9. BÖLÜM
SÜREKLİLİK ve ASİMPTOTLAR

Bu bölümde, matematik dışı bir tabir kullanmak istersek, fonksiyonların çiziminde fonksiyonların grafiğini aksaklık yapan yerlere süreksizlik adı vereceğiz. Bu bölümde sürekliliği inceledikten sonra yine fonksiyonların grafiklerinde sonsuza teğet değerini alan durumları araştıracağız. Buna da asimptotlar adı vereceğiz.

FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİK

9.1. Tanım: Bir fonksiyonun bir noktada limiti var ve o noktada görüntüsü aynı ise bu noktada süreklidir denir. Buna göre $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ her $a \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Bir fonksiyon bütün noktalarda sürekli ise bu fonksiyona süreklidir denir ve $C(A)$ ile gösterilir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu süreklidir.

Çözüm: $\lim_{x\to a} x^2 + 1 = a^2 + 1 = f(a)$

olduğundan f fonksiyonu a noktasında süreklidir. a noktası keyfi bir nokta olduğundan f fonksiyonu her noktada süreklidir.

9.2. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $a \in A$ için,

i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında sağdan sürekli,

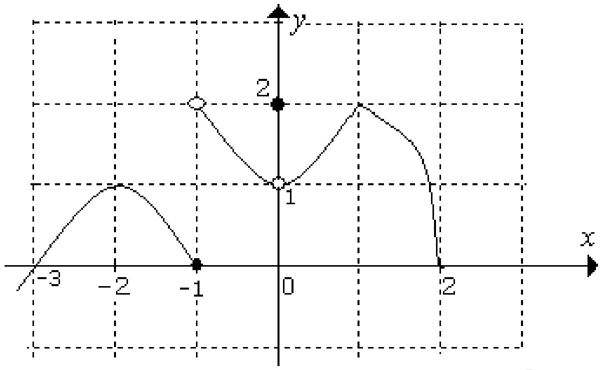
ii) $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında soldan süreklidir denir.

9.3. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x) \neq f(a) \text{ veya } \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$$

ise f fonksiyonu a noktasında süreksizdir.

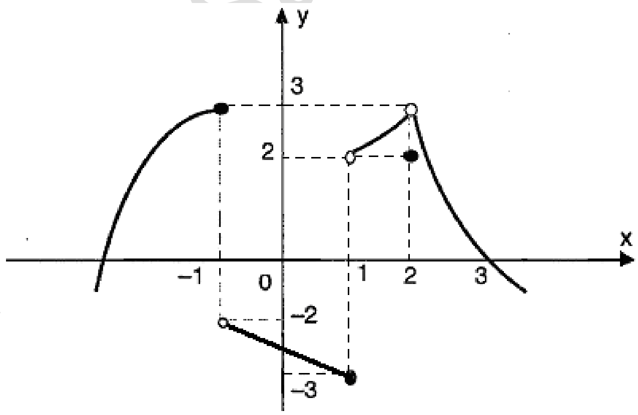
Örnek: Aşağıdaki noktaların sürekliliğini bulunuz.



x = −2 için limiti 1 ve görüntüsü 1 olduğundan –2 noktasında süreklidir

x = −1 için soldan limiti ve görüntsü 0 olduğundan soldan süreklidir
x = 0 için limiti 1 ve görüntüsü 2 olduğundan süreksizdir
x = 1 için limiti 2 ve görüntüsü 2 olduğundan 1 noktasında süreklidir

Örnek: Grafiği verilen fonksiyonda –1, 1, 2, 3 noktalarındaki sağdan ve soldan limitleri bulunuz.



Çözüm:
x = −1 için soldan limiti 3 olduğundan soldan süreklidir
x = 1 için soldan limiti –3 olduğundan soldan süreklidir
x = 2 için limiti 3 ve görüntsü 2 olduğundan süreksizdir
x = 3 için limiti 3 ve görüntüsü 3 olduğundan süreklidir

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>2\\ 7, & x=2\\ x+5, & x<2\end{cases}$
fonksiyonun 2 noktasındaki süreklilik durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x+3=7$ ve $\lim\limits_{x\to 2^-} x+5=7$ olduğundan 2 noktasında limiti 7 dir. Ayrıca $f(2)=7$ olduğundan 2 noktasında süreklidir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-2, & x>4\\ 5, & x=4\\ 2x+1, & x<4\end{cases}$ fonksiyonunun 4 noktasındaki sürekliliğini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 4^+} x^2-2=14$ ve $\lim\limits_{x\to 4^-} 2x+1=9$ sağdan ve soldan limitler eşit olmadığından limiti yoktur. Dolayısıyla 4 noktasında sürekli değildir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}|x-1|, & x>2\\ \operatorname{sgn}(x-5), & x=2\\ x-3, & x<2\end{cases}$ fonksiyonunun 2 noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

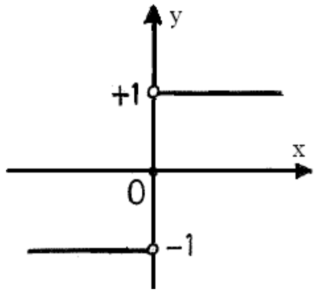
Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2^+}|x-1|=1,\ \lim\limits_{x\to 2^-} x-3=-1$ ve $f(2)=\operatorname{sgn}(x-5)=-1$ olduğundan 2 noktasında soldan süreklidir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(x^2-9), & x>3\\ 2ax+7, & x\leq 3\end{cases}$
fonksiyonunun 3 noktasındaki sürekli olması için a ne olmalıdır?

Çözüm: f fonksiyonun 3 noktasında sağdan sürekli olması için;
$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$$
olmalıdır. Buna göre,
$$\lim_{x\to 3^+} \operatorname{sgn}(x^2-9)=1$$
olduğundan
$$f(3)=2a\cdot 3+7=6a+7$$
elde edilir. O halde $6a+7=1$ ise $a=-1$ dir.

Örnek: $f:\mathbb{R}-\{0\}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{|x|}{x}$ fonksiyonunun 0 noktasındaki sürekli olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1$ ve $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x}{x}=-1$
olduğundan 0 noktasında limiti yoktur. O halde süreksizdir.



Örnek: $f(x)=\begin{cases}\frac{\tan kx}{x}, & x<0\\ 5x+2k^2, & x\geq 0\end{cases}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında sürekli olması için k değeri ne olmalıdır?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\tan kx}{x}=k$ ve $\lim\limits_{x\to0^+}5x+2k^2=2k^2$

olduğundan $2k^2=k$ olmalıdır. Bu durumda

$$2k^2-k=0$$
$$k(2k-1)=0$$
$$k=0 \text{ ve } k=\frac{1}{2}$$

olur.

Örnek: $f(x)=\frac{1}{x-[\![x]\!]}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu küme nedir?

Çözüm: $x-[\![x]\!]$ de $x\in\mathbb{Z}$ ise $x-[\![x]\!]=0$ olduğundan f(x) tanımsızdır. Buna göre süreklisiz olduğu küme $\mathbb{Z}$ dir.

9.1. Not: 1) $y=f(x)$ için f(x) polinom fonksiyonu ise fonksiyon her sürreklidir.

2) $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ şeklinde rasyonel fonksiyon ise $f(a)\neq0$, $g(a)=0$ iken $x=a$ noktalarında süreksizdir.

Örnek: $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-4x-5}$ fonksiyonu hangi noktalarda süreksizdir?

Çözüm: Rasyonel fonksiyonlarda paydayı 0 yapan değerler sağdan ve soldan limitleri eşit olamayacağından fonksiyonları süreksiz yapar. Buna göre $x^2-4x-5=0$ denkleminin kökleri olan $x=-1$ ve $x=5$ apsisli noktalarda fonksiyon süreksizdir.

Örnek: $m\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x)=\frac{3x^2-4x+1}{x^2-(m+1)x+1}$ fonksiyonunun her m için sürekli ise m'nin alabileceği değerler kümesini bulunuz.

