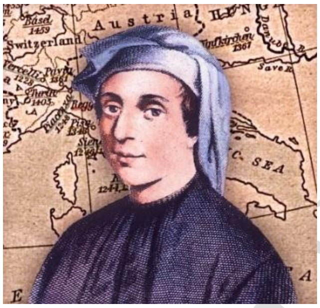
7. BÖLÜM
FİBONACCİ DİZİSİ ve ALTIN ORAN

FIBONACCİ DİZİSİ [1] KAVRAMI



Leonardo Fibonacci
1170-1250 , Pisa, İtalya

7.1. Tanım: Dizinin ilk iki terimi 1 ve ondan sonraki terimleri kendinden önceki terimlerinin toplamı sonucu oluşan bir sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. O halde, Fibonacci dizisi, $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere;

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & n > 2 \end{cases}$$

biçimindedir. Buna göre;

$$(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots)$$

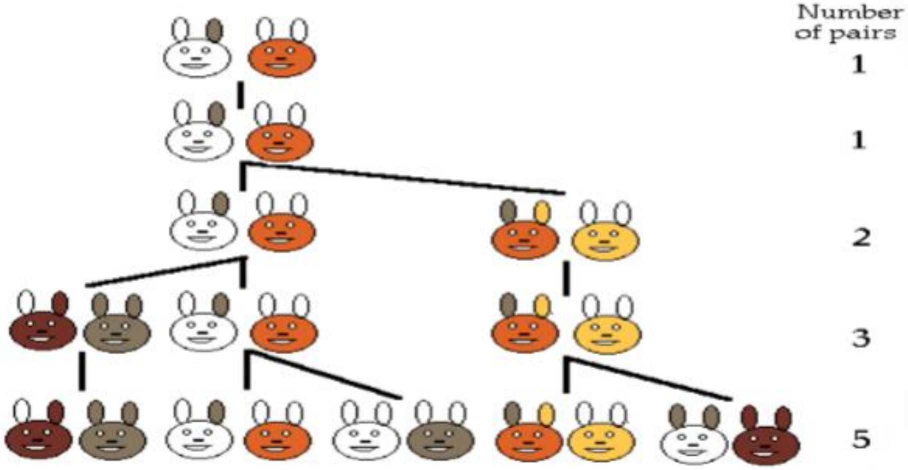
dizisi bir Fibonacci dizisidir. Gerçekten;

$1 + 1 = 2,\ 1 + 2 = 3,\ 2 + 3 = 5,\ 3 + 5 = 8,\ 5 + 8 = 13,\ 8 + 13 = 21,\ 13 + 21 = 34,\ 21 + 34 = 55,\ 34 + 55 = 89,\ 55 + 89 = 144,\ 89 + 144 = 233, \ldots$

[1] Doğum ve ölüm yılı kesin olarak bilinmiyor, tahmini 1170-1250 yılları arasında yaşamıştır. 1202 yılında Liner Abaci (Cebir Kitabı), 1225 yılında Liber Quadratornum (Kare Sayıların Kitabı) kitaplarını yazmıştır.

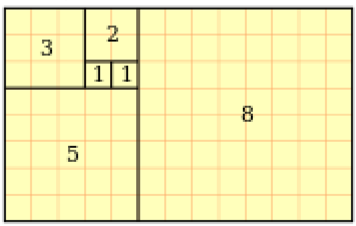
Örnek: Fibonacci dizisinin ilk temelini atan Leonardo Fibonacci Liner Abaci kitabında şöyle bir soru sormuştur: “Kapalı bir mekânda bir çift yavru tavşan (bir erkek ve bir dişi) var. Bir ay sonra bu yavrular erginleşiyor. Erginleşen her çift tavşan bir ay sonra bir çift yavru doğuruyor. Her yavru tavşan bir ay sonra erginleşiyor. Hiçbir tavşanın ölmediği ve her dişi tavşanın bir erkek, bir dişi yavru doğurduğunu varsayalım. Bir yıl sonra kaç tane tavşan olur?”

Çözüm: 1) İlk ayın sonunda sadece bir çift var.
2) 2. ayın sonunda dişi bir çift yavru doğurur ve elimizde 2 çift tavşan var.
3) 3. ayın sonunda ilk dişimiz bir çift yavru doğurur, 3 çift tavşanımız olur.
4) 4. ayın sonunda ilk dişimiz yeni bir çift yavru daha doğurur, iki ay önce doğan dişi de bir çift yavru doğurur ve 5 çift tavşanımız vardır.

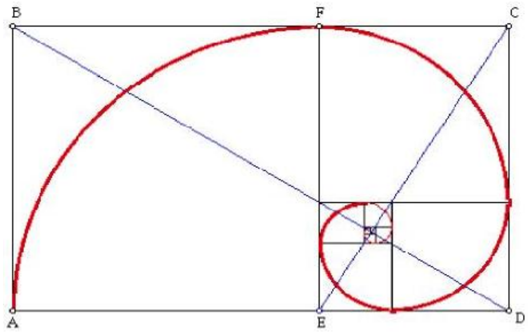


Bu şekilde devam ederek şu diziyi elde ederiz: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

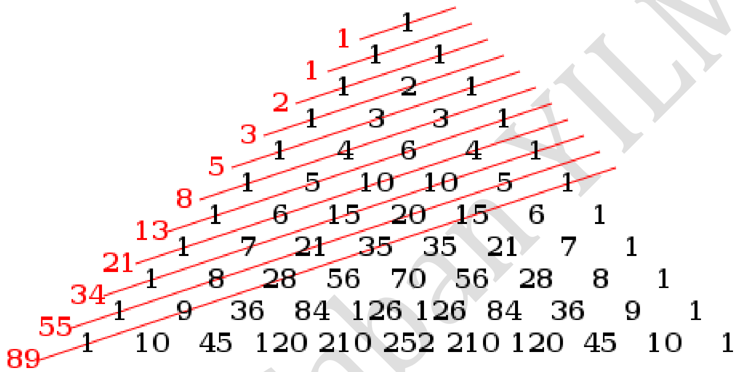
Örnek: Aşağıda verilen şekil Fibonacci dizisinin terimleridir.



Şekilde köşeleri 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... biçiminde kareler oluşur. Çizilen bu kareler Fibonacci dizisinin terimlerini verir. Burada ilk 1 sayısının oluşturduğu kareden başlayarak bir sarmal çizilirse, çizilen bu sarmala altın oran sarmal adı verilir. Aşağıdaki şekilde altın sarmal verilmiştir.



Örnek: Paskal üçgeninin şekildeki gibi yazımı Fibonacci dizisinin terimlerini verir.



7.1. Teorem: n'nin r'li kombinasyonu $\binom{n}{r}$ olmak üzere;

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-r}{r-1}$$

dir. Burada $r = \begin{cases} \frac{n}{2}, \text{n çift ise} \\ \frac{n+1}{2}, \text{n tek ise} \end{cases}$ biçimindedir.

