahsedilmişti. Basit kesirlere ayırma yöntemiyle bazı toplam sembolü işlemleri yapılmaktadır.

Örnek: $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{k(k+1)}$ işleminin sonu nedir?

Çözüm: Önce $\dfrac{1}{k(k+1)}$ ifadesini basit kesirlere ayıralım. Polinom fonksiyonları konusunda

$\dfrac{P(k)}{(k-a)(k-b)}=\dfrac{A}{k-a}+\dfrac{B}{k-b}$ ifadesinde $A=\dfrac{P(a)}{a-b}$ ve $B=\dfrac{P(b)}{b-a}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

denkleminde $P(k)=1, a=0, b=-1$ olacağından,

$$A=\frac{P(a)}{a-b}=\frac{1}{0-(-1)}=1$$

$$B=\frac{P(b)}{b-a}=\frac{1}{-1-0}=-1$$

elde edilir. Buna göre,

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{40}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{40}-\frac{1}{41}\\&=\frac{40}{41}\end{aligned}$$

dir.

Örnek: $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k^2+5k+6}$ işleminin sonu nedir?

Çözüm: Önce $\dfrac{1}{k^2+5k+6}$ ifadesini basit kesirlere ayıralım. Buna göre,

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{A}{k+2}+\frac{B}{k+3}$$

denkleminde $P(k)=1, a=-2, b=-3$ olacağından,

$$A=\frac{P(a)}{a-b}=\frac{1}{-2-(-3)}=1$$

$$B = \frac{P(b)}{b-a} = \frac{1}{-3-(-2)} = -1$$

elde edilir. Buna göre,

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$$

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{22} - \frac{1}{23}$$
$$= \frac{20}{69}$$

dir.

TOPLAM SEMBOLÜNE AİT ÖZEL EŞİTLİKLER

4.12. Teorem: $\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{k} b_\ell = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell \sum_{k=\ell}^{n} a_k$

İspat:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{k} b_\ell = \sum_{k=0}^{n} a_k (b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_k)$$
$$= a_0(b_0) + a_1(b_0 + b_1) + a_2(b_0 + b_1 + b_2) + \cdots + a_n(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$= b_0(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + b_1(a_1 + \cdots + a_n) + b_2(a_2 + \cdots + a_n) + \cdots + b_n a_n$$
$$= b_0 \sum_{k=0}^{n} a_k + b_1 \sum_{k=1}^{n} a_k + b_2 \sum_{k=2}^{n} a_k + \cdots + b_n \sum_{k=n}^{n} a_k$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell \sum_{k=\ell}^{n} a_k$$

4.13. Teorem (Abel Kısmi Toplam Formülü):

$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\Delta b_n = b_n - b_{n+1}$ ve $A_{-1} = 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \Delta b_k$$

dir.

İspat: $A_{-1} = 0$ olduğundan her n için $a_n = A_n - A_{n-1}$ dir.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k$$

$$= (A_0 - A_{-1})b_0 + (A_1 - A_0)b_1 + (A_2 - A_1)b_2 + \cdots + (A_n - A_{n-1})b_n$$
$$= A_0(b_0 - b_1) + A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n$$
$$= A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$
$$= A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \Delta b_k$$

4.14. Teorem (İki Polinomun Çarpımı): $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ iki polinom olsun. Bu iki polinomun çarpımı

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) = s_0 x^0 + s_1 x^1 + s_2 x^2 + \cdots + s_n x^n + \cdots + s_{2n} x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} s_{2k} x^{2k}$$

biçimindedir. Burada

$$s_0 = a_0 b_0$$
$$s_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$s_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$\ldots$$
$$s_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$
$$s_{n+1} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$$
$$\ldots$$
$$s_{2n} = a_n b_n$$

dir.

İspat:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right)$$
$$= (a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)(b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n)$$

denklemi şu tabloya dönüştürelim.

	a_0	a_1	a_2	...	a_n
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	...	a_nb_0
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	...	a_nb_1
b_2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	...	a_nb_2
...	...	...	...	...	...
b_n	a_0b_n	a_1b_n	a_2b_n	...	a_nb_n

bulunur. Şimdi tümevarımla

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} s_{2k} x^{2k}$$

varlığını gerçekleyelim.