Çözüm: Bu soruda verilen fonksiyonun paydasının her $x\in\mathbb{R}$ için sürekli olduğunu göstermeliyiz. Ancak f fonksiyonunun her $x\in\mathbb{R}$ için sürekli olabilmesi için paydası olan $x^2-(m+1)x+1\neq 0$ olmalıdır. Bunun içinde $x^2-(m+1)x+1=0$ polinomunun diskiriminantı sıfırdan küçük olmalıdır.

$$\Delta=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot 1<0$$
$$m^2+2m-3<0$$
$$m=-3 \text{ ve } m=1$$

bulunur. Buna göre,

m	$-\infty$		-3		1		$+$
$\Delta=m^2+2m-3$		$+$	o	$-$	o	$+$	

tablosu elde edilir. O halde çözüm kümesi,

$$-3<m<1$$

olup bu aralıkta süreklidir.

Örnek: $f(x)=\sqrt{4-|x+1|}$ fonksiyonunun sürekli olduğu kümeyi bulunuz.

Çözüm: Kara köklü bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta sürekli olacağından f fonksiyonu $4-|x+1|\geq 0$ şartına uyan her $x\in\mathbb{R}$ için süreklidir.

$$4-|x+1|\geq 0$$
$$|x+1|\leq 4$$
$$-4\leq x+1\leq 4$$
$$-5\leq x\leq 3$$

olur. O halde f fonksiyonu $[-5,3]$ aralığında tanımlı ve süreklidir. //

9.1. tanımı şu şekilde de verilebilir.

9.4. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$ sayısı vardır, öyle ki $|x - a| < \delta$ kaldıkça $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ oluyorsa, bu f fonksiyonun a noktasındaki süreklidir denir.

Bu tanım ilk etapta fonksiyonlardaki limitin tanımına benzediğinden limitin tanımı ile karıştırılabilir. Ama limitin tanımında $|f(x) - L| < \varepsilon$ iken sürekliliğin tanımında $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ biçimindedir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu her noktada sürekli midir?

Çözüm: $\left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \leq \left|\frac{x-a}{2}\right|$ ve $\left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \leq 1$
olduğunu hatırlayalım. Trigonometri deki dönüşüm formüllerine göre;

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= 2\left|\sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \\ &\leq |x - a| \end{aligned}$$

olur. O halde $|x - a| < \delta$ olduğunda $|\sin x - \sin a| < \delta$ olur. Yani $\delta = \varepsilon$ alınabilir. Demek ki, sinüs fonksiyonu her a noktasında sürekli ve dolayısıyla $\mathbb{R}$ reel sayılarda süreklidir.

9.1. Teorem: $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon, her $a \in A \cap B$ da f ve g fonksiyonları sürekli olsun.

i) $f + g$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.
i) $f - g$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.
iii) $f \cdot g$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.
iv) $f \div g$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.

İspat: i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ ise;

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

olduğundan $x = a$ noktasında süreklidir.

ii, iii, iv özellikleri de benzer şekilde gösterilir.

9.2. Teorem: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, her $a \in A$ da f fonksiyonları sürekli olsun.

i) $k \in \mathbb{R}$ ise $k \cdot f$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.
ii) $n \in \mathbb{N}^+$ ise f^n fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.
iii) $|f|$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.
vi) $k \in \mathbb{R}$ ise k^f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.

İspat: i) Her $a \in A$ da f fonksiyonları sürekli ve $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ olsun. Buna göre;

$$\lim_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot f(a)$$

olur.

Yukarıdaki beş özelliğin ispatları birbirine benzer olduğundan diğerlerinin ispatı birer araştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

Örnek: $f(x) = 4^{\frac{2x+3}{x^2-4}}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

Çözüm: $f(x) = 4^{\frac{2x+3}{x^2-4}}$ fonksiyonu ile $y = \frac{2x+3}{x^2-4}$ fonksiyonu aynı noktalarda süreksiz olacağından $x^2 - 4 = 0$ olan paydanın sıfır olmalıdır. Buna göre $x = 2$ ve $x = -2$ noktalarında f fonksiyonu süreksizdir.

9.3. Teorem: $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon, $f(A) \subseteq B$ olmak üzere, f fonksiyonu her $a \in A$ noktasında, g fonksiyonu $f(a) \in B$ noktasında sürekli ise $g \circ f$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.

İspat: $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ da sürekli ise $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$,

$g(y)$ fonksiyonu $y = f(a)$ da sürekli ise $\lim\limits_{x\to a} g(y) = g(f(a))$,

yazılır. Öyleyse,

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(f(a))$$

elde edilir. Bu durum $g \circ f$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli olduğunu gösterir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 2 \\ x+1, & x=2 \end{cases}$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\neq 2 \\ x+2, & x=2 \end{cases}$

biçiminde tanımlı f ve g fonksiyonları için $f\circ g$ fonksiyonun sürekli olduğu kümeyi bulunuz.

Çözüm: $(f\circ g)(x)=\begin{cases} (x)\circ(2x+1), & x\neq 2 \\ (x+1)\circ(x+2), & x=2 \end{cases}$

$=\begin{cases} 2x+1, & x\neq 2 \\ x+3, & x=2 \end{cases}$

bulunur. $(f\circ g)$ fonksiyonun kritik noktası 2'dir.

$(f\circ g)(2)=2+3=5$

$\lim_{x\to 2^+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 2^+}2x+1=5$

$\lim_{x\to 2^-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 2^-}2x+1=5$

Sağdan, soldan limit ve 2 noktasında görüntü aynı olduğundan $(f\circ g)$ fonksiyonun sürekli her $x\in\mathbb{R}$ için süreklidir.

KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİLİK

9.4. Teorem: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ aralığında fonksiyon sürekli ise sınırlıdır.

İspat: Kabul edelim ki, $f([a,b])$ sınırlı olmasın. Bu takdirde her bir $n\in\mathbb{N}^+$ için $|f(x_n)|\geq n$ olacak şekilde bir $x_n\in[a,b]$ noktası vardır. $[a,b]$ sınırlı bir küme olduğundan (x_n) sınırlı bir dizidir. Dizilerdeki limit konusundaki Bolzano–Welerstrass teoremi gereğince (x_n) dizisinin yakınsak en az bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. $x_{n_k}\to x_0$ olsun. $[a,b]$ aralığının tüm yığılma noktaları kendisine ait olduğundan $x_0\in[a,b]$ noktasında da süreklidir. Buna göre $\forall\,\varepsilon>0$ için $\exists\,\delta>0$ sayısı vardır, öyle ki $|x-a|<\delta$ kaldıkça $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ kalır. Özel olarak $\varepsilon=1$ alalım. x_0 noktasının $\delta-$komşuluğunda

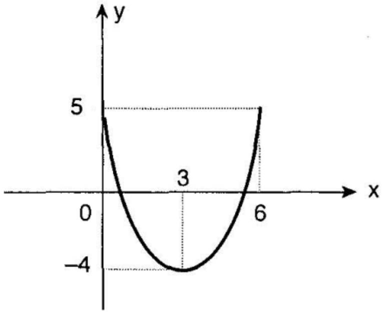
$$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leq|f(x)-f(x_0)|<1$$

buradan da

$$|f(x)|<1+|f(x_0)|$$

yazılabilir. Bu $|f(x_0)|\geq n$ kabulü ile çelişir. O halde $f([a,b])$ sınırlı, yani f sınırlıdır.

Örnek: [0, 6] aralığında sürekli verilen fonksiyon sınırlıdır.



9.2. Not: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ aralığında fonksiyon sürekli ise bu aralıkta fonksiyon bir en küçük (minimum) ve bir en büyük (maksimum) değeri vardır.

