6. BÖLÜM
DİZİLERİN LİMİTİ

"Limit" kelimesinin Türkçe karşılığı sınır demektir. Her ne kadar sınırı belli olmayan dizinin sınırını belirleme işlemiyle limit tanımlasakta, dizilerde ve fonksiyonlarda, belirizlik oluşan denklemlerin çözümünü arama işlemine limit adı verilir. Bunun için önce dizilerde sınır ile dizilerde komşuluk kavramı verilecektir.

DİZİLEDE SINIRLILIK

6.1. Tanım: Bir (a_n) dizisi ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ varsa (a_n) dizisi üsten sınırlı bir dizi denir. Yani bir dizinin tüm terimleri bir reel (gerçel) sayıdan daha küçük ise bu dizi üstten sınırlıdır. Bir dizinin üstten sınırı sonsuz sayıdadır. $[M, +\infty)$ üstten sınır kümesi olur. Üsten sınırların en küçüğüne dizinin supremumu denir, $\sup a_n$ biçiminde gösterilir.

Örnek: $(a_n) = (4 - 2n)$ dizisini inceleyelim.

Çözüm: $(a_n) = (4 - 2n) = (2, 0, -2, -4, \cdots, 4 - 2n, \cdots)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n \leq 2$ olur ki üstten sınırlıdır. 2'den büyük her sayı (a_n) dizisinin üsten sınırıdır. Üsten sınırlılık kümesi $[2, +\infty)$ dur. Ama dizinin supremumu $\sup a_n = 2$ dir.

6.2. Tanım: Bir (a_n) dizisi ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $m \leq a_n$ olacak şekilde $m \in \mathbb{R}$ varsa (a_n) dizisi alttan sınırlı bir dizi denir. Yani bir dizinin tüm terimleri bir reel (gerçel) sayıdan daha büyük ise bu dizi alttan sınırlıdır. Bir dizinin alttan sınırı sonsuz sayıdadır. $(-\infty, m]$ alttan sınır kümesi olur. Alttan sınırların en küçüğüne dizinin infumumu denir, $\inf a_n$ biçiminde gösterilir.

Örnek: $(a_n) = (5n - 2)$ dizisinin terimlerini bularak inceleyelim.

Çözüm: $(a_n) = (5n-2) = (3, 8, 13, 18, \cdots, 5n-2, \cdots)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}^+$ için $3 \leq a_n$ olur ki alttan sınırlıdır. 3'den küçük her sayı alttan sınırdır. Alttan sınır kümesi $(-\infty, 3]$ dir. Ama dizinin infumumu $\inf a_n = 3$ dir.

6.3. Tanım: Bir (a_n) dizisi ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için, $m \leq a_n \leq M$ olacak şekilde $m, M \in \mathbb{R}$ varsa (a_n) dizisi sınırlı bir dizi denir. Yani sınırlı dizi hem alttan hem de üsten sınırlıdır.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisini inceleyelim.

Çözüm: $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ olur ki her $n \in \mathbb{N}^+$ için $0 < a_n \leq 1$ yazabiliriz. Buna göre bu (a_n) dizisi hem alttan hem de üsten sınırlıdır. Şu halde sınırlı dizidir. Bu dizinin,

$$\sup a_n = 1, \inf a_n = 0$$

dir.

Örnek: $(b_n) = \left(\frac{3n-1}{n+1}\right)$ dizisini inceleyelim.

Çözüm: $(b_n) = \left(\frac{3n-1}{n+1}\right) = \left(1, \frac{5}{3}, 2, \frac{11}{5}, \frac{7}{3}, \cdots\right)$

olur ki her $n \in \mathbb{N}^+$ için $1 \leq b_n < 3$ yazabiliriz. Buna göre bu (b_n) dizisi hem alttan hem de üsten sınırlıdır. Şu halde sınırlı dizidir. Bu dizinin,

$$\sup b_n = 3, \inf b_n = 1$$

dir.

6.1. Sonuç: Bir (a_n) dizisi ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için, $|a_n| \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ yazılabilir. Yukarıdaki 1. örneğe göre her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$ dir, 2. örneğe göre $\left|\frac{3n-1}{n+1}\right| < 3$ dir.

6.1. Aksiyom: Sabit bir dizi sınırlıdır.

Örnek: $(a_n) = (5)$ sabit dizisi sınırlıdır.

6.4. Tanım: Bir (a_n) dizisi ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için, $m \leq a_n \leq M$ olacak şekilde $m, M \notin \mathbb{R}$ ise (a_n) dizisi sınırsız dizi denir. Yani sınırsız dizi hem alttan hem de üsten sınırı yoktur.

Örnek: $(a_n) = ((-1)^n \cdot n)$ dizisini inceleyelim.

Çözüm: $(a_n) = ((-1)^n \cdot n) = (-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, \cdots)$ olur ki bu (a_n) dizisi ne alttan ne de üsten sınırlı olmadığından sınırsız dizidir.

6.1. Teorem: (a_n) ve (b_n) sınırlı diziler olmak üzere,

i) $(a_n) + (b_n)$
ii) $(a_n) \cdot (b_n)$
iii) $k \cdot (a_n)$, $(k \in \mathbb{R})$

dizileri sınırlıdır.

İspat: (a_n) ve (b_n) birer sınırlı diziler ise,

$|a_n| \leq M_1$ olacak şekilde $M_1 \in \mathbb{R}$
$|b_n| \leq M_2$ olacak şekilde $M_2 \in \mathbb{R}$

vardır. Buna göre,

i) $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ olduğundan

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq M_1 + M_2$$

bulunur ki bu bize $(a_n) + (b_n)$ sınırlı olduğunu gösterir.

ii) $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$ olduğundan

$$|a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot |b_n| \leq M_1 \cdot M_2$$

bulunur ki bu bize $(a_n) \cdot (b_n)$ sınırlı olduğunu gösterir.

iii) $k \cdot (a_n) = (k \cdot a_n)$ olduğundan

$$|k \cdot a_n| \leq |k| \cdot |a_n| \leq |k| \cdot M_1$$

bulunur ki bu bize $k \cdot (a_n)$ sınırlı olduğunu gösterir.

6.2. Teorem: (a_n) sınırlı bir dizi ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $b_n \leq a_n$ ise (b_n) dizisi de sınırlıdır.

İspat: (a_n) sınırlı bir dizi ise,

$|a_n| \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$

vardır. Buna göre,

$$|b_n| \leq |a_n| \leq M$$

yazılabileceğinden (b_n) dizisi de sınırlıdır.

