3. BÖLÜM
TAKSİTLENDİRME (ANÜİTE)

TAKSİTLENDİRME (ANÜİTE) KAVRAMI

3.1. Tanım: Taksitlendirme (Anüite), eşit zaman aralıklarıyla tekrarlanan, ödemeler dizisidir. Dizinin her bir terimine taksit denir.

Emeklilik ve sigorta prim ödemeleri, kira ödemeleri, maaş ödemeleri, taksitle alınan bir eşya için yapılan taksit ödemeleri, bir tahvilin faiz ödemeleri, her yıl eşit miktarlı kâr dağıtan bir imtiyazlı hisse senedinin kâr payı ödemeleri, ev, taşıt ya da tüketici kredileri ile kurumsal kredilerin eşit taksitlerle geri ödemeleri taksitlendirmeye birer örnek teşkil eder. Örneğin bankadan alınan bir kredi her ay yapılacak ödemelerle 24 ayda geri ödenecekse, bu geri ödemeler eşit ödemeli 24 dönemlik bir taksitlendirmeyi (antüiteyi) ifade eder.

Çoğunlukla bir taksitlendirme ödeme zaman aralıkları eşit olduğu gibi ödemelerin büyüklüğü de eşittir. Ancak ödemelerin belli bir kurala göre artıp azaldığı taksitler de vardır. "Genellikle eşit ödemeler" tercih edilir. Ödemelerin eşit aralıklarla yapıldığı ama eşit büyüklükte olmadığı anüiteler de söz konusudur.

TAKSİTLENDİRME ÇEŞİTLERİ

Finans işlemlerimde ve günlük hayatta karşımıza çıkan başlıca taksitlendirme çeşitleri şunlardır:

1. Taksitlerin Devre Başı ve Devre Sonu Olarak Sınıflandırılması

Devre Sonu Taksitlendirme: Her bir devrenin ödemesinin o devrenin sonunda yapıldığı, ödemelerin eşit aralıklarla ve eşit miktarlı olarak yapıldığı taksitlendirmelerdir. Örneğin Martın 16 ında 6 ay taksitle alınan bir ürün 15 Nisanda yaparsanız bu bir devre sonu yapılan taksitlendirmedir. Buna en güzel örnek ülkemizde işçileri çalışıp bitirdikleri ayın maaşını çalıştıktan sonra almalarıdır.

Devre Başı (Peşin) Taksitlendirme: Her bir devrenin ödemesinin o devrenin başında yapıldığı taksitlendirmelerdir. Bu taksitlendirmenin en tipik örneği kira ödemeleridir. Çünkü bir gayrimenkul kiralandığında kira ödemeleri her devrenin başında yapılır. Örneğin 1 Haziranda kiralanan bir evin bir aylık kirası 1 Haziranda yapılır. Buna peşin taksitlendirme de denir. Devre başı taksitlendirmeye bir başka örnek de ülkemizdeki memur maaşlarıdır. Memurlar işçilerin aksine çalıştıkları değil, çalışacakları ayın maaşını o ayın başında aldıklarından bir memurun bir yıllık ya da altı aylık maaş ödemeleri bir devre başı (peşin) taksitlendirmelerdir.

2. Vade Durumuna Göre Taksitlendirilmeler

Normal Taksitlendirilmeler (Anüite): İlk taksitin ilk faiz devresinde başlayan taksitlendirmelerdir. Örneğin, 1 Ocakta alınan bir buzdolabının ilk taksiti, hemen o ay, devre başı ya da devre sonu olarak uygulanmasıdır.

Ertelenmiş (Geciktirilmiş) Taksitlendirmeler: İlk ödemesi ilk faiz devresinin bitiminde değil, bir ya da daha fazla devre ertelendikten (geçtikten) sonra herhangi bir zamanda yapılan taksitlendirmelerdir. Örneğin borç alan bir kişinin borç geri ödemelerine borçlandığı ayın sonunda değil de ikinci, üçüncü ya da daha sonraki bir ayın sonunda başlaması gibi. Alınan bir mobilya üç ay sonra ilk geri ödeme yapılacaksa bu üç ay geciktirilmiş bir taksitlendirme olacaktır.

Çabuklaştırılmış (Erken Ödemeli) Taksitlendirmeler: Normal veya geciktirilmiş taksitlendirme yapılmış ve taksit ödemeleri başlamışken, diğer taksit zamanı gelmeden erkenden kalan taksitlerin tekrar taksitlendirilerek ödenmesine çabuklaştırılmış taksitlendirme denir.

Sürekli (Daimi) Taksitlendirmeler: Ödemeleri belirli bir tarihte başlayan ancak ne zaman biteceği bilinmeyen belirsiz bir geleceğe kadar devam eden taksitlendirmelerdir. İmtiyazlı hisse senedi kâr payları (şirketin iflas etmeyeceği varsayımıyla), bir arsadan alınan kira, bankaya yatırılan bir paradan sürekli belli bir getiri olarak alınan eşit ödemeler bu anüite türüne örnek olarak gösterilebilir.

3. Artan ve Azalan Taksitlendirmeler

Bütün anüiteler; eşit taksitli, aritmetik dizi şeklinde artan/azalan taksitli, geometrik dizi şeklinde artan/azalan taksitli anüiteler mevcuttur. Eşit aralıklarla yapılan ödemelerin eşit olmayıp kuralsız olarak değişen taksitler; ya da parçalı fonksiyon dizisi şeklide devam eden taksitlendirmeler de var. Ama bu tip matematiğin özel durumları ile yapılmaktadır ve günlük hayatta yok denecek kadar az kullanıldığından bu kısımda bahsedilmeyecektir.

DEVRE SONU NORMAL TAKSİTLENDİRME

3.2. Tanım: Belirlenmiş eşit zaman aralıklarında belli tutarların devre sonlarında ödenen tutarlar, bileşik faiz tutarları ile birlikte ulaşacağı toplam değere, devre sonu normal taksitlerle oluşturulan sermaye birikimi (taksitlerin değecek değeri) denir.

1. Devre Sonu Normal Taksitlerin Gelecekteki Değeri

3.1. Teorem: a taksit tutarı, S taksitlerin gelecek değeri, t taksit sayısı, n devre faiz oranını göstermek üzere, taksitlerin süre sonunda faizleri ile birlikte ulaşacağı değer;

$$S = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{n}$$

biçimindedir.

İspat: Taksitlerin bileşik faizle birikimi,

1. dönemin sonunda biriken taksit miktarı $S = a$
2. dönemin sonunda biriken taksit miktarı $S = a + a(1+n)$
3. dönemin sonunda biriken taksit miktarı $S = a + a(1+n) + a(1+n)^2$

...

t. dönemin sonunda biriken taksit miktarı

$$\begin{aligned} S &= a + a\cdot(1+n) + a\cdot(1+n)^2 + \cdots + a\cdot(1+n)^{t-1} \\ &= a\cdot[1 + (1+n) + (1+n)^2 + \cdots + (1+n)^{t-1}] \end{aligned}$$

dir. İlk terimi a, ortak çarpanı (1+n) olan t terimlik bir geometrik dizi olduğu görülür. Taksitlerin gelecek değerini gösteren S değeri, geometrik dizi toplamı şeklinde yazılırsa;

$$\begin{aligned} S &= a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n) - 1} \\ &= a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{n} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek: Her ay 1 200 ₺ bankaya yatırılan bir para, yıllık %18 faiz oranı oranında 12 ayda ödenen sermaye, toplam tutarının kaça ulaştığını bulunuz.

