10. BÖLÜM
SERİLERE GİRİŞ

SERİ KAVRAMI

10.1. Tanım: (a_n) bir dizi olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

sonsuz toplamına seri denir. a_n ye serinin genel terimi denir.

Örnek: $(a_n) = (2^n + 1) = (3, 5, 9, \dots, 2^n + 1, \dots)$
dizisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 1) = 3 + 5 + 9 + \cdots + 2^n + 1 + \cdots$$

serisi elde edilir. //

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ifadesindeki n keyfi bir değişkendir. n yerine herhangi bir değişken alınabilir. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, $\sum_{p=1}^{\infty} a_p$ gibi ifadeler aynı serilerdir.

Bir seride, değişkenin 1'den başlama zorunluluğu da yoktur. Değişken herhangi bir sayıdan başlayabilir. Örneğin, $\sum_{n=3}^{\infty} (3n+4)$, $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n$ de birer serilerdir. Eğer değişkenin başlangıç değeri belirtilmemişse başlangıç değeri 1 olarak düşünülmelidir.

Örnek: $\sum_{k=3}^{\infty} k(k+1)$ serisinin açılımı yazınız.

Çözüm $\sum_{k=3}^{\infty} k(k+1) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + \cdots$
biçiminde ifade edilir.

Örnek: $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+\cdots$ serisini toplam sembolü olarak yazınız.

Çözüm: $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)(2k+1)=1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+\cdots$ biçiminde ifade edilir.

Örnek: $\frac{5}{9}+\frac{7}{13}+\frac{9}{17}+\frac{11}{21}+\cdots$ serisini toplam sembolü olarak yazınız.

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{4n+5}=\frac{5}{9}+\frac{7}{13}+\frac{9}{17}+\frac{11}{21}+\cdots$ biçiminde ifade edilir.

Örnek: $\frac{1}{4}+\frac{3\cdot2^2}{6}+\frac{5\cdot3^2}{8}+\frac{7\cdot4^2}{10}+\cdots$ serisini toplam sembolü olarak yazınız.

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)n^2}{2(n+1)}=\frac{1}{4}+\frac{3\cdot2^2}{6}+\frac{5\cdot3^2}{8}+\frac{7\cdot4^2}{10}+\cdots$ biçiminde ifade edilir.

10.1. Not: Serilerin terimleri sonlu sayıda ise sonlu seri ismini veren kitaplar mevcuttur. Ama buna toplam sembolü demek daha doğrudur. Biz bu çalışmada seri kavramını sonsuz terimler üzerinden inceleyeceğiz.

10.2. Tanım: Bir $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serinin ilk n terim toplamı

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

ifadesine serinin n. kısmi toplamı denir.

$$(S_n)=(S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n,\cdots)$$

dizisine kısmi toplamlar dizisi denir. S_n ne de kısmi toplamlar dizisinin genel terimi denir.

Örnek: $(a_n)=\left(2n-1\right)=(1,3,5,\ldots,(2n-1),\ldots)$

dizisi reel sayı dizisi olduğuna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)+\cdots$$

serisini elde ederiz. Bu serinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi ise,

$$S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)+\cdots = n^2$$

şeklindedir. O halde kısmi toplamlar dizisi

$$(S_n) = (1,4,9,\cdots,n^2,\cdots)$$

biçiminde olur.

10.1. Teorem: Bir serinin toplamının sonucu, kısmi toplamlar dizisinin limitine eşittir. Yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

şeklindedir.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ise,

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$\ldots$$

biçimindedir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

dir.

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$ serisinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: Serinin kısmi toplamlar dizisini bulalım.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$$

$$= \ln\frac{2\cdot 4}{3^2} + \ln\frac{3\cdot 5}{4^2} + \ln\frac{4\cdot 6}{5^2} + \ln\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdots + \ln\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$$

$$= \ln \frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$$
$$= \ln \frac{2}{3}\cdot\frac{(n+3)}{(n+2)}$$

şeklindedir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+6}{3n+6} = \ln\lim_{n\to\infty}\frac{2n+6}{3n+6} = \ln\frac{2}{3}$$

dir. Şu halde

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \ln\frac{2}{3}$$

bulunur. (Yalnız bu yazımı bu seri $\ln\frac{2}{3}$'e yakınsıyor şeklinde anlamak doğru olur.)

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ serisinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: Önce $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ olduğunu görelim. Sonra kısmi toplamlar dizisinin genel terimini bulalım.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{n}{n+1}$$

şeklindedir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

dir. Şu halde

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 1$$

bulunur.

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)$ serisinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: Önce kısmi toplamlar dizisinin genel terimini bulalım.

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}+\ln\frac{6}{5}\cdots+\ln\frac{n+2}{n+1} \\ &= \ln\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{n+2}{n+1} \\ &= \ln\frac{n+2}{2} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+2}{2}=\infty$$

bulunur.

10.3. Tanım: Bir serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise o seri yakınsak, aksi takdirde kısmi toplamlar dizisi ıraksak ise o seri ıraksaktır denir.

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}k^2$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2$ olacağından toplam sembolü konusu tümevarım kısmının 5. özelliğinden

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2=\infty$$

olacağından serimiz ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=\begin{cases}1 & , \text{ n tek sayı}\\ -1 & , \text{ n çift sayı}\end{cases}$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}s_n$ yoktur ve bu seri ıraksaktır.

10.2. Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$ dir.

İspat: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ olduğu dizilerde limit konusunda tanımlanmıştı. Şimdi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$ olduğunu gösterelim.

$n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nin Binom açılımına yapalım.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)+\binom{n}{2}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}1^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\\ &= 1\cdot 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\right]\\ &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$$

dir.

10.3. Teorem: Bir serinin baştarafına sonlu sayıda herhangi sayıda terim ilave etmek veya çıkarmak serinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını değiştirmez. (Ama yakınsak bir seri de limit sonucu değişebilir.)

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yakınsak olsun. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{k-1}a_n+\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ ise $\sum_{n=1}^{k-1}a_n\in\mathbb{R}$ olduğundan $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ de yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksak olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ise $\sum_{n=1}^{k-1} a_n \in \mathbb{R}$ olduğundan $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ de ıraksaktır.

10.4. Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

(Bunun tersi doğru değildir. Yani, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olmayabilir.)

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun. Bu takdirde,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$
$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

yazılabilir. Burada "Bir dizi ile alt dizisi aynı noktaya yakınsar" teoremi gereği $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ alınırsa $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = s$ dir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = s - s = 0$$

bulunur.

10.1 Sonuç: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise bu seri ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ serisini yukarıdaki bir örnekte kısmi toplamlar dizisinin genel terimi $S_n = \frac{n}{n+1}$ olduğunu görmüştük. Bu (S_n) dizisi yakınsak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ serimiz de yakınsaktır. Buna göre $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ genel terimi için,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 0$$

dir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]$ serisinin genel teriminin limitinin sıfır olduğu halde, serinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Serinin genel terimi; $a_n = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\\ &= \log\lim_{k\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\\ &= \log 1\\ &= 0\end{aligned}$$

dir. Şimdi bu seri yakınsak olmadığını gösterelim.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log(n+1) - \log n\right]$$

olduğundan kısmi toplamlar dizisi,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$S_n = \log 2 - \log 1 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \cdots + \log(n+1) - \log n$$
$$S_n = \log(n+1)$$

bulunur. Bu kısmi toplamlar dizisinin limiti,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\log(n+1) = \infty$$

olur.

