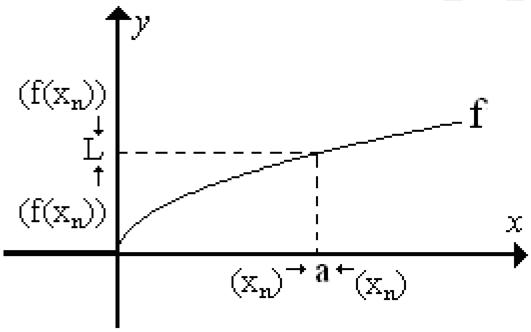
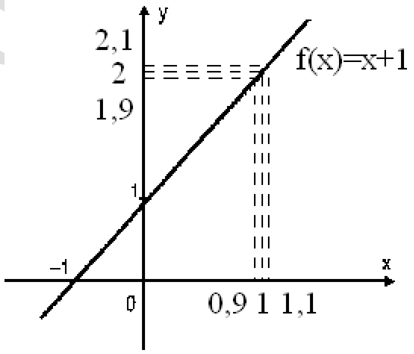
8. BÖLÜM
FONKSİYONLARIN LİMİTİ

FONKSİYONLARIN LİMİTİ KAVRAMI

8.1. Tanım: $A \subset \mathbb{R}, f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Bir (x_n) dizisi a noktasına yakınsarken, $(f(x_n))$ fonksiyon değerli dizisi de L gibi bir noktaya yakınsıyorsa, bu f fonksiyonun a noktasındaki limiti L sayısıdır denir. $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n) = L$ şeklinde gösterilir.



Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$ fonksiyonu $x = 1$ noktasına sağdan ve soldan dizi olarak yaklaşımı aşağıdaki şekilde verilmeye çalışılmıştır.

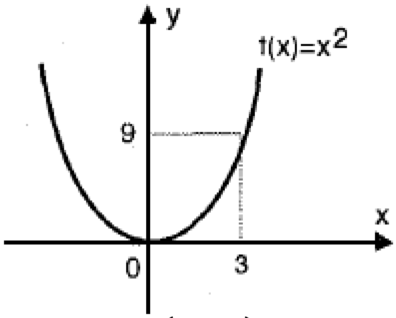


x	0,9	0,99	0,999	....	1	....	1,001	1,01	1,1
y	1,9	1,99	1,999	....	2	....	2,001	2,01	2,1

Tablodan da görüleceği gibi, x değişkeni 1 sayısına 1'den küçük değerler alarak yaklaştığında y de 2 sayısına 2'den küçük değerlerle yaklaşmaktadır. Yine x değişkeni 1 sayısına 1'den büyük değerler alarak yaklaştığında y de 2 sayısına 2'den büyük değerlerle yaklaşmaktadır. Bu durumda 1 sayısının limiti 2'dir denir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$ fonksiyonu $x=3$ noktası için limitini bulalım.

Çözüm:



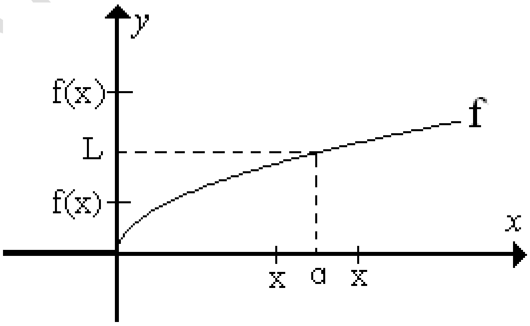
Her $(x_n)\subset\mathbb{R}-\{3\}$ ve $(x_n)\to 3$ için $\big(f(x_n)\big)=((x_n)^2)\to 3^2$ olduğundan

$$\lim_{x_n\to 3} f(x_n)=\lim_{x_n\to 3}(3)^2=9$$

dır. //

Bu tanım şu şekilde de verilebilir.

8.2. Tanım: $A\subset\mathbb{R}, f:A\to\mathbb{R}$ fonksiyon olsun. $\forall\,\varepsilon>0$ için $\exists\,\delta>0$ sayısı vardır, öyle ki $|x-a|<\delta$ olduğunda $|f(x)-L|<\varepsilon$ oluyorsa, bu f fonksiyonun a noktasındaki limiti L sayısıdır denir. $\lim_{x\to a} f(x)=L$ şeklinde gösterilir.