Çözüm: $a = 1\,200₺,\ t = 12,\ n = \frac{0{,}18}{12} = 0{,}015$

$$\begin{aligned} S &= a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{n} \\ &= 1\,200 \cdot \frac{(1+0{,}015)^{12} - 1}{0{,}015} \\ &= 15\,649{,}45\ ₺ \end{aligned}$$

Taksit Tutarının Hesaplanması

3.1. Sonuç: Normal taksitlerle devre sonlarında yapılan yatırım veya ödemelerin gelecekteki değerinin taksit tutarı;

$$a = \frac{S \cdot n}{(1+n)^t - 1}$$

denklemi ile hesaplanır.

Örnek: %4 devre faiz oranı ile 10 devrede 12 000 ₺ sermaye oluşturmak istendiğinde, her devre sonunda ödenmesi gereken taksit tutarını bulunuz.

Çözüm: $S = 12\,000$ ₺, $t = 10$, $n = 0{,}04$

$$a = \frac{12\,000 \cdot 0{,}04}{(1+0{,}04)^{10} - 1} = 999{,}49 \text{ ₺}$$

Örnek: Aylık %1,2 faizle 12 ayın sonunda 20 000 ₺ biriktirmek isteyen bir şahıs aylık ne kadar taksitlendirmesi gerekir.

Çözüm: $S = 20\,000$ ₺, $t = 12$, $n = 0{,}012$

$$a = \frac{20\,000 \cdot 0{,}012}{(1+0{,}012)^{12} - 1} = 1\,559{,}51 \text{ ₺}$$

Taksit Sayısının Hesaplanması

3.2. Sonuç: Devre Sonu Normal Taksitlerin Gelecekteki Değerinin taksit sayısı;

$$t = \frac{\log\left[\frac{S \cdot n}{a} + 1\right]}{\log(1+n)}$$

ile bulunur. Gerçekten;

$$a = \frac{S \cdot n}{(1+n)^t - 1}$$

$$(1+n)^t - 1 = \frac{S \cdot n}{a}$$

$$(1+n)^t = \frac{S \cdot n}{a} + 1$$

$$t \cdot \log(1+n) = \log\left[\frac{S \cdot n}{a} + 1\right]$$

$$t = \frac{\log\left[\frac{S \cdot n}{a} + 1\right]}{\log(1+n)}$$

olur.

Örnek: Bir bankaya dönem sonu aylık 2 500 ₺ taksitlerle yatırılan bir hesap yıllık %18 faiz oranında 15 573,87 ₺ ye ulaşmıştır. Bu bankaya taç taksit ödenmiştir.

Çözüm: $a = 2\ 500$ ₺, $S = 15\ 573{,}87$, $n = \frac{0{,}18}{12} = 0{,}015$

$$t = \frac{\log\left[\frac{15\ 573{,}87 \cdot 0{,}015}{2\ 500} + 1\right]}{\log(1+0{,}015)} = \frac{\log 1{,}093443}{\log 1{,}015} = \frac{0{,}0387962}{0{,}006466} = 6 \text{ taksit ödenmiştir.}$$

Faiz Oranının Hesaplaması

$S = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{n}$ denkleminde n'nin değeri bulmak için n değeri yalnız kalması gerekir. Bu durum denklem olarak çözmek maalesef mümkün değildir. Bu durumda, n'nin bulması için şu yöntemi uygulamak gerekir.

$\frac{S}{a} = \frac{(1+n)^t - 1}{n}$ ifadesinde $u = \frac{S}{a}$ alalım. Herhangi bir $u_1 > u$ için $n_1 > n$ olacaktır. Yine herhangi bir $u_2 < u$ için $n_2 < n$ olacaktır. Bu tespit edilen u_1 ve u_2 değerleri için, $u_1 > u > u_2$ olacağından $n_1 > n > n_2$ yazılabilir. Buna göre,

$$\frac{n - n_1}{n - n_2} = \frac{u - u_1}{u - u_2}$$

$$n = \frac{n_1(u - u_2) + n_2(u_1 - u)}{u_1 - u_2}$$

elde edilir ki, bu bize küçük bir hata payıyla da olsa, yaklaşık değeri ortaya çıkarır.

Örnek: Her ay yatırılan 1 000 ₺ taksitlerle 12 ay sonunda 15 000 ₺ elde edildiğine göre uygulanan aylık faiz oranını bulunuz.

Çözüm: $a = 1\ 000$ ₺, $S = 15\ 000$, $t = 12$ ay

$$u = \frac{S}{a} = \frac{15\ 000}{1\ 000} = 15$$

dir. Buna göre

$n_1 = \%4$ alınırsa, $u_1 = \frac{(1+0{,}04)^{12} - 1}{0{,}04} = 15{,}02 > 15 = u$

$n_2 = \%3{,}9$ alınırsa, $u_2 = \frac{(1+0{,}039)^{12} - 1}{0{,}039} = 14{,}93 < 15 = u$

olduğundan, $n_1 > n > n_2$ ise $15{,}02 > 15 > 14{,}39$ yazılabilir.

$$n = \frac{n_1(u - u_2) + n_2(u_1 - u)}{u_1 - u_2}$$
$$= \frac{0{,}4(15 - 14{,}93) + 0{,}39(15{,}02 - 15)}{15{,}02 - 14{,}93}$$
$$= 0{,}39\overline{7}$$

olur ki, bu bize yıllık $\%3{,}9\overline{7}$ faiz uygulandığını gösterir.

2. Devre Sonu Normal Taksitlerin Bugünkü Değeri

Normal taksitlerin bugünkü değerinin taksit miktarının belirlenmesi şu formül aracılığıyla olur.

3.2. Teorem: a taksit tutarı, R toplama ödenmesi gereken miktar, t taksit sayısı, n devre faiz oranını göstermek üzere, taksitlerin süre sonunda faizleri ile birlikte ulaşacağı değer;

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^t \cdot n}$$

biçimindedir.

İspat: Taksitlerin bileşik faizle birikimi,

1. dönemin sonunda biriken taksit miktarı $R = \frac{a}{(1+n)}$
2. dönemin sonunda biriken taksit miktarı $R = \frac{a}{(1+n)} + \frac{a}{(1+n)^2}$
3. dönemin sonunda biriken taksit miktarı $R = \frac{a}{(1+n)} + \frac{a}{(1+n)^2} + \frac{a}{(1+n)^3}$

...

t. dönemin sonunda biriken taksit miktarı

$$R = \frac{a}{(1+n)} + \frac{a}{(1+n)^2} + \frac{a}{(1+n)^3} + \cdots + \frac{a}{(1+n)^t}$$

$$= \frac{a}{(1+n)} + \left[1 + \frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1+n)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+n)^{t-1}}\right]$$

dir. İlk terimi a, ortak çarpanı $\frac{1}{(1+n)}$ olan t terimlik bir geometrik dizi olduğu görülür. Taksitlerin bugünkü değerini gösteren R değeri, geometrik dizi toplamı şeklinde yazılırsa;

$$R = \frac{a}{(1+n)} \cdot \left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+n}\right)^t}{1-\left(\frac{1}{1+n}\right)}\right)$$

$$= a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^t \cdot n}$$

elde edilir.

Örnek: Aylık %0,8 faizle aylık 6 000 ₺ taksitlerle 120 ay taksitle ev almak isteyen bir şahıs kaç liralık kredi talebinde bulunması gerekir?