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5k+4}{2k-6}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $a_k = \frac{5k+4}{2k-6}$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{5k+4}{2k-6} = \frac{5}{2} \neq 0$$

dir. Buna göre $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5k+4}{2k-6}$ serisi ıraksaktır.

ARİTMETİK SERİLER

10.4. Tanım: Bir (a_n) dizisi bir aritmetik dizi ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de aritmetik seridir.

Örnek: $(a_n) = (3n)$ dizisinin aritmetik dizidir. Çünkü

$$a_n - a_{n-1} = 3(n+1) - 3n = 3$$

olup aritmetik dizidir. Buna göre $\sum_{n=1}^{\infty} 3n$ serisi aritmetik seridir.

10.5. Teorem: r aritmetik dizinin terimleri arasındaki fark olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi aritmetik seri ise n. kısmi toplamı:

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

dir. (r aritmetik dizinin terimleri arasındaki fark)

Bu teoremin ispatı diziler konusunda yapılmıştır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} (3n+2)$ serisinin n. kısmi toplamını bulunuz.

Çözüm: $a_1 = 5$ ve $a_n = 3n + 2$ ise $S_n = \frac{n}{2}[5 + 3n + 2] = \frac{(7+3n)n}{2}$ kısmi toplamını verir.

GEOMETRİK SERİLER

10.5. Tanım: Bir (a_n) dizisi bir geometrik dizi ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de geometrik seridir. Buna göre r geometrik dizinin terimleri arasındaki oran olmak üzere bir geometrik dizi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 r^{n-1})$ biçiminde olur.

Örnek: $(a_n) = (3^n)$ dizisinin geometrik dizidir. Çünkü

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3$$

olduğundan (a_n) geometrik dizidir. Buna göre $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$ serisi geometrik seridir.

10.6. Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 r^{n-1})$ geometrik serisinin n. kısmi toplamı:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

dir.

Bu teoremin ispatı diziler konusunda yapılmıştır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}$ serisinin toplamının değeri nedir?

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n} = \frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots\right)$

olduğundan $a_1 = \frac{1}{7}, r = \frac{1}{7}$ dir. Buna göre kısmi toplamlar dizisi,

$$S_n = \frac{1}{7}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1}{6}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right]$$

biçimindedir. Şimdi limitini alalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right] = \frac{1}{6}$$

şeklindedir.

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n$ serisinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n = \left(\frac{3}{8}\right)^2\left(1+\frac{3}{8}+\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^3+\cdots\right)$

olduğundan $a_1 = \left(\frac{3}{8}\right)^2, r = \frac{3}{8}$ dir. Buna göre kısmi toplamlar dizisi,

$$S_n = \left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)^n}{1-\frac{3}{8}} = \left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{8}{5}\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right]$$

dir. Şimdi limitini alalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{8}{5}\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right] = \frac{9}{40}$$

şeklindedir.

Örnek: 6 metre yükseklikten bırakılan bir top yere çarpınca düştüğü yüksekliğin $\frac{2}{3}$ ü kadar yükseliyor. Top durduğunda kaç metre yol almıştır.

Çözüm: Bu top düşmesi anında oluşan dizi,

$$(a_n) = \left(6, 6\cdot\frac{3}{8},\ 6\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2, 6\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3, \cdots, 6\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n, \cdots\right)$$

$$= 6\cdot\left(1, \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \cdots, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \cdots\right)$$

şeklindedir. Bu dizinin oluşturduğu seri ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

durumundadır. $a_1 = 6, r = \frac{2}{3}$ dir. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi ise,

$$S_n = 6\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 18\cdot\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

dir. Şimdi limitini alalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 18\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 18 \text{ metre}$$

bulunur.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}.\frac{1}{e^n}\right]$ toplamının değeri nedir?

Çözüm: Seride

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}.\frac{1}{e^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)(-1)^n.\frac{1}{e^n}\right] = (-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{e}\right)^n$$

düzenlemesi yapılarak geometrik dizi pozisyonu oluşturulur. Bu geometrik dizi,

$$(-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{e}\left(1+\left(-\frac{1}{e}\right)+\left(-\frac{1}{e}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{e}\right)^n+\cdots\right)$$

biçiminde olup $a_1 = \frac{1}{e}, r = -\frac{1}{e}$ dir. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi ise,

$$S_n = \frac{1}{e}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{e}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{e}\right)} = \frac{1}{e+1}\cdot\left[1-\left(-\frac{1}{e}\right)^n\right]$$

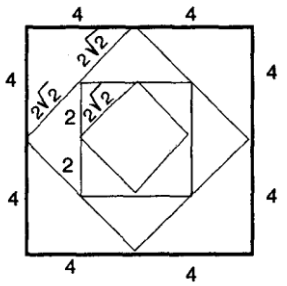
dir. Şimdi limitini alalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}.\frac{1}{e^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e+1}\left[1-\left(-\frac{1}{e}\right)^n\right] = \frac{1}{e+1}$$

bulunur.

Örnek: Bir kenarının uzunluğu 8 cm olan bir karenin, kenarlarının orta noktaları birleştirerek yeni kare elde ediliyor. Aynı işlem yeni kareye uygulanıyor. Bu işlem sonsuza kadar sürdürülürse elde edilen bütün karelerin alanları toplamı kaç cm² olur?

Çözüm: Verilere göre,



şekli çizilir.

1. karenin alanı $8^2 = 64$
2. karenin alanı $(4\sqrt{2})^2 = 32$
3. karenin alanı $4^2 = 16$
4. karenin alanı $(2\sqrt{2})^2 = 8$

...

Tüm karelerin toplamı S ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} S &= 64+32+16+8+\cdots \\ &= 8^2+8^2\cdot\frac{1}{2}+8^2\cdot\frac{1}{2^2}+8^2\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots \\ &= 8^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $a_1 = 64, r = \frac{1}{2}$ dir. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi ise,

$$S_n = 64\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 64\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

dir. Şimdi limitini alalım.

$$S=\lim_{n\to\infty}64\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=128$$

elde edilir.

10.7. Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_1r^{n-1})$ geometrik serisinde;

i) $|r|<1$ ise seri yakınsaktır,
ii) $|r|>1$ ise seri ıraksaktır.