Örnek: $A\subset\mathbb{R}, f:A\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$ fonksiyonun $a=2$ noktasında limitinin $L=5$ olduğunu gösterelim:

$\forall\ \varepsilon > 0$ için $|x-2| < \delta$ seçilirse $|f(x)-5| < \varepsilon$ gerektirmesini sağlayan ε değerine bağlı, bir $\delta > 0$ varlığını göstermeliyiz.

$$|f(x)-5| < \varepsilon$$
$$|2x+1-5| < \varepsilon$$
$$|2x-4| < \varepsilon$$
$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olduğundan $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

8.1. Not: Bir fonksiyonun herhangi bir noktada limitinin olması ya da olmaması için, fonksiyonunun o noktada tanımlı olma zorunluluğu yoktur.

8.2. Not: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \frac{0}{0}, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}, \infty^{\infty}, 0\cdot\infty$ gibi durumlar belirsizlik belirtir. Bu durumlarda limite müracaat etmek gerekir. Bu belirsizlik durumlarının neden olduğu sorusu akla gelmektedir. Biz burada sadece $\frac{0}{0}$ ın sebebi inceleyeceğiz. Diğerlerini okuyucuya havale edeceğiz.

$$\frac{0,1}{0} = +\infty\ ,\ \frac{0,01}{0} = +\infty\ ,\ \frac{0,001}{0} = +\infty\ , \ldots$$
$$-\frac{0,1}{0} = -\infty\ ,\ -\frac{0,01}{0} = -\infty\ ,\ -\frac{0,001}{0} = -\infty\ , \ldots$$

Paydası 0 olan kesirlerin payı sıfıra sağdan yaklaştıkça $+\infty$'a, payı sıfıra soldan yaklaştıkça $-\infty$'a yaklaşmaktadır. Ancak pay 0 olduğunda kesir $+\infty$ mu yoksa $-\infty$ mu olduğu belirli değildir. O halde $\frac{0}{0}$ bir belirsizliktir.

8.1. Teorem: $A, B \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon, $a \in A \cap B$ olmak üzere,

i) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

iv) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

İspat: i) $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta_1 > 0$ sayısı vardır, öyle ki $|x-a| < \delta_1$ olduğunda $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ kalır.

$\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta_2 > 0$ sayısı vardır, öyle ki $|x-a| < \delta$ olduğunda $|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ kalır. Burada $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alınırsa;

$$|(f(x)+g(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Şu halde $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=L_1+L_2$ dir. Bu takdirde,

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=L_1+L_2=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

bulunur.

ii) i özelliğine benzer şekilde gösterilir.

iii) $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ ise her x için $|f(x)| < M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. Yine $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta_1 > 0$ sayısı vardır, öyle ki $|x-a| < \delta_1$ olduğunda $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{|L_2|+M}$ kalır.

$\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta_2 > 0$ sayısı vardır, öyle ki $|x-a| < \delta_2$ olduğunda $|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{|L_2|+M}$ kalır. Burada $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - f(x)L_2 + f(x)L_2 - L_1L_2| \\
&\leq |f(x)||g(x) - L_2| + |f(x) - L_1||L_2| \\
&< M\frac{\varepsilon}{|L_2|+M} + |b|\frac{\varepsilon}{|L_2|+M} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Şu halde $=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=L_1L_2$ dir. Bu takdirde,

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(b))=L_1L_2=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

bulunur.

iv) iii özelliğine benzer şekilde gösterilir.

8.2. Teorem: $A \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a \in A, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

i) $\lim_{x\to a} k\cdot f(x)=k\cdot\lim_{x\to a} f(x)$

ii) $\lim_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim_{x\to a} f(x)\right|$

iii) $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n = \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)^n\right)$, $(n \in \mathbb{N})$

iv) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, $(n \in \mathbb{N})$

v) $\lim\limits_{x\to a} \log f(x) = \log \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Bu teoremin ispatı bir 8.1. teoremine benzer yolla yapılacağından okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 3} 2^{4x-2} = 2^{\lim\limits_{x\to 3} 4x-2} = 2^{10}$

8.3. Teorem: $A, B \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon, $f(A) \subset B$ ve $a \in A,$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

dir.

İspat: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ olsun. O halde terimleri A{a} da olan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n)) \to L_1$ dir. Yine her (x_n) dizisi için $u_n = f(x_n)$ olsun. $(u_n) \to L_2$ olmak üzere $(g(u_n))$ dizisini göz önüne alalım. $\lim\limits_{x\to a} g(u_n) = g(L_2)$ dir. Şu halde,

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

bulunur.