Çözüm: $a = 6\,000$ ₺, $n = 0{,}008$, $t = 120$ ay

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^t \cdot n}$$

$$R = 6\,000 \cdot \frac{(1+0{,}008)^{120} - 1}{(1+0{,}008)^{120} \cdot 0{,}008} = 461\,731{,}35 \text{ ₺}$$

Taksit Tutarının Hesaplanması

3.3. Sonuç: Normal taksitlerle devre sonlarında yapılan yatırım veya ödemelerin bugünkü değerinin taksit tutarı

$$a = \frac{R\cdot(1+n)^t\cdot n}{(1+n)^t-1}$$

denklemi ile hesaplanır.

Örnek: Araba almak isteyen birisinin 300 000 ₺ açığı vardır. Bu parayı 60 ay eşit taksitle aylık %1 vade farkıyla ödemek isterse, aylık taksitler ne kadar olmalıdır?

Çözüm: $R = 300\ 000$ ₺, $n = 0{,}01$, $t = 60$ ay

$$a = \frac{R\cdot(1+n)^t\cdot n}{(1+n)^t-1}$$

$$a = \frac{300\ 000\cdot(1+0{,}01)^{60}\cdot 0{,}01}{(1+0{,}01)^{60}-1} = 6\ 673{,}33 \text{ ₺}$$

DEVRE BAŞI NORMAL TAKSİTLENDİRME

3.3. Tanım: Belirlenmiş eşit zaman aralıklarında belli tutarların devre başlarında ödenene tutarlar, bileşik faiz tutarları ile birlikte ulaşacağı toplam değere, devre başı normal taksitlerle oluşturulan sermaye birikimi (taksitlerin değecek değeri) denir.

1. Devre Başı Normal Taksitlerin Gelecekteki Değeri

3.3. Teorem: a taksit tutarı, S taksitlerin gelecek değeri, t taksit sayısı, n devre faiz oranını göstermek üzere, taksitlerin süre başında faizleri ile birlikte ulaşacağı değer;

$$S = a\cdot(1+n)\cdot\frac{(1+n)^t-1}{n}$$

biçimindedir.

İspat: Taksitlerin bileşik faizle birikimi,

1. dönemin başında biriken taksit miktarı $S = a\cdot(1+n)$
2. dönemin başında biriken taksit miktarı $S = a\cdot(1+n) + a\cdot(1+n)^2$
3. dönemin başında biriken taksit miktarı $S = a(1+n) + a(1+n)^2 + a(1+n)^3$

…

t. dönemin başında biriken taksit miktarı,

$$S = a\cdot(1+n) + a\cdot(1+n)^2 + a\cdot(1+n)^3 + \cdots + a\cdot(1+n)^t$$
$$= a\cdot(1+n)[1 + (1+n) + (1+n)^2 + \cdots + (1+n)^{t-1}]$$

dir. İlk terimi $a(1+n)$, ortak çarpan $(1+n)$ olan t terimlik bir geometrik dizi olduğu görülür. Taksitlerin gelecek değerini gösteren S değeri, geometrik dizi toplamı şeklinde yazılırsa;

$$S = a \cdot (1+n) \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n) - 1}$$

$$= a \cdot (1+n) \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{n}$$

elde edilir.

Örnek: %18 faiz oranıyla 12 devrede, her devre başında yatırılan 3 000 ₺ lik taksitler sürenin sonunda kaç liraya ulaşır.

Çözüm: $S = 3\,000$ ₺, $n = \frac{0{,}18}{12} = 0{,}015$, $t = 12$ ay

$$S = a \cdot (1+n) \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{n}$$

$$= 3\,000(1+0{,}015) \cdot \frac{(1+0{,}015)^{12} - 1}{0{,}015}$$

$$= 3\,000 \cdot 1{,}015 \cdot \frac{1{,}015^{12} - 1}{0{,}015}$$

$$= 39\,710{,}49 \text{ ₺}$$

Taksit Tutarının Hesaplanması

3.4. Sonuç: Normal taksitlerle devre başlarında yapılan yatırım veya ödemelerin gelecekteki değerinin taksit tutarı

$$a = \frac{S \cdot n}{(1+n)[(1+n)^t - 1]}$$

denklemi ile hesaplanır.

Örnek: %14,4 devre başı faizle, 10 devre (ay) yatırılan para 8 547,47 ₺ olması için her devre ne kadar yatırılmalıdır?

Çözüm: $S = 8\,547{,}47$ ₺, $n = \frac{0{,}144}{12} = 0{,}012$, $t = 10$ devre (ay)

$$a = \frac{8\,547{,}47 \cdot 0{,}012}{(1+0{,}012)[(1+0{,}012)^{10} - 1]}$$

$$a = 800 \text{ ₺}$$

Taksit Sayısının Hesaplanması

3.5. Sonuç: Devre başı normal taksitlerin gelecekteki değerinin taksit sayısı;

$$t = \frac{\log\left[\frac{S \cdot n}{a \cdot (1+n)} + 1\right]}{\log(1+n)}$$

ile bulunur.

Örnek: Devre başı faiz uygulayarak, bir devre 1 200 ₺ ödeyerek devre %1,5 faizle 24 956,06 ₺ biriktirilmiştir. Bu birikim kaç devre sürmüştür.

Çözüm: $S = 24\ 956{,}06$ ₺, $a = 1\ 200$, $n = 0{,}015$

$$t = \frac{\log\left[\frac{S \cdot n}{a \cdot (1+n)} + 1\right]}{\log(1+n)}$$

$$t = \frac{\log\left[\frac{24\ 956{,}06 \cdot 0{,}015}{1\ 200 \cdot (1+0{,}015)} + 1\right]}{\log(1+0{,}015)} = \frac{\log(1{,}30734)}{\log(1{,}015)} = \frac{0{,}116388}{0{,}00646} = 18$$

Faiz Oranının Hesaplaması

Devre başı eşit tutarlı taksitlerde faiz oranının hesaplanması aynı, devre sonu eşit tutarlı taksitlerde faiz oranının hesaplanması gibi yapılır. $u_1 > u > u_2$ için $n_1 > n > n_2$ olup,

$$n = \frac{n_1(u-u_2)+n_2(u_1-u)}{u_1-u_2}$$

yöntemi kullanılır.

Örnek: Devre başı faizle uygulayarak her ay yatırılan 1 200 ₺ taksit, 8 ay sonunda 10 500 ₺ elde edildiğine göre uygulanan faiz oranını bulunuz.

Çözüm: $S = 10\ 500$ ₺, $a = 1\ 200$, $t = 8$

$$u = \frac{S}{a} = \frac{10\ 500}{1\ 000} = 8{,}75$$

dir. Buna göre

$n_1 = \%2$ alınırsa, $u_1 = (1+0{,}02)\frac{(1+0{,}02)^8-1}{0{,}02} = 8{,}76 > 8{,}75 = u$

$n_2 = \%1{,}9$ alınırsa, $u_2 = \frac{(1+0{,}19)^8-1}{0{,}019} = 8{,}71 < 8{,}75 = u$

olduğundan, $n_1 > n > n_2$ ise $8{,}76 > 8{,}75 > 8{,}71$ yazılabilir.

$$n = \frac{n_1(u-u_2)+n_2(u_1-u)}{u_1-u_2}$$
$$= \frac{0{,}02(8{,}75-8{,}71)+0{,}019(8{,}76-8{,}75)}{8{,}76-8{,}71}$$
$$= 0{,}0198$$

olur ki, bu bize aylık %1,98 faiz uygulandığını gösterir.

2. Devre Başında Normal Taksitlerin Bugünkü Değeri

Devre başı eşit tutarlı taksitlerin bugünkü değerinin taksit miktarının belirlenmesi şu formül aracılığıyla olur.

3.4. Teorem: a taksit tutarı, R toplama ödenmesi gereken miktar, t taksit sayısı, n devre faiz oranını göstermek üzere, taksitlerin süre başı faizleri ile birlikte ulaşacağı değer;

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^{t-1} \cdot n}$$

biçimindedir.