6.3. Teorem: (a_n) sınırsız bir dizi ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n \leq b_n$ ise (b_n) dizisi de sınırsızdır.

İspat: Teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

6.4. Teorem: (a_n) ve (b_n) sınırlı iki dizi, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n \leq c_n \leq b_n$ olacak şekilde (c_n) dizisi varsa, bu (c_n) dizisi sınırlıdır.

İspat: Teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

6.5. Teorem: (a_n) sınırlı bir dizi ise $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ dizisi sınırsızdır.

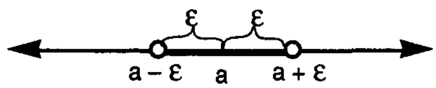
İspat: (a_n) sınırsız bir dizi ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $|a_n| \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ vardır. Buna göre,

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} \geq \frac{1}{M}$$

dir. Şu halde $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sınırlı değildir.

BİR DİZİNİN KOMŞULUĞU

6.5. Tanım: $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olsun. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ açık aralığına a'nın ε komşuluğu denir.



$x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ise $|x-a| < \varepsilon$ dir. Bu durum,

$$|x-a| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < x-a < \varepsilon$$
$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$

şeklindedir.

Örnek: $a = 1$ sayısının $\varepsilon = \frac{1}{100}$ komşuluğunu bulunuz.

Çözüm: $a - \varepsilon = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$

$$a + \varepsilon = 1 + \frac{1}{100} = \frac{101}{100}$$

O halde $a = 1$ in $\varepsilon = \frac{1}{100}$ komşuluğu $\left(\frac{99}{100}, \frac{101}{100}\right)$ dir.

Örnek: $a \in \mathbb{R}$ sayısının ε komşuluğu $(4, 10)$ açık aralığı ise a ve ε sayılarını bulunuz.

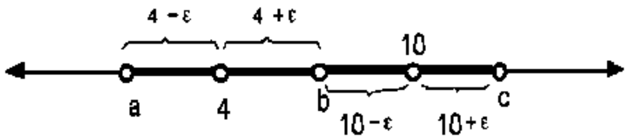
Çözüm: $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = (4, 10)$ ise,

$$a - \varepsilon = 4$$
$$a + \varepsilon = 10$$

denklemleri çözülürse, $a = 7, \varepsilon = 3$ olarak bulunur.

Örnek: 4'ün ε komşuluğu (a, b) ve 10'nun ε komşuluğu (b, c) ise a ve c sayılarını bulunuz.

Çözüm: 4'ün ε komşuluğu (a, b) ve 10'nun ε komşuluğu (b, c) ise



$$b = 4 + \varepsilon = 10 - \varepsilon$$
$$\varepsilon = 3$$

olur. O halde,

$$a = 4 - \varepsilon = 4 - 3 = 1$$
$$b = 4 + \varepsilon = 4 + 3 = 7$$
$$c = 10 + \varepsilon = 10 + 3 = 13$$

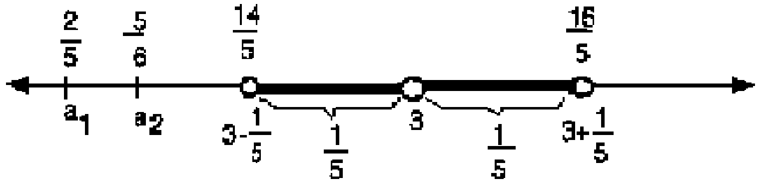
bulunur.

6.1. Not: Verilen bir (a_n) dizisinin bütün elemanları (hemen hemen her terimi) a'nın ε komşuluğunda ise (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ açık aralığının dışında, sonsuz sayıdaki öbür terimlerin tümü $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığının içindedir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{3n-1}{n+4}\right)$ dizinin 3'ün $\frac{1}{5}$ komşuluğu dışında kaç terimi vardır?

Çözüm: 3'ün $\frac{1}{5}$ komşuluğu; $\left(3 - \frac{1}{5}, 3 + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{14}{5}, \frac{16}{5}\right)$ dir.

$a_1 = \frac{3\cdot1-1}{1+4} = \frac{2}{5}, a_2 = \frac{3\cdot2-1}{2+4} = \frac{5}{6}, a_3 = \frac{3\cdot3-1}{3+4} = \frac{8}{7}, \dots, a_{61} = \frac{3\cdot61-1}{61+4} = \frac{14}{5}, \dots$



3'ün $\frac{1}{5}$ komşuluğu dışındaki bir terim ile 3 arsındaki farkın mutlak değeri $\frac{1}{5}$ den büyük veya eşit olması gerekir. Buna göre $|a_n - 3| \geq \frac{1}{5}$ eşitliğini sağlayan bir doğal sayı kadar terim, bu komşuluğun dışındadır.

$$|a_n - 3| \geq \frac{1}{5}$$
$$\left|\frac{3n-1}{n+4} - 3\right| \geq \frac{1}{5}$$
$$\left|\frac{3n-1-3n-12}{n+4}\right| \geq \frac{1}{5}$$
$$\left|\frac{-13}{n+4}\right| \geq \frac{1}{5}$$
$$n \leq 61$$

dir. O halde 61 terim 3'ün $\frac{1}{5}$ komşuluğu dışındadır.

6.2. Not: Bir (a_n) dizisinde $a \in \mathbb{R}$ sayısının ε komşuluğu dışında kalan terimlerin sayısı; $|a_n - a| \geq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan sayma sayılarının sayısı kadardır.

REEL SAYILAR KÜMESİNDE SONSUZ KAVRAMI İLE İLGİLİ İŞLEMLER

Matematikte sonsuz işlemleri aşağıdaki gibidir. Her $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için

1. $a + (+\infty) = +\infty$ $\quad$ $a + (-\infty) = -\infty$
$a - (+\infty) = -\infty$

2. $a \cdot (+\infty) = +\infty, (a > 0)$ $\quad$ $a \cdot (+\infty) = -\infty, (a < 0)$
$a \cdot (-\infty) = -\infty, (a > 0)$ $\quad$ $a \cdot (-\infty) = +\infty, (a < 0)$

3. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $\quad$ $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

4. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ $\quad$ $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

5. $\dfrac{a}{+\infty} = 0$ $\dfrac{a}{-\infty} = 0$

$\dfrac{+\infty}{a} = +\infty, (a > 0)$ $\dfrac{+\infty}{a} = -\infty, (a < 0)$

6. $(+\infty)^n = +\infty$ $(-\infty)^n = +\infty$, (n çift)

$(-\infty)^n = -\infty$, (n tek)

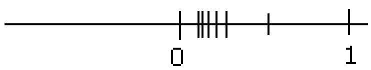
7. $\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$ $\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$, (n tek)

Ama bunların dışında $\dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{\infty}, \dfrac{\infty}{0}, \dfrac{0}{0}, \infty - \infty, 1^\infty, 0^\infty, 0^0, \infty^0, \infty^\infty, 0 \cdot \infty$ gibi işlemleri belirsizlik oluşturur. Belirsizlik durumlarında limit dediğimiz işlemleri yapmak gerekir. Şimdi dizilerde limitin tanımını vermeye çalışalım.