İspat: Geometrik serinin n. kısmi toplamı:

$$S_n=a_1\cdot\frac{1-r^n}{1-r}$$

olduğunu biliyoruz.

i) $|r|<1$ ise dizilere giriş konusundaki 5.8. teoremden dolayı $\lim_{n\to\infty}r^n=0$ olacağı aşikardır. Bu yüzden $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-r}$ olur. Öyleyse, seri yakınsaktır ve $\sum_{n=1}^{\infty}(a_1r^{n-1})=\frac{a_1}{1-r}$ dir.

ii) $|r|>1$ ise $r>1$ ya da $r<-1$ dir. Eğer $r>1$ ise $\lim_{n\to\infty}r^n=+\infty$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=a_1=\begin{cases}+\infty, a_1>0\\ -\infty, a_1<0\end{cases}$$

olur. Eğer $r<-1$ ise $\lim_{n\to\infty}r^n$ bulunamayacaktır. Bu durumda $n\to\infty$ için (S_n) dizisinin limiti yoktur. Görülüyor ki, $|r|>1$ için (S_n) dizisinin limiti yoktur. Öyleyse $\sum_{n=1}^{\infty}(a_1r^{n-1})$ serisi de ıraksaktır.

Örnek: Bir önceki örnekte $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n=\frac{3}{5}<1$ olduğunu gördük. Şu halde verilen bu örnek yakınsaktır.

Jean-Baptiste Joseph Fourier
21 Mart 1768, Auxerre, Fransa- 16 Mayıs 1830, Paris, Fransa

10.8. Teorem: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ sayısı olduğuna göre e sayısı irrasyonel sayıdır.

İspat: Kabul edelim ki bu e sayısı rasyonel olsun. Yani $e = \frac{p}{q}$ olacak şekilde p ve q pozitif iki tamsayı yazılsın. Bu eşitliğin her iki tarafını q! ile çarpalım:

$$q! \cdot e = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \cdots$$

bulunur. Buna göre;

$$\begin{aligned}
R &= \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} + \cdots \\
&< \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots \\
&= \frac{1}{(q+1)}\left(1 + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{(q+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^{k-1}} \\
&= \frac{1}{(q+1)}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(q+1)^{k-1}} \\
&= \frac{1}{(q+1)}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{q+1}\right)^n}{1-\frac{1}{q+1}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{q}$$

Yani $R < \frac{1}{q}$ bulunur. R'nin tanımına bakarsak, q pozitif olduğundan R de pozitiftirtir. Böylece R, 0 ve $\frac{1}{q}$ arasında pozitif bir tamsayıdır. Oysa bu bir çelişkidir. Sonuçta e sayısının rasyonel olduğu kabulü yanlıştır. Yani e irrasyoneldir.

HARMONİK SERİLER

10.6. Tanım: $a, d \in \mathbb{R}$ ve $d \neq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+(n-1).d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \cdots + \frac{1}{a+(n-1)d} + \cdots$$

serisine harmonik seri denir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Kabul edelim ki $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisinin yakınsak olsun. O zaman kısmi toplamlar dizisi de yakınsak olmalıdır. Buna göre kısmi toplamlar dizisi,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

biçimindedir. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\ &\geq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} + S_n \qquad (1) \end{aligned}$$

dir. $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ise $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = s$ dır. Buna göre (1) eşitsizliği,

$$s \geq \frac{1}{2} + s \text{ ise } 0 \geq \frac{1}{2}$$

olup bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır.

SERİLERDE İŞLEMLER

10.9. Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ olacak şekilde yakınsak diziler olsun. $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde,

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = c.\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

dir.

İspat: a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}(a_n + b_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{n} a_n + \sum_{n=1}^{n} b_n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} a_n + \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} b_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} c.a_n$$
$$= c.\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} a_n$$
$$= c.\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{4n^2-1} - \frac{1}{5^n}\right)$ serisinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-1}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ serilerini ayrı ayrı hesaplayalım. Önce $\frac{6}{n^2-1}$ ifadesini rasyonel kesirlere ayıralım.

$$\frac{6}{n^2-1} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$

$A = 3, B = -3$

olup kısmi toplamlar dizisi,

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2k-1}-\frac{3}{2k+1}\right)$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=3\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=3\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

şeklindedir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}3\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=3 \qquad (1)$$

olacağından $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-1}=3$ dür. Şimdi serinin ikinci kısmına bakalım. Bu ikinci seri geometrik seri olduğuna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

olduğundan $a_1=\frac{1}{5}, r=\frac{1}{5}$ dir. Buna göre kısmi toplamlar dizisi,

$$S_n=\frac{1}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

dir. Şimdi limitini alalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]=\frac{1}{4} \qquad (2)$$

şeklindedir. (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{4n^2-1}-\frac{1}{5^n}\right)=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$$

elde edilir. //

Şimdi iki serinin çarpımı olan Cauchy çarpımını verelim.

10.10. Teorem (Cauchy çarpımı): $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x_n\right)$ ve $\left(\sum_{n=0}^{\infty}y_n\right)$ yakınsak iki dizi,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}y_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}x_k y_{n-k}$$

dir.

İspat:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) = (x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots)(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots)$$

denklemi şu tabloya dönüştürelim.

	x_0	x_1	x_2	...	x_n	...
y_0	x_0y_0	x_1y_0	x_2y_0	...	x_ny_0	...
y_1	x_0y_1	x_1y_1	x_2y_1	...	x_ny_1	...
y_2	x_0y_2	x_1y_2	x_2y_2	...	x_ny_2	...
...	...	...	...	...	...	...
y_n	x_0y_n	x_1y_n	x_2y_n	...	x_ny_n	...
...	..	..	...	...	...	..

Burada $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ olsun. Tabloda dikkat edilirse,

$$z_0 = x_0y_0 = \sum_{k=0}^{0} x_k y_{n-k}$$

$$z_1 = x_0y_1 + x_1y_0 = \sum_{k=0}^{1} x_k y_{n-k}$$

$$z_2 = x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0 = \sum_{k=0}^{2} x_k y_{n-k}$$

...

$$z_n = x_0y_n + x_1y_{n-1} + x_2y_{n-2} + \cdots + x_ny_0 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$$

....

olur. Buna göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$$

dir.

10.2. Not: Cauchy çarpımı serilerin ıraksak olmasında ve sonlu toplamlarda geçerli değildir.

SERİLERDE KALAN TERİM

10.7. Tanım: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinde $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$ ifadesine kalan terim denir.

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 + 1$ serisinde $\sum_{k=1}^{n} k^2 + 1$ alınırsa bu serinin kalan terimi $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 + 1$ şeklindedir.

10.11. Teorem: Yakınsak her seride kalan kısmın limiti sıfırdır.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ olsun. Bu takdirde kısmi toplamlar dizisi (S_n) ise $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ dir. Buna göre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + R_n$ yazılabileceğinden

$$s = \lim_{n\to\infty}(S_n + R_n)$$
$$s = s + \lim_{n\to\infty} R_n$$
$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

olur.

POZİTİF TERİMLİ SERİLER ve TESTLERİ

10.8. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ ise $\sum a_n$ serisine bir pozitif terimli seri denir.

10. 2. Sonuç: i) $\sum a_n$ serisi bir pozitif terimli seri ise $\sum a_n$ nin kısmi toplamlar dizisi (s_n) monoton artan bir dizidir.

ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \geq 0$ dır. Buna göre $s_n > 0$ için (s_n) kısmi toplamlar dizisi alttan sınırlıdır. Bu durumda (s_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart (s_n) dizisinin üstten sınırlı olmasıdır.

iii) $\sum a_n$ pozitif terimli serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart (s_n) kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olmasıdır.//

Bütün seriler, önce kısmi toplamlar dizisi bulunup sonrada yakınsaklığı tespit edilemememektedir. Bu durumda yakınsak olup olmadığı çeşitli testlerle tespit edilebilmektedir. Şimdi bu testleri izah edelim.

1. p-Serileri Testi

10.9. Tanım: $p \in \mathbb{Q}^+$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisine p-serisi denir.

10.12. Teorem: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisinde p-serisi;

i) $0 < p \leq 1$ ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi ıraksaktır,

ii) $p > 1$ ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi yakınsaktır.

İspat: i) İlk olarak $p = 1$ olsun. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi harmonik seri olur. Bu harmonik serinin yukarıda ıraksak olduğu gösterilmiştir.

İkinci olarak $p < 1$ olsun.

$$n^p < n$$
$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$$

olacağından $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan karşılaştırma testi gereğince $p < 1$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi ıraksaktır.

ii) $p > 1$ olsun. $2^r < n$ olacak şekilde p sayısı olsun.

$$S_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$
$$\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^p + \cdots + \frac{1}{2^r}^p\right)$$
$$< 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^p} + 4 \cdot \frac{1}{4^p} + \cdots + 2^{r-1} \cdot \left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^p$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \cdots + \left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^{p-1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{r-1}$$
$$< \frac{1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{r-1}}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$$

olur. $n \to \infty$ $n \to \infty$ için $r \to \infty$ olacağından

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{r}}{1-\frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$$

bulunur. Bu ise $p > 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin yakınsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ serisinin ıraksaktır.

2. Karşılaştırma Testi

10.13. Teorem: $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ iki pozitif terimli seri olsun. $\sum a_n < \sum b_n$ ise;

i) $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsaktır.
ii) $\sum a_n$ ıraksak ise $\sum b_n$ de ıraksaktır.

İspat: i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \cdot b = b_n$ olacak şekilde bir c sayısı ve $\sum b_n = b$ olsun.

$$c \cdot \sum a_n = \sum b_n = b$$
$$\sum a_n = \frac{b}{c}$$

olup yakınsaktır.

ii) $\sum a_n$ ıraksak olsun. Bu durumda $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ kısmi toplamlar dizisi sınırsızdır.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \cdot c = (b_1 + b_2 + \cdots + b_k)$$

olacağından $(b_1, b_2, \cdots, b_k)$ dizisi de sınırsızdır. O halde $\sum b_n$ de ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n(n+1)}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisinin yakınsak olduğu daha önceden gösterilmişti. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sin^2 n \leq 1$$
$$\frac{\sin^2 n}{(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n(n+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n(n+1)}$ serisi de yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her n için,

$$n + 1 \leq 2n$$
$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

olur. Önceki örnekte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisinin ıraksak olduğu gösterilmiştir. Buna göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ serisi ıraksaktır.

10.3. Not: $a_n \leq b_n$ eşitsizliğinin sonlu sayıda n için sağlanmaması yukarıdaki karşılaştırma kriterini bozmaz. Çünkü genel olarak bir seride sonlu sayıda terimin değiştirilmesi bu serinin yakınsaklığını bozmaz. Sadece serinin toplamını değiştirir.

3. Karşılaştırma Testinin Limit Formu

10.14. Teorem: $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ iki pozitif terimli seri olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$$

olsun.

i) $0 < L < \infty$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin karakterleri aynıdır.

ii) $L = 0$ ise $\sum b_n$ yakınsak olduğunda $\sum a_n$ da yakınsaktır, $\sum a_n$ ıraksak olduğunda $\sum b_n$ de ıraksaktır.

iii) $L = \infty$ ise $\sum b_n$ ıraksak olduğunda $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

İspat: $0 < L < \infty$ olsun. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$ olduğunda her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_0$ için

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$$

olur. Buradan da,

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon$$
$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$$
$$(L - \varepsilon)\, b_n < a_n < (L + \varepsilon) b_n$$

yazılabilir. $\varepsilon < L$ olacağından $L - \varepsilon > 0$ olur. Buna göre,

$$(L-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < (L+\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

bulunur. b_n karşılaştırma testi gereği $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin karakterleri aynı olduğunu gösterir.

ii) $L = 0$ olsun. Bu durumda $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ bir sıfır dizisi olur. Öyleyse her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_1$ için

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$$

$$a_n < \varepsilon\, b_n$$

olur. Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

bulunur. Bu ise $\sum b_n$ yakınsak olduğunda $\sum a_n$ yakınsak, $\sum a_n$ ıraksak olduğunda $\sum b_n$ ıraksaktır.

iii) $L = \infty$ olsun. Bu durumda $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ bir sınırsız dizidir. $B > 0$ istenildiği kadar büyük bir sayı olsun. $n > n_2$ olduğunda

$$\frac{a_n}{b_n} > B$$

$$b_n B < a_n$$

$$B\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

kalacak şekilde en az bir n_2 doğal sayısı vardır. Buna göre $\sum b_n$ ıraksak olduğunda $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n^2+3n+2}$ pozitif terimli serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisinin ıraksak olduğu yukarıda gösterildi.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n}{n^2+3n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n^2+3n+2}\frac{n}{1} = 4$$

olduğundan karşılaştırma testinin limit formu gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n^2+3n+2}$ serisi ıraksaktır.

4. Limit Testi

10.15. Teorem: $\sum a_n$ Pozitif terimli bir seri olsun. Eğer;

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = L$$

ise;

i) $0 \le L < \infty$ ve $\alpha > 1$ ise $\sum a_n$ yakınsaktır.

ii) $0 < L < \infty$ ve $\alpha \le 1$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

Bu teoremin ispatı 10.13. teoremin ispatına benzer yöntemle yapıldığından okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{7n^3+4}$ serisinin karakterini inleyiniz.

Çözüm: $\alpha = 2 > 1$ alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{3n^3}{7n^3+4}=\lim_{n\to\infty} n^{2}\frac{3n^3}{7n^3+4}=\frac{3}{7}<1$$

olacağından $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3}{7n^3+4}$ serisi yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n+2}}$ serisinin karakterini inleyiniz.

Çözüm: $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{\ln n}{\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty} n^{1/2}\frac{\ln n}{\sqrt{n+2}}=\infty$$

olacağından $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n+2}}$ serisi ıraksaktır.

5. D'Alambert Oran Testi

Jean Le Rond D'Alembert,
16 Kasım 1717, Paris, Fransa - 29 Ekim 1783, Paris, Fransa

10.16. Teorem: $\sum a_n$ pozitif terimli seri olsun. Eğer;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$$

ise;

i) $L<1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsak,
ii) $L>1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksak,
iii) $L=1$ ise $\sum a_n$ serisi karakteri hakkında bir şey denilemez.