İspat: tümevarım yöntemiyle yapalım.

$n = 1$ için $r = \frac{1+1}{2} = 1$ olup $F_1 = \binom{1-1}{0} = 1$ doğrudur.

$n = k$ için $\binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + \cdots + \binom{k-r}{r-1}$ doğru olduğunu kabul edip $n = k+1$ için doğruluğunu bulalım. Kombinasyon konusunda;

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$

olduğu bilinmektedir. Buna göre aşağıdaki yazılabilir.

$$\binom{k-1}{0} \qquad\qquad = \binom{k}{0}$$
$$\binom{k-2}{1} + \binom{k-2}{0} = \binom{k-1}{1}$$
$$\binom{k-3}{2} + \binom{k-3}{1} = \binom{k-2}{2}$$
$$\binom{k-4}{3} + \binom{k-4}{2} = \binom{k-3}{3}$$
$$\binom{k-5}{4} + \binom{k-5}{3} = \binom{k-4}{4}$$
$$\ldots$$

eşitliklerin 1. kombinasyonlarının toplamı F_k yı, 2. kombinasyonların toplamı F_{k-1} i verir. Eşitliğin karşı taraflarının toplamı F_{k+1} i vereceğinden,

$$F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$$

eşitliği gerçekleşir.

Örnek: F_7 yi bulunuz.

Çözüm: $n = 7$ alınırsa $r = \frac{7+1}{2} = 4$ olur.

$$F_7 = \binom{7-1}{0} + \binom{7-2}{1} + \binom{7-3}{2} + \binom{7-4}{4-1}$$
$$= \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3}$$
$$= 1 + 5 + 6 + 1$$
$$= 13$$

Örnek: F_8 yi bulunuz.

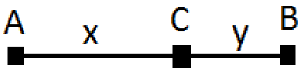
Çözüm: $n = 8$ alınırsa $r = \frac{8}{2} = 4$ olur.

$$F_8 = \binom{8-1}{0} + \binom{8-2}{1} + \binom{8-3}{2} + \binom{8-4}{4-1}$$
$$= \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3}$$
$$= 1 + 6 + 10 + 4$$
$$= 21$$

ALTIN ORAN KAVRAMI

Leonardo da Vinci
15 Nisan 1452, Anchiano, İtalya - 2 Mayıs 1519, Clos Lucé, Amboise, Fransa

7.2. Tanım: Bir |AB| doğru parçasında alınan C noktasında, bütün parçanın büyük parçaya oranı, büyük parçanın küçük parçaya oranına eşitlenirse, seçilen bu C noktasına altın nokta denir.



$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

Bu tanımda $\frac{x}{y} = \varphi$ seçilirse bu eşitlik $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$ bulunur. Buradan,

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

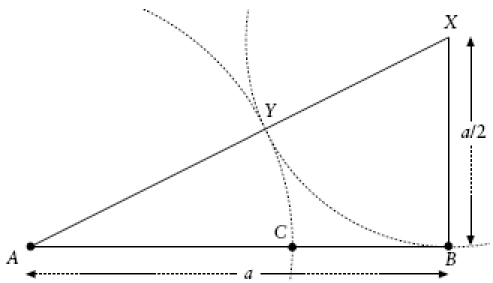
eşitliği elde edilir. Bu eşitlik çözümlenirse,

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874989484820458683436\,56\cdots$$

sayısı elde edilir.

7.1. Not: |AB| doğru parçası için elde edilen C noktası |BA| doğru parçası için geçerli olmaz. Ama |BA| doğru parçası için D gibi farklı bir altın nokta bulunabilir.

Bir doğru üzerinde altın nokta şu şekilde elde edilebilir:



|AB| doğru parçası için B noktasında bir |AB| doğru parçasının yarısı kadar |BX| dik doğru çizelim. ABX dik üçgenini çizilmiş olur. X merkezli XB

yarıçaplı çember AX hipotenusunu Y'de kessin. Şimdi A merkezli AY yarıçaplı çemberin $|AB|$ doğru parçasını kestiği C noktası $|AB|$'nin altın noktasıdır. Bunun bilgilerin ispatı açık olduğundan ve okuyucuya bırakılmıştır.

7.3. Tanım: Altın noktada elde edilen

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887498948482045868343656\cdots$$

sayısına altın oran adı verilir. [2]

7.2. Not: $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ olduğundan φ ile $\frac{1}{\varphi}$ sayıları aynı ondalık kısma sahiptirler;

$$\varphi = 1{,}61803398875\cdots$$
$$\frac{1}{\varphi} = 0{,}61803398875\cdots$$

7.3. Not: $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ denkleminden $\varphi^2 = \varphi + 1$ ifadesi elde edildiğini unutmayalım.

Örnek: $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = x$ olsun. Bu takdirde $\sqrt{1+x} = x$ olur. 7.3. nottan görüldüğü gibi $x = \varphi$ dir. Şu halde

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

olur. //

7.2. Teorem: Her $n \in \mathbb{N}^+, n > 2$ için;

$$\varphi^n = F_{n-1} \cdot \varphi + F_{n-2}$$

dir.

İspat: Tümevarım yöntemiyle gösterelim.

---

[2] Leonardo da Vinci, altın oran sayısını "İlahi Oran" adlı çalışmasında anlatmıştır. Kendi resimlerinde bu oranı kullanmıştır.

P(2): için $n=2$ olacağından $\varphi^2 = 1\cdot\varphi + 1$ olduğu yukarıda gösterilmiştir.

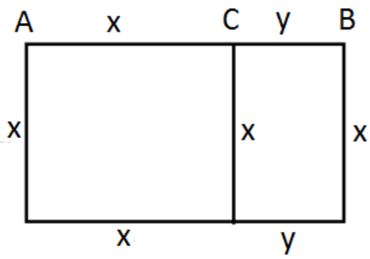
P(n): için $n=k$ olduğunda $\varphi^k = F_{k-1}\cdot\varphi + F_{k-2}$ doğru olsun, $n=k+1$ olduğunda $\varphi^{k+1} = F_k\cdot\varphi + F_{k-1}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\varphi^{k+1} &= \varphi^k\cdot\varphi\\
&= (F_{k-1}\cdot\varphi + F_{k-2})\cdot\varphi\\
&= F_{k-1}\cdot\varphi^2 + F_{k-2}\varphi\,, && (\varphi^2 = \varphi + 1)\\
&= F_{k-1}\cdot(\varphi+1) + F_{k-2}\varphi\\
&= (F_{k-1}\varphi + F_{k-2}\varphi) + F_{k-1}, && (F_k = F_{k-1} + F_{k-2})\\
&= F_k\varphi + F_{k-1}
\end{aligned}$$

olup doğrudur. //

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= 1\cdot\varphi + 1\\
\varphi^3 &= 2\cdot\varphi + 1\\
\varphi^4 &= 3\cdot\varphi + 2\\
\varphi^5 &= 5\cdot\varphi + 3\\
\varphi^6 &= 8\cdot\varphi + 5\\
&\ldots
\end{aligned}$$

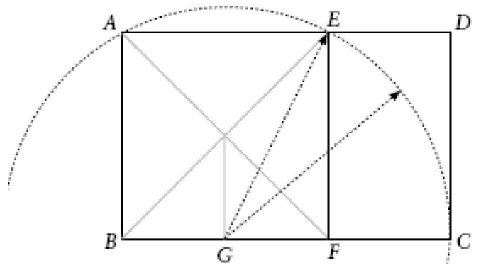
7.4. Tanım: Uzun kenarı $|AB|$ olan bir dikdörtgende C gibi altın nokta bulunuyorsa bu dikdörtgene altın dikdörtgen denir.