DİZİLERDE LİMİT KAVRAMI

6.6. Tanım: Bir (a_n) dizisinin sonsuz çokluktaki terimleri (hemen hemen her terimi) bir a sayısının ε komşuluğunda, sonlu sayıdaki terimleri komşuluğun dışında kalıyorsa (a_n) dizisinin limiti a'dır denir. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ veya $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ sembollerinden biri ile gösterilir. Bir dizinin limiti a gibi reel bir sayıya eşitse buna yakınsak dizi denir. Bir dizi yakınsak değilse ıraksaktır. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ise dizinin limiti $+\infty$'a ıraksak denir. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ise dizinin limiti $+\infty$'a ıraksak olur.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisini inceleyelim. Bu dizinin terimlerinin açılımı sayı düzlemine bakalım.



$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \cdots\right) = (1; 0{,}5; 0; 66; 0{,}25{,}0{,}20{,}0{,}18; 0{,}14, \cdots)$$

şeklindedir. 0 noktasında alınan her ε komşuluğunun sonlu sayıdaki elemanları komşuluğun dışında sonsuz sayıdaki komşuluğun içinde kalır. Dolayısıyla bu dizinin limiti 0'dır denir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

şeklindedir. Buna göre limiti 0 olduğundan $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi yakınsak dizidir. //

Bu dizide şunlara dikkat etmek gerekir. $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi 0 noktasına yakınsamaktadır. Değerinin 0 oluğuna kesin bir şey denilemez. Bu yüzden limitlerin hangi sayıya yakınsadığını gösterir. Ama limitler yakınsadığı değeri tam alma durumları da mevcuttur.

Yukarıda verilen tanım şu şekilde de verilir.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
(31 Ekim 1815, Ennigerloh, Almanya - 19 Şubat 1897, Berlin, Almanya)

6.7. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için ε'a bağlı en az bir doğal sayı n_ε olsun. $n > n_\varepsilon$ için,

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir n_ε sayısı bulunabiliyorsa, (a_n) limiti a'dır denir. Burada n_ε sayısı ise (a_n) dizisinde a'nın ε komşuluğunda bulunmayan terimlerin sayısıdır.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)$ dizisinin limitinin 1 olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $|a_n - a| < \varepsilon$

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-2}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon$$

$$n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

olur. Her $\varepsilon > 0$ için $\frac{2}{\varepsilon} - 1$ bir doğal sayı ise $n_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} - 1$ den küçük olan en büyük doğal sayı n_ε dur. Bu durum her ε için geçerlidir, özel olarak

$\varepsilon = \frac{1}{10}$ alınırsa $n_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} - 1 = \frac{2}{\frac{1}{10}} - 1 = 19$

bulunur. Bu şu anlama gelir. İlk 19 terim $\varepsilon = \frac{1}{10}$ komşuluğun dışında diğer terimleri komşuluğun içindedir. Buna göre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$ dir. Şu halde yakınsak dizidir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$ dizisinin limitinin 0 olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $|a_n - a| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

olur. Her $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ bir doğal sayı ise $n_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ den küçük olan en büyük doğal sayı n_ε dur. Bu durum her ε için geçerlidir, özel olarak

$\varepsilon = \frac{1}{100}$ alınırsa $n_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100}}} = 10$

bulunur. Bu şu anlama gelir. İlk 10 terim $\varepsilon = \frac{1}{100}$ komşuluğun dışında diğer terimleri komşuluğun içindedir. Buna göre, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ dir. Şu halde yakınsak dizidir.

Örnek: $(a_n) = ((-1)^n)$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu dizinin bir a reel (gerçel) sayısına yakınsadığını varsayalım, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için

$$n > n_\varepsilon \text{ için } |(-1)^n - a| < \frac{1}{2}$$

şartını sağlayan bir n_ε doğal sayısı var olsun, $n_1 > n_\varepsilon$ için n_1 tek sayı, $n_2 > n_\varepsilon$ için n_2 çift sayı olsun.

$$(-1)^{n_1} = -1, (-1)^{n_2} = 1$$

olduğu için,

$$|-1 - a| < \frac{1}{2} \text{ ve } |1 - a| < \frac{1}{2}$$

eşitsizlikleri yazılır. $|1 - a| = |1 + a|$ olduğundan,

$$\left.\begin{array}{l}|1+\mathrm{a}|<\frac{1}{2}\\|1-\mathrm{a}|<\frac{1}{2}\end{array}\right\}|1+\mathrm{a}|+|1-\mathrm{a}|<1$$

dir. Öte yandan,

$$|(1+\mathrm{a})+(1-\mathrm{a})| \leq |1+\mathrm{a}|+|1-\mathrm{a}|<1$$

eşitsizliği, $2<1$ gibi yanlış bir sonuca götüreceğinden, varsayımımız yanlıştır, öyleyse, böyle bir a reel sayısı yoktur. Başka bir deyişle, $((-1)^n)$ dizisi yakınsak değildir.

6.6. Teorem: Yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır.

İspat: Kabul edelim ki (a_n) dizisinin limiti tek olmasın. $a_n \to a\ (n \to \infty)$ ve $a_n \to b\ (n \to \infty)$ gibi iki noktaya yakınsasın. Bu takdirde her $\varepsilon>0$ için ε'a bağlı bir doğal sayı n_ε olsun. $n > n_\varepsilon$ için,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde bir n_ε sayısı bulunabilir.

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Herhangi iki reel sayı arasındaki farkın mutlak değerinin her pozitif sayıdan küçük olması bu iki sayının eşit olması ile mümkün olacağından $a=b$ dir.