İspat: i) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L<1$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ öyle ki her $n>n_0$ için

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L\right|<\varepsilon$$

olur. Buna göre,

$$-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-L<\varepsilon$$
$$L-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+\varepsilon$$

bulunur. $L+\varepsilon=p<1$ olacak şekilde ε seçilebilir. Bu durumda

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+\varepsilon=p<1$$

$$a_{n+1}<p\,a_n$$

olduğundan,

$$a_{n_0+1}<p\,a_{n_0}$$
$$a_{n_0+2}<p\,a_{n_0+1}$$
$$\dots$$
$$a_n<p\,a_{n-1}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa,

$$a_n<p^{n-n_0}\,a_{n_0}$$

bulunur. a_{n_0} sabit sayı ve 10.7. teoremden $0\le p<1$ için $\sum p^{n-n_0}$ serisi yakınsaktır. Karşılaştırma testi gereği $\sum a_n$ yakınsaktır.

ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L>1$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $\varepsilon>0$ için $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ öyle ki her $n>n_0$ için

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L\right|<\varepsilon$$

olur. Buna göre,

$$-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-L<\varepsilon$$

dir. ε yeteri kadar küçük seçildiğinde $L - \varepsilon > 1$ olacağından $n > n_0$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$a_{n+1} > p\, a_n$$

dir. O halde (a_n) dizisi de (a_{n_0}) dan sonraki terimleri monoton artandır. Dolayısıyla $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ dır. $\sum a_n$ ıraksaktır.

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğunu biliyoruz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

dir. Hem yakınsak hem ıraksak serinin genel terimleri $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ çıkmaktadır. Buna göre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ olduğunda serisi karakteri hakkında bir şey denilemez.

Örnek: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ serisi karakterini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{e^{n+1}} . \frac{e^n}{n} = \frac{1}{e} < 1$

olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ serisi yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ serinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}.\frac{n^n}{n!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$
$$=\frac{1}{e}<1$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisi yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$ serisi karakterini inceleyiniz

Çözüm: $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}.\frac{n}{1}=1\frac{1}{e}<1$$

olduğundan D'Alambert oran testi bu soruya sonuç vermemektedir.

6. Cauchy Kök Testi

10.17. Teorem: $\sum a_n$ pozitif terimli seri olsun. Eğer;

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$$

ise;

i) $L<1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsak,
ii) $L>1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksak,

iii) $L = 1$ ise $\sum a_n$ serisi karakteri hakkında bir şey denilemez.

Bu teoremin ispatı D'Alembert oran testi teoremine benzer yolla yapıldığından okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{n}\right)^n$ serinin karakterini inceleyiniz.

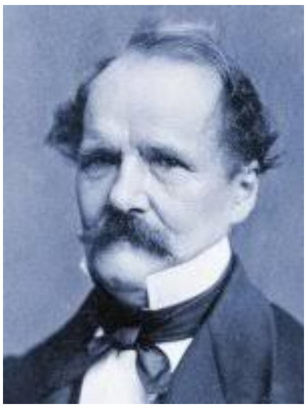
Çözüm: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{4}<1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{n}\right)^n$ serisi yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n^2}$ serinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=e^3>1$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n^2}$ serisi ıraksaktır.

7. Kummer Testi



Ernst Eduard Kummer
29 Ocak 1810 Zary, Polonya - 14 Mayıs 1893 Berlin, Almanya

10.18. Teorem: $\sum a_n$ pozitif terimli seri ve (P_n) de;

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_n.\frac{a_n}{a_{n+1}}-P_{n+1}\right)=L$$

limiti var olacak şekilde bir pozitif dizi olsun.

i) $L > 0$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsak,

ii) $L < 0$ ve $\sum \frac{1}{P_n}$ ıraksak ise $\sum a_n$ serisi ıraksak,

iii) Diğer durumlarda serisi karakteri hakkında bir şey denilemez.

İspat: i) $0 < L < \infty$ olsun. Bu takdirde her $n \geq m$ olacak şekilde m sayısı vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$P_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - P_{n+1} > L$$
$$P_n \cdot a_n - P_{n+1} \cdot a_{n+1} > L \cdot a_{n+1}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $m, m+1, \cdots, m+k-1$ yazıldığında eşitsizlik doğru olacağından

$$P_m \cdot a_m - P_{m+1} \cdot a_{m+1} > L \cdot a_{m+1}$$
$$P_{m+1} \cdot a_{m+1} - P_{m+2} \cdot a_{m+2} > L \cdot a_{m+2}$$
$$\ldots$$
$$P_{m+k+1} \cdot a_{m+k+1} - P_{m+k+2} \cdot a_{m+k+2} > L \cdot a_{m+k+2}$$

olur. Eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$P_m \cdot a_m - P_{m+k} \cdot a_{m+k} > L \cdot \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$$

bulunur. $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ alınırsa

$$P_m \cdot a_m - P_{m+k} \cdot a_{m+k} > L \cdot (S_{m+k} - S_m)$$
$$L \cdot S_{m+k} < L \cdot S_m + P_m\, a_m - P_{m+k} \cdot a_{m+k} < L \cdot S_m - P_m\, S_m$$

yazılabilir. Böylece her $m \in \mathbb{N}$ için

$$S_{m+k} < S_m - \frac{P_m\, s_m}{L}$$

olur ki bu (S_n) dizisinin üstten sınırlı olduğunu gösterir. Buna göre $\sum a_n$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir.

ii) $-\infty < L < 0$ olsun. Bu takdirde her $n > M$ olacak şekilde M sayısı vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$P_n \cdot a_n - P_{n+1} a_{n+1} \leq 0$$

yazılabilir. Her $n > M$ için

$$P_M \cdot a_M \leq P_{M+1} a_{M+1} \leq \cdots \leq P_n \cdot a_n$$
$$P_n \cdot a_M \cdot \frac{1}{P_n} \leq a_n$$

dir. $\sum \frac{1}{P_n}$ ıraksak olduğundan karşılaştırma testi gereğince $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3.6.9...(3n)}{1.3.5...(3n-2)}$ serisinin karakterini Kummer testi uygulayarak bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(3n-2)} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(3n-2)(3n)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)(3n+3)} = \frac{3n+1}{3n+3}$$

olur. Burada Her n için $P_n = n$ alalım.

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_n.\frac{a_n}{a_{n+1}} - P_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n.\frac{3n+1}{3n+3} - (n+1)\right) = -\frac{5}{3} < 0$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3.6.9...(3n)}{1.3.5...(3n-2)}$ serisi ıraksaktır.

8. Raabe Testi

Joseph Ludwig Raabe
15 Mayıs 1801 Brode, Ukrayna - 22 Ocak 1859 Zürih, İsviçre

10.19. Teorem: $\sum a_n$ pozitif terimli seri ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = L$$

ise

i) $L < -1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsak,
ii) $L > -1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

İspat: Kummer testinde özel olarak $P_n = n$ alırsak

$$\lim_{n\to\infty}\left(k \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (k+1)\right) = -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(k+1)a_{n+1} - k.a_n}{a_{n+1}}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(k+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}-k}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)-\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right)$$

$$=(L-1)$$

bulunur. Buna göre $L<-1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsak, $L>-1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n-1)}$ serisinin karakterini Raabe testi uygulayarak bulunuz.