$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

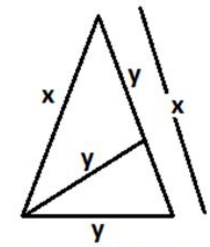
Burada dikkat edelim ki, altın bir dikdörtgende, kare kısmı çıkarttığımızda elde edilen dikdörtgen yine altın dikdörtgendir.

Altın dikdörtgen şu şekilde çizilebilir:

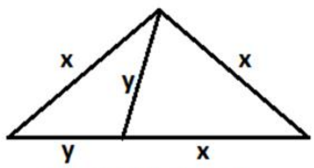


ABFE karesini çizelim. |BF| doğrusunun yarısı G noktası olsun. G noktasından E noktası yarıçap olarak şekildeki gibi C noktası elde edelim. |BC| doğrusu dikdörtgenin uzun kenarı olduğunda, oluşturulacak ABCD dikdörtgeni bir altın dikdörtgendir. Bunun bilgilerin ispatı açık olduğundan ve okuyucuya bırakılmıştır.

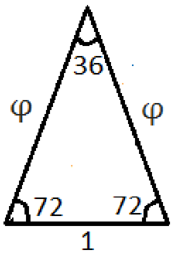
7.5. Tanım: İkizkenar bir dik üçgende altın noktayı sağlayan üçgene altın üçgen denir. Bu üçgenler iki tanedir.



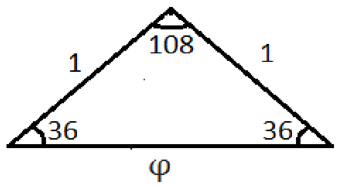
Dikey Altın Üçgen



Basık Altın Üçgen



Dikey Altın Üçgen

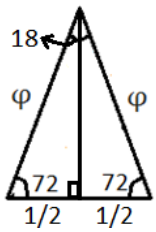


Basık Altın Üçgen

Altın üçgenlerde kendisinden kendine benzer bir üçgen çıkartıldığında geriye gene bir altın üçgen kalmaktadır.

Örnek: sin 18 in değeri nedir?

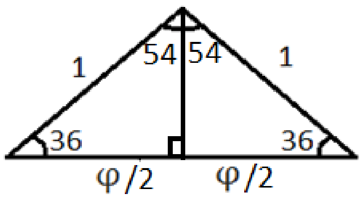
Çözüm: Dikey altın üçgende farklı kenera göre yükseklik çizilirse aşağıdaki şekil elde edilir.



$$\sin 18 = \frac{1/2}{\varphi} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$$

Örnek: $\cos 36 - \cos 72$ in sonucu nedir?

Çözüm: $\cos 72 = \sin 18 = \frac{1}{2\varphi}$ olduğunu önceki örnekten biliyoruz.



Basık altın üçgene göre;

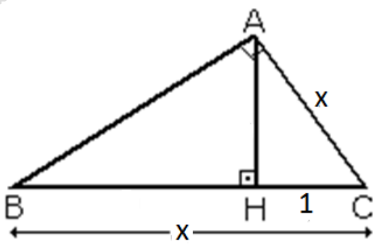
$$\cos 36 = \frac{\varphi/2}{1} = \frac{\varphi}{2}$$

olacağından ve 7.3. nota göre;

$$\cos 36 - \cos 72 = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2\varphi} = \frac{\varphi^2-1}{2\varphi} = \frac{\varphi+1-1}{2\varphi} = \frac{1}{2}$$

olur.

Örnek:



Verilere göre x'in değeri nedir?

Çözüm: Öklid teoremi uygulanırsa;

$$x^2 = 1(x+1) = x+1$$

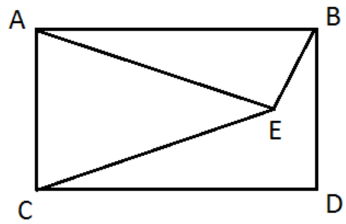
olur. 7.3. nota göre;

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$x = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

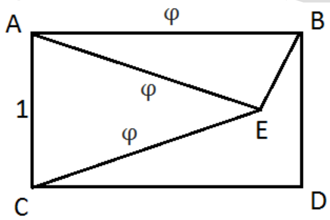
dir.

Örnek: ABCD altın dikdörtgen ve AEC dik altın üçgen olsun.



$m(E\widehat{B}D)$ nedir?

Çözüm: AEC dik altın üçgen ise $m(C\widehat{A}E) = 72^0$ dır.
$m(E\widehat{A}B) = 90 - 72 = 18^0$ dır.
AEC dik altın üçgen ABCD altın dikdörtgen olduğundan $|AC| = 1$ br alınırsa $|AE| = |CE| = |AB| = \varphi$ kadardır.



AEB ikizkenar üçgen olacağından $m(A\widehat{B}E) = \frac{180-18}{2} = 81^0$ dir.
$m(E\widehat{B}D) = 90 - 81 = 9^0$ dır.

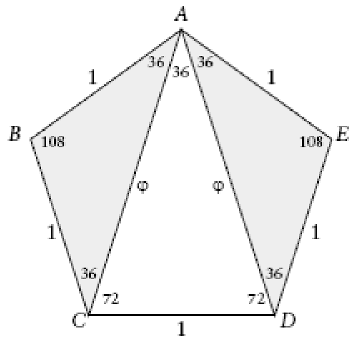
7.3. Teorem: Taban uzunluğu a birim olan bir dik altın üçgen ile basık altın üçgenin alanları sırasıyla;

$$A = \frac{a\cdot\sqrt{4\varphi+3}}{4} \quad \text{ve} \quad A = \frac{a\cdot\sqrt{7-4\varphi}}{2}$$

kadardır.

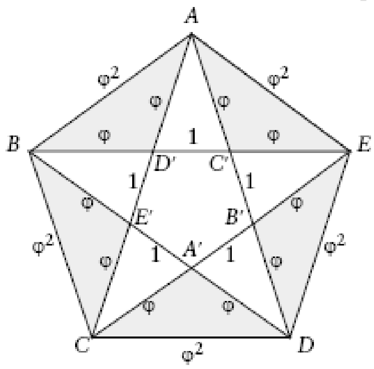
Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

7.6. Tanım: Düzgün beşgene altın beşgen adı verilir.



Şekilde de görldüğü gibi ABC ile AED birer basık altın üçgen, ACD dik altın üçgendir.

