5. BÖLÜM
DİZİLERE GİRİŞ

DİZİ KAVRAMI

5.1. Tanım: Tanım kümesi pozitif doğal sayılardan oluşan fonksiyonlara dizi denir.

$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R},$$
$$n \to a(n) = (a_n)$$

şeklinde gösterilir. Tanım kümesi pozitif doğal sayılardan oluşurken değer kümesi

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$$

biçimindedir. Burada a_1'e birinci terim, a_2'e ikinci terim, a_3'e üçüncü terim, a_n'e genel terim adı verilir.

5.1. Not: Burada diziler değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayıları için incelenecektir. Ama diziler değer kümesi farklı kümeler için de tanımlanır. Mesela, vektörler, matrisler, kompleks sayı gibi...

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisini inceleyelim,

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$$

şeklinde olur. Bu dizinin birinci terimi $a_1 = 1$, ikinci terimi $a_2 = \frac{1}{2}$, üçüncü terimi $a_3 = \frac{1}{3}$ ve genel terimi $a_n = \frac{1}{n}$ dir.

Örnek: $(b_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ dizisini inceleyelim,

$$(b_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right)$$

şeklinde olur. Bu dizinin birinci terimi $b_1 = \frac{1}{2}$, ikinci terimi $b_2 = \frac{2}{3}$, üçüncü terimi $b_3 = \frac{3}{4}$ ve genel terimi $b_n = \frac{n}{n+1}$ dir.

Örnek: $(c_n) = ((-n)^2)$ dizisini inceleyelim,

$$(c_n) = (-1, 4, -9, 16, \cdots, (-n)^2, \cdots)$$

şeklinde olur. Bu dizinin birinci terimi $c_1 = -1$, ikinci terimi $c_2 = 4$, üçüncü terimi $c_3 = -9$ ve genel terimi $c_n = (-n)^2$ dir.

Örnek: $(a_n) = (\log_2 n)$ dizisinin ilk dört temrini bulunuz.

Çözüm: $a_1 = \log_2 2 = 0, a_2 = \log_2 2 = 1, a_3 = \log_2 3, a_4 = \log_2 4 = 2$

Örnek: Verilen bir (a_n) dizisinin birinci terimi $a_1 = 1$ ve genel terimi $a_n = n \cdot a_{n-1}$ ise beşinci terim olan a_5 i bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned} a_2 &= 2 \cdot a_{2-1} = 2 \cdot 1 = 2! \\ a_3 &= 3 \cdot a_{3-1} = 3 \cdot 2! = 3! \\ a_4 &= 4 \cdot a_{4-1} = 4 \cdot 3! = 4! \\ a_5 &= 5 \cdot a_{5-1} = 5 \cdot 3! = 5! \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: Genel terimi,

$$a_n = \begin{cases} 2n + 1, & \text{n tek ise} \\ n + 4, & \text{n çift ise} \end{cases}$$

olan dizinin 3. ve 4. terimlerini bulunuz.

Çözüm: 3 tek sayı olduğundan $a_3 = 2 \cdot 3 + 2 = 7$
4 tek sayı olduğundan $a_4 = 4 + 4 = 8$

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{4n-72}{n}\right)$ dizisinin kaç terimi tamsayıdır?

Çözüm: $\dfrac{4n-72}{n} = 4 - \dfrac{72}{n}$

Dizinin terimleri bir tamsayı olması için n yerine yazılacak sayıların 72'nin pozitif bölenleri olmalıdır. 72'nin pozitif bölenleri,

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$\tau = (3+1) \cdot (2+1) = 12$$

olacağından verilen dizinin 12 tane terimi tamsayıdır.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{4n+1}{n+5}\right)$ dizisinin hangi terimi $\frac{21}{10}$ dir?

Çözüm: $\frac{4n+1}{n+5} = \frac{21}{10}$

$$40n + 10 = 21n + 105$$

$$19n = 95$$

$$n = 5$$

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{n^2-4n+1}{n+2}\right)$ dizisinin kaç terimi $\frac{1}{2}$ den küçüktür?

Çözüm: $a_n < \frac{1}{2}$

$$\frac{n^2-4n+1}{n+2} < \frac{1}{2}$$

$$2n^2 - 8n + 2 < n + 2$$

$$2n^2 - 9n < 0$$

$$n(2n-9) < 0$$

$$n = 0, n = \frac{9}{2}$$

n		0		9/2	
$2n^2-9n$	+	o	−	o	+

çözüm kümesi $0 < n < \frac{9}{2}$ olduğuna göre n'nin değerleri 1, 2 ve 3 den ibarettir.

Örnek: $(a_n) = (n^2 - 4n + 6)$ dizisinin en küçük terimi nedir?

Çözüm: $f(x) = x^2 - 4x + 6$ fonksiyonu bir parabol belirtir. Bu parabolün en küçük değeri tepe noktasıdır. Buna göre,

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2$$

dir. Şu halde 2 sayısı için,

$$a_2 = 2^2 - 4\cdot 2 + 6 = 2$$

dir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{2}{3n+1}\right)$ dizisinin kaç terimi $\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{8}\right)$ aralığı içindedir?

Çözüm: $\frac{1}{20} < a_n < \frac{1}{8}$

$$8 < \frac{3n+1}{2} < 20$$

$$16 < 3n + 1 < 40$$

$$15 < 3n < 39$$

$$5 < n < 13$$

O halde bu aralıktaki 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 doğal sayıları için a_n dizisinin 7 terimi $\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{8}\right)$ aralığı içindedir

5.2. Tanım: $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $A = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ kümesi verilmiş olsun. $A \subset \mathbb{N}^+$ olduğundan, $a : A \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonuna sonlu dizi denir. Bu sonlu dizi;

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$$

biçiminde gösterilir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3,4,5\}$ olmak üzere, $a : A \to \mathbb{R}$, $(a_n) = (3n)$ dizisinin terimlerini yazınız.