Çözüm:

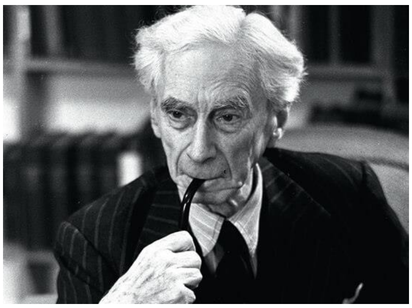
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)(2n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=\frac{2n+2}{2n+1}=1$$

olur. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}>-1$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n-1)}$ serisi ıraksaktır.

9. Bertrand Testi



Bertrand Arthur William Russell
18 Mayıs 1872, Trelleck, - 02 Şubat 1970, Penhyndeudraeth, Birleşik Krallık

10.20. Teorem: $\sum a_n$ pozitif terimli seri olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=L$$

ise

i) $L > -1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksak,
ii) $L < -1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

İspat: i) $L > -1$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=L>-1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{\ln a_n}{\ln n}=L<1$ olacağından öyle bir n_0 sayısı vardır ki, her $n > n_0$ için

$$\frac{\ln a_n}{\ln n} = L > -1$$

$$\ln a_n > -\ln n$$

$$\ln a_n > \ln n^{-1}$$

$$a_n > \frac{1}{n}$$

olur. $\sum\frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan karşılaştırma testi gereği $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

ii) $L < -1$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=L<-1$ ise

$$\frac{\ln a_n}{\ln n} \leq -\alpha < -1$$

olacak şekilde α sayısı seçelim. Her n için

$$\ln a_n \leq -\alpha \ln n$$

$$\ln a_n \leq \ln n^{-\alpha}$$

$$a_n \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$$

olur. $\alpha > 1$ için $\sum\frac{1}{n^{\alpha}}$ serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereği $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{(\ln n^2)}}$ serisinin karakterini Bertrand testi uygulayarak bulunuz.

Çözüm:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{3^{(\ln n^2)}}}{\ln n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3^{(-\ln n^2)}}{\ln n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2 \ln n \ln 3}{\ln n}$$
$$= -2 \ln 3 < -1$$

olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{(\ln n^2)}}$ serisi yakınsaktır.

10. Benzerlik (Seri Skılaştırma) Testi

10.21. Teorem: $\sum a_n$ pozitif ve monoton azalan bir dizi olsun.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak $\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{\infty} 2^p . a_{2^p}$ yakınsaktır.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksak $\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{\infty} 2^p . a_{2^p}$ ıraksaktır.

İspat: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $t_n = \sum_{k=0}^{p} 2^k a_{2^k}$ olsun. $n \leq 2^p$ için

$$\begin{aligned} s_m &< a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^p} + a_{2^p+1} + \cdots + a_{2^{p+1}-1}) \\ &< a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \cdots + 2^p a_{2^p} \\ &= t_p \end{aligned} \tag{1}$$

dir. Aynı şekilde $n \geq 2^p$ için

$$\begin{aligned} s_n &> a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{p-2}+1} + a_{2^{p-2}} + \cdots + a_{2^{p-1}}) \\ &> \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{p-2}\, a_{2^{p-1}} \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{p-2}\, a_{2^{p-1}}) \\ &= \frac{1}{2} t_{p-1} \end{aligned} \tag{2}$$

dir. (1) ve (2) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2} t_{p-1} < s_n < t_p$$

bulunur. Buna göre karşılaştırma testi gereği (t_p) yakınsak ise (s_p) de yakınsak, (s_p) de yakınsak ise (t_p) yakınsaktır. Veya (t_p) ıraksak ise (s_p) de ıraksak, (s_p) de ıraksak ise (t_p) ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ serisinin karakterini Benzerlik testi uygulayarak bulunuz.

Çözüm: $\left(\frac{1}{n \cdot \ln n}\right)$ dizisi monoton azalan olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ serisinin karakteri ile

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln 2^n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

serisinin karakteri ile aynıdır. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ serisi de ıraksaktır.

10.4. Not: Pozitif terimli seriler için ayrıca İntegral testi mevcuttur. İntegral testi integralin uygulamaları konusunda bahsedilecektir.

ALTERNE SERİLER

Şimdi terimlerinin işareti ardışık olarak değişen ve Alterne seriler adı verilen seriler ve yakınsaklık testini inceleyelim.

10.10. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ serisine alterne seri denir.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ serisi alterne seridir.

10.22. Teorem (Leibnizt Testi): Eğer,

i) Her $n > 1$ için $0 < a_{n+1} \leq a_n$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ise bu takdirde $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ alterne serisi yakınsaktır.

İspat: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ alterne serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun. $0 < a_{n+1} \leq a_n$ olduğundan

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

şeklinde tanımlanan (S_n) dizisi artan dizidir. S_n genel terimi

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

şeklinde yazılır. Bu toplamdaki ilk terim hariç diğer terimler negatiftir. Buna göre;

$$s_{2n} \leq a_1$$

yazılabilir. Buna göre (S_{2n}) dizisi sınırlı dizidir. Monoton artan ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan (S_{2n}) dizisi yakınsak dizidir.

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = L$$

diyelim. $L \leq a_1$ olacaktır.

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}[S_{2n-1} + a_{2n}] = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = L + \lim_{n\to\infty} a_{2n}$$

dır. Ayrıca (a_{2n}) dizisi (a_n) alt dizisi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

olur. Buna göre n sayısı gerek tek gerekse çift olması durumunda (s_n) dizisi L noktasına yakınsar. Buna göre $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ alterne serisi yakınsaktır.

Örnek: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ alterne serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

i) Her n için $a_n = \dfrac{1}{n}$ için $0 < a_{n+1} \leq a_n$ dir.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ serisi yakınsaktır.

MUTLAK ve ŞARTLI YAKINSAKLIK

10.11. Tanım: $\sum a_n$ serisi için $\sum |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisine mutlak yakınsaktır denir. $\sum a_n$ serisi yakınsak iken $\sum |a_n|$ serisi ıraksak ise $\sum a_n$ serisi şartlı yakınsak denir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ alterne serisini mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serisini mutlak yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n}$ alterne serisini şartlı yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Verilen serinin yakınsak olduğu yukarıda gösterilmiştir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi olur ki, harmonik seri ıraksak olduğu yukarıda harmonik seri kısmında gösterilmiştir. Buna göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n}$ alterne serisini şartlı yakınsaktır.

10.23. Teorem: Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır. Yani $\sum |a_n|$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsaktır.

İspat: Her n için,

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$$

dir. Buna göre

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$$

yazılabilir. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ de yakınsaktır. Karşılaştırma testi gereği negatif olmayan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)$$

serisi de yakınsak olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|-|a_n|)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)-\sum_{n=1}^{\infty}-|a_n|$$

dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yakınsak olur.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm: Her n için $|\sin n| \leq 1$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

yazılabilir. Karşılaştırma testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ de yakınsaktır. Mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ serisi yakınsaktır.