7.4. Teorem. Düzgün beşgende köşegenlerin hepsi birbirini altın oranda böler.



İspat: Beşgenin kenarlarına φ^2 diyelim. Koyu renkle taranmış üçgenlerin basık altın üçgen olduğundan ikizkenarları φ olur. Taranmamış üçgenler de altın üçgen olduğundan kısa kenarları 1 olur.//

BE köşegeninde D' ve C' birer altın nokta olduğundan AD' ve AC' de birer altın kesen olur.

7.5. Teorem: Bir kenarı a birim olan altın beşgenin çevrel çemberinin yarıçapı;

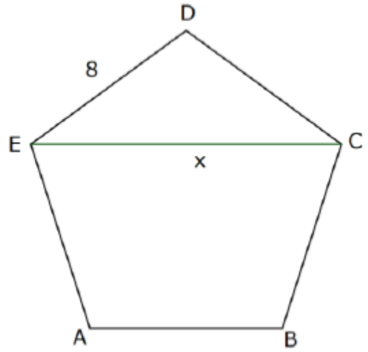
$$r = \frac{a}{\sqrt{3-\varphi}}$$

ve alanı ise;

$$A = \frac{a \cdot \sqrt{14\varphi + 13}}{2}$$

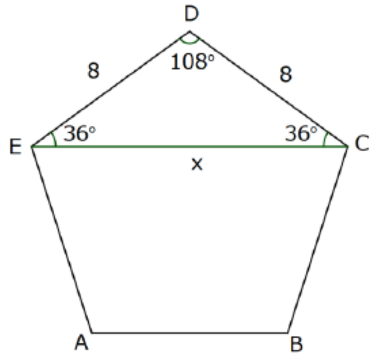
kadardır.

Örnek:



ABCDE bir düzgün beşgen ve $|ED| = 8$ cm olduğuna göre, $|EC| = x$ kaç cm'dir?

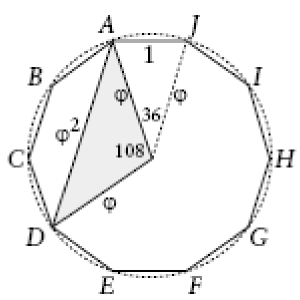
Çözüm: EDC üçgeni 36-26-108 üçgeni olup basık altın üçgendir.



$x = 8\varphi = 8\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{5}$

7.7. Tanım: Düzgün ongene altın ongen adı verilir.

Örnek: Şekildeki gibi verilen altın ongende $|AD| = \varphi^2$ dir.



Çözüm: ABCDEFGHIJ altın ongeninin bir kenarı 1 br ve çevrel cember merkezi de O olsun. AOD açısı $\frac{360}{10} = 36^0$ olur. O halde AOD bir altın üçgendir. $|AO| = |OD| = \varphi$ olur. Diğer yandan AOD üçgeni de basık altın üçgen olur. $|AD|$ koşegeni de bu yüzden φ^2 kadardır.

7.8. Tanım: Ortak çarpanı altın oran (φ) olan bir geometrik diziye altın dizi denir. Buna göre altın dizi,

$$(a_n) = (1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \cdots)$$

biçimindedir.

Örnek: $(a_n) = \left(1, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi^2}, \frac{1}{\varphi^3}, \frac{1}{\varphi^4}, \cdots\right)$ geometrik dizisinin sonsuz terim toplamı nedir?

Çözüm: Bu dizinin genel terimi $\frac{1}{\varphi}$ olup geometrik dizidir. Bir geometrik dizinin ilk n terim toplamı; $\left|\frac{1}{\varphi}\right| < 1$ olup,

$$a_n = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1-\left(\frac{1}{\varphi}\right)^n}{1-\frac{1}{\varphi}}$$

biçimindedir. Sonsuz terim toplamı;

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{\varphi}\right)^n}{1-\frac{1}{\varphi}} = \frac{\varphi}{\varphi-1} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2-\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi+1-\varphi} = \varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

olur.

Örnek: Genel terimi $a_n = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} + \cdots + \frac{1}{F_n}$ olan dizinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu dizinin monoton artan ve sınırlı olduğunu göstermeliyiz. Burada tümevarım ilkesini her $n \geq 2$ için $F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ olduğunu göstereceğiz.

$n = 2$ için $F_2 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$ eşitsizlik doğrudur

$n = k$ için $F_k \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}$ olduğu varsayalım. $n = k + 1$ için,

$$
\begin{aligned}
F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \\
&\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\left[\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right] \\
&> \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

olduğundan eşitsizlik her zaman doğrudur. Böylece;

$$
\begin{aligned}
a_n &\leq 1 + 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\
&= 2 + \frac{2}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\right] \\
&= 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{1-\frac{2}{3}} \\
&< 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

olur. (a_n) dizisi monoton artan ve sınırlı olduğundan yakınsaktır.

FİBONACCİ DİZİSİ ve ALTIN ORAN TEOREMLERİ

7.6. Teorem: Fibonacci dizisinde $n \geq 2$ için;

$$x^n = xF_n - F_{n-1}$$

denklemi vardır.

İspat: Bu teoremin ispatını tümevarım yöntemiyle yapalım.

P(2) için $n = 2$ ise $x^2 = xF_2 - F_1 = x \cdot 1 + 1 = x^2$, $(\varphi^2 = \varphi + 1)$

P(k) için $n = k$ ise $x^k = xF_k - F_{k-1}$ doğru olsun. $n = k + 1$ için $x^{k+1} = xF_{k+1} - F_k$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^n \cdot x \\
&= (xF_n - F_{n-1}) \cdot x \\
&= x^2F_n - xF_{n-1} \\
&= (x+1)F_n - xF_{n-1} \\
&= x(F_n - F_{n-1}) + F_n \\
&= xF_{n+1} + F_n
\end{aligned}
$$

olduğundan $n = k + 1$ için de doğrudur.

7.7. Teorem (Binet Formülü): Fibonacci dizisi her n için genel terimi,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

denkleme eşittir.

İspat: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\tau = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olsun.

$$\varphi - \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \qquad (1)$$

olur. 7.2. teoremin ispatında $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ olduğu gösterildi. 7.3. teoremden;

$$\varphi^n = \varphi F_n - F_{n-1} \text{ ve } \tau^n = \tau F_n + F_{n-1}$$

yazılır. Bu eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak ve (1) eşitliğinden,

$$\varphi^n - \tau^n = (\varphi - \tau)F_n$$

$$F_n = \frac{\varphi^n - \tau^n}{\varphi - \tau}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

bulunur.

7.8. Teorem: Bir (F_n) Fibonacci dizisinde $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ dir.

İspat: Binet teoremine göre;

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

ve

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

dir. Buna göre;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\right]}$$

olur. Burada;

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}=0$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$$

bulunur.