Çözüm: $a_1 = 3\cdot 1 = 3$, $a_2 = 3\cdot 2 = 6$, $a_3 = 3\cdot 3 = 9$, $a_4 = 3\cdot 4 = 12$, $a_5 = 3\cdot 5 = 15$

5.2. Not: Bir sonlu veya sonsuz dizi düzenli bir şekilde olmazsa genel terimi bulunmayabilir.

SABİT DİZİ

5.3. Tanım: $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n = c$ ise (a_n) dizisine sabit dizi denir. $(a_n) = (c, c, c, \cdots, c) = (c)$ biçiminde gösterilir.

Örnek: $(a_n) = \left(\sqrt{5}\right)$ dizisi sabit bir dizidir. Çünkü dizinin bütün terimleri $\sqrt{5}$ dir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{6n+c}{2n+5}\right)$ dizisinin sabit dizi olması için c'nin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: $\dfrac{6n+c}{2n+5} = k$ olsun. Buna göre,

$$6n + c = 2nk + 5k \quad \text{(Polinom eşitliğinden)}$$
$$6n = 2nk \text{ ise } k = 3 \text{ ve } c = 5k = 5 \cdot 3 = 15$$

dir.

EŞİT DİZİLER

5.4. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n = b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizisine eşittir denir ve $(a_n) = (b_n)$ biçiminde ifade edilir. $(a_n) = (b_n)$ ise;

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_n = b_n, \dots$$

dir.

Örnek: $(a_n) = ((-1)^n)$ ve $(b_n) = \left[\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$ dizisine eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(a_n) = ((-1)^n)$ dizisi parçalı ifade olarak yazarsak,

$$a_n = \begin{cases} -1, & n \text{ tek ise} \\ 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde olur. Diğer dizi için $n = 2k + 1$ tek sayısı ise,

$$b_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

dir. $n = 2k$ çift sayısı ise,

$$b_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

dir. Öyleyse (b_n) dizisinin genel terimi parçalı olarak,

$$b_n = \begin{cases} -1, & n \text{ tek ise} \\ 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde yazılır. Buna göre her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n = b_n$ olduğundan $(a_n) = (b_n)$ dir.

ALT DİZİ

5.5. Tanım: Verilen bir (a_n) dizisinin terimlerinin, öncelik sırası bozulmadan bazı terimlerinden elde edilen yeni $\left(a_{k_n}\right)$ dizisine (a_n) dizisinin alt dizisi denir. $\left(a_{k_n}\right) \subset (a_n)$ şeklinde gösterilir. $(k, n \in \mathbb{N}^+)$

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{1}{2}\right)$ dizisi verilsin. $(a_{2n}) = \left(\frac{1}{2n}\right)$ dizisi alt dizidir. Gerçekten,

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right) \text{ ve } (a_{2n}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2n}, \cdots\right)$$

olacaklarından (a_{2n}) dizisi alt dizi olduğunu gösterir.

Örnek: $(a_n) = (2n + 1)$ dizisi verilsin. $(a_{2n}) = (4n + 1)$ dizisi alt dizidir. Gerçekten,

$$(a_n) = (3, 5, 7, 9, 11, \cdots, 2n + 1, \cdots)$$
$$(a_{2n}) = (5, 9, 13, 17, \cdots, 4n + 1, \cdots)$$

olacaklarından (a_{2n}) dizisinin alt dizi olduğunu gösterir.

Örnek: (a_n) dizisi verilsin. Bu dizinin (a_{2n-8}) alt dizi oluşturmaz. Çünkü $n = -1$ için (a_{-6}), $n = -2$ için (a_{-4}), $n = -3$ için (a_{-2}) olup bu terimler alt dizinin terimleri değildir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{n}{n+2}\right)$ dizisi için (a_{3n}) alt dizisini,

$$(a_{3n}) = \left(\frac{3n}{3n+2}\right)$$

biçimindedir.

Örnek: $(a_{3n}) = (3n - 4)$ alt dizisi için (a_n) dizisini bulunuz.

Çözüm: $3n = k$ alınırsa $n = \frac{k}{3}$ olacağından,

$$(a_{3n}) = (3n - 4)$$

$$(a_k) = (3 \cdot \frac{k}{3} - 4)$$
$$(a_k) = (k - 4)$$
$$(a_n) = (n - 4)$$

biçimindedir.

DİZİLERDE İŞLEMLER

5.6. Tanım: (a_n) ve (b_n) iki dizi olmak üzere,

i) $(a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n)$

ii) $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$

iii) $(k \cdot a_n) = k \cdot (a_n)$, $(k \in \mathbb{R})$

iv) $\dfrac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$

dir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{2}{n}\right)$ ve $(b_n) = \left(\frac{3}{n}\right)$ ise $(a_n) + (b_n)$ ve $(a_n) - (b_n)$ i bulunuz.

Çözüm: $(a_n + b_n) = \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n}\right) = \left(\frac{5}{n}\right)$

$(a_n - b_n) = \left(\frac{2}{n} - \frac{3}{n}\right) = \left(-\frac{1}{n}\right)$

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{2}{n}\right)$ ve $(b_n) = \left(\frac{2}{n+1}\right)$ ise $(a_n) + (b_n)$ ve $(a_n) - (b_n)$ i bulunuz.

Çözüm: $(a_n + b_n) = \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}\right) = \left(\frac{2n+2}{n(n+1)} + \frac{2n}{n(n+1)}\right) = \left(\frac{4n+2}{n(n+1)}\right)$

ve $(a_n - b_n) = \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) = \left(\frac{2n+2}{n(n+1)} - \frac{2n}{n(n+1)}\right) = \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)$

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{4n-2}{4}\right)$ ve $(b_n) = \left(\frac{6n+3}{4n^2-1}\right)$ ise $(a_n) \cdot (b_n)$ i bulunuz.