$n = 1$ için

$$\left(\sum_{k=0}^{1} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{1} b_k x^k\right) = (a_0x^0 + a_1x^1)(b_0x^0 + b_1x^1)$$
$$= (a_0x^0 + a_1x^1)(b_0x^0 + b_1x^1)$$
$$= (a_0b_0)x^0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + (a_1b_1)x^2$$

ve

$$s_0 = a_0b_0$$
$$s_1 = a_0b_1 + a_1b_0$$
$$s_2 = a_1b_1$$

olup

$$\left(\sum_{k=0}^{1} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{1} b_k x^k\right) = s_0x^0 + s_1x^1 + s_2x^2$$

bulunur.

$n = m$ için doğru olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{m} s_{2k} x^{2k}$$

yani

$$(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)$$
$$= s_0x^0 + s_1x^1 + s_2x^2 + \cdots + s_nx^n + \cdots + s_{2n}x^{2n}$$

dir. $n = m + 1$ için doğruluğunu araştıralım.

$(a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1})(b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots + b_nx^n + b_{n+1}x^{n+1})$

polinomunun tablosu

	a_0	a_1	a_2	...	a_n	a_{n+1}
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	...	a_nb_0	$a_{n+1}b_0$
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	...	a_nb_1	$a_{n+1}b_1$
b_2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	...	a_nb_2	$a_{n+1}b_2$
...	...	...	...	...	...	...
b_n	a_0b_n	a_1b_n	a_2b_n	...	a_nb_n	$a_{n+1}b_n$
b_{n+1}	a_0b_{n+1}	a_1b_{n+1}	a_2b_{n+1}	...	a_nb_{n+1}	$a_{n+1}b_{n+1}$

olur. Şu halde

$$(a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1})(b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots + b_nx^n + b_{n+1}x^{n+1})$$
$$= s_0x^0 + s_1x^1 + s_2x^2 + \cdots + s_{n+1}x^{n+1} + \cdots + s_{2(n+1)}x^{2(n+1)}$$

bulunur.

TOPLAM SEMBOLÜNÜN TERSİ

$r, n \in \mathbb{Z}$ ve $r \leq n$ olmak üzere,

$$t_n = \sum_{k=r}^{n} a_k$$

ifadesi verilsin.

$$t_{n-1} = \sum_{k=r}^{n-1} a_k \ \text{ ve } \ t_n = \sum_{k=r}^{n-1} a_k + a_n$$

olacağından

$$a_n = t_n - t_{n-1}$$

olur.

4.2. Tanım: $r, n \in \mathbb{Z}$ ve $r \leq n$ olmak üzere,

$$t_n = \sum_{k=r}^{n} a_k$$

ifadesi için

$$a_n = t_n - t_{n-1}$$

biçiminde yazıma toplam sembolünün tersi denir.

Örnek: $t_n = \sum_{k=5}^{n} k^2$ ifadesinin ters toplam sembolü, $n^2 = t_n - t_{n-1}$ dir.

ÇARPIM SEMBOLÜ

4.3. Tanım: $r, n \in \mathbb{Z}$ ve $r \leq n$ olmak üzere, $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots, a_n$ terimleri verilsin. Bu terimlerin çarpımını kısaca,

$$a_r \cdot a_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdots a_n = \prod_{k=r}^{n} a_k$$

şeklinde göstereceğiz. Bu gösterimde kullandığımız $\prod$ (pi) harfine çarpım sembolü denir. Burada r'ye alt sınır, n'ye üst sınır, k'ya da değişken adı verilir.

Örnek: 1’den 50’ye kadar doğal sayıların çarpımını $\prod$ (pi) sembolü ile gösterelim.

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots 50 = 50! = \prod_{k=1}^{50} k$$

4.2. Sonuç: $\prod_{k=1}^{n} k = n!$

Örnek: $\prod_{k=2}^{63} \log_k (k+1)$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\prod_{k=2}^{63} \log_k (k+1) = \log_2 3\cdot \log_3 4\cdot \log_4 5\cdots \log_{63} 64$

$$= \frac{\log 3}{\log 2}\cdot\frac{\log 4}{\log 3}\cdot\frac{\log 5}{\log 4}\cdots\frac{\log 64}{\log 63}$$

$$= \log_2 64$$

$$= 6\log_2 2$$

$$= 6$$

Örnek: $\prod_{k=1}^{24}\left(1-\frac{k}{k+1}\right)$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\prod_{k=1}^{24}\left(1-\frac{k}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{24}\left(\frac{k+1-k}{k+1}\right)$

$$= \prod_{k=1}^{24}\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{25}$$

$$= \frac{1}{25!}$$

4.15. Teorem: $c\in\mathbb{R}$, $\prod_{k=1}^{n} c = \underbrace{c\cdot c\cdot c\cdots c}_{\text{n tane}} = c^n$

Örnek: $\prod_{k=1}^{10} 8$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\prod_{k=1}^{10} 8 = \underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdots 8}_{10 \text{ tane}} = 8^{10}$