6.7. Teorem: Yakınsak her dizi sınırlıdır.

İspat: $a_n \to a\ (n \to \infty)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için ε'a bağlı bir doğal sayı n_ε olsun. $n > n_\varepsilon$ için,

$$|a_n - a| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

olacak biçimde bir n_ε sayısı bulunabilir. Dizinin en fazla n_ε tane terimi $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ aralığının dışında bulunabileceğinden bunların en küçük ve en büyüklerini seçmek mümkündür.

$$m_1 = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_{n_\varepsilon}, a-\varepsilon\}$$
$$m_2 = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{n_\varepsilon}, a+\varepsilon\}$$

denirse her $n \in \mathbb{N}^+$ için $m_1 \leq a_n \leq m_2$ olur. (a_n) alttan ve üstten sınırlı olduğundan sınırlıdır.

6.3. Not: Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Örneğin $((-1)^n)$ dizisi sınırlı fakat limiti olmadığı için ıraksaktır.

6.8. Teorem: (a_n) bir dizi ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} k a_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$$

dir.

İspat: $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}^+$ öyle ki $n > n_\varepsilon$ için $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ kalır. Buna göre her $n > n_\varepsilon$ için

$$|k \cdot a_n - k \cdot a| = |k| \cdot |a_n - a| < |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

olur. Şu halde $\lim_{n\to\infty} k a_n = ka$ dir. Bu takdirde,

$$\lim_{n\to\infty} k a_n = ka = k \lim_{n\to\infty} a_n$$

elde edilir.

6.9. Teorem: (a_n), (b_n) birer dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

dir.

İspat: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}^+$ öyle ki $n > n_1$ için $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ kalır. Yine, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}^+$ öyle ki $n > n_2$ için $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ kalır. $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ denirse her $n > n_\varepsilon$ için

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Şu halde $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ dir. Bu takdirde,

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

bulunur. Bu özelliğin diğer şıkkı benzer şekilde gösterilir.

6.10. Teorem: (a_n), (b_n)birer dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$$

dir.

İspat: (a_n) dizisi yakınsak olduğundan 6.7. teorem gereğince sınırlıdır. $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$ için $|a_n| < M$ olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}^+$ öyle ki

$n > n_1$ için $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|b|+M}$ kalır. (Burada ε yerine $\frac{\varepsilon}{|b|+M}$ alınmasının nedeni sonucun düzgün çıkması içindir.)

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}^+$ öyle ki $n > n_2$ için $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|b|+M}$ kalır. $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ denirse her $n > n_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\le |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\ &< M\frac{\varepsilon}{|b|+M} + |b|\frac{\varepsilon}{|b|+M} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Şu halde $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$ dir. Bu takdirde,

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

bulunur.

6.11. Teorem: (a_n) bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ ise } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$$

dir.

İspat: $a > 0$ olsun. (Eğer $a < 0$ ise dizinin terimlerini (-1) ile çarpmak suretiyle $a > 0$ yapılabilir.) Önce $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ öyle ki $n > n_\varepsilon$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ dur. Yani $\forall\, n > n_\varepsilon$ için $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ dur. Bu eşitliğin sol tarafı kullanılırsa $\forall\, n > n_\varepsilon$ için $a - \varepsilon < a_n$ yazılabilir. ε yeteri kadar küçük seçilebildiğinden $a - \varepsilon > 0$ dır. Şimdi sonlu çoklukta olan $s_1, s_2, \cdots, s_{n_\varepsilon}, s - \varepsilon$ sayılarının en küçüğünü bulabiliriz.

$M = \min\{s_1, s_2, \cdots, s_{n_\varepsilon}, s - \varepsilon\}$

dersek $M > 0$ dır. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $|a_n| \ge M$ ve dolayısıyla $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{M}$ olur. Yani, $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sınırlıdır. $\forall\, \varepsilon > 0$ ve $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ öyle ki $n > n_\varepsilon$ için

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{a_n \cdot a}\right| < |a_n - a| \frac{1}{|a_n| \cdot a} \le \frac{1}{M \cdot a} = \varepsilon$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ dir.

6.6. Sonuç: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ise,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n},\qquad (b_n\neq 0)$$

dir.

İspat: 6.10. teorem ve 6.11. teoreme gereği,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n.\frac{1}{b_n}=a.\frac{1}{b}=\frac{a}{b}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$$

elde edilir. //

Benzer şekilde,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n{}^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\log a_n = \log\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right|$

teoremleri de ispat edilir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{2n+5}{n-3}\right)$ dizisinin $n\to\infty$ için değerini bulunuz.

Çözüm: Bu dizide $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n-3}=\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}=\frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}2+5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}1-3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}=\frac{2+5\cdot 0}{1-3\cdot 0}=2$$

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+10}{2n^2+8n-13}$ işlemini bulunuz.

Çözüm: Bu dizide $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+10}{2n^2+8n-13}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{10}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{8}{n}-\frac{13}{n^2}\right)}=\frac{3}{2}$$

Örnek: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+10n+12}{2n^3-6}$ işlemini bulunuz.

Çözüm: Bu dizide $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+10n+12}{2n^3-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{10}{n}+\frac{12}{n^2}\right)}{n^3\left(2-\frac{6}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$$

Örnek: $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+11n-1}{5n-6}$ işlemini bulunuz.

Çözüm: Bu dizide $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+11n-1}{5n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(7+\frac{11}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(5-\frac{6}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{5}=\infty$$

bulunur. Buna göre bu dizi $+\infty$'a ıraksar. //

Yukarıdaki bu örneklerin sonucunda şu tespiti yapabiliriz.

6.7. Sonuç: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1n^p+a_2n^{p-1}+...+a_{p-1}n+a_p}{b_1n^q+b_2n^{q-1}+...+b_{p-1}n+b_p}$ ifadesi için

1. $p>q$ ise sonuç 0'dır.
2. $p=q$ ise sonuç $\frac{a_1}{b_1}$ dir.
3. $p<q$ ise sonuç ∞ dır.

Örnek: $\lim\limits_{n\to-\infty} \dfrac{3n^2-4n+1}{n^2+n-2}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{n\to-\infty} \dfrac{3n^2-4n+1}{n^2+n-2} = \lim\limits_{n\to-\infty} \dfrac{n^2\left(3-\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)} = 3$

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+4n-10}}{\sqrt{9n^2-7}}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+4n-10}}{\sqrt{9n^2-7}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2\left(3+\dfrac{4n}{n}-\dfrac{10}{n^2}\right)}}{\sqrt{n^2\left(9-\dfrac{7}{n^2}\right)}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+10n-5}}{n-3}$ işlemini bulunuz.