10.24. Teorem: İki mutlak yakınsak serinin toplamı, farkı ve çarpımı mutlak yakınsaktır.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ serileri mutlak yakınsak olsun.

i) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\pm b_n|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\pm\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ karşılaştırma testi gereğince $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\pm b_n|$ de yakınsaktır.

ii) Cauchy çarpımından

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k b_{n-k}$$

durumu mutlak yakınsaklıkta geçerlidir.

10.5. Not:

1. Mutlak yakınsak bir serinin terimleri yeniden düzenlenebilir ve düzenlenmiş seriler aynı noktaya yakınsar.

2. Şartlı yakınsak seriler, uygun biçimde yeniden düzenlenebilirse seriler ıraksak olabilir veya arzu edilen bir toplama yakınsayabilir.

10.12. Tanım: Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin kümesi ℓ_1 uzayı adı verilir. Buna göre

$$\ell_1 = \left\{(a_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\right\}$$

dir. (Bu yazımda $< \infty$ kavramı yakınsaklığı sembolize eder.)

10.25. Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ reel terimli bir seri,

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} \text{ ve } q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

olsun.

i) $\sum a_n$ şartı yakınsak ise $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serisinin her ikisi de ıraksaktır.
ii) $\sum a_n$ mutlak yakınsak ise $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serisinin her ikisi de yakınsaktır.

İspat: i) $\sum a_n$ şartı yakınsak ise $\sum |a_n|$ ıraksaktır. Kabul edelim ki $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serileri yakınsak olsun. Bu takdirde $|a_n| = p_n + q_n$ olduğundan $\sum |a_n|$ yakınsaktır. Öyleyse kabul yanlıştır.

ii) $\sum a_n$ mutlak yakınsak ise $\sum |a_n|$ yakınsaktır. Kabul edelim ki $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serileri ıraksak olsun. Bu takdirde $|a_n| = p_n + q_n$ olduğundan $\sum |a_n|$ ıraksaktır. Öyleyse kabul yanlıştır.

10.26. Teorem: $\sum a_n$ yakınsak bir seri olsun.

$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_1}$

$b_2 = a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \cdots + a_{m_2}$

...

$b_n = a_{m_{n-1}+1} + a_{m_{n-1}+2} + \cdots + a_{m_n}$

ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak olup $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dir.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t_n$ denilirse, $t_n = s_{m_n}$ olacağından (t_n) dizisi (s_n) dizisinin bir alt dizisidir. (s_n) yakınsak ve limiti s ise (t_n) de yakınsak ve limiti s dir. Yani, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$ dir. //

Bu bize, yakınsak bir serinin terimlerinin parantezlere alınarak gruplandırılabileceğini gösterir. Yani,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_1}) + (a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \cdots + a_{m_2}) + \cdots$$

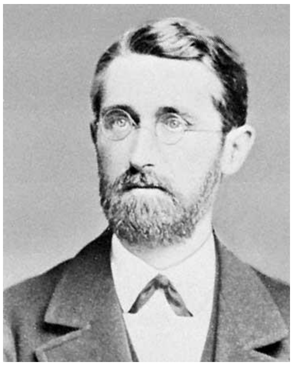
yazılabilir. Burada terimler parantezlere alınırken terimlerin sırasının değişşöediğine dikkat edilmelidir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = s$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n)} = s$ dir, gösteriniz.

Çözüm: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$
$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n)}$$

DEDEKIND ve DIRICHLET TESTLERİ

1. Dedekind Testi



Richard Dedekind
06 Ekim 1831, Braunschweig - 12 Şubat 1916, Braunschweig, Almanya

10.27. Teorem: (a_n) ve (b_n) herhang iki dizi ve
$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ve $\Delta b_k = b_k - b_{k+1}$
olsun.

i) (s_n) sınırlı
ii) $\sum |\Delta b_k| < \infty$
iii) $\lim b_n = 0$

ise $\sum a_k b_k$ yakınsak ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \Delta b_n \,, \quad (\Delta b_k = b_k - b_{k+1})$$

dir.

İspat: (s_n) sınırlı ve $\lim b_n = 0$ olduğundan $\lim s_n b_n = 0$ dir. Ayrıca (s_n) sınırlı olduğundan her n için $s_n \leq M$ olacak şeilde bir M reel sayısı vardır. Bu durumda

$$\sum |s_k \Delta b_k| \leq M \sum |\Delta b_k| < \infty$$

olur ki bu $\sum s_k \Delta b_k$ serisinin mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsak olduğunu gösterir. Abel kısmi toplam formülünden $\sum a_k b_k$ serisinin yakınsak olduğu ortaya çıkar.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k$$

Abel kısmi toplam formülünde, $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \Delta b_k$$

eşitliği elde edilir.

Örnek: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ serisinin yakınsak olduğunu Dedekind teoremi yardımıyla gösteriniz.

Çözüm: i) $a_k = (-1)^{k+1}$ ve $b_k = \frac{1}{k}$ olsun.

$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ tek} \\ 0, & n \text{ çift} \end{cases}$

olacağından $|s_n| \leq 1$ dir. Şu halde (s_n) sınırlıdır.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$

olacağından yakınsaktır.

iii) $\lim b_n = \lim\frac{1}{n} = 0$ olduğundan Dedekind testi gereğince $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ serisi yakınsaktır.

b) Dirichlet Testi

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
13 Şubat 1805, Düren, Almanya - 05 Mayıs 1859, Göttingen, Almanya

10.28. Teorem: (a_n) ve (b_n) herhang iki dizi ve
$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ve $\Delta b_k = b_k - b_{k+1}$
olsun.
i) (s_n) sınırlı
ii) (b_n) azalarak sıfıra yakınsayan bir dizi
ise $\sum a_k b_k$ yakınsak ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}s_n\Delta b_n, \quad (\Delta b_k = b_k - b_{k+1})$$

dir.

İspat: Dedekind testinin hipotezlerinin gerçeklendiğini göstermek yeterdir.

i) Hipotezden (s_n) sınırlıdır.

ii) (b_n) azalan olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n - b_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim b_n = b_1$$

olup $\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|$ yakınsaktır.

iii) Hipotezden $\lim b_n = 0$ dır.

O halde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ serisi yakınsak ve toplamı $\sum_{n=1}^{\infty} s_n \Delta b_n$ dır.

Örnek: c tamsayı olmayan bir reel sayı olsun. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-c}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her n için $a_n = (-1)^{n-1}$ ve $b_n = \frac{1}{n-c}$ olsun.

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ tek} \\ 0, & n \text{ çift} \end{cases}$$

olacağından $|s_n| \le 1$ dir. Şu halde (s_n) sınırlıdır.