CEBİRSEL FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

Limitin ilk tanımlanma şekli fonksiyonlardaki bir takım belirsizlikleri gidermek içindir. Ama belirsiz olmayan fonksiyonlara da uygulanabilir. Belirsiz olmayan fonksiyonlar da uygulandığında bizim bildiğimiz klasik işlemler yapılır.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2}{4}+3\right) = \left(\dfrac{2^2}{4}+3\right) = 4$

Örnek: $\lim_{x\to\pi}(1-\sin x)=\lim_{x\to\pi}(1-\sin\pi)=1$

Örnek: $\lim_{x\to 3}2^{4x-2}$ değeri nedir?

Çözüm: $\lim_{x\to 3}2^{4x-2}=2^{\lim_{x\to 3}4x-2}=2^{10}$ //

Cebirsel fonksiyonlar olan polinom ve rasyonel fonksiyonlar türü fonksiyonlarında belirsizlik durumları söz konusu olabilir. Bu tür işlemler,

- Çarpanlara ayırma,
- Ortak paranteze alma,
- Eşlenik alma,
- Çeşitli cebirsel işlemler

gibi işlemler yapılarak belirsizlikten kurtarılır. Şimdi bunlarla ilgili örnekleri inceleyelim.

Örnek: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ ifadesinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: Bu belirsizliği gidermek için payı çarpanlara ayıralım.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}x+2=4$$

Örnek: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$ ifadesindeki $\frac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: Bu belirsizliği de gidermek için payı çarpanlara ayıralım.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

Örnek: $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{x^2-x-2}$ ifadesindeki $\frac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: Bu belirsizliği de gidermek için payı çarpanlara ayıralım.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-3x-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-4}{x-2}==\frac{5}{3}$$

Örnek: $\lim\limits_{m\to4}\dfrac{\frac{1}{m}-\frac{1}{4}}{m-4}$ ifadesindeki $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: Paydana eşitleme yapılırsa,

$$\lim_{m\to4}\frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{4}}{m-4}=\lim_{m\to4}\frac{\frac{4}{4m}-\frac{m}{4m}}{m-4}=\lim_{m\to4}\frac{\frac{4-m}{4m}}{m-4}=\lim_{m\to4}\frac{-1}{4m}=-\frac{1}{16}$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{6x^2-18x}{2x-6}$ ifadesindeki $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{6x^2-18x}{2x-6}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{6x(x-3)}{2(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{6x}{2}=9$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to2}[(x^2-3x+6).f(x)]=20$ ise $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ in değeri nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to2}[(2^2-3\cdot2+6)\cdot f(x)]=20$

$4\cdot\lim\limits_{x\to2}f(x)=20$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=5$

Örnek: $\lim\limits_{x\to3^-}5^{\frac{1}{x-3}}$ değeri nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to3^-}5^{\frac{1}{x-3}}=\lim\limits_{x\to3^-}5^{\frac{1}{x-3}}=\lim\limits_{x\to3^-}5^{-\infty}=0$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ ifadesindeki $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: Bu sorunun cevabını bulabilmek için ifadenin pay ve paydasını $(\sqrt{x}-2)$ in eşleniği $(\sqrt{x}+2)$ ile çarpalım.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-5x+4)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\frac{1}{12}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ ifadesindeki $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: İfadenin pay ve paydasını $(\sqrt{x^2+1}-1)$ in eşleniği olan $(\sqrt{x^2+1}+1)$ ile çarpalım.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{(x^2+1-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}+1 \qquad (\sqrt{1}=1 \text{ alalım})$$
$$=2$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ ifadesinde $\infty-\infty$ belirsizliğini gideriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+1)}{x(x-1)(x+1)}-\frac{2x}{x(x-1)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x(x-1)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x(x+1)}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}$$

Örnek: $\lim_{x\to 0}(2x+1)^{1/x}$ denklemi 1^{∞} belirsizliğini gideriniz.

Çözüm:

$y = (2x+1)^{1/x}$ ise $\ln y = \ln(2x+1)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln(2x+1) = \frac{\ln(2x+1)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2x+1} = 2$$

$$\lim_{x\to 0}(2x+1)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(2x+1)}{x}} = e^2$$

Örnek: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ denklemi 1^{∞} belirsizliğini gideriniz.

Çözüm:

$y = (\cos x)^{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ ise $\ln y = \ln(\cos x)^{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{x^2}\ln(\cos x) = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2\cos x - 2x\sin x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x} = e^{-1/2}$$

8.1. Not: Cebirsel fonksiyonların ∞ 'a gitme durumları dizilerde olduğu gibidir. Burada tekrar verilmeyecektir.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

Trigonometrik fonksiyonların limitleri türevin uygulaması konusunda L'hospital yönteminde tekrar anlatılacaktır. Burada birkaç tanesi izah edilecektir.