Çözüm: Bu dizide $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+10n-5}}{n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(4+\dfrac{10}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)}}{n\left(1-\dfrac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{\left(4+\dfrac{10}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)}}{n\left(1-\dfrac{3}{n}\right)} = 3$$

elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n-3}{\sqrt{n^4-6n+5}}$ işlemini bulunuz.

Çözüm: Bu dizide $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n-3}{\sqrt{n^4-6n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\dfrac{4}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}{\sqrt{n^4\left(1-\dfrac{6}{n^3}+\dfrac{5}{n^4}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\dfrac{4}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{\left(1-\dfrac{6}{n^3}+\dfrac{5}{n^4}\right)}} = 1$$

elde edilir.

Örnek: $(a_n)=\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}2k}{5n^2-3n+1}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: Bu dizide $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. $\sum\limits_{k=1}^{n}2k=n(n+1)$ olduğunu toplam ve çarpım sembolü bölümünden biliyoruz. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}2k}{4n^2-3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{5n^2-3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n)}{5n^2-3n+1}\right)=\frac{1}{5}$$

olarak bulunur.

Örnek: Genel terimi,

$$a_n=\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$$

olan dizinin limitini bulunuz.

Çözüm: Toplam ve çarpım sembolü konusunda,

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek: $(a_n)=\left(\dfrac{2^n-2^{n-1}}{2^n+2^{n+1}}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: Bu dizide $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-2^{n-1}}{2^n+2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n(1-2^{-1})}{2^n(1+2)}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}$$

elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3.n^n+n!}{8.n^n}\right)$ işlemini bulunuz.

Çözüm: Bu dizide $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3.n^n+n!}{8.n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n\left(3+\frac{n!}{n^n}\right)}{8.n^n}\right) \qquad (1)$$

bulunur. Burada,

$$\frac{n!}{4\cdot n!^{n}}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{4\cdot\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{n\text{ tane}}}\leq\frac{1\cdot\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{n-1\text{ tane}}}{4\cdot\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{n\text{ tane}}}=\frac{1}{4n}$$

yazılabileceğinden $0\leq\dfrac{n!}{4\cdot n!^{n}}\leq\dfrac{1}{4n}$ dir. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}=0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{4.n^n}=0$ olduğu görülür. (1) eşitliği,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3.n^n+n!}{8.n^n}\right)=\frac{3}{8}$$

olur.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2-n}-\dfrac{2}{n^2-1}\right)$ ifadesinde $\infty-\infty$ belirsizliğini gideriniz.

Çözüm:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2-n}-\frac{2}{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{2}{(n-1)(n+1)}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)}{n(n-1)(n+1)}-\frac{2n}{n(n-1)(n+1)}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n}{n(n-1)(n+1)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$
$$=0$$

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-2}}$ ifadesinde $\infty-\infty$ belirsizliğini gideriniz.

Çözüm: Bu dizide $\frac{1}{\infty-\infty}$ belirsizliği vardır. Bu işlemlerde paydanın eşleniği alınarak çözmek almamız gerekir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-2}}{n-(n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-2}}{2}=\infty$$

şeklindedir.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2n}-\sqrt{2n+1}$ ifadesinde $\infty-\infty$ belirsizliğini gideriniz.

Çözüm: Bu dizide $\infty-\infty$ belirsizliği vardır. Bu belirsizliği gidermek için paydada 1 olduğunu unutmayarak payın eşleniğini alalım.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}-\sqrt{2n+1}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-(2n+1)}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}=0$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{n\to-\infty}\sqrt{n^2-3n-1}+n$ ifadesinde $\infty-\infty$ belirsizliğini gideriniz.

Çözüm: Pay ve paydayı $(\sqrt{n^2-3n-1+n})$ nın eşleniğini $(\sqrt{n^2-3n-1+n})$ ile çarpalım. ($n\to-\infty$ için $|n|=-n$)

$$\lim_{n\to-\infty}\sqrt{n^2-3n-1}+n=\lim_{n\to-\infty}(\sqrt{n^2-3n-1}+n)\frac{(\sqrt{n^2-3n-1}-n)}{(\sqrt{n^2-3n-1}-n)}$$
$$=\lim_{n\to-\infty}\frac{(n^2-3n-1-n^2)}{(\sqrt{n^2-3n-1}-n)}$$
$$=\lim_{n\to-\infty}\frac{-3n-1}{(\sqrt{n^2-3n-1}-n)}$$

$$= \lim_{n\to-\infty} \frac{n\left(-3-\frac{1}{n}\right)}{\left(|n|.\sqrt{1-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}-1\right)}$$
$$= \frac{-3}{-\sqrt{1}-1}$$
$$= \frac{3}{2}$$

Örnek: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cos n}{n}\right)$

dizisinin değerini bulunuz.

Çözüm: a) Sinüsün değerlerini hatırlayacak olursak, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $-1 \le \sin n \le 1$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizliğin her üç tarafını n'ye bölersek,

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$$

bulunur. Şimdi her üç tarafın limitini alırsak,

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

olur. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ olduğunu bildiğimize göre

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} \le 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$$

elde edilir.

b) a'ya benzer şekilde yapılır.

6.12. Teorem: $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} \infty & , \quad a>b \\ 0 & , \quad a<b \end{cases}$ dir.

İspat: Önce $a > b$ olma durumunu inceleyelim. $\frac{a}{b} > 1$ bileşik kesir olduğundan $\frac{a}{b} = c + \frac{d}{b}$ olacak şekilde $c \in \mathbb{R}^+$ ve $\frac{d}{b}$ basit kesri bulunabilir. Buna göre $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$c < c + \frac{d}{b} = \frac{a}{b}$$

$$c^n < \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} c^n < \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} c^n = \infty \text{ ise } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n = \infty$$

elde edilir.

Şimdi $a < b$ olma durumunu inceleyelim. $\frac{a}{b} < 1$ basit kesri olduğuna göre $\frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}$ bileşik kesri elde edilir. O halde,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n = \infty$$

dir. Yine $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ olduğunu hatırlarsak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

elde edilir.

Örnek: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n$ ifadesinin sonucu, $4 < 7$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$ dır.