$(b_n) = \left(\frac{1}{n-c}\right)$ monoton azalan bir sıfır dizisidir. Dirichlet testi gereğince verilen seri yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}$ serisinin her $\varphi \in \mathbb{R}$ için yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her n için $a_n = \sin n\varphi$ ve $b_n = \frac{1}{n}$ olsun. φ, π'nin tam katı ise tüm terimler sıfır olacağından verilen seri yakınsak ve toplamı sıfırdır. $\varphi \ne m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ olsun.

$$s_n = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{n}{2}\varphi \cdot \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

olacağından

$$|s_n| = \left|\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi \cdot \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right| \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right|$$

dir. Şu halde (s_n) sınırlıdır. $(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ monoton azalan bir sıfır dizisi olduğundan Dirichlet testi gereğince verilen seri yakınsaktır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 + \cdots$ serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)(2k)$ B) $\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(k+2)$ C) $\sum_{k=1}^{\infty}k(k+2)$

D) $\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)(k+1)$ E) $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)(2k)$

Çözüm: $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)(2k) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 + \cdots$

Cevap: A

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{4n+5}$ serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{5}{9} + \frac{7}{11} + \frac{9}{13} + \cdots$ B) $\frac{5}{9} + \frac{7}{13} + \frac{9}{17} + \cdots$ C) $\frac{5}{9} + \frac{6}{13} + \frac{7}{17} + \cdots$

D) $\frac{5}{9} + \frac{7}{10} + \frac{9}{11} + \cdots$ E) $\frac{5}{9} + \frac{6}{11} + \frac{7}{13} + \cdots$

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{4n+5} = \frac{5}{9} + \frac{7}{13} + \frac{9}{17} + \cdots$

Cevap: E

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n+1}$ serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots$ B) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\cdots$ C) $\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\frac{7}{4}+\cdots$
D) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$ E) $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\cdots$

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\cdots$

Cevap: E

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ geometrik serisinin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$

Cevap: D

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}$ geometrik serisinin değeri nedir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: $3\cdot\lim_{n\to\infty}s_n=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=6$

Cevap: C

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{9}{2}$ D) 5 E) 6

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^{n-1}}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{1-\frac{1}{3}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{1-\frac{2}{3}}$

$=\frac{3}{2}+3$

$=\frac{9}{2}$

Cevap: C

7. Kısmi toplamlar dizisi $(S_n)=(n^2)$ olan bir dizinin 8. terimi kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$

$a_{10}=2\cdot 8-1=15$

Cevap: D

7. Kısmi toplamlar dizisi $s_n=6\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$ olduğuna göre, $\lim_{n\to\infty}s_n$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}6\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$

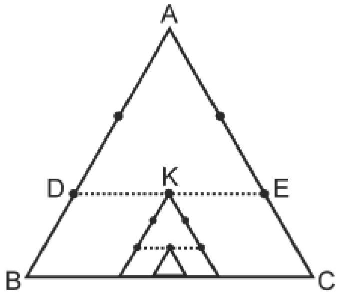
$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=1$

Cevap: A

8. Bir kenar uzunluğu 1 birim olan bir eşkenar üçgen şekildeki gibi parçaya ayrılarak içiçe şekiller oluşturuluyor.



Bu biçimde çizilen üçgensel şekillerin çevreleri toplamı kaç birimdir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

1. üçgesel şeklin çevresi $3 \cdot 1 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$
2. üçgesel şeklin çevresi $3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$
3. üçgesel şeklin çevresi $3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}$
4. üçgesel şeklin çevresi $3 \cdot \frac{1}{27} - \frac{1}{81} = \frac{8}{81}$

...

olduğundan iç içe geçmiş tüm üçgenleri çevrelerini toplamı,

$$\begin{aligned} A &= \frac{8}{3} + \frac{8}{9} + \frac{8}{27} + \frac{8}{81} + \cdots \\ &= \frac{8}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{8}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

geometrik serisi elde edilir. Bu serinin toplamı,

$$A = \frac{8}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} = 4$$

olarak bulunur.

Cevap: C

9. Aşağıdaki serilerin hangisi D'Alambert oran testi ile karekteri tespit edilmez.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n+3}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n!}$ D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^2+1}$

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^2+1}$ serisi alterne seridir. Alterne seriler D'Alambert oran testi ile çözülmez.

Cevap: E

10. Aşağıdaki serilerden hangisi ıraksaktır.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+5}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

Çözüm: Karşılaştırma testinde verilen örnek gereği $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ serisi ıraksaktır.

Cevap: B

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{3^n+2} \leq \frac{1}{3^n}$$

dir. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ serisi yakınsaktır. Çünkü bu seri geometrik seridir $\left(x = \frac{1}{3} < 1\right)$.
Karşılaştırma testine göre $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$ serisi de yakınsaktır.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^2}$ serisi karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}}{(n+2)^2}\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(n+1)^2}{(n+2)^2}=3>1$

olduğundan D'Alambert oran testi gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+1)^2}$ serisi ıraksaktır.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}$ serisi karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}=\dfrac{1}{2}<1$

olduğundan D'Alambert oran testi gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}$ serisi yakınsaktır.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ serisinin karakterini Raabe testi uygulayarak bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\dfrac{n(n+1)}{1}=\dfrac{n}{n+2}$

olur. Buna göre

$$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{n}{n+2}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+2}=-2<-1$$

olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ serisi yakınsaktır.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n^3+2}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Her $n\in\mathbb{N}$ için $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n^3+2}\le\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n^3}=\dfrac{1}{n^{8/3}}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{8/3}}$ serisi p-serisi olup $p=\dfrac{8}{3}>1$ olduğundan yakınsaktır. Karşılaştırma testi gereği $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ serisi de yakınsaktır.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.
2. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
3. Prof. Ahmet KARADENİZ, Yüksek Matematik 2, Çaylayan Kitapevi, Beyoğlu, İstanbul, 1992.
4. Prof. Dr. Ali Nesil, Analiz I, Nesil Yayıncılık A.Ş., 2011, İstanbul.
5. George B. Thomas Jr., Thomas Calcalus, Çev. Reçep Korkmaz, Beta Yayınları, 11. Baskı, Ağustos 2009, İstanbul.
6. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
7. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
8. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
9. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
10. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
11. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
12. George B. THOMAS, Thomas Calculus, Massachusetts Institute of Technology, University of California, Çeviri Recep Korkmaz, Beta, 2009, İstanbul.
13. Doç. Dr. Ali DÖNMEZ, Gerçel Analiz, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1985.
14. Prof. Dr. Rahim OCAK, Reel Analiz, Erzurum, 1998.
15. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
16. Yrd. Doç. Dr. Ersin Erol, Yüksek Matematiğe Giriş, Marmara Üniversitesi Yayınları, 1991, İstanbul.
17. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.
18. Doç. Dr. Ekrem Kadıoğlu, Doç. Dr. Muhammed Kamalı, Genel Matematik, Erzurum, 2005.
19. A. YILMAZ, O. ALTINTAŞ, D. ÇOKER, F. YILDIRIM, M. ZİREK, Matematik Lise 3, Devlet Kitapları, Murat Matbaacılık Koll. Şti. İstanbul, 1981.