Ayrıca her x için $-1 \leq \sin x \leq 1$ aralığında olduğunu hatırlayalım

Örnek: $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$ ifadesindeki $0 \cdot \infty$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: Her x için $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ olduğuna göre $\sin\frac{1}{x} = m$ alınırsa,

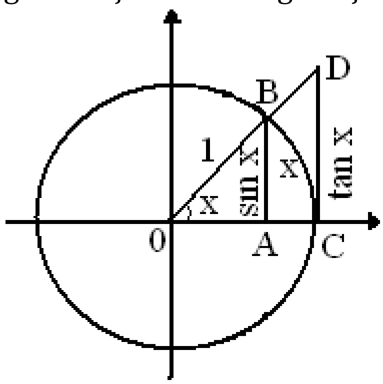
$$\lim_{x \to 0} x^2 . \sin\frac{1}{x} = 0 \cdot m = 0$$

bulunur. //

Trigonometrik fonksiyonların belirsizlik durumları yukarıdaki belirsizlik durumları gibi çözülebilir. Yalnız aşağıdaki teoremle belirli bir belirsizlik giderilir.

8.4. Teorem: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

İspat: x bir birim çemberin merkez açısının ölçüsü olsun. Bu ölçü açının karşısındaki yayın uzunluğu ile ölçülür. Buna göre şu şekli çizelim.



Buna göre $|AB| = \sin x, m(\overset{\frown}{BC}) = x^0, |CD| = \tan x$ olacağından,

$$\sin x < x < \tan x$$

yazılabilir. Buradan da

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

olur. Pozitif bu x için

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \text{ ve } \cos x < \frac{\sin x}{x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ ifadesindeki $\frac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $x \to 0$ iken $3x \to 0$ olacağından

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x} = 3\lim_{3x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.1 = 3$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{4x}$ ifadesindeki $\frac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $x \to 0$ iken $5x \to 0$ olacağından

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5.4x} = \frac{5}{4}\lim_{5x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{4}.1 = \frac{5}{4}$$

Bu son iki örnekten şu sonuç elde edebiliriz.

8.1. Sonuç: a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ ifadesindeki $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ olmak üzere

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

Bu son örnekten şu sonuç elde edebiliriz.

8.2. Sonuç: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\tan ax}=\dfrac{b}{a}$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 4x}$ ifadesindeki $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $x\to 0$ iken $3x\to 0$, $4x\to 0$ ve 8.2. Sonuca göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{4\cdot\frac{\tan 4x}{4x}}=\frac{3}{4}=\frac{3\cdot\lim\limits_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{4\cdot\lim\limits_{4x\to 0}\frac{\tan 4x}{4x}}=\frac{3}{4}$$

biçimindedir.

Bu son örnekten şu sonuç elde edebiliriz.

8.3. Sonuç: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\tan bx}=\dfrac{a}{b}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\cot 2x)$ ifadesinde $0\cdot\infty$ belirsizliğini gideriniz.

Çözüm: $\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$ olduğunu hatırlarsak,

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\cot 2x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x}=\frac{1}{2}$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x\cdot\cot 5x)$ ifadesindeki $0\cdot\infty$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$ olduğunu hatırlarsak,

$$\lim_{x\to 0}(\sin 2x.\cot 5x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x}=\frac{2}{5}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$ ifadesindeki $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^2=\left(3\cdot\lim\limits_{3x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)^2=9$

Örnek: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{4x-2\pi}{\tan(2x-\pi)}$ ifadesindeki $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{4x-2\pi}{\tan(2x-\pi)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2(2x-\pi)}{\tan(2x-\pi)}$

$2x-\pi=t$ dersek $x\to\frac{\pi}{2}$ için $2x-\pi\to 0$ ise $t\to 0$

olur. Buna göre,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(2x-\pi)}{\tan(2x-\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\tan t}=2$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan(x-1)}{\cot\left(x-1+\frac{\pi}{2}\right)}$ ifadesindeki $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $x-1=t$ dersek $x\to 1$ için $x-1\to 0$ ise $t\to 0$ ve

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\tan x$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\cot\left(x-1+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{\cot\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{-\tan t}=-1$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x+\tan 3x}{\sin x}$ ifadesindeki $\frac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x+\tan 3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{4x}{\sin x}+\frac{\tan 3x}{\sin x}\right)=4+3=7$

Örnek: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x-\sin^3 x}{3x}\right)$ ifadesindeki $\frac{0}{0}$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ olduğunu hatırlayalım.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x-\sin^3 x}{3x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x(1-\sin^2 x)}{3x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right).\lim_{x\to0}\sin^3 x$$

$$=\frac{1}{3}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x.\sin\frac{3}{x}\right)$ ifadesindeki $0\cdot\infty$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x.\sin\frac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2\sin\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$ olup $\frac{0}{0}$ belirsizliğine dönüşür.