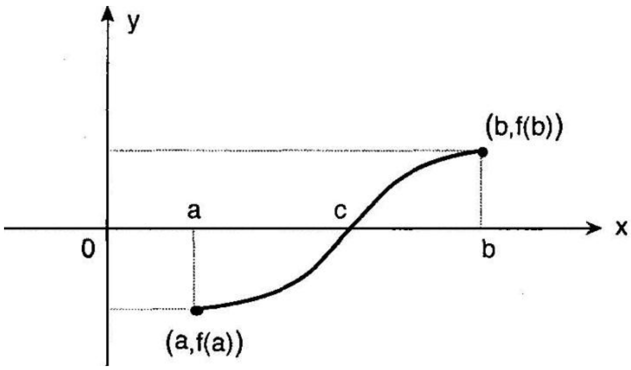
9.5. Teorem: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanım kümesinin bir c noktasında sürekli ve $f(c) \neq 0$ ise c'nin öyle bir $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ komşuluğu vardır ki, bu komşuluktaki $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için f(x) ile f(c) aynı işaretlidir.

İspat: f fonksiyonu c noktasında sürekli olduğundan, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ dir. $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset [a, b]$ olmak üzere, x, c'nin $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ komşuluğundaki her x için $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(c)|$ seçilirse;

$$|f(x) - f(c)| < \frac{1}{2}|f(c)|$$
$$-\frac{1}{2}|f(c)| < f(x) - f(c) < \frac{1}{2}|f(c)|$$
$$\frac{1}{2}|f(c)| < f(x) < \frac{3}{2}|f(c)|$$

dir. Buradan, f(x) ile f(c) 'nin, c'nin $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ komşuluğunda aym işareti aldığı gösterilebilir.

9.6. Teorem (Bolzano Teoremi): $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, [a, b] aralığında sürekli ve f(a) ile f(b) ters işaretli iseler, $f(c) = 0$ olacak biçimde (a, b) aralığmda en az bir c noktası vardır.



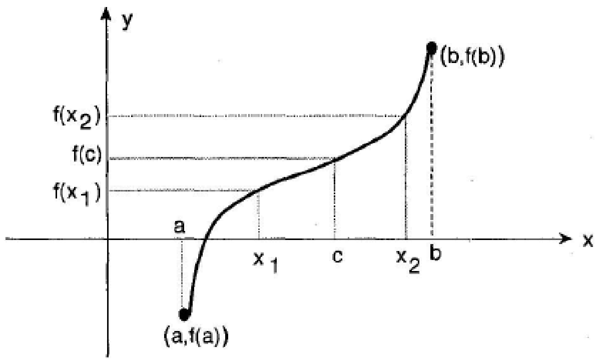
İspat: $f(a) < 0$ ve $f(b) > 0$ olduğunu düşünelim.

$S = \{x : f(x) \leq 0 , x \in [a , b]\}$ kümesini göz önüne alalım. $f(a) < 0$ olduğundan, $a \in S$ dir. Başka bir deyişle $S \neq \emptyset$ dir. $f(b) > 0$ olduğundan, $b \in S$ dir. Öyleyse, $S \neq [a, b]$ dir. $S \subset [a, b]$ olduğundan, S gerçel sayılar kümesi sınırlıdır. S'nin bir en küçük üst sınırı olacağı açıktır. Bunu c ile gösterelim.

$f(c) < 0$ olduğunu düşünelim, f fonksiyonu, c noktasında sürekli olduğundan, $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ aralığındaki bütün x'ler için $f(x)$ ile $f(c)$ aynı işaretli olacak biçimde c'nin bir ε komşuluğu vardır. $f(c) < 0$ olduğundan $c < x < c + \varepsilon$ için $f(c) < 0$ ve dolayısıyla $x \in S$ olacaktır. Bu ise, c'nin üst sınırların en küçüğü olmasına aykırıdır. Öyleyse, $f(c) < 0$ olamaz.

$f(c) < 0$ olduğunu düşünelim. f fonksiyonu, c noktasında sürekli olduğundan, öyle bir $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ aralığı vardır ki, bu aralıkta her x için $f(c) < 0$ dolayısıyla $x \notin S$ dir. Öyleyse, $c - \varepsilon$, S için bir üst sınırdır. Bu da, c'nin üst sınırların en küçüğü olmasına ters düşer, öyleyse, $f(c) > 0$ eşitsizliği de doğru değildir. $f(c) \nless 0$ ve $f(c) \ngtr 0$ olmasından $f(c) = 0$ sonucunu elde ederiz.

9.7. Teorem (Ara değer teoremi): $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli ve $[a, b]$ aralığının iki sayısı $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksyonu, $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki k değerini (x_1, x_2) aralığındaki en az bir $x = c$ değeri için alır.

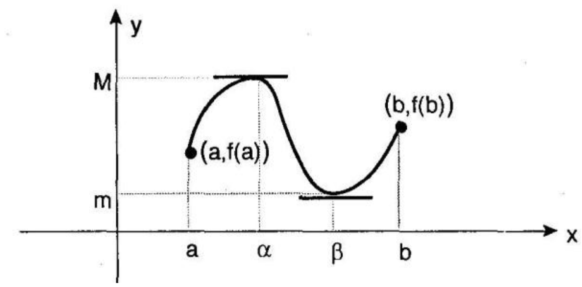


İspat: $f(x_1) < k < f(x_2)$ olduğunu kabul edelim. $g(x) = f(x) - k$ eşitliğini sağlayacak şekilde $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. g'nin de $[a, b]$ aralığında sürekli olduğu açıktır. $f(x_1) < k < f(x_2)$ eşitsizliğinden,

$$g(x_1) = f(x_1) - k < 0 \text{ ve } g(x_2) = f(x_2) - k > 0$$

olduğunu hemen söyleyebiliriz. Öyleyse, Bolzano teoremine göre, (x_1,x_2) aralığındaki bir c değeri için $g(c) = 0$ olmak zorundadır. Yani, $f(c) - k = 0$ yada $f(c)0k$ dır.

9.8. Teorem (Uç Değer Teoremi): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ise, f fonksiyonunun bu aralıkta bir maksimum ve bir de minimum değeri vardır.



İspat: $S = \{f(x): x \in [a,b\,]\}$ kümesinin bir üst sınırı ve bir de alt sının olsun, bu takdirde sup M ve inf m olacak şekilde m ve M vardır. Şimdi bu $m, M \in S$ olduğunu gösterirsek teoremin ispatı tamamlanmış olur. $M \notin S$ olduğunu düşünelim. Öyleyse, $\forall\, x \in [a, b]$ için $f(x) < M$ dir. $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ ne tanımlı, $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu düşünelim. $f\,(x) < M$ olduğundan, $\forall\, x \in [a,b]$ için $g\,(x) > 0$ dır. Aynca, f(x) fonksiyonu, sürekli olduğundan, g fonksiyonu da $[a, b]$ aralığında süreklidir. Öyleyse, 9.4. teoreme göre g fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlıdır. Başka bir deyişle, $\forall\, x \in [a,b]$ için, $K \in \mathbb{R}^+$ öyle ki, $g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq K$ dır. Buradan,

$$\frac{1}{K} \leq M - f(x) \text{ yada } f(x) \leq M - \frac{1}{K}$$

elde edilir. Bu sonuç, M'nin S kümesinin infumumu olmasına aykırıdır. Öyleyse, $M \notin S$ kabulü doğru değildir. Yani, $M \in S$ dır.

Benzer biçimde, $h(x) \leq \frac{1}{f(x)-m}$ ile tanımlı, $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yardımıyla $m \in S$ olduğu ispatlanır. Buna göre, $f(\alpha) = M, f(\beta) = m$ olacak biçimde, $\alpha, \beta \in [a,b]$ sayılan vardır.

DÜZGÜN SÜREKLİLİK

9.5. Tanım: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısı için,

$x, x_0 \in [a,b]$ ve $|x - x_0| < \delta$ ise $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

gerektirmesini sağlayan ε'a bağlı bir $\delta \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında düzgün sürekli denir. (Seçilen δ sayısı sadece ε'na bağlı olacaktır.)

Örnek: $f(x) = x^2$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $x, x_0 \in (0,1)$ için $|x - x_0| < \delta$ olacak şekilde $\delta \in \mathbb{R}^+$ olsun.
$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < 2|x - x_0| = 2\delta = \varepsilon$
olup düzgün süreklidir. Çünkü δ ifadesi $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ olup ε'a bağlıdır.