Çözüm:

$$(a_n \cdot b_n) = \left(\frac{4n-2}{4} \cdot \frac{6n+3}{4n^2-1}\right) = \left(\frac{2(2n-1)}{4} \cdot \frac{3(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$$

Örnek: $(a_n) = (n!)$ ise $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ i bulunuz.

Çözüm: $(a_n) = (n!)$ ise $(a_{n+1}) = ((n+1)!)$ dir. Bu takdirde,

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) = \left(\frac{(n+1)n!}{n!}\right) = (n+1)$$

elde edilir.

Örnek: $(a_n) = (2^n)$ ise $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ i bulunuz.

Çözüm: $(a_n) = (2^n)$ ise $(a_{n+1}) = (2^{n+1})$ dir. Bu takdirde,

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \left(\frac{2^{n+1}}{2^n}\right) = (2)$$

elde edilir.

Örnek: Genel terimi $a_n = \begin{cases} 3n+2, & \text{n tek ise} \\ 2n+3, & \text{n çift ise} \end{cases}$ ve $(b_n) = \left[\sum_{k=1}^{n} 2k+1\right]$ olarak diziler veriliyor. Bu verilere göre,

$$(a_5 + 2b_3) \cdot (4 \cdot a_6 - b_4)$$

işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $a_5 = 3 \cdot 5 + 2 = 17, \quad a_6 = 3 \cdot 6 + 2 = 20$

$$b_3 = \sum_{k=1}^{3} 2k+1 = 15, \quad b_4 = \sum_{k=1}^{4} 2k+1 = 24$$

$$(a_5 + 2b_3) \cdot (4 \cdot a_6 - b_4) = (20 + 2 \cdot 15) \cdot (4 \cdot 20 - 24) = 103$$

ARİTMETİK DİZİLER

5.7. Tanım: Bir dizinin ardışık iki terimi arasındaki fark, sabit bir sayıya eşit olan dizilere aritmetik dizi denir.

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

dizisi

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = r$$

şeklindedir. Burada r ye ortak fark denir.

Örnek: $(a_n) = (3n)$ dizisi aritmetik dizidir. Çünkü

$$(a_n) = (3,6,9,12,\cdots)$$

olup ortak farkı 3 olan bir aritmetik dizidir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{n}{2}\right)$ dizisi aritmetik dizidir. Çünkü

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots, \frac{n}{2}, \cdots\right)$$

olup ortak farkı $1/2$ olan bir aritmetik dizidir.

5.1. Teorem: $p, n \in \mathbb{N}^+$ ve $p < n$ olmak üzere, belirli iki terim ve ortak fark (r) biliniyorsa birbirileri arasında

$$a_n = a_p + (n-p) \cdot r$$

ilişkisi vardır.

İspat: $a_2 = a_1 + r$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$
....
$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu veriye göre,

$$\frac{a_n - a_p}{n-p} = \frac{[a_1 + (n-1)r] - [a_1 + (p-1)r]}{n-p}$$
$$= \frac{[nr - r] - [pr - r]}{n-p}$$
$$= r$$

dir. Buna göre,

$$a_n = a_p + (n-p) \cdot r$$

elde edilir.

Örnek: 1. terimi 4, ortak farkı 3 olan bir aritmetik dizinin 8. terimi nedir?

Çözüm: $a_1 = 4, r = 3$ ise $a_8 = a_1 + (8-1) \cdot 3 = 4 + 21 = 25$

Örnek: 5. terimi 13, ortak farkı 6 olan bir aritmetik dizinin 18. terimi nedir?

Çözüm: $a_5 = 13, r = 6$ ise $a_{18} = a_5 + (18 - 5) \cdot 6 = 13 + 78 = 91$

Örnek: 2. terimi 9 ve ortak farkı 4 olan bir aritmetik dizinin hangi terimi 81'tir?

Çözüm: $a_2 = 9, r = 4, a_n = 81$
$$a_n = a_2 + (n - 2) \cdot 4$$
$$81 = 9 + (n - 2) \cdot 4$$
$$n = 20$$

Örnek: Bir aritmetik dizide $\frac{a_7}{a_{10}} = \frac{17}{24}$ ve ortak fark $r = 7$ ise bu dizinin birinci terimini bulunuz.

Çözüm: $a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot 7$
$$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 7$$
denklemlerinden,
$$\frac{a_7}{a_{10}} = \frac{a_1 + 42}{a_1 + 63} = \frac{17}{24}$$

$$24a_1 + 42 \cdot 24 = 17a_1 + 63 \cdot 17$$

$$a_1 = 9$$
olarak bulunur.

5.2. Teorem: Bir aritmetik dizide her terim kendisinden eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplamına eşittir. Bu durum,
$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$$
$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \quad , \quad (k < n)$$
dir.

İspat: 5.1. Teoremde, $a_n = a_p + (n - p) \cdot r$ olduğunu biliyoruz. Buna göre,
$$a_{n-k} = a_p + (n - k - p) \cdot r$$
$$a_{n+k} = a_p + (n + k - p) \cdot r$$
dir. Her iki denklemi taraf tarafa toplarsak,
$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2[a_p + (n - p) \cdot r]$$

$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$$
$$a_n = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$$
denklemi elde edilir.

Örnek: $a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$, $a_5 = \frac{a_3+a_7}{2}$, $a_8 = \frac{a_5+a_{11}}{2}$

Örnek: $k + 3, 9, 2k + 3$ terimleri bir aritmetik dizi oluşturuyorsa k'nın değeri nedir?

Çözüm: $9 = \frac{k+3+2k+3}{2}$ ise $k = 4$ bulunur.

Örnek: Bir aritmetik dizide $a_3 + a_5 = 48$ ve $a_4 + a_6 = 64$ ise $a_3 + a_6$ toplamı nedir?