İspat: Taksitlerin bileşik faizle birikimi,
1. dönemin başında biriken taksit miktarı $R = a$
2. dönemin başında biriken taksit miktarı $R = a + \frac{a}{(1+n)}$
3. dönemin başında biriken taksit miktarı $R = a + \frac{a}{(1+n)} + \frac{a}{(1+n)^2}$

...

t. dönemin başında biriken taksit miktarı

$$R = a + \frac{a}{(1+n)} + \frac{a}{(1+n)^2} + \frac{a}{(1+n)^3} + \cdots + \frac{a}{(1+n)^{t-1}}$$

$$= a + \left[1 + \frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1+n)^2} + \frac{1}{(1+n)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+n)^{t-1}}\right]$$

dir. İlk terimi a, ortak çarpanı $\frac{1}{(1+n)}$ olan t terimlik bir geometrik dizi olduğu görülür. Taksitlerin bugünkü değerini gösteren R değeri, geometrik dizi toplamı şeklinde yazılırsa;

$$R = a \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{1+n}\right)^t}{1 - \left(\frac{1}{1+n}\right)} \right)$$

$$= a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^{t-1} \cdot n}$$

elde edilir.

Örnek: Peşin fiyatı 300 000 ₺ olan bir arabayı taksitle satın almak isteyen bir şahıs, aylık %1 vade farkıyla ve 60 eşit taksitle ödenmesi istendiğinde, aylık eşit taksitlerin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: $R = 300\ 000$ ₺, $t = 60$, $n = 1$

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^{t-1} \cdot n}$$

$$300\,000 = a \cdot \frac{(1+0{,}01)^{60}-1}{(1+0{,}01)^{60-1} \cdot n}$$
$$a = \frac{300\,000 \cdot 1{,}01^{59} \cdot 0{,}01}{1{,}01^{60}-1}$$
$$a = 6\,607{,}26$$

DEVRE SONU ERTELENMİŞ TAKSİTLENDİRME

Ertelenmiş taksitlerde, erteleme süresi (g) ile gösterilecek ve devre sonu normal ödemeli taksit formüllerinde yararlanılacaktır. Önce ertelenme süresi göz önüne alınmadan (t) devrelik taksitlerin ödenmeye başladığı tarihteki bugünkü değerleri bulunur. Daha sonra bu değerin gecikme süresi dikkate alınarak başlangıç noktasındaki değeri bulunur.

3.5. Teorem: Ertelenmiş taksitlerde devre sonlarında yapılan yatırım veya ödemelerin toplam tutarı
$$R = a \cdot \frac{(1+n)^{t}-1}{(1+n)^{t+g} \cdot n}$$
denklemi ile hesaplanır.

İspatı aşikârdır.

Örnek: 4 ay sonra başlayacak bir borç, her ay 3 200 ₺ ödenerek 8 ayda ödenecektir. Aylık %1,5 faiz oranı ve aylık faizlendirme ile borcun bugünkü değeri nedir?

Çözüm: $a = 3\,200$ ₺, $t = 8$ ay, $g = 4$ ay, $n = 0{,}015$
$$R = a \cdot \frac{(1+n)^{t}-1}{(1+n)^{t+g} \cdot n}$$
$$R = 3\,200 \cdot \frac{(1+0{,}015)^{8}-1}{(1+0{,}015)^{4+8} \cdot 0{,}015}$$
$$R = 22\,569{,}99$$
olur.

Taksit Tutarının Hesaplanması

3.6. Sonuç: Ertelenmiş taksitlerde devre sonlarında yapılan yatırım veya ödemelerin taksit tutarı
$$a = R \cdot \frac{(1+n)^{t+g} \cdot n}{(1+n)^{t}-1}$$
denklemi ile hesaplanır.

Örnek: Aylık %2 faiz oranı ile bir bankaya bugün 4 500 ₺ yatıran bir kişi bu parasını 2 ay sonra başlayan 5 devre sonu taksitle geri çekmek isterse, taksit tutarı ne olur?

Çözüm: $R = 4\,500$ ₺, $t = 5$ ay, $g = 2$ ay, $n = 0{,}02$

$$a = R \cdot \frac{(1+n)^{t+g} \cdot n}{(1+n)^{t} - 1}$$

$$a = 4\,500 \cdot \frac{(1+0{,}2)^{5+2} \cdot 0{,}02}{(1+0{,}2)^{5} - 1} = 993{,}28 \text{ ₺}$$

olur.

Taksit Sayısının Hesaplanması

3.7. Sonuç: Ertelenmiş taksitlerle devre sonlarında yapılan yatırım veya ödemelerin taksit sayısı;

$$t = \frac{\log a - \log[a - R(1+n)^{g} \cdot n]}{\log(1+n)}$$

denklemi ile hesaplanır. Gerçekten;

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^{t} - 1}{(1+n)^{t+g} \cdot n}$$

$$R \cdot (1+n)^{t+g} \cdot n = a \cdot (1+n)^{t} - a$$

$$R \cdot (1+n)^{t} \cdot (1+n)^{g} \cdot n = a \cdot (1+n)^{t} - a$$

$$a = a \cdot (1+n)^{t} - R \cdot (1+n)^{t} \cdot (1+n)^{g} \cdot n$$

$$a = (1+n)^{t}[a - R \cdot (1+n)^{g} \cdot n]$$

$$(1+n)^{t} = \frac{a}{a - R \cdot (1+n)^{g} \cdot n}$$

$$\log(1+n)^{t} = \log \frac{a}{a - R \cdot (1+n)^{g} \cdot n}$$

$$t \cdot \log(1+n) = \log a - \log[a - R \cdot (1+n)^{g} \cdot n]$$

$$t = \frac{\log a - \log[a - R(1+n)^{g} \cdot n]}{\log(1+n)}$$

olur.

Örnek: Aylık %2 faiz oranıyla 2 500 ₺ bir bankaya para yatırıyor. 3 ay sonra her ay sonunda 623,64 ₺ olarak geri çekiyor. Kişinin bu parayı geri alabileceği taksit sayısı ne olmalıdır.

Çözüm: $R = 2\,500$ ₺, $n = 0{,}02$, $g = 3$, $a = 600$ ₺

$$t = \frac{\log a - \log[a - R(1+n)^{g} \cdot n]}{\log(1+n)}$$

$$t = \frac{\log 623{,}64 - \log[623{,}64 - 2\,500(1+0{,}02)^{3} \cdot 0{,}02]}{\log(1+0{,}02)}$$

$t = 7$
olmalıdır.

Erteleme Süresinin Hesaplanması

3.8. Sonuç: Devre sonu ertelenmiş taksitlerde erteleme süresi;

$$g = \frac{\log a \cdot [(1+n)^t - 1] - \log[R \cdot (1+n)^t \cdot n]}{\log(1+n)}$$

denklemi ile hesaplanır. Gerçekten;

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^{t+g} \cdot n}$$

$$R \cdot (1+n)^{t+g} \cdot n = a \cdot [(1+n)^t - 1]$$

$$R \cdot (1+n)^t \cdot (1+n)^g \cdot n = a \cdot [(1+n)^t - 1]$$

$$(1+n)^g = \frac{a[(1+n)^t - 1]}{R \cdot (1+n)^t \cdot n}$$

$$\log(1+n)^g = \log \frac{a[(1+n)^t - 1]}{R \cdot (1+n)^t \cdot n}$$

$$g \cdot \log(1+n) = \log a[(1+n)^t - 1] - \log[R \cdot (1+n)^t \cdot n]$$

$$g = \frac{\log a[(1+n)^t - 1] - \log[R \cdot (1+n)^t \cdot n]}{\log(1+n)}$$

olur.