Örnek: $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $x, x_0 \in (0,1)$ için $|x - x_0| < \delta$ olacak şekilde $\delta \in \mathbb{R}^+$ olsun. $x = \delta$ ve $x_0 = \frac{\delta}{1+\varepsilon}$ olacak şekilde seçelim. Burada $0 < \delta < 1$ olduğunu görelim.

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\varepsilon}{\delta}\right| = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon$$

olup düzgün sürekli değildir.

9.9. Teorem: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında düzgün sürekli ise, f fonksiyonu bu aralıkta sınırlıdır.

İspat: f fonksiyonu, [a, b] aralığında düzgün sürekli olduğundan, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için,

$x_1, x_2 \in [a, b]$ ve $|x_1 - x_2| < \delta$ ise $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

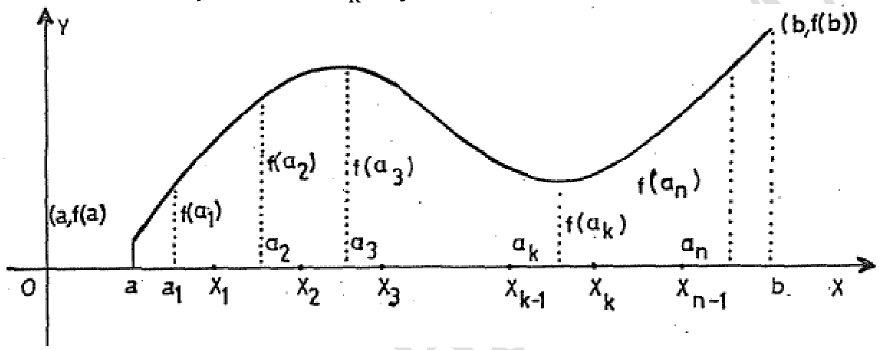
olacak biçimde ε'a bağlı bir $\delta \in \mathbb{R}^+$ sayısı vardır. δ sayısı, x değişkenine bağlı değildir. Öyleyse, $\varepsilon = 1$ seçilerek,

$x_1, x_2 \in [a, b]$ ve $|x_1 - x_2| < \delta$ ise $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$

gerektirmesini gerçekleyenbir δ sayısı bulunabilir. $\frac{b-a}{n} < 2\delta$ olmak üzere, [a, b] aralığını n eş parçaya ayıralım. Bu eş parçaların oluşturduğu

$[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, b]$

alt aralıklarının orta noktalan, sıra ile $a_1, a_2, \cdots, a_n$ olsun. $\forall\, x \in [a, b]$ sayısı için, $|x - a_k| < \delta$ olacak biçimde bir a_k sayısı vardır.



$|x - a_k| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a_k)| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |f(a_k)| + 1$

olduğu görülür.

$M = \max\{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)\}$ olsun. Öyleyse, $\forall\, x \in [a, b]$ için, $|f(x)| < M + 1$ yazılır. Başka bir deyişle, f fonksiyonu, [a, b] aralığında sınıflıdır.

ASİMPTOTLAR

9.6. Tanım: $y = f(x)$ fonksiyonuna sonsuzda teğet olmasına asimptot denir. Bu fonksiyonda,

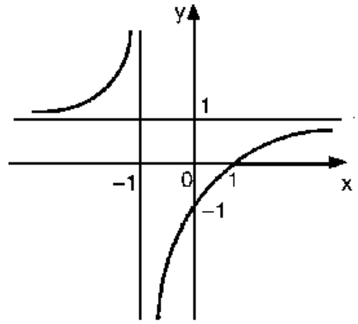
(i) f fonksiyonu $y = a$, $(a \in \mathbb{R})$ doğrusuna sonsuzda teğet ise yatay asimptot,

(ii) f fonksiyonu $x = a$, $(a \in \mathbb{R})$ doğrusuna sonsuzda teğet ise düşey (dikey) asimptot,

(iii) f fonksiyonu herhangi bir $y = mx + n$, $(m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0)$ doğrusuna sonsuzda teğet olmasına eğik asimptot denir.

(iv) f fonksiyonu herhangi bir eğriye sonsuzda teğet olmasına eğri asimptot denir.

Örnek: Aşağıdaki şekli inceleyelim.



Verilen fonksiyon $y = 1$ doğrusuna yatay asimptot, $x = -1$ doğrusuna düşey asimptottur.

1– Yatay Asimptotlar

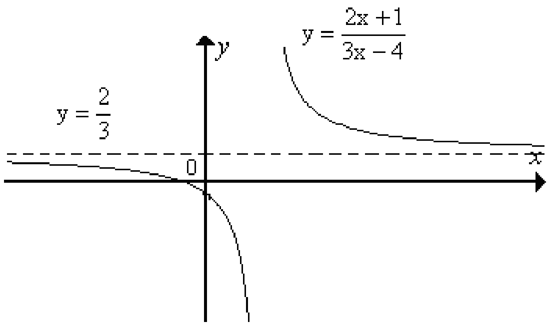
9.1. Aksiyom: $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \quad \text{veya} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

ise $y = a$ doğrusuna sonsuzda teğettir.

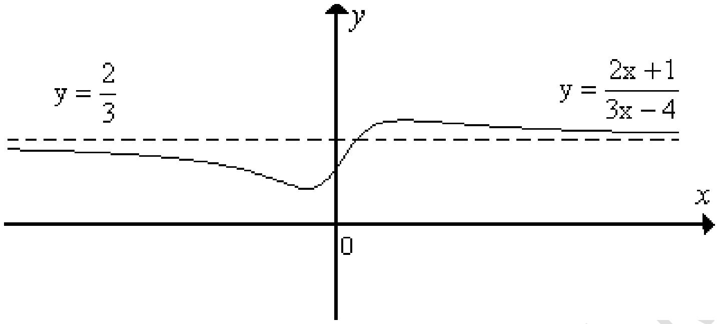
Örnek: $y = \dfrac{2x+1}{3x-4}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{3x-4} = \dfrac{2}{3}$ olduğundan $y = \dfrac{2}{3}$ yatay asimptottur.



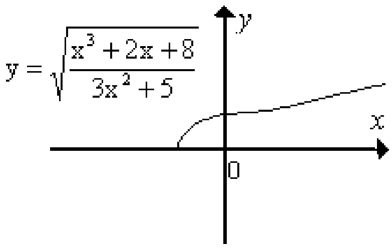
Örnek: $y = \dfrac{6x^2+7x+10}{2x^2+5}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+7x+10}{2x^2+5} = \dfrac{6}{2} = 3$ olduğundan $y = 3$ yatay asimptottur.



Örnek: $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3+2x+8}{3x^2+5}}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^3+2x+8}{3x^2+5}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x+8}{3x^2+5}} = +\infty$
olduğundan yatay asimptot yoktur.



Örnek: $y = \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{4x}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{5}{x}\right)^{4x}$ nin değerini bulmalıyız. Bu işlemde $-\dfrac{5}{x} = \dfrac{1}{k}$ seçelim. $x = -5k$ bulunur. Ayrıca $x \to \infty$ iken $k \to \infty$ olacağından

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{4x} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-5.4k} = \left[\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{-20} = e^{-20}$$

elde edilir. Buna göre $y = e^{-20}$ yatay asimptottur.

2– Düşey (Dikey) Asimptotlar

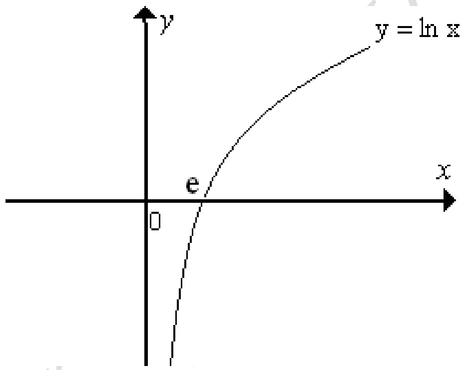
9.2. Aksiyom: $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ veya } \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

şartlarından en az birini sağlayan bir a sayısı varsa $x = a$ doğrusuna sonsuzda teğettir.