4.16. Teorem: $\prod_{k=1}^{n} c.a_k = c^n.\prod_{k=1}^{n} a_k$

İspat: $\prod_{k=1}^{n} c.a_k = (c \cdot a_1) \cdot (c \cdot a_2) \cdot (c \cdot a_3) \cdots (c \cdot a_n)$

$$= (\underbrace{c \cdot c \cdot c \cdots c}_{n \text{ tane}})(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n)$$

$$= c^n.\prod_{k=1}^{n} a_k$$

Örnek: $\prod_{k=1}^{8} (2 \cdot a_k) = 2^8 \cdot \prod_{k=1}^{8} a_k$

Örnek: $\prod_{k=1}^{15} (3 \cdot k)$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\prod_{k=1}^{15} (3 \cdot k) = 3^{15} \cdot \prod_{k=1}^{15} k = 3^{15} \cdot 15!$

4.17. Teorem (Dağılma Özelliği): $\prod_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$

İspat: $\prod_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k) = (a_1 \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot b_2) \cdot (a_3 \cdot b_3) \cdots (b_n \cdot a_n)$

$$= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n)(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_n)$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right).\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$$

Örnek: $\prod_{k=1}^{12}\left(\left(\frac{k+3}{k+4}\right)\log_{k+3}(k+4)\right)$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{12}\left(\left(\frac{k+3}{k+4}\right)\log_{k+3}(k+4)\right) &= \prod_{k=1}^{12}\left(\frac{k+3}{k+4}\right).\prod_{k=1}^{12}(\log_{k+3}(k+4)) \\
&= \left(\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{15}{16}\right)(\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdots\log_{15} 16) \\
&= \frac{4}{16}\left(\frac{\log 5}{\log 4}\cdot\frac{\log 6}{\log 5}\cdot\frac{\log 7}{\log 6}\cdots\frac{\log 16}{\log 15}\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{\log 16}{\log 4} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\log_4 16 \\
&= \frac{1}{4}\cdot\log_4 4^2 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\log_4 4 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ÇARPIM SEMBOLÜNÜN TOPLAM SEMBOLÜNE ÇEVRİLMESİ

4.18. Teorem: $r, n \in \mathbb{Z}$ ve $r \leq n$ olmak üzere, $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots, a_n$ terimleri verilsin.

$$\prod_{k=r}^{n} a_k = 10^{\sum_{k=r}^{n}\log a_k}$$

eşitliği mevcuttur.

İspat:
$$\begin{aligned}
\log\prod_{k=r}^{n} a_k &= \log(a_r\cdot a_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdots a_n) \\
&= \log a_r + \log a_{r+1} + \cdots + \log a_n \\
&= \sum_{k=r}^{n}\log a_k \\
&= \left(\sum_{k=r}^{n}\log a_k\right)\cdot\log 10 \\
&= \log 10^{\sum_{k=r}^{n}\log a_k}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise

$$\log\prod_{k=r}^{n} a_k = \log 10^{\sum_{k=r}^{n}\log a_k}$$

olduğunu gösterir. Buna göre;

$$\prod_{k=r}^{n} a_k = 10^{\sum_{k=r}^{n}\log a_k}$$

istenen eşitliği verir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Toplam Sembolünün Tanımı ve Özellikler4i

1. $1 + 5 + 9 + \cdots + 53$ toplamının kısa ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sum_{k=1}^{13} k^2$ B) $\sum_{k=0}^{13}(4k+2)$ C) $\sum_{k=1}^{13} k^3$ D) $\sum_{k=0}^{13}(4k+1)$ E) $\sum_{k=0}^{13}(4k-1)$

Çözüm: $\sum_{k=0}^{13}(4k+1) = 1 + 5 + 9 + \cdots + 53$

Cevap: D

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}(ix-j)\right)$ fonksiyonu veriliyor. $f^{-1}(0)$ kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}(ix-j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2}(ix-1+ix-2) \\ &= \sum_{i=1}^{2}(2ix-3) \\ &= 2\cdot 1\cdot x - 3 + 2\cdot 2\cdot x - 3 \\ &= 6x - 6 \end{aligned}$$

$f^{-1}(x) = \frac{x+6}{6}$

$f^{-1}(0) = \frac{0+6}{6} = 1$

Cevap: B

3. $f(x) = x - 2$, $\sum_{n=1}^{10} n^2 = 300$, $\sum_{n=1}^{10} n = 40$ olduğuna göre $\sum_{n=1}^{10} [f(n)]^2$ toplamını değeri nedir?