Çözüm: $a_5 = \frac{a_4+a_6}{2} = \frac{64}{2} = 32$ ise $a_3 + 32 = 48$ den $a_3 = 16$
$a_4 = \frac{a_3+a_5}{2} = \frac{48}{2} = 24$ ise $24 + a_6 = 64$ den $a_6 = 40$
$a_3 + a_6 = 16 + 40 = 56$

5.1. Sonuç: Bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplamları birbirine eşittir.
$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$$

Örnek: Bir aritmetik dizide $a_7 = 8$ ve $a_2 = 22$ ise $a_1 + a_8$ toplamı nedir?

Çözüm: $a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = 8 + 22 = 30$

5.3. Teorem: Bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı,
$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$
şeklindedir.

İspat: 5.3. Sonuca göre
$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$$

olacak şekilde $\frac{n}{2}$ tane eşit sayı vardır. 5.1. Teoreme göre $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ olduğundan ilk n terim toplamı,

$$s_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$
$$s_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)r]$$
$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

olarak bulunur.

Örnek: 1. terimi 10 ortak farkı 3 olan bir aritmetik dizinin ilk 20 terimi toplamı nedir?

Çözüm: $a_1 = 10, r = 3$

$$s_{20} = \frac{20}{2}[2 \cdot 10 + (20-1)3] = 770$$

Örnek: $(a_n) = (7n - 4)$ dizinin ilk 10 terimi toplamı nedir?

Çözüm: Verilen dizi $(a_n) = (3, 10, 17, 24, \cdots)$ şeklindedir. Bu dizinin ilk terimi $a_1 = 3$ ve ortak farkı $r = 10 - 3 = 7$ olan bir aritmetik dizidir.

$$s_{10} = \frac{10}{2}[2 \cdot 3 + (10-1)7] = 345$$

5.4. Teorem: a ve b iki reel (gerçel) sayı arasına aritmetik dizi oluşturacak biçimde m tane terim yerleştirilirse ortak fark,

$$r = \frac{b-a}{m+1}$$

olur.

İspat: 5.1. teoreme göre $a_n = a_p + (n-p) \cdot r$ olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$r = \frac{a_n - a_p}{n-p}$$

dir. Özel olarak $a_n = a$, $a_p = b$ alınırsa ve bu iki reel sayı arasına aritmetik dizi oluşturacak biçimde m tane terim yerleştirilirse ortak fark varsa,

$$r = \frac{b-a}{m+1}$$

yazılır.

Örnek: 6 ile 18 arasına aritmetik dizi oluşacak şekilde 5 terim yerleştirilirse, bu dizinin ortak farkı ne olur?

Çözüm: $r = \frac{b-a}{m+1} = \frac{18-6}{5+1} = 2$

5.5. Teorem: Aritmetik bir dizinin her alt dizisi de aritmetik dizidir.

İspat: (a_n) bir aritmetik dizi olsun. Bu takdirde 5.1. teorem gereği

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

dir. Bu (a_n) dizisinin alt dizisi (a_{kn}) olsun. Buna göre,

$$a_{kn} = a_1 + (kn-1) \cdot r$$

yazılabilir. Bu dizilerin iki terimleri arasındaki fark,

$$a_{kn} - a_n = [a_1 + (kn-1) \cdot r] - [a_1 + (n-1) \cdot r] = r$$

olup bu dizinin aritmetik dizi olduğunu gösterir.

GEOMETİK DİZİLER

5.8. Tanım: Bir dizinin ardışık iki terimi arasındaki oran, sabit bir sayıya eşit olan dizilere geometrik dizi denir.

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

dizisi

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = r$$

şeklindedir. Burada r'ye ortak çarpan denir.

Örnek: $(a_n) = (2^n)$ dizisi geometrik dizidir. Çünkü;

$$(a_n) = (2, 4, 8, 16, \cdots, 2^n, \cdots)$$

buna göre,

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \cdots = 2 = r$$

olacağından $(a_n) = (2^n)$ dizisi geometrik dizidir.

5.6. Teorem: $p, n \in \mathbb{N}^+$ ve $p < n$ olmak üzere,

$$a_n = a_p \cdot r^{(n-p)}$$

şeklindedir.

İspat: $a_2 = a_1 \cdot r$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$
$$....$$
$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu veriye göre,

$$\frac{a_n}{a_p} = \frac{a_1 \cdot r^{(n-1)}}{a_1 \cdot r^{(p-1)}} = r^{(n-p)}$$

$$a_n = a_p \cdot r^{(n-p)}$$

elde edilir.

Örnek: 4. terimi 48, ortak çarpanı 2 olan geometrik dizinin 7. terimi nedir?

Çözüm: $a_7 = a_4 \cdot 2^{(7-4)} = 48 \cdot 2^3 = 384$

Örnek: Dördüncü terimi 16, on ikinci terimi $\frac{1}{16}$ olan geometrik dizinin ortak çarpanı nedir?

Çözüm: $a_n = 16, a_{12} = \frac{1}{16}$ ise,

$$a_{12} = a_4 \cdot r^{(12-4)}$$

$$\frac{1}{16} = 16 \cdot r^8$$

$$2^{-8} = r^8$$

$$r = \frac{1}{2}$$

5.7. Teorem: Bir geometrik dizide her terim, kendisinden eşit uzaklıkta bulunan terimlerin geometrik ortasıdır. Bu durum,

$$a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}, \ (k < n)$$

dir.

Örnek: Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi $\frac{a}{4(a+1)}$, n, $\frac{a+1}{a}$ ise n'nin değeri nedir?