Örnek: {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...} Fibonacci dizisi incelenirse,

$$\frac{2}{1}=2 \qquad \frac{3}{2}=1{,}5 \qquad \frac{5}{3}=1{,}\overline{6}$$
$$\frac{8}{5}=1{,}6 \qquad \frac{13}{8}=1{,}625 \qquad \frac{21}{13}=1{,}6138\cdots$$
$$\frac{34}{21}=1{,}61904\cdots \qquad \frac{55}{34}=1{,}61764\cdots \qquad \frac{89}{55}=1{,}6\overline{18}$$
$$\frac{144}{89}=1{,}61797\cdots \qquad \frac{233}{144}=1{,}61805\cdots \qquad \cdots$$

sayıları bulunur.

7.4. Not: φ sayısı ile π sayısı arasında %0,1 lik hata ile;

$$\sqrt{\varphi}+\frac{1}{2}\cong\sqrt{\pi}$$

denklemi mevcuttur.

7.9. Teorem: (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere;

$$n|m \text{ ise } F_n|F_m$$

dir.

İspat: Binet teoremine göre Fibonacci dizisinin genel terimi,

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

olduğundan $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ alınırsa $F_n = \frac{x^n - y^n}{x-y}$, $F_m = \frac{x^m - y^m}{x-y}$ olur. $n|m$ olduğundan $m = nk$, $(k \in \mathbb{Z}^+)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$F_m = F_{nk} = \frac{x^{nk} - y^{nk}}{x-y} = \frac{(x-y)(x^{nk-1} + x^{nk-2}y + x^{nk-3}y^2 + \cdots + y^{nk-1})}{x-y}$$

elde edilir ki, bu bize $F_n | F_m$ olduğunu gösterir.

Örnek: Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $2|F_n \Leftrightarrow 3|n$ b) $3|F_n \Leftrightarrow 4|n$ c) $4|F_n \Leftrightarrow 6|n$

Çözüm: a) $F_3 = 2$ olduğundan 7.9. teorem gereği $F_3|F_n \Leftrightarrow 3|n$ dir.

b) $F_4 = 3$ olduğundan 7.9. teorem gereği $F_4|F_n \Leftrightarrow 4|n$ dir.

c) $4|8$ ve $F_6 = 8$ olduğundan 7.9. teorem gereği $F_6|F_n \Leftrightarrow 6|n$ dir.

Örnek: Fibonacci dizisinde hangi terimler 3 ile bölünür.

Çözüm: Fibonacci dizisinin terimleri 3 ile bölünürse 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, ... kalanların kümesi oluşur. Kalanlar periyodik olduğundan dolayı her dört rakamdan bir 0 kalanı elde edilmektedir. Sonuç olarak Fibonacci dizisinin $4k$ $(k \geq 1)$ numaralı terimleri 3'ün katıdır.

7.10. Teorem: (F_n) Fibonacci dizisi $k \geq 1$ için $5|F_{5k}$ dir.

İspat: tümevarım yöntemi kullanalım.

$k = 1$ için $5|F_5 = 5$ olduğundan önerme doğrudur.

$k - 1$ için $5|F_{5k-5}$ doğru olsun. Bu durumda $F_{5k-5} = 5A$ için,

$$\begin{aligned}
F_{5k} &= F_{5k-2} + F_{5k-1} \\
&= F_{5k-2} + F_{5k-3} + F_{5k-2} \\
&= 2F_{5k-2} + F_{5k-3} \\
&= 2(F_{5k-4} + F_{5k-3}) + F_{5k-3} \\
&= 2F_{5k-4} + 3F_{5k-3} \\
&= 2F_{5k-4} + 3(F_{5k-5} + F_{5k-4}) \\
&= 5F_{5k-4} + 3F_{5k-5} \\
&= 5F_{5k-4} + 3 \cdot 5 \cdot A
\end{aligned}$$

$= 5(F_{5k-4} + 3 \cdot A)$
olduğundan 5 ile bölünür.

7.11. Teorem: (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere;
$$n \geq 3 \text{ için } F_{n+2} < 2^n$$
dir.

İspat: Tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

$n = 3$ için $F_5 = 5 < 2^3$ olduğundan önerme doğrudur.

$F_{(n-2)+2} < 2^{n-2}$ ve $F_{(n-1)+2} < 2^{n-1}$ olduğu kabul edilsin.
$F_{n-2} = F_{(n-1)+2} + F_{(n-2)+2} < 2^{n-2} + 2^{n-1} < 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$
olup doğrudur.

7.12. Teorem: Her n ve k ≥ 1 için,
$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$$
dir.

İspat: k üzerinden tümevarımla göstereceğiz.

Eğer $k = 2$ise, bildiğimiz
$$F_{n+2} = F_2 F_{n+1} + F_1 F_n = F_{n+1} + F_n$$
olup doğrudur. Eğer şimdi önsavımızın k ve $k + 1$ için doğru olduğunu varsayıp $k + 2$ için gösterelim:
$$\begin{aligned} F_{n+k+2} &= F_{n+k+1} F_{n+k} \\ &= (F_{k+1} F_{n+1} + F_k F_n) + (F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n) \\ &= (F_{k+1} + F_k) F_{n+1} + (F_k + F_{k-1}) F_n \\ &= F_{k+2} F_{n+1} + F_{k+1} F_n \end{aligned}$$
olur.

7.13. Teorem: Her $m, n \in \mathbb{N}^+$ için $m \leq n$ ise $F_m \leq F_n$ dir.

İspat: $m + k = n$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}^+$ olsun. 7.12. teoremden
$$F_n = F_{m+k} = F_k F_{m+1} + F_{k-1} F_m \geq F_m$$
bulunur.

7.14. Teorem: Fibonacci dizisinin herhangi iki ardışık terimleri aralarında asaldır.

İspat: F_n ve F_{n+1} ardışık iki Fibonacci dizisi terimleri olmak üzere bu sayıların $d \geq 1$ olacak şekilde bir ortak böleni olsun. $F_{n+1} - F_n$ farkı olan F_{n-1} sayısı da d ile bölünür. Bu şekilde geriye doğru gidilirse $F_1 = 1$ sayısının da d ile bölüneceği görülür ki, 1 sadece 1 ile bölünebilir. Böylece, herhangi ardışık iki Fibonacci dizisinin terimi en büyük ortak böleni 1 olduğu, yani, bu sayıların aralarında asal olduğu sonucuna varılır.

7.15. Teorem: İki Fibonacci dizisinin terimlerinin en büyük ortak böleni de yine bir Fibonacci dizisinin terimidir.

İspat: m ve n doğal sayılarının en büyük ortak böleni bulunurken sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılır:

$m = nq + r$
$n = rq_1 + r_1$
$r = r_1 q_2 + r_2$
...
$r_k = r_{k+1} q_{k+2}$

r_{k+1} sıfırdan farklı son rakam ise $OBEK(m, n) = r_{k+1}$ olur. Benzer şekilde;

$F_m = F_n F_q + F_r$

şeklinde incelenirse ve 7.12. teoremden $OBEK(F_m, F_n) = F_r$ olacak şekilde F_r bulunur.