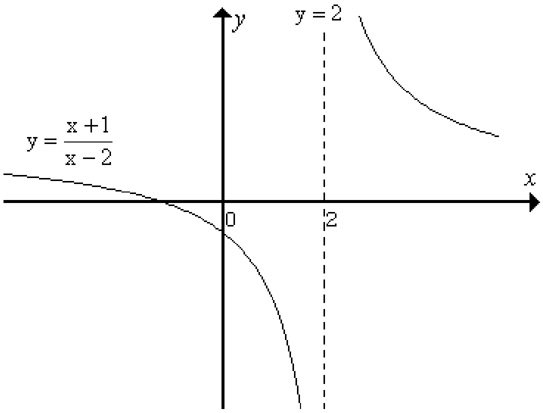
Örnek: $y = \ln x$ fonksiyonunun düşey asimptotunu $x = 0$ (y ekseni) olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ olduğunda $x = 0$ fonksiyonunun düşey asimptotudur.



Örnek: $y = \frac{x+1}{x-2}$ fonksiyonunun düşey asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$ ve $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$ olduğundan $y = 2$ düşey asimptottur.



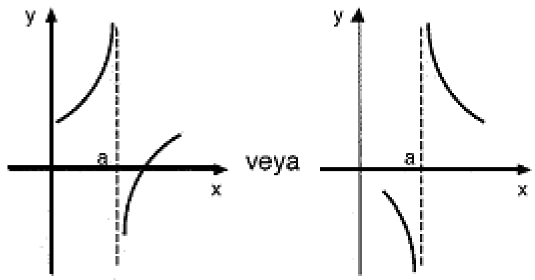
Örnek: $f(x) = x^3 + 5x + 3$ fonksiyonunun düşey asimptotunu bulunuz.

Çözüm: Her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \to a} x^3 + 5x + 3 = a^3 + 5a + 3 \neq \pm\infty$ olacağından düşey asimptot yoktur.

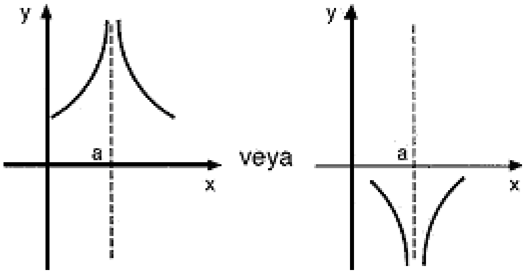
9.2. Not: $y = f(x)$ için $f(x)$ polinom fonksiyon ise düşey asimptot yoktur.

9.3. Not: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ şeklinde fonksiyon ise $f(x) \neq 0, g(x) = 0$ iken $x = a$ düşey asimptottur.

$x = a$, denklemin tek katlı bir kökü ise aşağıdaki şekil gibi olur.



$x = a$, denklemin çift katlı bir kökü ise aşağıdaki şekil gibi olur.



f(x) in grafiği şekilde görüldüğü gibi asimptota yaklaşır veya uzaklaşır.

Örnek: $y = \frac{x-1}{x^2+3x-4}$ fonksiyonunun düşey asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $x^2 + 3x - 4 = 0$ ise $x = 1, x = -4$ doğruları düşey asimptot olabilir.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)} = \frac{1}{5}$$

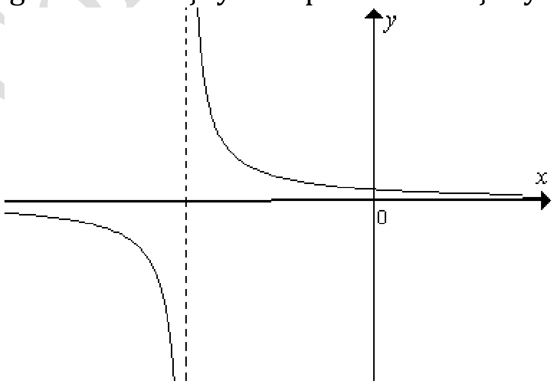
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)} = \frac{1}{5}$$

Sağdan ve soldan limitleri $\pm\infty$ olmadığından $x = 1$ düşey asimptot değildir. Çünkü $x = 1$ paydayı sıfır yaptığı gibi payı da sıfır yapmaktadır.

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)} = -\infty$$

olur. Bu, $x = -4$ doğrusunun düşey asimptot olması için yeterlidir.



Örnek: $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \tan x$ fonksiyonunun düşey asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ veya $x = \frac{3\pi}{2}$

dir. Paydayı sıfır yapan $x = \frac{\pi}{2}$ veya $x = \frac{3\pi}{2}$ değerleri payı sıfır yapmadığından (limite müracaat etmeden) $x = \frac{\pi}{2}$ veya $x = \frac{3\pi}{2}$ doğruları düşey asimptotlar mevcuttur.

3– Eğik Asimptotlar

9.3. Aksiyom: $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. $m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=a \text{ veya } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=a$$

İse f(x) fonksiyonu $g(x) = mx + n$ doğrusuna sonsuzda teğettir.

9.10. Teorem: $y = f(x), a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a_1$ ve $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-a_1x]=b_1$ ise $y = a_1x + b_1$ birinci asimptot denklemidir.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a_2$ ve $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=b_2$ ise $y = a_2x + b_2$ ikinci asimptot denklemidir.

İspat: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a_1$ ve $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-a_1x]=b_1$ olsun. $y = g(x) = a_1x + b_1$ ise,

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{g(x)}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[a_1-\left(\frac{a_1x+b_1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[a_1-a_1-\frac{b_1}{x}\right]$$

$$= 0$$

dır.

b) Benzer şekilde ispat edilir.

Örnek: $y = \frac{3x^2+4x-7}{x+3}$ fonksiyonunun eğik asimptotunu bulunuz.

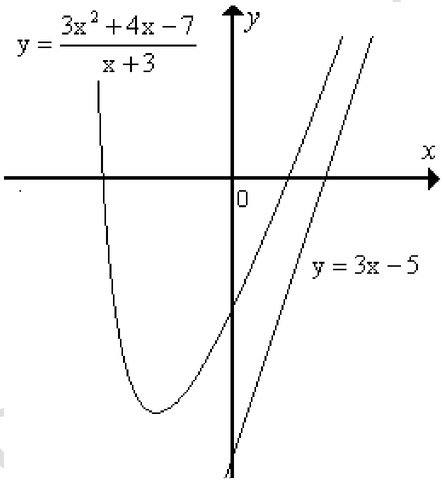
Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+4x-7}{x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4x-7}{x^2+3x}\right)=3=a_1$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-a_1x]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2+4x-7}{x+3}-3x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x-7}{x+3}=-5=b_1$

olur. 1. eğik asimptot teoremi gereğince,

$y = g(x) = a_1x + b_1 = 3x - 5$

eğik asimptotu olur. 2. eğik asimptot da hesaplanırsa 1. eğik asimptotla aynı çıkmaktadır.



9.4. Not: (Şu pratik yöntemi kullanmak faydalıdır.)

Eğer $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ biçiminde bir rasyonel fonksiyon verilirse ve $\text{der}\, p(x) = 1 + \text{der}\, q(x)$ ise $p(x)$ polinomu $q(x)$ polinomuna bölündüğünde bölüm $g(x)$ ve kalan $r(x)$ olarak oluyorsa, elde edilen $g(x)$ doğrusu eğik asimptotu verir. (Yukarıda çözülen örnek bu yöntemle de çözelim.)

Örnek: $y = \frac{3x^2+4x-7}{x+3}$ fonksiyonunun eğik asimptotunu bulunuz.

Çözüm: Verilen fonksiyonda payı paydaya bölersek,

$$y = (3x - 5) + \frac{8}{x+3}$$

bulunur. Burada $g(x) = 3x - 5$ dir. Buna göre,

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to\infty}[\frac{3x^2+4x-7}{x+3}-(3x-5)]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{8}{x+3}$$

$$= 0$$

dir. Şu halde $y = \frac{3x^2+4x-7}{x+3}$ fonksiyonunun $y = 3x - 5$ fonksiyonu asimptotudur.