$\frac{1}{x}=t$ dersek $x\to-\infty$ için $\frac{1}{x}\to 0$ ise $t\to0$

olacağından

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2\sin\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2\sin 3t}{t}\right)=\frac{2\cdot 3}{1}=6$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin 2x\cdot\sec x)$ ifadesindeki $0\cdot\infty$ belirsizliği gideriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin 2x.\sec x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ olup $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğine dönüşür.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}2\sin x=2$$

bulunur.

Pİ (π) SAYISININ LİMİTLE BULUNMASI

6.13. Teorem: $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere;

a) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\dfrac{180}{n}=\pi$

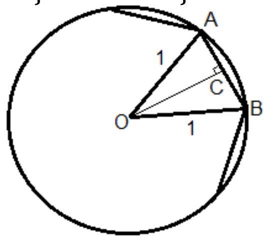
b) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\tan\dfrac{180}{n}=\pi$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\cos\dfrac{90(n-2)}{n}=\pi$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\cot\dfrac{90(n-2)}{n}=\pi$

biçimindedir.

İspat: Yarıçapı 1 br olan çemberin için bir düzgün n-gen çizelim.



Düzgün n-genin bir iç açısı $\dfrac{(n-2)\cdot 180}{n}$ olduğundan

$$m(OAB)=\frac{(n-2)\cdot 180}{2n}=\frac{(n-2)\cdot 90}{n}$$

bulunur. Buna göre;

$$m(OBA)=\frac{(n-2)\cdot 90}{n},\ m(AOC)=180-\frac{2(n-2)\cdot 90}{n}=\frac{180}{n}$$

olur. Şu halde;

$$|AC|=|CB|=\sin\frac{180}{n}$$

dir. n-genin çevresi $2n\cdot\sin\frac{180}{n}$ br'dir. n-gende $n\to\infty$ alındığında daire olur. Pi (π) sayısı çemberin çevresinin uzunluğunun, çemberin yarıçapına oranı olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2}\sin\frac{180}{n}=\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{180}{n}=\pi$$

olur.//

Çemberin çevresine çizilen n-gen kullanılarak b şıkkı benzer yöntemle gösterilir. $\frac{(n-2)\cdot 90}{n}+\frac{180}{n}=90$ olduğundan c ve d şıkları da gösterilir.

Bu teoremin ikinci bir ispatı:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

olduğu bilinmektedir. Bu denklemde $x=\frac{\pi}{n}$ alınırsa $x\to 0$ için $n\to\infty$ olacağından,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{\pi}{n}=\pi$$

olduğu kolayca görülür.

Örnek: Özel olarak n = 1 000 000 000 alalım.

$$1000000000\cdot\sin\frac{180}{1000000000}=3{,}14159265358979323\!2949306$$

olur.

PARÇALI FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

Parçalı fonksiyonların limit durumlarında şu şekilde incelenir.

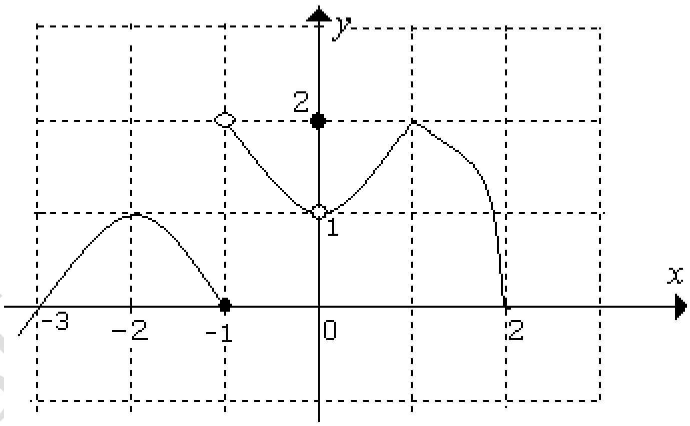
8.3. Tanım: Bir x değişkeni bir a noktasına azalan değerlerle (sağdan) yaklaştığı zaman bir limiti mevcutsa bu limite fonksiyonun a noktasındaki sağdan limiti denir ve $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ şeklinde gösterilir.