Örnek: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{5}\right)^n$ ifadesinin sonucu, $12 > 7$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{5}\right)^n = \infty$ dır.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3.6^n+2.5^n}{9.6^n}$ ifadesinin sonucu nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3.6^n+2.5^n}{9.6^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3.6^n}{9.6^n}+\dfrac{2.5^n}{9.6^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

Örnek: $(a_n) = \left(\dfrac{5^4-4^n}{5^n+2^n}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5^n-4^n}{5^n+2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{5^n\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}\right]=1$

Örnek: $(a_n) = (0{,}6777\cdots)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
0{,}6777\cdots &= \frac{6}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{7}{10^4}+\cdots+\frac{7}{10^{n+1}}+\cdots \\
&= \frac{6}{10}+\frac{7}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}+\cdots\right) \\
&= \frac{6}{10}+\frac{7}{10^2}\left(1+\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

bulunur. 6.13. teoreme göre $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right]=\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{10}{9}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{10}{9}$dur.

Buna göre (1) eşitliği,

$$0{,}6777\cdots = \frac{6}{10}+\frac{7}{10^2}\cdot\frac{10}{9}=\frac{61}{90}$$

olarak elde edilir.

e SAYISI ve LİMİTİ

Leonhard Euler
(15 Nisan 1707, İsviçre, Basel -18 Eylül 1883, St. Petersburg, Rusya)

6.8. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}^{+}$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$ sayısı denir. Bu sayı $e \cong 2{,}71828182845904535360287471352 7\cdots$ değerine eşittir. Şimdi e sayısının değerini bulalım.

$n \in \mathbb{N}^{+}$ olmak üzere $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ nin Binom açılımına uygulayalım.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \binom{n}{0}1^{n} + \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{1} + \binom{n}{2}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^{2} + \binom{n}{n}.1^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^{3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^{3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{(1-\frac{1}{n})}{2!} + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$= 2{,}71828182845904535360287471352 7\cdots$$

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$ işlemini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3}=e^{3}$ elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n}$ işlemini bulunuz.

Çözüm: Bu işlemde $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k}$ seçelim. n = 4k bulunur. Ayrıca n → ∞ iken k → ∞ olacağından

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{4k}=\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{4}=e^{4}$$

elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^{12n}$ işlemini bulunuz.

Çözüm: Bu işlemde $-\dfrac{5}{n}=\dfrac{1}{k}$ seçelim. n = −5k bulunur. Ayrıca n → ∞ iken k → ∞ olacağından

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^{4n}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-5.12k}=\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{-60}=e^{-60}$$

elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+8}{n}\right)^{n+3}$ işlemini bulunuz.

Çözüm: Bu işlemde $\dfrac{8}{n}=\dfrac{1}{k}$ seçelim. n = 8k bulunur. Ayrıca n → ∞ iken k → ∞ olacağından

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n}\right)^{n}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{8k+3}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{8k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{3}=\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{8}=e^{8}$$

elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)^n$

Bu işlemde $\dfrac{2}{n-1} = \dfrac{1}{k}$ seçelim. $n = 2k + 1$ bulunur. Ayrıca $n \to \infty$ iken $k \to \infty$ olacağından

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^2.\left(1+\frac{1}{k}\right) = e^2$$

bulunur.

DİZİLERİN LİMİTLERİN SUPREMUM ve İNFUMUMU

6.17. Tanım: (a_n) ıraksak bir dizi ve A'da (a_n) dizisinin alt dizilerin limitlerinin kümesi olsun. sup A ve inf A sayılarına, sırasıyla, (a_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Üst limit, $\limsup a_n$ veya $\overline{\lim}\, a_n$, alt limit $\liminf a_n$ veya $\underline{\lim}\, a_n$ ile gösterilir.

Bu tanımdan $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ olacağı açıktır.

Örnek: $(a_n) = \left[(-1)^n \cdot \dfrac{2n+1}{2n}\right]$ dizinin $\overline{\lim}\, a_n$ veya $\underline{\lim}\, a_n$'ını bulunuz.

Çözüm: (a_n) dizisinin tüm pozitif terimlerinden oluşan alt dizisi (a_{2n}) dir.

$$(a_{2n}) = \left(\frac{4n+1}{4n}\right)$$

(a_n) dizisinin tüm negatif terimlerinden oluşan alt dizisi (a_{2n-1}) dir.

$$(a_{2n-1}) = \left(-\frac{4n-1}{4n-2}\right)$$

(a_{2n}) ve (a_{2n-1}) dizilerinin ikisi de monoton olduğundan, bu dizilerin birinci terimleri ile limitlerini bulalım.

$$\lim(a_{2n}) = \lim\left(\frac{4n+1}{4n}\right) = 1 \text{ ve } a_2 = \frac{5}{4}$$

$$\lim(a_{2n-1}) = \lim\left(-\frac{4n-1}{4n-2}\right) = -1 \text{ ve } a_1 = -\frac{3}{2}$$

bulunur. O halde,

$$\left.\begin{array}{r} 1 < a_{2n} \leq \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} \leq a_{2n-1} < -1 \end{array}\right\}$$

$$-\frac{3}{2} \leq a_n \leq \frac{5}{4}$$

dir. Buna göre,

$$\inf a_n = -\frac{3}{2}, \sup a_n = \frac{5}{4}, \overline{\lim}\, a_n = 1 \text{ veya } \underline{\lim}\, a_n = -1$$

olarak bulunur.

6.8. Sonuç: (a_n) yakınsak bir dizi ise

$$\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$$

dir.

YAKINSAK ve IRAKSAK DİZİLERİN TEOREMLERİ

6.14. Teorem: Bir (a_n) dizisinin limiti a ise, tüm (a_{n_k}) alt dizilerinin limiti de a'dır. Yani,

$$(a_{n_k}) \subset (a_n) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ ise } \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$$

dir.

İspat: $a_n \to a\ (n \to \infty)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ aralığındadır. (a_{n_k}) dizisinin terimleri aynı zamanda (a_n) dizisinin terimleri olacağından (a_{n_k}) dizisinin de sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ aralığındadır. Şu halde $a_n \to a\ (n \to \infty)$ dir.

6.4. Not: Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Mesela $(a_n) = \left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right)$ dizisinin $(a_{2n}) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)$ ve $(a_{2n-1}) = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)$ alt dizileri yakınsak oldukları halde kendisi yakınsak değildir.