Örnek: $f(x) = 2x - \arccos\frac{1}{x}$ fonksiyonunun eğik asimptotlarını bulunuz.

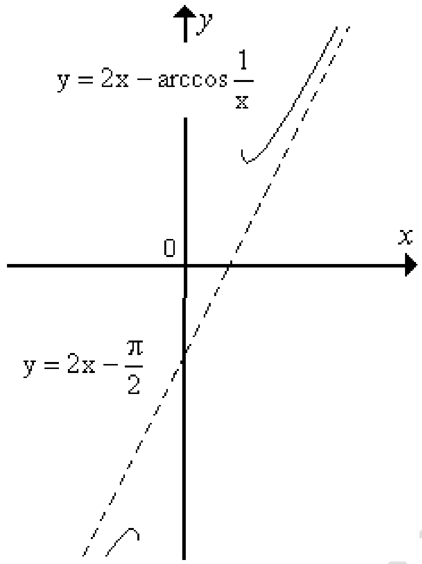
Çözüm: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-\arccos\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{\arccos\frac{1}{x}}{x}\right) = 2 = a_1$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-a_1x] = \lim_{x\to\infty}\left[2x-\arccos\frac{1}{x}-2x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[-\arccos\frac{1}{x}\right] = -\frac{\pi}{2} = b_1$$

olur. 1. eğik asimptot teoremi gereğince,

$$y = a_1x + b_1 = 2x - \frac{\pi}{2}$$

eğik asimptotu olur. 2. eğik asimptot da hesaplanırsa 1. eğik asimptotla aynı çıkmaktadır.



Örnek: $f(x) = 2x\arctan x$ fonksiyonunun eğik asimptotlarını bulunuz. (Bu örnek türevde L'hopital teoremini öğrendikten sonra çözülmelidir.)

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x.\arctan x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 2\arctan x = 2.\frac{\pi}{2} = \pi = a_1$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - a_1 x] = \lim_{x\to\infty}[2x\arctan x - \pi x] = 0.\infty$$

belirsizlik durumu söz oluşur.

$$\lim_{x\to\infty}[2x\arctan x - \pi x] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2\arctan x - \pi}{x^{-1}}\right] = \frac{0}{0}$$

L'hopital teoremi uygulanırsa,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{1+x^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{1+x^2} = -2 = b_1$$

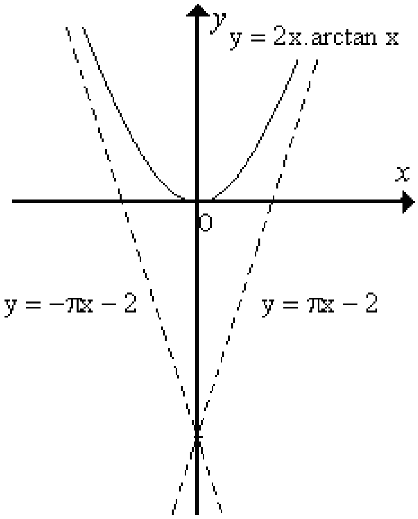
olur. 1. eğik asimptot teoremi gereğince,

$y = a_1 x + b_1 = \pi x - 2$

eğik asimptotu olur. Aynı şekilde 2. eğik asimptot teoremi uygulanırsa,

$y = a_2 x + b_2 = -\pi x - 2$

olarak bulunur.



Örnek: $y = \sqrt{4x^2 + 8x + 3}$ fonksiyonun eğik asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+8x+3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2+8x+3}{x^2}} = 2 = a_1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}[f(x)-a_1x] &= \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2+8x+3}-2x\right] \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(\sqrt{4x^2+8x+3}-2x)(\sqrt{4x^2+8x+3}+2x)}{(\sqrt{4x^2+8x+3}+2x)}\right] \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2+8x+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+8x+3}+2x}\right] \\ &= 2 = b_1\end{aligned}$$

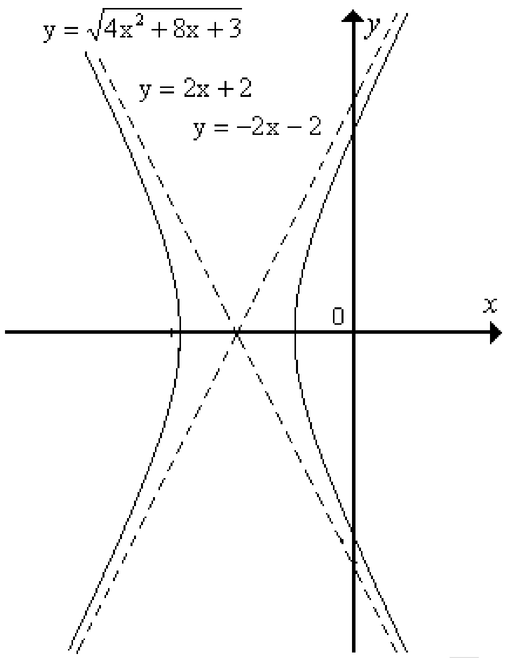
olur. 1. eğik asimptot teoremi gereğince,

$y = a_1x + b_1 = 2x + 2$

eğik asimptotu olur. 2. eğik asimptot teoremi gereğince,

$y = a_1x + b_1 = -2x - 2$

2. eğik asimptotu olur.



//

Bu örnek şu şekilde genellemesi yapılır.

$a>0$ için $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ fonksiyonun eğik asimptotu $y=\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ biçimindedir.

Örnek: $y=\frac{2x^2+3x-8}{x-2}$ fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktasını bulunuz.

Çözüm: Önce düşey asimptotunu bulalım. Düşey asimptot pratik olarak paydayı sıfır yapan değerler olduğundan,

$x-2=0$ ise $x=2$

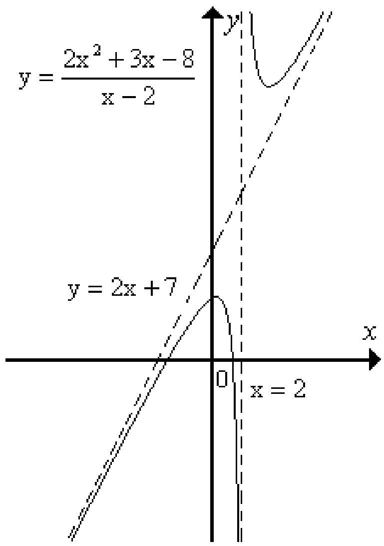
olarak buluruz. Yine eğik asismptot rasyonel denklemler olacağından,

$$y=\frac{2x^2+3x-8}{x-2}=(2x+7)+\frac{2}{x-2}$$

elde edilir. Buna göre asimptot $g(x)=2x+7$ dir. Elde edilen her iki denklemin çözüm kümesini,

$y=2x+7=2\cdot 2+7=11$

olup asimptotların kesim noktası $(2,\ 11)$ dir.



4– Eğri Asimptotlar

Aksiyom: $y = f\ (x)$ fonksiyonu verilsin.

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=a \text{ veya } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=a$$

ise $f(x)$ fonksiyonu $y = g(x)$ eğrisine sonsuzda teğettir.

Bir eğrinin birden fazla tane eğri asimptot olacağından eğri asimptotlar için bir teorem geliştirilemez. Ama eğik asimptotlarda doğru asimptot olduğu gibi eğri asimptotlarda da aynı mantık geliştirilir.

Eğer $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ biçiminde bir rasyonel fonksiyon verilsin ve $\text{der}\ p(x) \geq 2 + \text{der}\ q(x)$ olsun. $p(x)$ polinomu $q(x)$ polinomuna bölündüğünde bölüm $g(x)$ ve kalan $r(x)$ olarak alınırsa, elde edilen $g(x)$ polinomu eğri asimptotudur.

Örnek: $y = \frac{2x^3+5x^2-4x+5}{x+1}$ fonksiyonunun eğri asimptotunu bulunuz.