Çözüm: $a_{n-1} = \frac{a}{4(a+1)}, a_n = n, a_{n+1} = \frac{a+1}{a}$
olacağından

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$
$$n = \sqrt{\frac{a}{4(a+1)} \cdot \frac{a+1}{a}} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

Örnek: $x^3 + mx^2 + 3(m-1)x + 8 = 0$ denkleminin kökleri bir geometrik dizinin ardışık üç terimi ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: verilen denkleminin kökleri bir geometrik dizi oluşturuluyorsa,

$$x_2 = \sqrt{x_1 \cdot x_3} \text{ ise } x_2^2 = x_1 \cdot x_3 \text{ ve } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{8}{1} = -8$$
$$x_2^3 = -8 \text{ ise } x_2 = -2$$

dir. Bu da denklemi sağlayacağından,

$$(-2)^3 + m(-2)^2 + 3(m-1)(-2) + 8 = 0$$
$$-8 + 4m - 6m + 6 + 8 = 0$$
$$m = 3$$

dür.

Örnek: Bir geometrik dizinin ardışık 5 terimi 1, a, b, c, $\frac{1}{16}$ olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ kaçtır?

Çözüm: $b = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

$$a = \sqrt{1 \cdot b} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$
$$c = \sqrt{b \cdot \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}} = \frac{1}{8}$$
$$a \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$

Örnek: Pozitif terimli bir geometrik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla

$$\sin\frac{\pi}{6}, x, \cos\frac{\pi}{6}$$

olduğuna göre x'in değeri nedir?

Çözüm: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ olduğunu hatırlarsak,

$$\begin{aligned} x^2 &= \sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12} \\ &= \frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{5\pi}{12} \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

bulunur.

5.2. Sonuç: Bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımları birbirine eşittir.

$$a_1\cdot a_n = a_2\cdot a_{n-1} = a_3\cdot a_{n-2} = \cdots$$

Örnek: Bir geometrik dizide $a_2 = 4$ ve $a_{12} = 24$ ise $a_6\cdot a_8$ çarpımı kaçtır?

Çözüm: Sonuca göre, $a_6\cdot a_8 = a_2\cdot a_{12} = 4\cdot 24 = 96$ bulunur.

5.8. Teorem: Bir geometrik dizinin ilk n teriminin toplamı,

$$s_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

şeklindedir. $(0 \le r \le 1)$

Bu teoremin ispatı Toplam ve Çarpım Sembollerinde 4.10. teoremde gösterilmiştir.

Örnek: Birinci terimi 3 ve ortak çarpanı 2 olan bir geometrik dizinin ilk yedi terim toplamı nedir?

Çözüm: $s_7 = a_1\frac{1-2^7}{1-2} = 3\cdot\frac{1-128}{-1} = 381$

Örnek: Bir yoğurtta ilk etapta 1 tane bakteri vardır. Her saatte 2 katı kadar üremekte ve önceki bakteriler üreme etkisini yitirmektedir. 24 saat sonra bu yoğurtta kaç tane bakteri vardır.

Çözüm: Bu yoğurdu şu şekilde dizi oluşturabiliriz.

$$(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, \cdots, 2^{24}, \cdots)$$

Buna bu dizi bir geometrik dizidir. Bu dizinin toplamı

$$s_{24} = a_1 \frac{1-2^{24}}{1-2} = 1 \cdot \frac{1-2^{24}}{1-2} = 2^{24} - 1$$

olarak elde edilir.

Örnek: Başlangıçta 1 milyon tane virüs bulunan bir bitkiye uygulanan ilaçla, her saatte yarıladığı tespit edilmiştir. Bu bitkideki virüs kaç saatte biter.

Çözüm: 1 saatte $10^6 \cdot \frac{1}{2}$

2 saatte $10^6 \cdot \frac{1}{2^2}$

3 saatte $10^6 \cdot \frac{1}{2^3}$

...

n saatte $10^6 \cdot \frac{1}{2^n}$

$$10^6 \cdot \frac{1}{2^n} = 1$$
$$10^6 = 2^n$$
$$\log 10^6 = \log 2^n$$
$$6 \log 10 = n \log 2$$
$$n = \frac{6 \log 10}{\log 2} = 19{,}93$$

20 saatte tamamen biter.

5.9. Teorem: a ve b iki reel (gerçel) sayı arasına geometrik dizi oluşturacak biçimde m tane terim yerleştirilirse ortak çarpan,

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

olur.

İspat: 5.1. teoreme göre $a_n = a_p \cdot r^{(n-p)}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$r = \sqrt[n-p]{\frac{a_n}{a_p}}$$

dir. Özel olarak $a_n = a$, $a_p = b$ alınırsa ve bu iki reel sayı arasına aritmetik dizi oluşturacak biçimde m tane terim yerleştirilirse ortak çarpan varsa,

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

yazılır.

Örnek: 243 ile $\frac{1}{3}$ arasına geometrik dizi oluşacak biçimde 5 terim yerleştirilirse ortak çarpan ne olur?

Çözüm: $a = 243, b = \frac{1}{3}, p = 5$

$$r = \sqrt[p+1]{\frac{\frac{1}{3}}{243}} = \sqrt[5+1]{\frac{\frac{1}{3}}{3^5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{3^6}} = \frac{1}{3}$$

5.10. Teorem: Bir geometrik dizide ilk n terim çarpımı,

$$T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

dir.

İspat: Tümevarım yöntemini kullanacağız.

P(2) için $n = 2$ olacağından $T_2 = \sqrt{(a_1 \cdot a_2)^2} = a_1 \cdot a_2$ olup doğrudur.

P(k) için doğru olsun, yani $T_k = \sqrt{(a_1 \cdot a_k)^k}$ olsun. $P(k+1)$ için doğruluğuna bakacağız. $a_k = a_1 \cdot r^{k-1}$ ve $a_{k+1} = a_1 \cdot r^k$ olduğunu hatırlayalım.