Örnek: (a_n) dizisinin limiti mevcut, pozitif terimli bir dizi olsun. Alt dizileri arasında $a_n - \frac{3}{a_{2n}} = 2$ bağıntısı vardır. Buna göre $\lim a_n$ nin değeri nedir?

Çözüm: Her iki tarafa limitini alalım ve limitin özelliklerini kullanalım.

$$\lim\left(a_n - \frac{3}{a_{2n}}\right) = \lim 2$$

$$\lim a_n - \frac{3}{\lim a_{2n}} = \lim 2$$

$\lim a_n = x$ dersek bütün alt dizilerinin limiti de x'dir. Buna göre,

$$x - \frac{3}{x} = 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = -1 \ \wedge x = 3$$

dir. Dizi pozitif terimli olduğundan $\lim a_n = 3$ dür.

6.9. Sonuç: Iraksak bir alt dizinin kendisi de ıraksaktır.

6.15. Teorem: Bir dizi monoton ve sınırlı ise o dizi yakınsaktır.

İspat: (a_n) monoton artan ve sınırlı olsun. $\sup a_n = a$ diyelim. a bir üst sınır olduğundan her $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$a_n \leq a$$

dir. Supremumun özelliğinden, her $\varepsilon > 0$ için,

$$a_n - \varepsilon \leq a_{n_\varepsilon}$$

olacak şekilde en az bir a_{n_ε} doğal sayısı vardır. (a_n) monoton artan olduğundan $n > n_\varepsilon$ için

$$a_n - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

yazılabilir ki, bu (a_n) dizisinin a ya yakınsadığını gösterir. Şu halde (a_n) monoton artan ve sınırlı olduğundan

$$\lim a_n = \sup a_n$$

dir. Dizi monoton azalan olduğunda ispat benzer şekilde yazılabilir. Bu durumda,

$$\lim a_n = \inf a_n$$

olur.

Örnek: Genel terimi $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ olan dizinin yakınsak olduğunu gösterimiz.

Çözüm: 5.9. tanım uygulanırsa,

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > 0$$

olduğundan (a_n) dizisi monoton artandır.

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} < 1$$

olduğundan (a_n) dizisi sınırlıdır. O halde monoton ve sınırlı bir dizi olduğuna göre (a_n) dizisi yakınsaktır.

6.10. Sonuç: (a_n) dizisi üstten sınırlı ve monoton artan bir dizi ise,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$$

dir.

6.11. Sonuç: (a_n) dizisi alttan sınırlı ve monoton azalan bir dizi ise,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$$

dir.

6.16. Teorem (Bolzano – Welerstrass): Her sınırlı dizinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır.

İspat: (a_n) bir sınırlı dizi olsun. Bu takdirde her $n \in \mathbb{N}^+$ için $|a_n| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı bulunabilir. Bu durum,

$$-M \leq a_n \leq M$$

dir. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için sonsuz çoklukta terim,

$$-M \leq a_n - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \leq M$$

olacak şekilde a noktası bulunabilir. Buna göre $(a_{n_k}) \subset (a_n)$ alt dizisi

$$a_n - \varepsilon < a_{n_k} < a + \varepsilon$$

yazılabilir. Bu durum her $\varepsilon > 0$ sayısı için $|a_{n_k} - a| \leq \varepsilon$ bulunur.

CAUCHY DİZİSİ


Augustin Louis Cauchy
(21 Ağustos 1789, Paris-Fransa, 23 Mayıs 1857, Sceaux-Fransa)

6.18. Tanım: (a_n) bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $m, n > n_\varepsilon$ ise $|a_n - a_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_ε sayısı varsa (a_n) dizisine Cauchy (koşi) dizisi denir.

Örnek: $(a_n) = \left(\frac{2n-1}{n}\right)$ dizisi bir Cauchy dizisi midir?

Çözüm:
$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \left|\frac{2(n+1)-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n}\right| \\ &= \left|\frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n}\right| \\ &= \left|\frac{2n^2+n}{n^2+n} - \frac{2n^2-n+2n-1}{n^2+n}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n^2+n}\right| \\ &< \frac{1}{n^2} \to 0 \end{aligned}$$
O halde bir Cauchy dizisidir.

6.17. Teorem: Bir dizi yakınsak ise o dizi Cauchy dizisidir. Ama bunun tersi doğru değildir.

İspat: (a_n) bir yakınsak dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $n > n_\varepsilon$ vardır ki $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ kalır. Buna göre $m, n > n_\varepsilon$ için

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur ki (a_n) dizisi Cauchy dizisidir.

Şimdi bu teoremin tersinin doğru olmadığını gösterelim. Bunun için bir örnek verelim:

$(a_n) = (\sqrt{n})$ dizisi ıraksak bir dizidir ama Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}|a_{n+1} - a_n| &= \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| \\ &= \left|\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \\ &= \left|\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \to 0\end{aligned}$$

olup Cauchy dizisidir.

6.18. Teorem: Eğer bir Cauchy dizisinin bir alt dizisi yakınsak ise kendisi de yakınsaktır. Her iki dizide aynı noktaya yakınsar.

İspat: (a_n) Cauchy bir dizi ve (a_{n_k}) alt dizisi de yakınsak olsun. Verilen öyle bir $m, n > n_\varepsilon$ vardır ki $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ kalır. Ayrıca (a_{n_k}) alt dizisi de yakınsak olduğundan $n_k > M$ olduğunda $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir M sayısı mevcuttur. Şimdi $P = \max\{n_\varepsilon, M\}$ olmak üzere her $n, n_k > M$ için

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

gerçeklenir. O halde (a_n) dizisi de a noktasına yakınsar.

6.19. Teorem: Her Cauchy dizisi sınırlı dizidir.

İspat: (a_n) Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon = 1$ alalım. Öyle bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ vardır ki $m, n > n_\varepsilon$ için $|a_n - a_m| < 1$ olur. $m = n_\varepsilon$ alınırsa $n > n_\varepsilon$ için $|a_n - a_{n_0}| < 1$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}&|a_n - a_{n_0}| < 1 \\ &-1 < a_n - a_{n_0} < 1 \\ &a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla her $n > n_\varepsilon$ için

$$|a_n| < |a_{n_0}| + 1$$

olur.

$$B = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_\varepsilon}|, |a_{n_\varepsilon}| + 1\}$$

denirse her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n \leq B$ olur. Bu da (a_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterir.