Örnek: Aylık %1,5 faiz oranı ile bir bankaya 20 000 ₺ yatıran bir kişi parasını her ay sonunda 2 501,50 ₺'lik 9 taksitle çekmek istemektedir. Taksitlerin eteleme süresi ne kadar olmalıdır?

Çözüm: $R = 20\,000$ ₺, $n = 0{,}015$, $t = 9$, $a = 2\,501{,}50$ ₺

$$g = \frac{\log(2\,501{,}50)[(1+0{,}015)^9 - 1] - \log[20\,000 \cdot (1+0{,}015)^9 \cdot 0{,}015]}{\log(1+0{,}015)}$$

$g = 3$ ay
olur.

DEVRE BAŞI ERTELENMİŞ TAKSİTLENDİRME

Devre başı eşit ödemeli taksitte bugünkü değer denkleminden yararlanılarak ertelenmiş taksitlerin, taksitlerin başlama tarihindeki değerleri bulunur. Daha sonra bu değerin, erteleme süresi dikkate alınarak başlangıç noktasındaki değeri elde edilir.

3.1. Aksiyom: $R = a \cdot (1 + n) \cdot \frac{(1+n)^{t}-1}{(1+n)^{t+g} \cdot n}$

Örnek: 4 ay sonra başlayan ve aybaşlarında alınacak 1 000 ₺'lik 10 taksitlik gelir sağlayabilmek için yıllık %24 veren bir birikimin bugünkü değeri nedir?

Çözüm: $a = 1\ 000$ ₺, $t = 10, g = 4, n = \frac{0,24}{12} = 0,02$ ₺

$$R = a \cdot (1 + n) \cdot \frac{(1+n)^{t}-1}{(1+n)^{t+g} \cdot n}$$
$$R = 1\ 000(1 + 0,02) \cdot \frac{(1+0,02)^{10}-1}{(1+0,02)^{10+4} \cdot 0,02}$$
$R = 8\ 464,49$ ₺

Taksit Tutarının Hesaplanması

3.9. Sonuç: Ertelenmiş taksitler ile devre başlarında yapılacak yatırım veya ödemelerin taksit tutarı;

$$a = R \cdot \frac{(1+n)^{t+g} \cdot n}{(1+n)[(1+n)^{t}-1]}$$

denklemi ile hesaplanır.

Örnek: Devre başı yıllık %18 faiz oranı ile alınan bir ürün 5 000 ₺ dir. 2 ay erteleme ile 1 yıl içinde ödenmesi için taksit tutarı ne olmalıdır?

Çözüm: $a = 5\ 000$ ₺, $t = 10, g = 2, n = \frac{0,18}{12} = 0,015$

$$a = R \cdot \frac{(1+n)^{t+g} \cdot n}{(1+n)[(1+n)^{t}-1]}$$

$$a = 5\ 000 \cdot \frac{(1+0,015)^{10+2} \cdot 0,015}{(1+0,015)[(1+0,015)^{10}-1]}$$

$a = 550,30$ ₺

Taksit Sayısının Hesaplanması

3.10. Sonuç: Ertelenmiş taksitler ile devre başlarında yapılacak yatırım veya ödemelerin taksit sayısı;

$$t = \frac{\log a\cdot(1+n) - \log[a\cdot(1+n) - R\cdot(1+n)^g\cdot n]}{\log(1+n)}$$

denklemi ile hesaplanır. Gerçekten;

$$R = a\cdot(1+n)\cdot\frac{(1+n)^t-1}{(1+n)^{t+g}\cdot n}$$

$$R\cdot(1+n)^{t+g}\cdot n = a\cdot(1+n)[(1+n)^t-1]$$

$$R\cdot(1+n)^t\cdot(1+n)^g\cdot n = a\cdot(1+n)[(1+n)^t-1]$$

$$R\cdot(1+n)^t\cdot(1+n)^g\cdot n = a\cdot(1+n)(1+n)^t - a\cdot(1+n)$$

$$a\cdot(1+n) = a\cdot(1+n)(1+n)^t - R(1+n)^t\cdot(1+n)^g\cdot n$$

$$a\cdot(1+n) = (1+n)^t[a\cdot(1+n) - R\cdot(1+n)^g\cdot n]$$

$$(1+n)^t = \frac{a\cdot(1+n)}{a\cdot(1+n)-R\cdot(1+n)^g\cdot n}$$

$$\log(1+n)^t = \log\frac{a\cdot(1+n)}{a\cdot(1+n)-R\cdot(1+n)^g\cdot n}$$

$$t\cdot\log(1+n) = \log a\cdot(1+n) - \log a\cdot(1+n) - R\cdot(1+n)^g\cdot n$$

$$t = \frac{\log a(1+n) - \log[a(1+n) - R(1+n)^g\cdot n]}{\log(1+n)}$$

olur.

Örnek: Devre başı yıllık %18 faiz oranı ile alınan bir ürün 10 000 ₺ dir. 2 ay erteleme ile her ay 1 100,60 ₺ ödenerek kaç taksit tutarı ile ödenir?

Çözüm: $R = 10\,000$ ₺, $a = 1\,100{,}60$, $g = 2$, $n = \frac{0{,}18}{12} = 0{,}015$

$$t = \frac{\log a\cdot(1+n) - \log[a\cdot(1+n) - R\cdot(1+n)^g\cdot n]}{\log(1+n)}$$

$$t = \frac{\log 10\,000(1+0{,}015) - \log[1\,100{,}60(1+0{,}015) - 10\,000(1+0{,}015)^2\cdot 0{,}015]}{\log(1+0{,}015)}$$

$t = 10$ ay

Gecikme Süresinin Hesaplanması

3.11. Sonuç: Devre başı gecikmiş taksitlerde gecikme süresi;

$$g = \frac{\log\{a\cdot(1+n)\cdot[(1+n)^t-1]\} - \log[R\cdot(1+n)^t\cdot n]}{\log(1+n)}$$

denklemi ile hesaplanır. Gerçekten;

$$R = a \cdot (1+n) \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^{t+g} \cdot n}$$

$$R \cdot (1+n)^t \cdot (1+n)^g \cdot n = a \cdot (1+n)[(1+n)^t - 1]$$

$$(1+n)^g = \frac{a \cdot (1+n)[(1+n)^t - 1]}{R \cdot (1+n)^t \cdot n}$$

$$\log(1+n)^g = \log \frac{a \cdot (1+n)[(1+n)^t - 1]}{R \cdot (1+n)^t \cdot n}$$

$$g \cdot \log(1+n) = \log\{a \cdot (1+n)[(1+n)^t - 1]\} - \log\{R \cdot (1+n)^t \cdot n\}$$

$$g = \frac{\log\{a \cdot (1+n) \cdot [(1+n)^t - 1]\} - \log[R \cdot (1+n)^t \cdot n]}{\log(1+n)}$$

olur.

Örnek: %25 faiz oranı ile bir bankaya bugün yatırılan 6 000 ₺ bir süre sonra başlayan 2 000 ₺ lik 5 yıl da taksitle geri alınmak istenmektedir. Gecikme süresini bulunuz.