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= \sqrt{(a_1 \cdot a_k)^k} \cdot a_{k+1} \\
&= \sqrt{(a_1 \cdot a_k)^k} \cdot a_1 \cdot r^k \\
&= \sqrt{(a_1 \cdot a_1 \cdot r^{k-1})^k \cdot (a_1^2 \cdot r^{2k})} \\
&= \sqrt{(a_1^{2k} \cdot r^{k^2-k}) \cdot (a_1^2 \cdot r^{2k})} \\
&= \sqrt{(a_1^{2k+2} \cdot r^{k^2+k})} \\
&= \sqrt{(a_1^{2(k+1)} \cdot r^{k(k+1)})} \\
&= \sqrt{(a_1 \cdot a_1 \cdot r^k)^{k+1}} \\
&= \sqrt{(a_1 \cdot a_{k+1})^{k+1}}
\end{aligned}$$

olduğundan $P(k+1)$ için de doğrudur.

Örnek: Birinci terimi 4 ve yedinci terimi 256 olan bir geometrik dizinin ilk 7 teriminin çarpımı kaçtır?

Çözüm: $a_1 = 4, a_7 = 256$

$$T_7 = \sqrt{(a_1 \cdot a_7)^7} = \sqrt{(4 \cdot 256)^7} = \sqrt{(2^2 \cdot 2^8)^7} = 2^{35}$$

5.11. Teorem: Geometrik bir dizinin her alt dizisi de geometrik dizidir.

İspat: (a_n) bir geometrik dizi olsun. Bu takdirde 5.6. teorem gereği

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

dir. Bu (a_n) dizisinin alt dizisi (a_{kn}) olsun. Buna göre,

$$a_{kn} = a_1 \cdot r^{kn-1}$$

yazılabilir. Bu dizilerin iki terimleri arasındaki oran,

$$\frac{a_{kn+1}}{a_{kn}} = \frac{a_1 \cdot r^{kn}}{a_1 \cdot r^{kn-1}} = r$$

olup bu dizinin geometrik dizi olduğunu gösterir.

MONOTON DİZİLER

5.9. Tanım: Herhangi bir (a_n) dizisinde her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

i) $a_{n+1} > a_n$ ise (a_n) artan dizi,
ii) $a_{n+1} < a_n$ ise (a_n) azalan dizi,
iii) $a_{n+1} \geq a_n$ ise (a_n) monoton artan (azalmayan) dizi,
iv) $a_{n+1} \leq a_n$ ise (a_n) monoton azalan (artmayan) dizi denir.

Ayrıca her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_{n+1} = a_n$ ise (a_n) sabit dizi olduğu açıktır.

Örnek:

1. $(a_n) = (2n+1) = (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \cdots)$ artan ve monoton artan dizidir.

2. $(b_n) = \left(\frac{1}{2n}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \cdots\right)$ azalan ve monoton azalan dizidir.

3. Genel terimi $c_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{n tek ise} \\ \frac{n}{2}, & \text{n çift ise} \end{cases}$

olan dizi

$$(c_n) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \cdots)$$

biçiminde yazılırsa monoton artan (azalmayan) bir dizi olduğu gözükür.

5. 3. Sonuç: 5.9. tanımdan;

i) $a_{n+1} - a_n \geq 0$ ise (a_n) monoton artan (azalmayan) dizi,
ii) $a_{n+1} - a_n \leq 0$ ise (a_n) monoton azalan (artmayan) dizi
elde edilir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{3n+1}{n+2} = \frac{3}{(n+3)(n+2)} \geq 0$$

olduğundan (a_n) dizisi monoton artandır.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{2-n}{n+4}\right)$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2-(n+1)}{(n+1)+4} - \frac{2-n}{n+4} = \frac{-6}{(n+5)(n+4)} \leq 0$$

olduğundan (a_n) dizisi monoton azalandır.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{cn}{3n+1}\right)$ dizisinin monoton artan olması için c ne olmalıdır?

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{c(n+1)}{3(n+1)+1} - \frac{cn}{3n+1} = \frac{c}{(3n+4)(3n+1)} \geq 0$$

$c \geq 0$
olmalıdır.

5. 4. Sonuç: 5.9. tanımdan;

i) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ise (a_n) monoton artan (azalmayan) dizi,

ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ ise (a_n) monoton azalan (artmayan) dizi

elde edilir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{n!}{2^n}\right)$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{n+1}{2} \geq 1$$

olduğundan (a_n) dizisi monoton artandır.

5.12. Teorem: Monotonik bir dizinin her alt dizisi de monotonik dizidir.

İspat: (a_n) bir monoton artan dizi olsun. Bu takdirde $a_{n+1} - a_n \geq 0$ dir. 5.1. teorem ve 5.1. teorem gereği;

$$a_{n+1} - a_n = [a_1 + n \cdot r] - [a_1 + (n-1) \cdot r] = r > 0$$

olmalıdır. Yine (a_n) dizisinin alt dizisi (a_{kn}) olsun. Buna göre,

$$a_{kn} = a_1 + (kn - 1) \cdot r$$
$$a_{kn+1} = a_1 + kn \cdot r$$

olacağından,

$$a_{kn+1} - a_{kn} = [a_1 + kn \cdot r] - [a_1 + (kn-1) \cdot r] = r > 0$$

bulunur. O halde (a_{kn}) bir monoton artan dizidir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. 1 ile 9 arasına aritmetik dizi oluşacak biçimde 3 terim yerleştirirsek 4'üncü terim ne olur?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Çözüm: $r = \frac{b-a}{m+1} = \frac{9-1}{3+1} = 2$

$a_n = a_p + (n-p) \cdot r$

$a_4 = a_1 + (4-1) \cdot 2 = 1 + 6 = 7$

Cevap: D

2. $(a_n) = (5, 8, 11, 14, \cdots)$ dizisinin ilk 20 terim toplamı kaçtır?

A) 650 B) 655 C) 660 D) 665 E) 670

Çözüm: Verilen dizi bir aritmetik dizi olsun. $a_n = 5$ ve $r = 8 - 5 = 3$ dür.