FİBONACCİ DİZİSİ ve ALTIN ORANIN DİĞER BİLİMLERDE UYGULAMASI

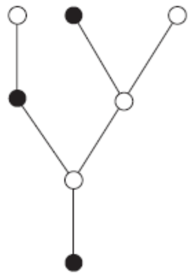
Gerek Fibonacci dizisi, gerekse altın oran matematiğin diğer konuları gibi yer yer diğer bilimlerde kullanılmaktadır. Bazen 1,618… olan altın oran sayısı mükemmel sayı değeri kabul edip yakın değerlere mükemmellikten uzak değerler olarak kabul edilir. Zaten altın oran bir irrasyonel sayıdır. Dolayısıyla iki sayının bölümü şeklinde yazılamaz. Ama yakın değer alınmak suretiyle altın oran kullanan bilimler mevcuttur. Yine Fibonacci dizisinin oluşturduğu çeşitli şekiller, özellikle sarmal şekli çeşitli bilimlerde yakın değer olarak kullanılmaktadır. Şimdi bunlardan birkaçını inceleyelim.

Örnek: Bazı çiçeklerin taç yaprak sayısı Fibonacci dizisinin terimleri sayısı kadardır.

3 taç yapraklı bitkiler: Zambak, İris, Yonca
5 taç yapraklı bitkiler: Düğünçiçeği, Yabani Gül, Hezaren Çiçeği

8 taç yapraklı bitkiler: Delphinium
13 taç yapraklı bitkiler: Kanaryaotu, Kadife Çiçeği, Cineraria
21 taç yapraklı bitkiler: Hindiba, Yıldız Çiçeği
34 taç yapraklı bitkiler: Muz bitkisi, Pirekapan
55 taç yapraklı bitkiler: Papatya

Örnek: Karıncalar, yumurtadan üreyen bir canlıdır. Bunların erkeği döllenmemiş yumurtadan, dişisi de döllenmiş yumurtadan olmaktadır. Bu durumda erkek karıncanın babası olmaz sadece annesi olur. Dişisininse hem annesi hem de babası olur. Şimdi biz bir erkek karıncanın soyağacını bulalım.



Erkek karınca en alttaki siyah nokta olsun. Bu karıncanın erkeğin sadece annesi var. En alttaki noktanın üstündeki içi boş nokta ile gösterelim. Annenin bir annesi bir babası var. Bir üst sıradaki siyah ve içi boş nokta ile temsil edelim. Annenin annesinin bir annesi bir babası var, ama annenin babasının sadece annesi var. Bu şekilde tarihte geri çıkarak soyağacını bulabiliriz. Bu soyağacının her katında alttan üste doğru 1, 1, 2, 3, … şeklinde karınca olduğu gözükeceğinden karınca soyağacı tablosu Fibonacci dizisinin terimlerini verir.

Örnek: İnsan vucudun da birçok altın oran vardır. Yalnız bu oranlandırma, bilim adamları ve sanatçıların kabul ettikleri ideal bir insan vücudu için geçerlidir. Tabiki her vücudun bu orana uyması beklenemez. Bu oranlar yalnız ideal insan yüzünde bulunabilir. Şimdi bu ideal ölçülerdeki altın oranları verelim:

Ağız uzunluğu / burun genişliği
Gözbebekleri arasındaki uzaklık / Kaşlar arasındaki uzaklık
Burun genişliği / Burun delikleri arasındaki uzaklık
Yüz boyu / Yüz genişliği
Ağız genişliği / Burun genişliği
Burun altı-çene / Ağız-çene
Göz bebekleri-çene / Burun altı-çene
Alt dudak genişliği / Üst dudak genişliği
Kapalı durumda dudakların genişliği / Burun altı üst dudak arasındaki uzaklık

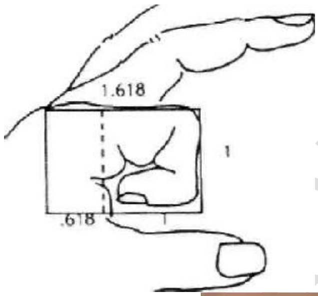
Kapalı ağız ortasından çeneye olan uzaklık /Burun deliklerinden kapalı ağız ortasına kadar olan uzaklık

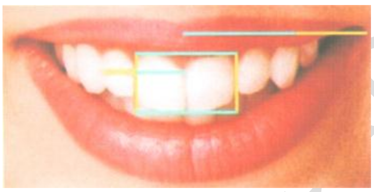
İnsan boyu / İnsan göbek ile ayaklarının altı arasındaki mesafe

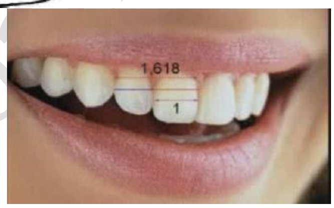
Parmak kemik uzunluklarının sırasıyla birbirine oranları

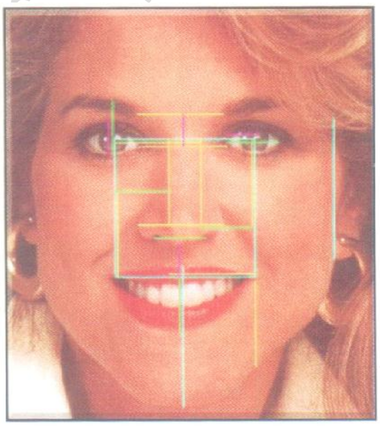
Ön iki diş dikdörtgen olarak alınırsa dikdörtgenin oranları

Ön dişin yayındaki dişe oranı









İnsan yüzünde varolan güzellik Altın oran ile uyumludur.

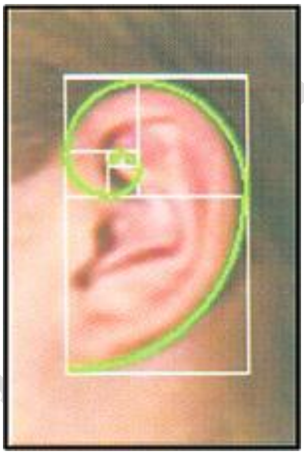
Mavi Çizgi: Ağız dış kenarları ile göz bebeklerinden mükemmel bir kare tanımlar. İdeal bir yüzde altın oran özellikleri incelendiğinde: Burun, burun ucu, burun deliklerinin içi, üst dudağın iki başlangıç noktası, kulağın iç kısımdaki noktalar mavi çizgilerle birlikte altın oranı tanımlarlar. Mavi çizgi ayrıca üst dudaktan çenenin altına kadar olan uzaklığı da tanımlamaktadır.

Sarı Çizgi: Burun genişliği, gözler ve göz bebekleri arasındaki uzaklık, gözbebeklerinden burun ucuna olan uzaklıktır. Bu uzaklık mavi çizginin altın oranını tanımlar.