Çözüm: $R = 6\,000$ ₺, $a = 2\,000$ ₺, $n = 0{,}25$, $t = 5$ ₺

$$g = \frac{\log\{a \cdot (1+n) \cdot [(1+n)^t - 1]\} - \log[R \cdot (1+n)^t \cdot n]}{\log(1+n)}$$

$$g = \frac{\log\{2\,000(1+0{,}25) \cdot [(1+0{,}25)^5 - 1]\} - \log[6\,000 \cdot (1+0{,}25)^t \cdot 0{,}25]}{\log(1+0{,}25)}$$

$g = 0{,}51$ yıl $\approx$ 6 ay

DEVRE SONU ÇABUKLAŞTIRILMIŞ TAKSİTLENDİRME (TAKSİT SAYISINI AZALTMA)

3.2. Aksiyom: Taksitlerin peşin değeri, taksitler yatırılmaya veya alınmaya başlandıktan bir süre sonra ödenmesi gereken yatırılıyor veya alınıyorsa bu taksitlere çabuklaştırılmış taksitler denir. Çabuklaştırılmış taksitlerde, çabuklaştırma süresi c ile gösterirsek,

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^{t-c} \cdot n}$$

biçimindedir. (Burada c, erken ödeme devre sayısıdır)

Örnek: 12 ay taksitle ödenecek olan bir mobilya %15 faiz oranı ile 8 taksitle her taksit 500 ₺ olarak ödenmek istendiğinde toplam ödenecek miktar kaç lira olmalıdır.

Çözüm: $a = 500$ ₺, $t = 12$ ay, $c = 12 - 8 = 4$ ay, $n = \frac{0,15}{12} = 0,0125$ ₺

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^{t}-1}{(1+n)^{t-c} \cdot n}$$
$$R = 500 \cdot \frac{(1+0,0125)^{12}-1}{(1+0,0125)^{12-4} \cdot 0,0125}$$
$$R = 5\ 821,88 \text{ ₺}$$

Taksit Tutarının Hesaplanması

3.12. Sonuç: Çabuklaştırılmış taksitlerle devre sonlarında yapılan yatırım veya ödemelerin taksit tutarı;
$$a = R \cdot \frac{(1+n)^{t-c} \cdot n}{(1+n)^{t}-1}$$
biçimindedir.

Örnek: 24 ayda 18 000 ₺ ödenecek miktar 18 ayda %12 faiz oranı ile ödenmek istendiğinde taksit tutarı ne olmalıdır?

Çözüm: $R = 18\ 000$ ₺, $t = 24$ ay, $c = 24 - 18 = 6$ ay, $n = \frac{0,12}{12} = 0,01$ ₺

$$a = R \cdot \frac{(1+n)^{t-c} \cdot n}{(1+n)^{t}-1}$$
$$a = 18\ 000 \cdot \frac{(1+0,01)^{24-6} \cdot 0,01}{(1+0,01)^{24}-1}$$

$$a = 798,22 \text{ ₺}$$

Taksit Sayının Hesaplanması

3.13. Sonuç: Çabuklaştırılmış taksitlerle devre sonlarında yapıla yatırım veya ödemelerin taksit miktarı olan;
$$t = \frac{\log a - \log\left[a - \frac{R \cdot n}{(1+n)^{c}}\right]}{\log(1+n)}$$
denklemi ile hesaplanır. Gerçekten;
$$R = a \cdot \frac{(1+n)^{t}-1}{(1+n)^{t-c} \cdot n}$$
denklemi kullanılarak;
$$R = a \cdot \frac{(1+n)^{t}-1}{(1+n)^{t} \cdot n} \cdot (1+n)^{c}$$

$$R \cdot (1+n)^t \cdot n = a \cdot [(1+n)^t - 1] \cdot (1+n)^c$$

$$R \cdot (1+n)^t \cdot n = a \cdot (1+n)^c \cdot (1+n)^t - a \cdot (1+n)^c$$

$$(1+n)^t \cdot [R \cdot n - a \cdot (1+n)^c] = -a \cdot (1+n)^c$$

$$(1+n)^t \left[\frac{R \cdot n}{(1+n)^c} - a\right] = -a$$

$$(1+n)^t = \frac{a}{a - \frac{R \cdot n}{(1+n)^c}}$$

$$\log(1+n)^t = \log \frac{a}{a - \frac{R \cdot n}{(1+n)^c}}$$

$$t \cdot \log(1+n) = \log a - \log\left[a - \frac{R \cdot n}{(1+n)^c}\right]$$

$$t = \frac{\log a - \log\left[a - \frac{R \cdot n}{(1+n)^c}\right]}{\log(1+n)}$$

bulunur.

Örnek: Aylık 1 000 ₺ taksitlerle ödenen bir para 6 ay erkenden % 24 faizle 25 222 ₺ olarak ödenerek biteceği bilinmektedir. İlk durumdaki taksit sayısını bulunuz.

Çözüm: R = 25 222 ₺, a = 1 000 ₺, c = 6 ay, n = 0,02

$$t = \frac{\log 1000 - \log\left[1000 - \frac{25222.0{,}02}{(1+0{,}02)^{12}}\right]}{\log(1+0{,}02)}$$

t = 30 ay

Çabuklaştırılma Süresinin Hesaplanması

3.14. Sonuç: Çabuklaştırılmış taksitlerle devre sonlarında yapılan yatırım veya ödemelerin taksit miktarı olan;

$$c = \frac{\log[R \cdot n \cdot (1+n)^t - \log[a \cdot (1+n)^t - a]}{\log(1+n)}$$

çabuklaştırma süresi olarak elde edilir. Gerçekten;

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^{t-c} \cdot n}$$

denklemi kullanılarak;

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^t \cdot n} \cdot (1+n)^c$$

$$R \cdot (1+n)^t \cdot n = a \cdot [(1+n)^t - 1] \cdot (1+n)^c$$

$$(1+n)^c = \frac{R \cdot (1+n)^t \cdot n}{a \cdot [(1+n)^t - 1]}$$

$$\log(1+n)^c = \log\left[\frac{R \cdot (1+n)^t \cdot n}{a \cdot [(1+n)^t - 1]}\right]$$

$$c \cdot \log(1+n) = \log[R \cdot (1+n)^t \cdot n] - \log[a \cdot [(1+n)^t - 1]]$$

$$c = \frac{\log[R \cdot n \cdot (1+n)^t - \log[a \cdot (1+n)^t - a]}{\log(1+n)}$$

olur.

Örnek: 18 ayda ödenmesi gereken 27 000 ₺, %18 faizle 25 705,58 ₺ olarak ödenirse, kaç ay erkenden biter.

Çözüm: $a = \frac{27\,000}{18} = 1\,500$ ₺, $R = 25\,70558$ ₺, $t = 18$ ay, $n = \frac{0{,}18}{12} = 0{,}015$ ₺

$$c = \frac{\log[R \cdot n \cdot (1+n)^t - \log[a \cdot (1+n)^t - a]}{\log(1+n)}$$

$$c = \frac{\log[25\,705{,}58 \cdot 0{,}015 \cdot (1+0{,}015)^{18} - \log[1\,500 \cdot (1+0{,}015)^{18} - 1\,500]}{\log(1+0{,}015)}$$

$c = 6$ ay.

DEVRE BAŞI ÇABUKLAŞTIRILMIŞ TAKSİTLENDİRME

3.15. Sonuç: Taksitlerin devre başı çabuklaştırılması,

$$R = a \cdot (1+n) \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^{t-c} \cdot n}$$

biçimindedir.

Örnek: 18 ay taksitle her taksit 1 200 ₺ olan bir mobilya %12 faiz oranı ile 12 taksitle devre başı taksitlerle ödenmek istendiğinde toplam ödenecek miktar kaç lira olmalıdır.