$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$

$s_{20} = \frac{20}{2}[2 \cdot 5 + (20-1)3] = 670$

Cevap: E

3. Bir aritmetik dizide 14. Terim 28, ortak fark 2,5 ise 4. Terim nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $a_{14} = a_4 + (14-4) \cdot 2{,}5$

$28 = a_4 + 25$

$a_4 = 3$

Cevap: C

4. Bir aritmetik dizide $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $a_n = 4a - 3b$ ve $r = \frac{a-b}{2}$ ise n nedir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$4a - 3b = \frac{a+b}{2} + (n-1) \cdot \frac{a-b}{2}$

$8a - 6b = a + b + (n-1)(a-b)$

$8a - 6b = a + b + na - a - nb + b$

$8a - 8b = na - nb$

$8(a-b) = n(a-b)$

$n = 8$

Cevap: A

5. Bir aritmetik dizi için $a_1 = 1$ ve $S_{10} = 10S_5$ ise ortak fark r nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $s_5 = \frac{5}{2}[2 \cdot 1 + (5-1)r] = \frac{5}{2}[2+4r]$

$s_{10} = \frac{10}{2}[2 \cdot 1 + (10-1)r] = 5[2+9r]$

$S_{10} = 5S_5$

$5[2+9r] = 5 \cdot \frac{5}{2}[2+4r]$

$10[2+9r] = 25[2+4r]$

$20 + 90r = 50 + 100r$

$r = 3$

Cevap: B

6. 6. terimi 486, ortak çarpanı 3 olan geometrik dizinin 1. terimi nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $a_6 = 486$ ve $r = 3$

$a_n = a_p \cdot r^{(n-p)}$

$a_6 = a_1 \cdot 3^{(6-1)}$

$486 = a_1 \cdot 243$

$a_1 = 2$

Cevap: C

7. Bir geometrik dizide $a_5 - a_1 = 320$ ve $a_4 - a_2 = 96$ ise r ortak çarpan nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $a_5 = a_1 \cdot r^{(5-1)}$ ve $a_4 = a_2 \cdot r^{(4-2)}$

$a_1 + 320 = a_1 \cdot r^4$ ve $a_2 + 96 = a_2 \cdot r^2$

$a_1 + 320 = a_1 \cdot r^4$ ve $a_1 \cdot r + 96 = a_1 \cdot r \cdot r^2$

$320 = a_1 \cdot (r^4 - 1)$ ve $96 = a_1 \cdot (r^3 - r)$

taraf tarafa bölünürse;

$$\frac{a_1(r^4-1)}{a_1(r^3-r)} = \frac{320}{96}$$

$$\frac{(r^2-1)(r^2+1)}{r(r^2-1)} = \frac{10}{3}$$

$$3(r^2+1) = 10r$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(r-3)(3r-1) = 0$$

$$r = 3 \text{ ve } r = \frac{1}{3}$$

elde edilir.

Cevap: D

8. ab, b^2, c^2 aritmetik dizinin ardışık terimleri ise b, c, x'in geometrik dizinin ardışık terimlerini oluşturması için x'in a ve b türünden değeri nedir?

A) $2b-a$ B) $2b$ C) $2a$ D) a E) 1

Çözüm: ab, b^2, c^2 aritmetik dizinin ardışık terimleri ise,

$b^2 = \frac{ab+c^2}{2}$

$2b^2 - ab = c^2$

dir. Yine b, c, x geometrik dizinin ardışık terimleri $c = \sqrt{bx}$ dir.

$c^2 = bx$

$2b^2 - ab = bx$

$x = 2b - a$

Cevap: A

9. Bir aritmetik dizide $a_1 = 1, \frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ ise a_n genel terimi nedir?

A) $2n$ B) $2n-1$ C) $2n+1$ D) $2n-3$ E) $2n+3$

Çözüm: Aritmetik dizinin ilk n terim toplamı;

$s_m = \frac{m}{2}[2a_1 + (m-1)r]$ ve $s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\frac{\frac{m}{2}[2a_1+(m-1)r]}{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)r]} = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\frac{2\cdot1+(m-1)r}{2\cdot1+(n-1)r} = \frac{m}{n}$$

$$2n + (m-1)nr = 2m + (n-1)mr$$

$$2n + mnr - nr = 2m + mnr - mr$$

$$2n - 2m = nr - mr$$

$$2(n-m) = r(n-m)$$

$$r = 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n-1$$

Cevap: B

10. Bir aritmetik dizinin n terimi olup orta terimi 15'dir. Buna göre bütün terimlerin toplamı nedir?

A) n B) 2n C) 3n D) 4n E) 5n

Çözüm: Verilere göre $5 = \frac{a_1+a_n}{2}$ dir.
$s_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right) = 5n$

Cevap: E

11. $\frac{2}{b+c}, \frac{2}{a+c}, \frac{2}{a+b}$ bir aritmetik dizi oluşturursa aşağıdakilerden hangisi aritmetik dizi oluşturur?

A) a, b, c B) $a+1, b+1, c+1$ C) $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$
D) $2a, 2b, 2c$ E) a^2, b^2, c^2

Çözüm:

$$\frac{2}{a+c}=\frac{\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+b}}{2}$$

$$\frac{4}{a+c}=\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+b}$$

$$\frac{2}{a+c}=\frac{a+b+b+c}{ab+b^2+ac+bc}$$

$$2ab+2b^2+2ac+2bc=a^2+2ab+ac+ac+2bc+c^2$$

$$2b^2=a^2+c^2$$

$$b^2=\frac{a^2+c^2}{2}$$

olup a^2, b^2, c^2 aritmetik ortalamasını gösterir.