Yeşil Çizgi: Göz genişliği, burun delikleri arasındaki uzaklık, kirpikten kaşa olan uzaklık, san çizginin altın oranını tanımlar.

Mor çizgi: Üst dudaktan burun altına kadar olan uzaklık ve gözün çeşitli boyutları yeşil çizgi ile altın oran tanımlar.

Örnek: İnsan kulağı altın sarmal özelliklerine sahiptir. Altın sarmallı sağlayan kulağa mükemmel kulak, altın sarmala yakın kulaklara ise o oranda güzel kulak adı verilir.



Örnek: Papatya, Ayçiçeği ve Çam Kozalağında Altın Oran

Çiçek kafalarının ortalarında yer alan tohumların düzeninde de Fibonacci sayıları görülebilir. Bilimsel adı Echinacea purpura olan ve papatya ailesinden olan yukarıdaki portakal rengindeki çiçeklerde "taç yaprakların" hem sola hem de sağa doğru oluşturdukları sarmallar yer almaktadır.

Örnek: Doğada bulunan bazı bitki ve hayvanların altın sarmal şeklinde olduğu görülmektedir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}$ işleminin sonucu nedir?

A) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ D) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{1+\sqrt{5}}{8}$

Çözüm: $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}=x$ olsun. Bu takdirde $1+\frac{1}{x}=x$ ise $x+1=x^2$ olur. 7.2. noktan görüldüğü gibi $x=\varphi$ dir. Şu halde

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

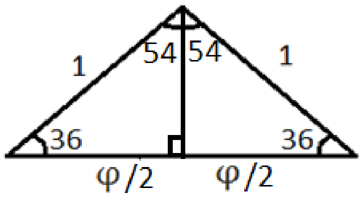
olur.

Cevap: B

2. sin 54 in değeri nedir?

A) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ D) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{1+\sqrt{5}}{8}$

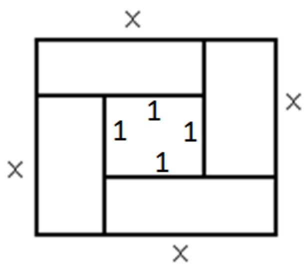
Çözüm: Basık altın üçgende farklı kenera göre yükseklik çizilirse aşağıdaki şekil elde edilir.



$$\sin 54 = \frac{\varphi/2}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Cevap: A

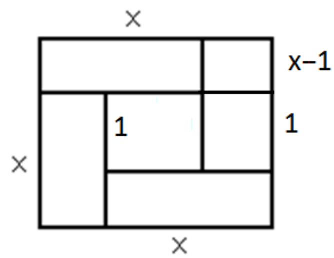
3.



Şekildeki gibi bir kare ile birbirine eş dört dikdörtgene ayrılmıştır. İçinde oluşan karenin beşinci parça olarak bir kenarı 1 birim olarak verilmiştir. Bu beş parçanın alanları birbirine eşitse dikdörtgenlerin uzun kenarı x ise x uzunluğu kaç birimdir?

A) $\frac{2+2\sqrt{5}}{3}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ C) $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ D) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Çözüm:



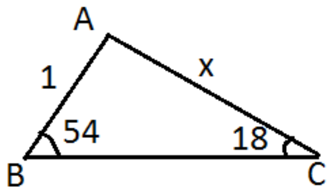
Şekilde görüldüğü gibi dikdörtgenin kısa kenarı $x-1$ birimdir. İç kısımdaki küçük karenin alanı, dikdörtgenlerin alanlarına eşit olduğundan,

$$1^2 = x(x-1)$$
$$1 = x^2 - x$$
$$x^2 = x + 1$$
$$x = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

olur.

Cevap: E

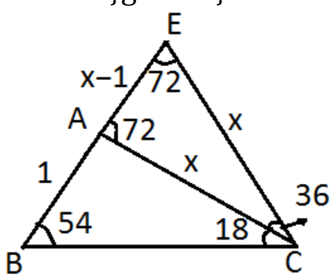
4. $|AB| = 1$, $|AC| = x$, $m(ABC) = 54^0$, $m(ACB) = 18^0$



Verilere göre x kaçtır?

A) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ D) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Çözüm: Şekildeki gibi AEC üçgenini çizelim.



$m(CAE) = 54 + 18 = 72^0$ olur. $|AC| = |EC| = x$ olacak şekilde çizileceğinden AEC ikizkenar üçgen ve AEC dik altın üçgen olur.

$$m(EBC) = m(ECB) = 54^0$$

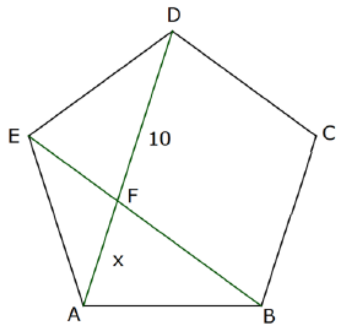
olacağından $|EB| = |EC| = x$ olup $|AE| = x - 1$ olur. AEC dik altın üçgen olduğundan

$$(x-1)\varphi = x$$

$$x\varphi - \varphi = x$$
$$x\varphi - x = \varphi$$
$$x(\varphi - 1) = \varphi$$
$$x = \frac{\varphi}{\varphi-1} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2-\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi+1-\varphi} = \varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Cevap: D

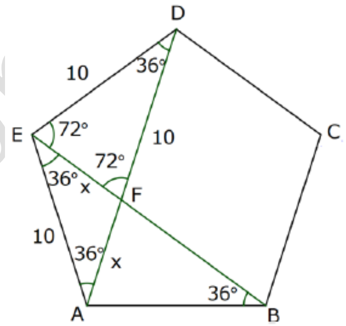
5.



ABCDE bir düzgün beşgen ve $|FD| = 10$ cm olduğuna göre, $|AF| = x$ kaç cm'dir?

A) $5\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{5}+5$ C) $5\sqrt{5}-5$ D) $5\sqrt{5}-10$ E) $5\sqrt{5}+10$

Çözüm: EDF dik altın üçgen, EFA basık altın üçgendir.



$|FD| = |ED| = |EA| = 10$ cm dir. EFA üçgeni 36-36-108 basık altın üçgen olduğundan,

$$x\varphi = 10$$
$$x\varphi = \frac{10}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{20}{1+\sqrt{5}} = \frac{20(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = 5\sqrt{5}-5$$

bulunur.

Cevap: C

6. (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere;

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n$$

denkleminin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $F_{n+2} - 1$ B) $F_{n+1} - 1$ C) $F_n - 1$ D) $F_{n+2} + 1$ E) $F_n + 1$

Çözüm: (F_n) Fibonacci dizisinde $n > 2$ için $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ olduğundan;

$$F_1 = F_3 - F_2$$
$$F_2 = F_4 - F_3$$
$$F_3 = F_5 - F_4$$
$$\ldots$$
$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$
$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

elde edilir.