A) 150 B) 160 C) 180 D) 200 E) 210

Çözüm: $\sum_{n=1}^{10} [f(n)]^2 = \sum_{n=1}^{10} (n-2)^2$

$$= \sum_{n=1}^{10} (n^2 - 4n + 4)$$

$$= \sum_{n=1}^{10} n^2 - 4\sum_{n=1}^{10} n + \sum_{n=1}^{10} 4$$

$$= 300 - 4 \cdot 40 + 4 \cdot 10$$

$$= 180$$

Cevap: C

4. $\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}(4i - 3j)$ toplamının değeri nedir?

A) 21 B) 20 C) 18 D) 16 E) 15

Çözüm:

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}(4i-3j) = \sum_{j=1}^{2}\left(4\cdot\sum_{i=1}^{3} i - 3\cdot\sum_{i=1}^{3} j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\left(4\cdot(1+2+3) - (3\cdot 3j)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{2}(24 - 9j)$$

$$= (24 - 9 \cdot 1) + (24 - 9 \cdot 2)$$

$$= 21$$

Cevap: A

5. $f(x) = \begin{cases} x+3\,, & x<0 \\ x+1\,, & x \geq 0 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $\sum\limits_{k=-3}^{3} f(k)$ toplamının değeri kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm:

$$\sum_{k=-3}^{4} f(k) = f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$
$$= 0 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4$$
$$= 13$$

Cevap: E

6. $f(n+1) - f(n) = 2$ ve $f(1) = 1$ ise $\sum\limits_{n=1}^{5} f(n)$ nedir?

A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

Çözüm:

$n = 1$ için $f(2) - f(1) = 2$ ve $f(2) = 3$
$n = 2$ için $f(3) - f(2) = 2$ ve $f(3) = 5$
$n = 3$ için $f(4) - f(3) = 2$ ve $f(4) = 7$
$n = 4$ için $f(5) - f(4) = 2$ ve $f(5) = 9$

$$\sum_{n=1}^{5} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$$
$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$
$$= 25$$

Cevap: C

7. $\sum\limits_{k=pn}^{(p+1)n} k$ ifadesinin $k = 1$'den başlatıldığında $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ nın çarpanı nedir?

A) $2p$ B) $2p+1$ C) $p+1$ D) $p+n$ E) $p \cdot n$

Çözüm: $\sum\limits_{k=pn}^{(p+1)n} k = \sum\limits_{k=pn-pn}^{pn+n-pn} k + pn$

$$=\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}pn$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+pn(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2pn(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}(2p+1)$$
$$=(2p+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

Cevap: B

Tümevarımla İspatlanan Toplam Sembolleri

8. $\sum_{k=1}^{20}(2k+5)$ nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 500 B) 510 C) 520 D) 530 E) 540

Çözüm: $\sum_{k=1}^{20}(2k+5)=2\cdot\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}5=2\cdot\frac{20.21}{2}+20\cdot 5=520$

Cevap: C

9. $r, n \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere;

$$r(r+1)+(r+1)(r+2)+\cdots+2r(2r+1)$$

toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}r(r-1)(7r+5)$ B) $\frac{1}{3}r(7r+5)$ C) $\frac{1}{3}r(r+1)$
D) $\frac{1}{3}r(r+1)(7r+5)$ E) $\frac{1}{3}r(r+1)(r+5)$

Çözüm: $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ eşitliği bilindiğine göre;

$$r(r+1)+(r+1)(r+2)+\cdots+2r(2r+1)=\sum_{k=r}^{2r}k(k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{2r} k(k+1)-\sum_{k=1}^{r-1} k(k+1)$$
$$=\frac{1}{3}2r(2r+1)(2r+2)-\frac{1}{3}(r-1)r(r+1)$$
$$=\frac{1}{3}r(r+1)(7r+5)$$

bulunur.