Cevap: E

12. Bir (a_n) geometrik dizisinde $a_7=-30$ ve $a_9=-270$ ise, ortak çarpanının pozitif değeri nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $a_7=a_1\cdot r^6$ ve $a_9=a_1\cdot r^8$

$-30=a_1\cdot r^6$ ve $-270=a_1\cdot r^8$

$9a_1\cdot r^6=a_1\cdot r^8$

$r=3$

Cevap: D

13. Bir geometrik dizide $a_1=1$, $a_n=-512$, ilk n terim toplamı $S_n=-341$ ise, terim sayısı n nedir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$

$-512=1\cdot r^{n-1}$

$(-2)^9=r^{n-1}$

$r^n=(-2)^{10}=2^{10}$

ve

$$s_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$
$$-341 = 1 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-r}$$
$$-341 + 341r = 1 - 1024$$
$$r = -2$$

ve

$$(-2)^9 = r^{n-1}$$
$$(-2)^9 = (-2)^{n-1}$$
$$n = 10$$

olur.

Cevap: A

14. 5 ve 135 sayıları arasına geometrik dizi olacak şekilde 2 terim yerleştirirsek, ortak çarpan ne olur?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: a ve b iki reel (gerçel) sayı arasına geometrik dizi oluşturacak biçimde m tane terim yerleştirilirse ortak çarpan,

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[2+1]{\frac{135}{5}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

olur.

Cevap: C

15. $(a_n) = \left(\frac{3n+2}{n}\right)$ dizisinde $\sup a_n + \inf a_n$ toplamı nedir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: $\frac{3n+2}{n} = 3 + \frac{2}{n}$

olduğundan

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \left(2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \cdots\right)$$

olur ki, bu bize bu dizinin terimleri 0'dan büyük 2'den küçük olduğu gözükür.

$$0 < \frac{2}{n} \leq 2$$
$$3 + 0 < 3 + \frac{2}{n} \leq 3 + 2$$
$$3 < a_n \leq 5$$
$$\sup a_n = 5, \inf a_n = 3$$

$\sup a_n + \inf a_n = 5 + 3 = 8$

Cevap: B

16. İlk terimi 4, ortak farkı 5 ve son terimi 59 olan bir aritmetik dizinin terim sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A)10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: $a_1 = 4, r = 5, a_n = 59$ olduğundan aritmetik dizi gereğince,

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$59 = 4 + (n-1) \cdot 5$$
$$55 = (n-1) \cdot 5$$
$$11 = n - 1$$
$$n = 12$$

dir.

Cevap: C

17. $a + r = 2ar = ar^2$ dizisinin, hem aritmetik hem geometrik dizi ise, $3a +\ r$'nın değeri ne olmalıdır? $(a \cdot r \neq 0)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bir dizi hem aritmetik hem de geometrik ise bu dizi sabit dizidir. Buna göre $a + r = 2ar = ar^2$ denklemleri çözülürse

$2ar = ar^2$ den $r = 2$

ve

$$a + r = ar^2$$
$$a + 2 = a2^2$$
$$a = \frac{2}{3}$$

olur. Buna göre;

$$3a + r = 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 = 4$$

elde edilir.

Cevap: D

18. $x^3 - 9x^2 + 26x - m = 0$ denkleminde kökleri ardışık birer tamsayının aritmetik bir dizisini meydana getirdiği bilindiğine göre m'nin değeri nedir?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

Çözüm: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-9}{1} = 9$$

bulunur. Burada kökler aritmetik dizi olduğuna göre,

$$a + (a+1) + (a+2) = 9$$
$$a = 2$$

dir. Denklemde $a = 2$ yazılırsa,

$$x^3 - 9x^2 + 26x - m = 0$$
$$2^3 - 9 \cdot 2^2 + 26 \cdot 2 - m = 0$$
$$m = 24$$

olur.

Cevap: A

19. 5. terimi 1, 8. terimi $\frac{1}{8}$ olan bir geometrik dizinin, 20. terimi kaç olur?

A) 2^{-14} B) 2^{-15} C) 2^{-16} D) 2^{-17} E) 2^{-18}

Çözüm: $a_5 = 1, a_8 = \frac{1}{8}$, (a_n) bir geometrik dizide r ortak çarpan olmak üzere;

$$a_n = a_p \cdot r^{n-p}$$
$$a_8 = a_5 \cdot r^{8-5}$$
$$r = \frac{1}{2}$$

şeklindedir. Buna göre 20. terim

$$a_{20} = a_5 \cdot r^{20-5} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = 2^{-15}$$

bulunur.

Cevap: B

20. $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{n} a_{n-1}$ biçiminde tanımlanan bir dizide göre a_5 kaçtır?

A) 1 B) 4 C) 5 D) 5! E) $\frac{1}{5!}$

Çözüm: $n = 2$ ise $a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2!}$

$n = 3$ ise $a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{1}{3!}$

$n = 4$ ise $a_4 = \frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{1}{4!}$

$n = 5$ ise $a_5 = \frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4!} = \frac{1}{5!}$

Cevap: E

21. Bir aritmetik dizinin 8. terimi 20 olduğuna göre 4. ve 12. terimin toplamı nedir?

A) 25 B) 30 C) 32 D) 36 E) 40

Çözüm: Bir aritmetik dizide herhangi bir terim, terimin solundan ve sağından eşit uzaklıkta olan terimlerin aritmetik ortalaması kadardır.

$$a_8 = \frac{a_4 + a_{12}}{2}$$

$$20 = \frac{a_4 + a_{12}}{2}$$

$$a_4 + a_{12} = 40$$

Cevap: E

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
3. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
4. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
5. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
8. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.

9. George B. THOMAS, Thomas Calculus, Massachusetts Institute of Technology, University of California, Çeviri Recep Korkmaz, Beta, 2009, İstanbul.
10. Doç. Dr. Ali DÖNMEZ, Gerçel Analiz, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1985.
11. Prof. Dr. Necdet SAN, Analiz Dersleri, Baylan Matbaası, 1975, Ankara.
12. Prof. Dr. Rahim OCAK, Reel Analiz, Erzurum, 1998.
13. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
14. Yrd. Doç. Dr. Ersin Erol, Yüksek Matematiğe Giriş, Marmara Üniversitesi Yayınları, 1991, İstanbul.
15. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.