Cevap: A

7. (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere;

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1}$$

denkleminin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) F_{n+2} B) F_{n+1} C) F_{2n} D) F_{2n+1} E) F_{2n+2}

Çözüm: (F_n) Fibonacci dizisinde $n > 2$ için $F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$ olduğundan;

$$F_1 = F_2$$
$$F_3 = F_4 - F_2$$
$$F_5 = F_6 - F_4$$
$$\ldots$$
$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

elde edilir.

Cevap: C

8. (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere;

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n}$$

denkleminin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $F_{n+2}-1$ B) $F_{n+1}-1$ C) $F_{2n+1}-1$ D) $F_{2n+2}+1$ E) $F_{2n}+1$

Çözüm: (F_n) Fibonacci dizisinde $n>2$ için $F_{n-1}=F_n-F_{n-2}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}F_2 &= F_3-F_1\\ F_4 &= F_5-F_3\\ F_6 &= F_7-F_5\\ &\dots\\ F_{2n} &= F_{2n+1}-F_{2n-1}\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-F_1=F_{2n+1}-1$$

elde edilir.

Cevap: C

9. (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere;

$$F_1-F_2+F_3-F_4+F_5+\cdots+F_{2n-1}-F_{2n}$$

denkleminin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $F_{n+2}-1$ B) $F_{n+1}-1$ C) F_n-1 D) $F_{2n-1}+1$ E) $1-F_{2n-1}$

Çözüm: 7 ve 8. Sorularda;

$$F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$$
$$F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$$

olduğu gösterilmiştir. Bu iki denklem taraf tarafa çıkartılırsa;

$$F_1-F_2+F_3-F_4+F_5+\cdots+F_{2n-1}-F_{2n}=F_{2n}-F_{2n+1}+1$$

elde edilir. $F_{2n}-F_{2n+1}=-F_{2n-1}$ olduğundan,

$$F_1-F_2+F_3-F_4+F_5+\cdots+F_{2n-1}-F_{2n}=1-F_{2n-1}$$

eşitliği elde edilir.

Cevap: E

10. (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere;

$$F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_n^2$$

denkleminin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) F_{n+2} B) F_{n+1} C) F_n D) F_nF_{n+1} E) F_{2n-1}

Çözüm:

$$\begin{aligned}F_n^2 &= F_nF_n = F_n(F_{n+1}-F_{n-1}) = F_nF_{n+1}-F_nF_{n-1}\\ F_{n-1}^2 &= F_{n-1}F_{n-1} = F_{n-1}(F_n-F_{n-2}) = F_{n-1}F_n-F_{n-1}F_{n-2}\\ F_{n-2}^2 &= F_{n-2}F_{n-2} = F_{n-2}(F_{n-1}-F_{n-3}) = F_{n-2}F_{n-1}-F_{n-2}F_{n-3}\\ &\dots\end{aligned}$$

$$F_3^2 = F_3F_3 = F_3(F_4 - F_2) = F_3F_4 - F_3F_2$$
$$F_2^2 = F_2F_2 = F_2(F_3 - F_1) = F_2F_3 - F_2F_1$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1} - F_2F_1$ eşitliği elde edilir. $F_2 = F_1$ olduğuna göre $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$ elde edilir.

Cevap: D

11. (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere;

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}}$$

denkleminin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 - \frac{1}{F_nF_{n+1}}$ B) $\frac{1}{F_nF_{n+1}}$ C) $\frac{2}{F_nF_{n+1}}$ D) $\frac{1}{F_n}$ E) $\frac{1}{F_{n+1}}$

Çözüm:

$$\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_n}{F_nF_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_nF_{n-1}F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}}$$

olarak düzenlenirse;

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{F_{k-1}F_k} - \frac{1}{F_kF_{k+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_2F_3} + \frac{1}{F_2F_3} - \frac{1}{F_3F_4} + \frac{1}{F_3F_4} - \frac{1}{F_4F_5} + \cdots + \frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}}$$
$$= 1 - \frac{1}{F_nF_{n+1}}$$

Cevap: A

12. (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere;

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{F_k}{F_{k-1}F_{k+1}}$$

denkleminin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 - \frac{1}{F_{n+1}}$ B) $2 - \frac{1}{F_n} - \frac{1}{F_{n+1}}$ C) $\frac{1}{F_nF_{n+1}}$ D) $\frac{1}{F_n}$ E) $\frac{1}{F_{n+1}}$

Çözüm:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{F_{n+1}}$$

olarak düzenlenirse;

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{F_k}{F_{k-1}F_{k+1}}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{F_{k-1}}-\frac{1}{F_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_3}+\frac{1}{F_2}-\frac{1}{F_4}+\frac{1}{F_3}-\frac{1}{F_5}+\cdots+\frac{1}{F_{n-1}}-\frac{1}{F_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}-\frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_{n+1}}$$
$$=2-\frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_{n+1}}$$

bulunur.

Cevap: B

13. (F_n) Fibonacci dizisi olmak üzere;

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2$$

işleminin sonucu nedir?

A) 1 B) 2 C) -2 D) -1 E) $(-1)^n$

Çözüm:

$$x_n=F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2$$
$$=F_{n-1}(F_n+F_{n-1})-F_n^2$$
$$=F_{n-1}F_n+F_{n-1}^2-F_n^2$$
$$=-F_n(-F_{n-1}+F_n)+F_{n-1}^2$$
$$=-F_{n-2}F_n+F_{n-1}^2$$
$$=-x_{n-1}$$

elde edilir. Burada $x_2=F_1F_3-F_2^2=1\cdot 2-1^2=1$ olduğundan

$$x_n=-x_{n-1}=(-1)^2x_{n-2}=(-1)^3x_{n-3}=\cdots=(-1)^{n-2}x_2=(-1)^n$$

bulunur.

KAYNAKÇA

1. Şamil Akçağıl, Fibonacci Sayıları ve Altın Oran, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı, Yüksek lisans tezi, Balıkesir, Temmuz 2005.

2. Rüveyda Akgül, Fibonacci Sayıları Yarıgruplar, Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Diyarbakır, Haziran 2008.

3. Deniz Deviren, Altın Oran ve Grafik Sanatlarda Kullanımı, Haliç Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Grafik Tasarımı Anasanatdalı Yüksek lisans tezi, İstanbul, 2010.

4. Recep Aslaner, Sevgi Bakan, Altın Üçgen ve Düzgün Beşgen Üzerine Bir Dinamik Geometri Yazımı İle Araştırılması, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Cilt 36, Sayı 2, 2020.

5. Aslıhan Akın, Özgür Paksoy, Fibonacci Sayıları yazı dizisi, Matematik Dünyası Dergisi, Sayı: 2003 kış ve 2003 yaz.

6. Mustafa Yağcı, Altın Oran, Matematik Dünyası Dergisi, 2005 Güz sayısı.

7. Erdoğan Şen, Fibonacci Sayıları Altın Oran ve Uygulamaları, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü lisans bitirme ödevi, Gebze, 2008.