Çözüm: $a = 1\,200$ ₺, $t = 18$ ay, $g = 18 - 12 = 6$ ay, $n = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01$

$$R = a \cdot (1+n) \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^{t-c} \cdot n}$$

$$R = 1\,200 \cdot (1 + 0{,}01) \cdot \frac{(1+0{,}01)^{18} - 1}{(1+0{,}01)^{18-6} \cdot 0{,}01}$$

$$R = 1\,200 \cdot (1 + 0{,}01) \cdot \frac{(1+0{,}01)^{18} - 1}{(1+0{,}01)^{18-6} \cdot 0{,}01}$$

$$R = 21\,097{,}40 \text{ ₺}$$

Taksit Tutarının Hesaplanması

3.16. Sonuç: Çabuklaştırılmış taksitlerle devre başlarında yapılan yatırım veya ödemelerin taksit tutarı;

$$a = R \cdot \frac{(1+n)^{t-c} \cdot n}{(1+n)[(1+n)^{t} - 1]}$$

biçimindedir.

Örnek: 36 ayda 27 000 ₺ ödenecek miktar 24 ayda %24 faiz oranı ile ödenmek istendiğinde taksit tutarı ne olmalıdır?

Çözüm: $R = 27\,000$ ₺, $t = 36$ ay, $c = 36 - 24 = 12$ ay, $n = 0{,}02$

$$a = R \cdot \frac{(1+n)^{t-c} \cdot n}{(1+n)[(1+n)^{t} - 1]}$$

$$a = 27\,000 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{36-12} \cdot 0{,}02}{(1+0{,}02)[(1+0{,}02)^{36} - 1}$$

$$a = 818{,}86 \text{ ₺}$$

Taksit Sayının Hesaplanması

3.17. Sonuç: Çabuklaştırılmış taksitlerle devre başlarında yapılan yatırım veya ödemelerin taksit miktarı;

$$t = \frac{\log[a \cdot (1+n)^{c+1}] - \log[a \cdot (1+n)^{c+1} - R \cdot n]}{\log(1+n)}$$

denklemi ile hesaplanır. Gerçekten;

$$R = a \cdot (1 + n) \cdot \frac{(1+n)^{t} - 1}{(1+n)^{t-c} \cdot n}$$

denklemi kullanılarak;

$$R = a \cdot (1 + n) \cdot \frac{(1+n)^{t} - 1}{(1+n)^{t} \cdot n} \cdot (1 + n)^{c}$$

$$R \cdot (1 + n)^{t} \cdot n = a \cdot (1 + n)^{c+1} \cdot [(1 + n)^{t} - 1]$$

$$R \cdot (1+n)^t \cdot n = a \cdot (1+n)^{c+1} \cdot (1+n)^t - a \cdot (1+n)^{c+1}$$

$$(1+n)^t \cdot [R \cdot n - a \cdot (1+n)^{c+1}] = -a \cdot (1+n)^{c+1}$$

$$(1+n)^t = \frac{a \cdot (1+n)^{c+1}}{a \cdot (1+n)^{c+1} - R \cdot n}$$

$$\log(1+n)^t = \log\left[\frac{a \cdot (1+n)^{c+1}}{a \cdot (1+n)^{c+1} - R \cdot n}\right]$$

$$t \cdot \log(1+n) = \log[a \cdot (1+n)^{c+1}] - \log[a \cdot (1+n)^{c+1} - R \cdot n]$$

$$t = \frac{\log[a \cdot (1+n)^{c+1}] - \log[a \cdot (1+n)^{c+1} - R \cdot n]}{\log(1+n)}$$

bulunur.

Örnek: Aylık 800 ₺ taksitlerle ödenen bir para 6 ay erkenden devre başı %12 faizle 11 153,38 ₺ olarak ödenerek biteceği bilinmektedir. İlk durumdaki taksit sayısını bulunuz.

Çözüm: R = 11 153,38 ₺, a = 800 ₺, c = 6 ay, n = 0,01

$$t = \frac{\log[a \cdot (1+n)^{c+1}] - \log[a \cdot (1+n)^{c+1} - R \cdot n]}{\log(1+n)}$$

$$t = \frac{\log[800 \cdot (1+0{,}01)^{6+1}] - \log[800 \cdot (1+0{,}01)^{6+1} - 11\,153{,}38 \cdot 0{,}01]}{\log(1+0{,}01)}$$

$$t = 14 \text{ ay}$$

Çabuklaştırılma Süresinin Hesaplanması

3.18. Sonuç: Çabuklaştırılmış taksitlerle devre başlarında yapılan yatırım veya ödemelerin taksit miktarı;

$$c = \frac{\log[R \cdot (1+n)^t \cdot n] - \log\{a \cdot (1+n) \cdot [(1+n)^t - 1]\}}{\log(1+n)}$$

çabuklaştırma süresi olarak elde edilir. Gerçekten;

$$R = a \cdot (1+n) \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^{t-c} \cdot n}$$

denklemi kullanılarak;

$$R = a \cdot (1+n) \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^t \cdot n} \cdot (1+n)^c$$

$$R \cdot (1+n)^t \cdot n = a \cdot (1+n) \cdot [(1+n)^t - 1] \cdot (1+n)^c$$

$$(1+n)^c = \frac{R \cdot (1+n)^t \cdot n}{a \cdot (1+n) \cdot [(1+n)^t - 1]}$$

$$\log(1+n)^c = \log\left[\frac{R \cdot (1+n)^t \cdot n}{a \cdot (1+n) \cdot [(1+n)^t - 1]}\right]$$

$$c \cdot \log(1+n) = \log[R \cdot (1+n)^t \cdot n] - \log\{a \cdot (1+n) \cdot [(1+n)^t - 1]\}$$

$$c = \frac{\log[R \cdot (1+n)^t \cdot n] - \log\{a \cdot (1+n) \cdot [(1+n)^t - 1]\}}{\log(1+n)}$$

olur.

Örnek: 22 ayda ödenmesi gereken aylık 1 000 ₺ lik bir borç, devre başı %12 faizle 20 663,26 ₺ olarak kaç ay erkenden biter.

Çözüm: $a = 1\,000$ ₺, $R = 20\,663{,}26$ ₺, $t = 22$ ay, $n = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01$

$$c = \frac{\log[R \cdot (1+n)^t \cdot n] - \log\{a \cdot (1+n) \cdot [(1+n)^t - 1]\}}{\log(1+n)}$$

$$c = \frac{\log[20\,663{,}26 \cdot (1+0{,}01)^{22} \cdot 0{,}01] - \log\{1\,000 \cdot (1+0{,}01) \cdot [(1+0{,}01)^{22} - 1]\}}{\log(1+0{,}01)}$$

$c = 4$ ay

DEVRE SONU SÜREKLİ TAKSİTLENDİRME

Taksit sayısının sınırlanmadığı sürekli olarak ödenmesi söz konusu olan taksitlerdir. Devre sayısının sınırsız olduğu bu taksitlere sürekli taksitler denir.

Devre sonu normal taksit denkleminde devre sayısı sonsuz (∞) olarak alındığında devre sonu sürekli denklemi şu şekilde bulunur.

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^t \cdot n}$$

$$R = \frac{a}{n}\left[1 - \frac{1}{(1+n)^t}\right]$$

$$R = \lim_{t \to \infty} \frac{a}{n}\left[1 - \frac{1}{(1+n)^t}\right]$$

$$R = \frac{a}{n}$$

Örnek: Sürekli olarak her yıl 1 200 ₺ gelir elde etmek isteyen bir şahıs %10 faiz uygulanan bir bankaya bugün ne kadar yatırılmalıdır.