6.20. Teorem: (a_n) ve (b_n)birer Cauchy dizisi ise;
a) $(a_n + b_n)$ de bir Cauchy dizisidir.
b) $(a_n - b_n)$ de bir Cauchy dizisidir.
c) $(a_n \cdot b_n)$ de bir Cauchy dizisidir.

Bu teoremin ispatı yakınsak dizilerinin ispatına benzer olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+\sqrt{9x^2+5x-1}}{x+\sqrt{x^2-x+4}}$ değeri neye eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x+\sqrt{9x^2+5x-1}}{x+\sqrt{x^2-x+4}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x+\sqrt{x^2\left(9+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}{x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}$$
$$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(5+\sqrt{9+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)}$$
$$= \frac{5+\sqrt{9}}{1+1}$$
$$= 4$$

Cevap: C

2. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots$ dizisi hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Limiti 0'dır B) Yakınsaktır C) Iraksaktır
D) Limiti 1 dir E) Limiti yoktur

Çözüm: $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots$, dizisinin genel terimi $\frac{n+1}{n}$ dir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = 1$$

elde edilir. Limiti var ve reel bir sayı olduğundan yakınsak dizidir.

Cevap: B

3. Aşağıdaki dizilerden hangisi yakınsaktır?

A) (2^n) B) $\left(n+\frac{1}{n}\right)$ C) (n) D) $\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)$ E) $\left((-1)^n \frac{n}{n-1}\right)$

Çözüm: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$

olup yakınsaktır. Diğer şıklar ıraksaktır.

Cevap: D

4. Aşağıdakilerden dizilerden hangisi yakınsaktır?

A) $\left(\frac{n}{2}\right)$ B) (2^n) C) $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$ D) $\left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right)$ E) $\left(\frac{3n-1}{2n+3}\right)$

Çözüm:

A) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$ olup ıraksaktır

B) $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$ olup ıraksaktır

C) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = \infty$ olup ıraksaktır

D) $(-1)^n$ ifadesinin tek ve çift olmasına göre,

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right) = \pm 1$$

olacağından ıraksaktır.

E) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(3-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}=\dfrac{3}{2}$ olup yakınsaktır

Cevap: E

5. (a_n) pozitif terimli yakınsak bir dizi ve $a_n \cdot a_{4n} - 8 = 2a_{2n}$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nedir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: (a_n) yakınsak dizinin limit a ise, dizinin tüm (a_{4n}) alt dizisi de yakınsak ve limiti a'dır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} 4a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} 2a_n = a$$

olacağından verilen denklem,

$$a^2 - 8 = 2a$$
$$a^2 - 2a - 8 = 0$$
$$a_1 = -2 , a_2 = 4$$

şeklinde çözülür. a_n pozitif terimli yakınsak bir olduğundan $a = 4$ dür.

Cevap: A

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n+3^{-n}}{3^n-3^{-n}}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\infty$ B) ∞ C) -1 D) 1 E) 3

Çözüm: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n+3^{-n}}{3^n-3^{-n}}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+\dfrac{1}{3^n}}{3^n-\dfrac{1}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2n}+1}{3^{2n}-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2n}\left(1+\dfrac{1}{3^{2n}}\right)}{3^{2n}\left(1-\dfrac{1}{3^{2n}}\right)}=1$$

Cevap: D

7. $a_n = \sqrt{3 + 2a_{n-1}}$ biçiminde tanımlanan (a_n) dizisinin limiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = a$ alınırsa;

$a = \sqrt{2a + 3}$
$a^2 = 2a + 3$
$a^2 - 2a - 3 = 0$
$a = 3, a = -1$

bulunur.

Cevap: C

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{1}\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}\cdot n!}$ değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Cevap:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{n!}{3!(n-3)!}\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2\cdot (n-3)!\cdot n!}{(n-1)!\cdot 2\cdot (n-2)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n-3)!n(n-1)!}{(n-1)!(n-2)(n-3)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n-2}$$

$$= 3$$

Cevap: A

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+7}{3x+4}\right)^{2x-1}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) e^4 D) e^3 E) e^2

Çözüm: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+7}{3x+4}\right)^{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{3x+4}\right)^{2x-1}$

$\frac{3}{3x+4} = \frac{1}{k}$ seçelim. $x = \frac{3k-4}{3}$ bulunur. Ayrıca $x \to \infty$ iken $k \to \infty$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2\left(k-\frac{4}{3}\right)-1} = \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k-\frac{11}{3}} = \left[\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^2 . \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\frac{11}{3}} = e^2.1^{-\frac{11}{3}} = e^2$$

Cevap: E

10. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^3$ değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $\frac{2}{x} = \frac{1}{k}$ seçelim. $x = 2k$ bulunur. Ayrıca $x \to \infty$ iken $n \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{6n} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^6 = e^6$$

elde edilir. Buna göre,

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^3 = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \ln e^6 = 6\ln e = 6$$

olur.

Cevap: B

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$ limitinin değeri kaçtır?

A) – 2 B) −1 C) 0 D) 1 E) $\frac{5}{2}$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right) = \infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x}-x}{(\sqrt{x^2+5x}+x)}.(\sqrt{x^2+5x}+x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+5x)-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1}$$

$$= \frac{5}{2}$$

Cevap: E

12. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}) = \infty - \infty$ belirsizliği vardır. Bu belirsizliği giderebilmek için verilen cebirsel ifadenin eşleniği pay ve payda ile çarpılmalıdır.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= 0$$

Cevap: A

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-2x}+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$ limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-2x}+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{2x}}+3e^{2x}}{x+e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{4x}}+3\right)}{e^{2x}\left(\frac{x}{e^{2x}}+1\right)}=3$$

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz I-II, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.
3. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
4. Murray R. SPIEGEL, Çeviri: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Nobel Yayın Dağıtım, 1997.
5. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
6. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
7. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
8. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
9. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
10. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
11. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
12. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
13. George B. THOMAS, Thomas Calculus, Massachusetts Institute of Technology, University of California, Çeviri Recep Korkmaz, Beta, 2009, İstanbul.
14. Doç. Dr. Ali DÖNMEZ, Gerçel Analiz, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1985.
15. Prof. Dr. Necdet SAN, Analiz Dersleri, Baylan Matbaası, 1975, Ankara.
16. Prof. Dr. Rahim OCAK, Reel Analiz, Erzurum, 1998.
17. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.

18. Yrd. Doç. Dr. Ersin Erol, Yüksek Matematiğe Giriş, Marmara Üniversitesi Yayınları, 1991, İstanbul.
19. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.