Cevap: D

10. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=1}^{x} k,\ \ g(x) = \sum_{k=1}^{x} k^2$

biçiminde iki fonksiyon tanımlansın. Buna göre $(f \circ g)(3)$ nin değeri nedir?

A) 100 B) 105 C) 110 D) 115 E) 120

Çözüm: $g(3)=\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2+2^2+3^2 = 14$

$$f(14)=\sum_{n=1}^{14} n = \frac{14\cdot 15}{2} = 105$$

Cevap: B

11. $\sum_{k=1}^{20}(2+kx) = 460$ olduğuna göre, x kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Cevap: $\sum_{k=1}^{20}(2+kx)=\sum_{k=1}^{20}2+\sum_{k=1}^{20}kx = 2\cdot 20 + x\sum_{k=1}^{20}k = 40 + x\cdot\frac{20\cdot 21}{2} = 460$

$$x = \frac{460-40}{210} = 2$$

Cevap: A

12. $\sum_{k=0}^{40} 3^k$ toplamının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: $\sum_{k=0}^{40} 3^k = \frac{1-3^{101}}{1-3} = \frac{3^{101}-1}{2} = \frac{1-3^{41}}{1-3} = \frac{3^{41}-1}{2}$

$3^1 \equiv 3 \pmod 7$
$3^2 \equiv 2 \pmod 7$
$3^3 \equiv 6 \pmod 7$
$3^4 \equiv 4 \pmod 7$
$3^5 \equiv 5 \pmod 7$
$3^6 \equiv 1 \pmod 7$
$(3^6)^6 \cdot 3^5 \equiv 1 \cdot 5 \pmod 7$
$3^{41} \equiv 5 \pmod 7$

3^{41} in 7 ile bölümünden kalan 5 olduğundan,

$$\frac{3^{41}-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

dir.

Cevap: E

13. $10 \cdot \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2+4+\cdots+(2k)}$ toplamının değeri kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $2+4+\cdots+(2k) = k(k+1)$

$$10 \cdot \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2+4+\cdots+(2k)} = 10 \cdot \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}$$
$$= 10 \cdot \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= 10 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$
$$= 9$$

Cevap: D

Çarpım Sembolü

14. $\prod_{k=1}^{4} 2^k$ işleminin sonucu nedir?

A) 2^{10} B) 2^{11} C) 2^{12} D) 2^{13} E) 2^{14}

Çözüm: $\prod_{k=1}^{4} 2^k = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{1+2+3+4} = 2^{10}$

Cevap: A

15. $\prod_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} c$ işleminin sonucu nedir?

A) $c^n \cdot k$ B) $c^n \cdot k!$ C) $c \cdot n \cdot k!$ D) $c \cdot k!$ E) $c \cdot n \cdot k$

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} c = \prod_{k=1}^{n} k \cdot c = c^n \prod_{k=1}^{n} k = c^n \cdot k!$$

Cevap: B

16. $\prod_{k=1}^{7}(k+2)$ sayısı 10 ile bölündüğünde kalan nedir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: $\prod_{k=1}^{7}(k+2) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$

Bu sayının bölenleri 5 ve 2 olduğubdan $\prod_{k=1}^{7}(k+2)$ ifadesi 10 ile tam bölünür.

Cevap: E

17. $\prod_{m=2}^{4}\sum_{n=1}^{10}(m+n)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 200 B) 210 C) 225 D) 240 E) 250

Çözüm:

$$\sum_{n=1}^{10}(m+n) = (m+1) + (m+2) + \cdots + (m+10) = 10m + 55$$

$$\prod_{m=2}^{4}\sum_{n=1}^{10}(m+n) = \prod_{m=2}^{4}(10m+55)$$

$$= (10 \cdot 1 + 55) + (10 \cdot 2 + 55) + (10 \cdot 3 + 55)$$

$= 225$

Cevap: C

18. $\sum_{n=1}^{10}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

Çözüm:

$$\sum_{n=1}^{10}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{n=1}^{10}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{10}n$$

$$=\frac{10\cdot 11}{2}$$

$$= 55$$

Cevap: A

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
8. George B. THOMAS, Thomas Calculus, Massachusetts Institute of Technology, University of California, Çeviri Recep Korkmaz, Beta, 2009, İstanbul.

9. Yrd. Doç. Dr. Ersin Erol, Yüksek Matematiğe Giriş, Marmara Üniversitesi Yayınları, 1991, İstanbul.
10. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.