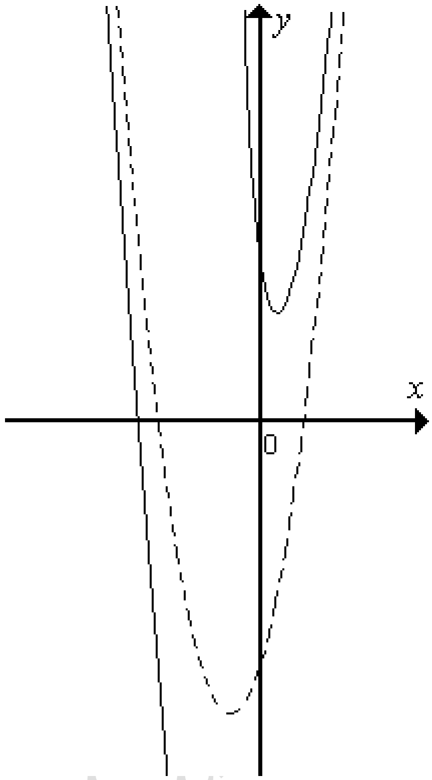
Çözüm: Verilen fonksiyonda payı paydaya Horner metoduyla bölelim.

	2	5	–4	5
–1	↓	–2	–3	7
	2	3	–7	12

olacağından,

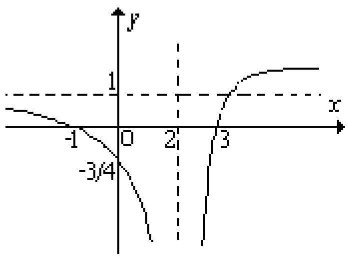
$$y = \frac{2x^3+5x^2-4x+5}{x+1} = (2x^2+3x-7) + \frac{12}{x+1}$$

bulunur. Buna göre $g(x) = 2x^2 + 3x - 7$ eğri asimptotunun denklemidir.



9.7. Tanım: Hem düşey hem de yatay asimptotlarının kesim noktasına asiptotların simetri merkezi adı verilir.

Örnek:



Verilen fonksiyonun düşey asimptotu 2, yatay asimptotu 1 olduğundan simetri merkezi (2, 1) noktasıdır.

Örnek: $f:\mathbb{R}-\{4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{3x-1}{x-4}$ fonksiyonunun simetri merkezini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x-1}{x-4}=\pm\infty$ olup $x=4$ noktasında düşey asimptot vardır.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x-4}=3$ olup $y=3$ noktasında dikey asimptot vardır.

$f(x)=\frac{3x-1}{x-4}$ fonksiyonunun $(4,3)$ noktası asiptotların simetri merkezidir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Süreklilik

1. Aşağıdakilerden hangisi $x=1$ de sürekli değildir?

A) $y=\begin{cases}2x+3, & x>1\\ 5, & x=1\\ x+4, & x<1\end{cases}$ B) $y=\begin{cases}x^2+8, & x>1\\ 2x+7, & x\le 1\end{cases}$ C) $y=\begin{cases}3x+5, & x>1\\ 2x+6, & x<1\end{cases}$

D) $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ E) $y=\cos(\pi x)$

Çözüm: Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için limiti ile o noktadaki görüntüsü aynı olmalıdır.

$$\lim_{x\to 1^+}3x+5=8 \text{ ve } \lim_{x\to 1^-}2x+6=8$$

olacağından bu noktada limiti 8'dür. Ama $x=1$ noktasındaki görüntüsü belirli olmadığından süreklilikten söz edilemez.

Cevap: C

2. $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x>2\\ ax-2, & x\le 2\end{cases}$

biçiminde olan fonksiyon sürekli bir fonksiyon olması için a'nın değeri ne olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2+2=6$ ise $\lim\limits_{x\to 2^+} ax^2-2=6$ olmalıdır. Buna göre

$$a2^2-2=6$$
$$a=2$$

dir.

Cevap: B

3. $f(x)=\frac{|x^2-1|}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-4}$ fonksiyonu, aşağıdaki noktalardan hangisinde süreklidir?

A) 0 B) –1 C) 1 D) 2 E) –2

Çözüm: Paydayı 0 yapan değerlerde tanımsızlık meydana geleceğinden,

$$x^2-1=0 \text{ ve } x^2-4$$
$$x=\pm 1 \text{ ve } x=\pm 2$$

olacağından ± 1 ve ± 2 şıklarda var. Öyleyse 0 noktasında süreklidir.

Cevap: A

4. $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>1 \\ 7, & x=1 \\ x^2+2a, & x<1 \end{cases}$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli olduğuna göre b'nin değeri nedir?

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm: Burada 1 noktası incelenmelidir.

$$\lim_{x\to 1^-} ax+b=7 \text{ ise } a+b=7$$
$$\lim_{x\to 1^+} x^2+2a=7 \text{ ise } 1+2a=7$$
$$a=3 \text{ ve } b=4$$

Cevap: E

5. $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere, reel sayılar kümesi üzerinde bir f fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases} x+a, & x>1 \\ x^2+4, & 1\le x\le 4 \\ x+b, & x<4 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor. f fonksiyonunun sürekli olduğuna göre $a+b$ değeri kaçtır?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to 1}(x+a)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4)$

$1+a=1^2+4$

$a=4$

ve

$\lim\limits_{x\to 4}(x+b)=\lim\limits_{x\to 4}(x^2+4)$

$4+b=4^2+4$

$b=16$

dir. $a+b=4+16=20$ olur.

Cevap: D

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+a}{bx}\cdot\sin x, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$

fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli ise, $\dfrac{a}{b}$ oranı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $x=0$ noktasında sürekli olması için $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a}{bx}\cdot\sin x=3$ olmalıdır.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a}{b}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=3$

$\dfrac{a}{b}=3$

Cevap: D

7. L bir reel sayı olmak üzere, reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları için

$\lim\limits_{x\to 5}f(x)=\lim\limits_{x\to 5}g(x)=L$

eşitliği sağlanıyorsa, aşağıdakilerden hangisi f ve g fonksiyonları 5 noktasında denebilir.

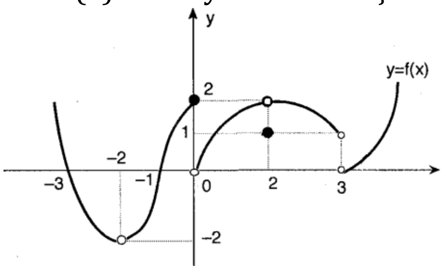
A) Süreksiz B) Sürekli D) Limiti var

C) Sağdan limiti var E) Soldan limiti var

Çözüm: f ve g fonksiyonların sürekliliği konusunda herhangi bir bilgi verilmediğinden $f(5) \neq g(5)$ olabilir. Bu yüzden f ve g fonksiyonları 5 noktasında süreksiz olabilir.

Cevap: A

8. Aşağıdaki şekilde f(x) fonksiyonu verilmiştir.



f fonksiyonu hangi noktada süreklidir.

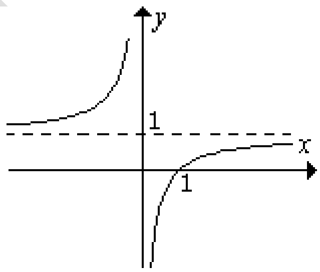
A) −2 B) −1 C) 0 D) 2 E) 3

Çözüm: Sağdan ve soldan limiti aynı olan ve görüntüsü aynı olan nokta −1 noktasıdır.

Cevap: B

Asimptotlar

9.



Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi şekildeki eğrinin karşılığıdır.

A) $y = \frac{x+2}{x-1}$ B) $y = \frac{x}{x+1}$ C) $y = \frac{2x}{x-1}$ D) $y = \frac{x+2}{x+1}$ E) $y = \frac{x-1}{x}$

Çözüm: Bu soruyu çözmek için $x = 0$noktasında düşey asimptotlara bakmak gerekir.

A) $\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x-1} = 1$ olup düşey asimptot fonksiyonu sağlamaz.

B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+1}=1$ olup düşey asimptot fonksiyonu sağlamaz.