8.4. Tanım: Bir x değişkeni bir a noktasına artan değerlerle (soldan) yaklaştığı zaman bir limiti mevcutsa bu limite fonksiyonun a noktasındaki soldan limiti denir ve $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ şeklinde gösterilir.

8.4. Sonuç: Bir f fonksiyonun bir a noktasında limitinin olabilmesi için sağdan ve soldan limitlerinin birbirine eşit olması gerekir.

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ ise $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Örnek: Grafiği verilen fonksiyonda –2, –1, 0, 1 noktalarındaki sağdan ve soldan limitleri bulunuz.



Çözüm:

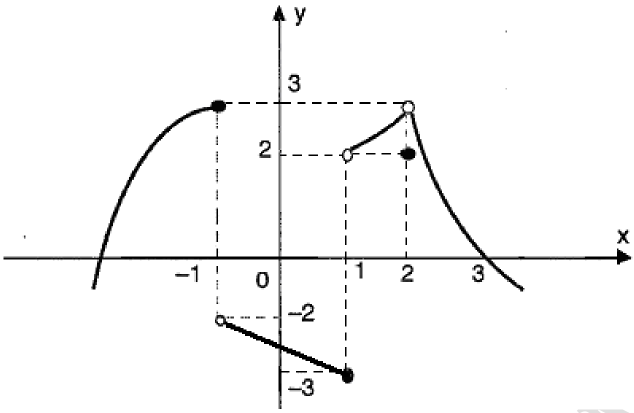
x = –2 için sağdan limiti 1 ve soldan limiti 1 olup limiti 1

x = –1 için sağdan limiti 2 ve soldan limiti 0 olup limiti yoktur

x = 0 için sağdan limiti 1 ve soldan limiti 1 olup limiti 1

x = 1 için sağdan limiti 2 ve soldan limiti 2 olup limiti 2 dir.

Örnek: Grafiği verilen fonksiyonda –1, 1, 2, 3 noktalarındaki sağdan ve soldan limitleri bulunuz.



Çözüm:
$x = -1$ için sağdan limiti –2 ve soldan limiti 3 olup limiti yoktur
$x = 1$ için sağdan limiti 2 ve soldan limiti –3 olup limiti yoktur
$x = 2$ için sağdan limiti 3 ve soldan limiti 3 olup limiti 3
$x = 3$ için sağdan limiti 0 ve soldan limiti 0 olup limiti 0 dır.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x > 3 \\ 5, & x = 3 \\ 2x + 1, & x < 3 \end{cases}$
fonksiyonun 3 noktasındaki limit durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 2 = 7$ ve $\lim\limits_{x \to 3^-} 2x + 1 = 7$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$ dir.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x > 5 \\ 12, & x = 5 \\ x + 5, & x < 5 \end{cases}$
fonksiyonun 5 noktasındaki limit durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x \to 5^+} 2x + 2 = 12$ ve $\lim\limits_{x \to 5^-} x + 5 = 10$ olduğundan 5 noktasında limiti yoktur.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x|}{x}$ fonksiyonunun 0 noktasındaki limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1$ olduğundan 0 noktasında limiti yoktur.

Örnek: $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x+\frac{|x-3|}{x-3}$ fonksiyonunun 3 noktasındaki limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 3^+}3x+\frac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}3x+\frac{x-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}3x+1=10$

ve $\lim\limits_{x\to 3^-}3x+\frac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}3x+\frac{-(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}3x-1=8$ bulunur. 3 noktasında sağdan ve soldan limitler eşit olmadığından 3 noktasında limit yoktur.

Örnek: $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn}(x^2-4)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki limiti nedir?

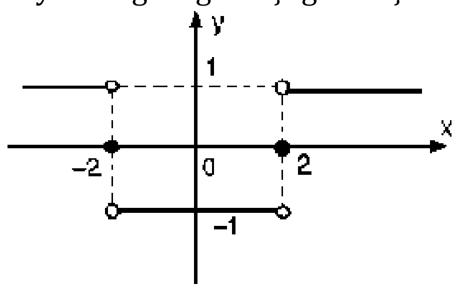
Çözüm: Önce verilen işaret fonksiyonun grafiğini çizelim. Fonksiyonun kritik noktaları,

$$x^2-4=0$$
$$x=\pm 2$$

olduğundan aşağıdaki çizelge çizilir.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	−	0	+	

Buna göre verilen fonksiyonun grafiğini aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Buna göre,

$$\lim\limits_{x\to 2^+}\operatorname{sgn}(x^2-4)=1 \text{ ve } \lim\limits_{x\to 2^-}\operatorname{sgn}(x^2-4)=-1$$

olduğundan limiti yoktur.

Örnek: $\lim_{x\to 2} x\cdot|x-3|$ değeri nedir?

Çözüm: $x = 2$ noktası $x \cdot |x-3|$ ün bir kritik noktası değildir.

$$\lim_{x\to 2} x\cdot|x-3| = 2\cdot|2-3| = 2$$

bulunur.

Örnek: $\lim_{x\to 1} \frac{2x+|x|}{|x+1|}$ değeri nedir?

Çözüm: $x = 1$ noktası $\frac{2x+|x|}{|x+1|}$ ün bir kritik noktası değildir.

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+|x|}{|x+1|} = \frac{2\cdot 1+|1|}{|1+1|} = \frac{3}{2}$$

bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 25 B) 27 C) 28 D) 30 E) 32

Çözüm: Çarpanlara ayırma yöntemi kullanılırsa,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)}{(x-2)}$$
$$= \lim_{x\to 2}(x^3+2x^2+4x+8)$$
$$= 2^3 + 2\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 8$$
$$= 32$$

Cevap: E

2. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x+5} - \sqrt{5x+1}$ değeri aşağıda kilerden hangisidir?

A) $-\infty$ B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+5}-\sqrt{5x+1}=\infty-\infty$ belirsizliğini gidermek için payın eşleniği alırsak,

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x+5}-\sqrt{5x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{5x+1})(\sqrt{x+5}+\sqrt{5x+1})}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{5+1})}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+5)-(5x+1)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5x+1}}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4x+4}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5x+1}}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4\cdot 1+4}{\sqrt{1+5}+\sqrt{5\cdot 1+1}}$$
$$=\frac{0}{2\sqrt{6}}$$
$$=\ 0$$

elde edilir.

Cevap: B

3. $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x &, \ x\leq 1\\ x+1 &, \ x\geq 1\end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) Limiti yoktur E) Limit bilinemez

Cevap: Soldan limit $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}2x=2$ ve sağdan limit $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x+1=2$ dir. Sağdan ve soldan limitler,

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=2$$

olduğundan limiti 2'dir.

Cevap: C

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x^2-2^2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(x-2)\left(x^2+x\cdot 2+4\right)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(4+4+4)}{(2+2)}=3$$

Cevap: D

5. $x \in (-\infty, 0]$ aralığında, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4}{4+3^{\frac{1}{x}}}$ in sonucu nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4}{4+3^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{4}{4}=1$

Cevap: A

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$ in sonucu nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Limiti yoktur

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2(1+\cos x)$$

$$=2$$

Cevap: C

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\tan x}{\sin x}$ in sonucu nedir?

A) 1 B) 2 C) 0 D) −1 E) −2

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\tan x}{\sin x}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x.\cos x}=2$$

Cevap: B

8. $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{|2-x|}{2-x}-x\right)$ in sonucu nedir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{|2-x|}{2-x}-x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2-x}{2-x}-x\right)\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=-1$

Cevap: A

9. $\operatorname*{Lim}\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{a-x}-3)}{(x-1)}=\dfrac{0}{0}$ ın olması için a'nın değeri ne olmalıdır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği, limitin var olması için payda $x=1$ olmalıdır. Paya $x=1$ yazılırsa;

$\sqrt{a-1}-3=0$
$\sqrt{a-1}=3$
$a-1=9$
$a=10$

olarak bulunur.

Cevap: E

10. $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{[\![7-[\![x+4]\!]]\!]}{x-4}$ ün sonucu nedir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) -1

Çözüm: Tam değer fonksiyonunda x soldan 3'e yaklaşırken $[\![7-[\![x+4]\!]]\!] = 0$ olacağından

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{[\![7-[\![x+4]\!]]\!]}{x-4} = 0$$

olur.

Cevap: A

11. $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{x^3-y^3}{x-y}$ in sonucu nedir?