C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x-1}=2$ olup düşey asimptot fonksiyonu sağlamaz.

D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x+1}=1$ olup düşey asimptot fonksiyonu sağlamaz.

E) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x}=\pm\infty$ olup fonksiyonu sağlanır.

Cevap: E

10. $y=\dfrac{2x}{x-1}$ fonksiyonun oluşturduğu simetri merkezi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1, 0) B) (0, 1) C) (1, 2) D) (0, 0) E) (–1, 0)

Çözüm: Asimptotlarının kesim noktası simetri merkezidir. Buna göre;

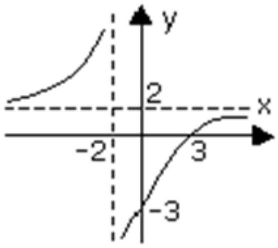
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{x-1}=\pm\infty$ olduğunda düşey asimptot 1'dir.

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{x-1}=2$ olduğunda yatay asimptot 0'dır.

Buna göre simetri merkezi (1, 2) dir.

Cevap: C

11. $y=\dfrac{2x-5}{x+2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Bu grafiğe göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır.

A) Yatay asimptotu 2'dir
B) Düşey asimptotu –2'dir
C) Simetri merkezi (2, –2) dir
D) x eksenini 3 noktasında keser
E) Eğik asimptotu 2'dir

Cevap: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-5}{x+2}=2$ olup Yatay asimptot 2 dir.

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x-5}{x+2}=\infty$ olup Dikey asimptot –2 dir.

Simetri merkezi (2, –2) dir.

x eksenini 3 noktasında keser.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x-5}{x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{x^2+2x}\right)=0=a_1$$

olduğundan eğik asimptot mevcut değildir.

Cevap: E

12. $y=\dfrac{x^2-ax-4}{x-b}$ fonksiyonun gösterdiği eğrinin y eksenini 4 noktasında kesmesi ve $y=x+4$ doğrusunu eğik asimtot olması için a'nın değeri ne olmalıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) –3 E) –2

Çözüm: Eğrinin y eksenini 4 de kesiyorsa;

$$4=\frac{0^2-a\cdot 0-4}{0-b}$$

$$b=1$$

olarak bulunur. Şu halde fonksiyonumuz $y=\dfrac{x^2-ax-4}{x-1}$ şeklindedir. Eğik asimptotun denklemi $y=mx+n$ ise $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y-mx=n$ olduğuna göre, $y=x+4$ eğik asimptotu için

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-ax-4}{x-1}-x=2$$

$$a=-3$$

olarak bulunur.

Cevap: D

13. $y=\dfrac{ax+5}{bx+6}$ eğrisinin yatay ve düşey asimptotlarının simetri merkezi (–3, 2) olduğuna göre, a'nın değeri nedir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) –1

Çözüm: Düşey asimptot olduğundan,

$$\lim_{x\to -3}\frac{ax+5}{bx+6}=\infty$$
$$-3b+6=0$$
$$b=2$$

elde edilir. Yine yatay asimptottan,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+4}{2x+6}=2$$
$$\frac{a}{2}=2 \text{ ise } a=4$$

olur.

Cevap: A

14. Asimtotun simetri merkezi (3, 2) olan ve y–eksenini 1 noktasında kesen eğrinin fonksiyonunu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=\frac{2x+2}{x-3}$ B) $y=\frac{x+6}{x+3}$ C) $y=\frac{2x-3}{x-3}$ D) $y=\frac{x-6}{x+3}$ E) $y=\frac{x-3}{x-3}$

Çözüm: Düşey asimptot $\lim_{x\to 3}f(x)=\pm\infty$

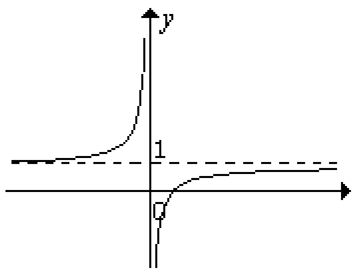
Yatay asimptot $\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x-3}=2 \text{ ve } \lim_{x\to 3^+}\frac{2x-3}{x-3}=\pm\infty$$

bulunur.

Cevap: C

15.



Şekildeki grafiğe göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Düşey asimptotu 1'dir
B) Yatay asimptotu 1'dir
C) Eğik asimptotu 0'dır.
D) Asimptotların simetri merkezi (1, 1)

E) Eğri asimptotu 0’dır.

Çözüm: $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ olup düşey asimptotu 0’dır

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ olup yatay asimptotu 1’dir

Eğri ve eğik asimptotu yoktur

Asimptotların simetri merkezi (0, 1) dir.

Cevap: B

16. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+8}{x^2-ax+4}$ fonksiyonu $x = 1$ de düşey asimptotu vardır. Buna göre, a’nın değeri kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: $x = 1$ düşey asimptot ise,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+8}{x^2-ax+4} = \infty$$

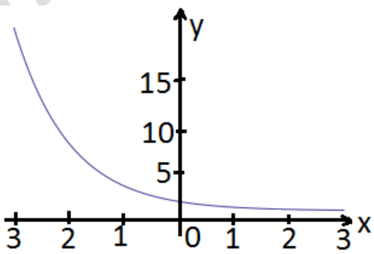
olmalıdır. Buna göre;

$$1^2 - a \cdot 1 + 4 = 0$$
$$a = 5$$

olur.

Cevap: A

17.



Grafiği verilen reel sayılar kümesi üzerinde bir f fonksiyonu $f(x) = e^{-x}$ biçiminde tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) f fonksiyonunun görüntü kümesi $(1, \infty)$ dur.
B) f fonksiyonu tanım kümesi üzerinde azalandır.
C) $y = 1$ doğrusu f fonksiyonunun bir yatay asimptotudur.
D) Düşey asimptotu yoktur.
E) f fonksiyonunun tanım kümesi $(1, \infty)$ dur.

Çözüm:

A) Üstel fonksiyonun tanımından f fonksiyonunun görüntü kümesi $(1,\infty)$ aralığındadır.

B) Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu azalandır.

C) $x = 0$ alınırsa $f(0) = e^{-0} = 1$ olup $y = 1$ doğrusu f fonksiyonunun bir yatay asimptotudur.

D) Düşey asimptotu yoktur.

E) f fonksiyonunun tanım kümesi bütün reel sayılardır.

Cevap: C

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
2. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz I-II, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.
3. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
4. Murray R. SPIEGEL, Çeviri: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Nobel Yayın Dağıtım, 1997.
5. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
6. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
7. Hayri EDEN, Lise Matematik Ders Kitabı 1, 2, 3, Küre Yayıncılık, İstanbul, 2003.
8. Ömer Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN, Devlet Kitapları, Lise 1, 2, 3, Milli Eğitim Basımevi, 4. Baskı, İstanbul, 2002.
9. Fevzi SÖNMEZ, Sabiha SÖNMEZ, Matematik 1, 2, 3, Ülke Yayın Haber T.L.Ş., 2000, Ankara.
10. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
11. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
12. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
13. George B. THOMAS, Thomas Calculus, Massachusetts Institute of Technology, University of California, Çeviri Recep Korkmaz, Beta, 2009, İstanbul.
14. Doç. Dr. Ali DÖNMEZ, Gerçel Analiz, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1985.
15. Prof. Dr. Necdet SAN, Analiz Dersleri, Baylan Matbaası, 1975, Ankara.
16. Prof. Dr. Rahim OCAK, Reel Analiz, Erzurum, 1998.

17. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
18. Yrd. Doç. Dr. Ersin Erol, Yüksek Matematiğe Giriş, Marmara Üniversitesi Yayınları, 1991, İstanbul.
19. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.
20. Doç. Dr. Ekrem Kadıoğlu, Doç. Dr. Muhammed Kamalı, Genel Matematik, Erzurum, 2005.
21. A. YILMAZ, O. ALTINTAŞ, D. ÇOKER, F. YILDIRIM, M. ZİREK, Matematik Lise 3, Devlet Kitapları, Murat Matbaacılık Koll. Şti. İstanbul, 1981.