A) 0 B) 3 C) 3x D) $3x^2$ E) ∞

Çözüm: $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{x^3-y^3}{x-y} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to y} \dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)} = 3x^2$

Cevap: D

12. $f(x) = x^2 + 4$ olmak üzere $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ sonucu kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $f(1) = 1^2 + 4 = 5$

$f(1+h) = (1+h)^2 + 4 = h^2 + 2h + 5$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h+5-5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2)}{h} = 2$$

Cevap: C

13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-2x}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-2x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2(x-2)}{x(x-2)} = 2$

Cevap: A

14. $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{6}{x-9}\right)$ değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{1}{6}$

Çözüm: 1. denklemin paydasının eşleni alınırsa;

$$\lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-3}-\frac{6}{x-9}\right)=\lim_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}+3-6}{x-9}\right)$$

$$=\lim_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{6}$$

Cevap: E

15. $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-2)\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ in sonucu kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $n=\dfrac{1}{m}$ dönüşümü yapalım. $n\to\infty$ iken $m\to 0$ dır.

$$\lim_{n\to\infty}(3n-2)\sin\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{m\to 0}\left(3\cdot\frac{1}{m}-2\right)\cdot\sin m$$

$$=\lim_{m\to 0}\frac{3-2m}{m}\cdot\sin m$$

$$=\lim_{m\to 0}(3-2m)\cdot\frac{\sin m}{m}$$

$$=(3-0)\cdot 1$$

$$=3$$

Cevap: E

16. $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ fonksiyonu için,

$\lim\limits_{x\to 1^{+}}f(x)=a$ ve $\lim\limits_{x\to 1^{-}}f(x)=b$

olduğuna göre, a + b kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $a=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

$b=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$

$a+b=1+(-1)=0$

Cevap: C

17. $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x<0\\ 4+x^2, & x\geq 0\end{cases}$

ile tanımlanan f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında limitinin olması için a'nın değeri kaç olmalıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

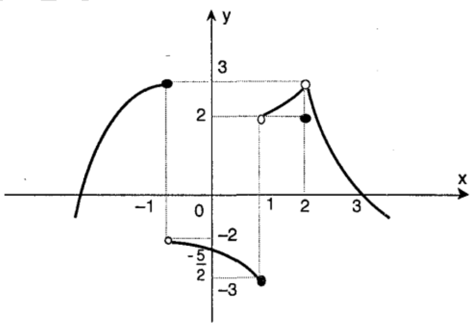
Çözüm: Sağdan ve soldan limitler eşit olmalıdır.

$\lim\limits_{x\to 0^+} 4+x^2=4$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+a=a$

$a=4$

Cevap: E

18.



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)+\lim_{x\to 1^-} f(x)+\lim_{x\to 2^+} f(x)$$

toplamı kaçtır?

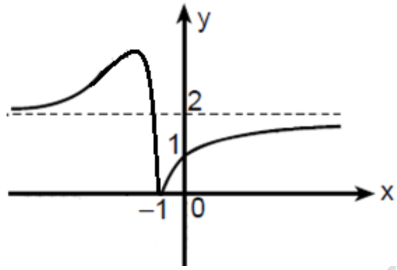
A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^-} f(x) + \lim_{x\to 2^+} f(x) = -2 - 3 + 3 = -2$$

Cevap: A

19.



Verilen şekilde $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}\setminus\{2\}$ fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir. Buna göre,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) + \lim_{x\to \infty} f(x)$$

limitlerinin toplamı kaçtır?

A) −2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

Çözüm: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2 + 2 = 4$

Cevap: D

20. $f(x) = x + 4$ ve $g(x) = 3x - 7$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(g(x))}{x-1}$ limitinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:
$f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (x + 4) \circ (3x - 7) = 3x - 7 + 4 = 3x - 3$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(g(x))}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x-3}{x-1} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$$

Cevap: B

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz I-II, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.
3. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
4. Murray R. SPIEGEL, Çeviri: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Nobel Yayın Dağıtım, 1997.
5. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
6. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
7. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
8. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
9. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
10. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
11. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
12. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
13. George B. THOMAS, Thomas Calculus, Massachusetts Institute of Technology, University of California, Çeviri Recep Korkmaz, Beta, 2009, İstanbul.
14. Doç. Dr. Ali DÖNMEZ, Gerçel Analiz, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1985.
15. Prof. Dr. Necdet SAN, Analiz Dersleri, Baylan Matbaası, 1975, Ankara.
16. Prof. Dr. Rahim OCAK, Reel Analiz, Erzurum, 1998.
17. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
18. Yrd. Doç. Dr. Ersin Erol, Yüksek Matematiğe Giriş, Marmara Üniversitesi Yayınları, 1991, İstanbul.
19. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.
20. Doç. Dr. Ekrem Kadıoğlu, Doç. Dr. Muhammed Kamalı, Genel Matematik, Erzurum, 2005.