Çözüm: $a = 1\,200 \text{ ₺}, n = 0{,}10$

$$R = \frac{a}{n} = \frac{1\,200}{0{,}1} = 12\,000 \text{ ₺ //}$$

Devre sonu sürekli taksitlerde taksit tutarının hesaplanması ve faiz oranının hesaplanması sırasıyla

$$a = R \cdot n \text{ ve } n = \frac{a}{R}$$

biçimindedir.

Örnek: %15 faiz oranıyla bankaya yatırılan 3 200 ₺ devre sonu sürekli aynı gelir elde edebilmek için taksit tutarı ne olmalıdır?

Çözüm: $R = 3\,200 \text{ ₺}, n = 0{,}15$

$$a = 3\,200 \cdot 0{,}15 = 480 \text{ ₺}$$

Örnek: 10 000 ₺ ile devre sonu 2 000 ₺ faiz getirisi sağlamak için devre de faiz oranı ne olmalıdır?

Çözüm: $R = 10\,000 \text{ ₺}, a = 2\,000 \text{ ₺},$

$$n = \frac{a}{R} = \frac{2\,000}{10\,000} = 0{,}20$$

%20

DEVRE BAŞI SÜREKLİ TAKSİTLENDİRME

Devre başı normal taksit denkleminde devre sayısı sonsuz (∞) olarak alındığında devre sonu sürekli denklemi şu şekilde bulunur.

$$R = a \cdot (1+n) \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^t \cdot n}$$

$$R = a \cdot \frac{(1+n)}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+n)^t}\right]$$

$$R = \lim_{t \to \infty} \frac{a \cdot (1+n)}{n} \left[1 - \frac{1}{(1+n)^t}\right]$$

$$R = a \cdot \frac{(1+n)}{n}$$

Örnek: Sürekli olarak her yıl 6 300 ₺ gelir elde etmek isteyen bir şahıs devre başı %14 faiz uygulanan bir bankaya bugün ne kadar yatırılmalıdır.

Çözüm: $a = 6\ 300\ ₺, n = 0{,}14$

$$R = a \cdot \frac{(1+n)}{n}$$

$$R = 6\ 300 \cdot \frac{(1+0{,}14)}{0{,}14} = 51\ 300\ ₺//$$

Devre başı sürekli taksitlerde taksit tutarının hesaplanması ve faiz oranının hesaplanması sırasıyla

$$a = \frac{R \cdot n}{1+n} \text{ ve } n = \frac{a}{R-a}$$

biçimindedir.

Örnek: %17 faiz oranıyla bankaya yatırılan 30 000 ₺ devre başı sürekli gelir elde edebilmek için taksit tutarı ne olmalıdır?

Çözüm: $R = 30\ 000\ ₺, n = 0{,}17$

$$a = \frac{R \cdot n}{1+n} = \frac{30\ 000 \cdot 0{,}17}{1+0{,}17} = 4\ 359\ ₺$$

Örnek: 100 000 ₺ ile devre başı 15 000 ₺ faiz getirisi sağlamak için devre de faiz oranı ne olmalıdır?

Çözüm: $R = 100\ 000\ ₺, a = 15\ 000\ ₺,$

$$n = \frac{a}{R-a} = \frac{15\ 000}{100\ 000 - 15\ 000} = 0{,}1764$$

%17,64

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Her dönem sonunda bir bankaya ₺ 5 000 yatırılıyor. Dönemsel faiz oranı %2 ise dördüncü dönem sonunda biriken para ne olur?

Çözüm: Normal taksitlendirme olup, taksitlerin anüite dönemi sonundaki (gelecekteki) değerleri:

$$S = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{n}$$

$$= 5\ 000 \cdot \frac{(1+0{,}02)^4 - 1}{0{,}02}$$

$$= ₺\ 20\ 608{,}04$$

olur.

2. Bir kişi on ay boyunca her ay sonunda bir bankaya ₺ 720 yatırmaktadır. Faiz oranı %1,8 ise onuncu ay sonunda ne kadar parası birikmiş olur?

Çözüm:

$$S = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{n}$$

$$= 720 \cdot \frac{(1+0{,}018)^{10} - 1}{0{,}018}$$

$$= ₺\ 7\ 812{,}09$$

olur.

3. 8 ay sonra ödenmesi gereken ₺ 24 000'lik borç her ay sonunda ödenecek eşit taksitlerle kapatılmak istenirse, aylık %1,6 faiz oranı üzerinden aylık taksitler kaç lira olur?

Çözüm:

$$a = \frac{S \cdot n}{(1+n)^t - 1}$$

$$= \frac{12\ 000 \cdot 0{,}016}{(1+0{,}016)^t - 1}$$

$$= ₺\ 2836{,}00$$

olur.

4. ₺ 15 000'lik bir ürünü almak isteyen bir kişi bu parayı biriktirmek için her ay bir kenara ₺ 1 250'yi aylık 1,8 faiz veren bir bankaya kaç ay boyunca yatırmalıdır?

Çözüm:

$$t = \frac{\log\left[\frac{S \cdot n}{a} + 1\right]}{\log(1+n)}$$

$$= \frac{\log\left[\frac{15\ 000 \cdot 0{,}018}{1\ 250} + 1\right]}{\log(1+0{,}018)}$$

$$\cong 11$$

5. Aylık kirası ₺ 2 000 olan bir evin kirası her ay başında değil de yıl sonunda topluca ödenecek olursa ve aylık faiz oranı %1,2 ise yıl sonunda toplu olarak hangi tutar ödenmelidir?

Çözüm: Kira devre başı uygulama olduğundan,

$$S = a \cdot (1+n) \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{n}$$

$$= 2\ 000 \cdot (1 + 0{,}012) \cdot \frac{(1+0{,}012)^{12} - 1}{0{,}012}$$

$$= ₺\ 25\ 956{,}89$$

bulunur.

6. Her dönem sonunda 5 dönem boyunca yatırılan ₺ 500'nin %4 devre faiz oranı ile bugünkü değeri nedir?

Çözüm:

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^t \cdot n}$$

$$= 500 \cdot \frac{(1+0{,}04)^5 - 1}{(1+0{,}04)^5 \cdot 0{,}04}$$

$$= ₺\ 2\ 225{,}91$$

7. Bir kişi bir bankadan aldığı vadesine 28 ay kalmış, aylık ₺ 2 580 ödemeli konut kredisini bugün toptan ödeyip kapatmak istemektedir. Kredinin aylık faizi %0,9 ise bu kişinin bankaya bugün ödeyeceği miktar nedir?

Çözüm: İstenen sayı, paranın bugünkü değeridir.

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^t \cdot n}$$

$$= 2\ 580 \cdot \frac{(1+0{,}009)^{28} - 1}{(1+0{,}009)^{28} \cdot 0{,}009}$$

$$= ₺\ 63\ 605{,}21$$

8. Bir baba üniversiteye gidecek çocuğunun okul masraflarını karşılamak amacıyla 4 yıl süreyle ve her ayın sonunda ₺ 1 200 almasını istemektedir. Aylık faiz oranı %2 olduğuna göre; baba bugün bankaya ne kadarlık bir para yatırmalıdır?

Çözüm: $t = 4 \cdot 12 = 48$ ay, $a = ₺\ 1\ 200$, $n = \%2 = 0{,}02$

Paranın bugünkü değeri

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^t - 1}{(1+n)^t \cdot n}$$

$$= 1\ 200 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{48} - 1}{(1+0{,}02)^{48} \cdot 0{,}02}$$

$$= ₺\ 36\ 807{,}74$$

Toplam yatırılan ₺ 36 87,74 olmasına rağmen çocuk 48 ay, ayda ₺ 1 200 alarak toplam ₺ 57 600 alacaktır.

9. Bir banka hayvancılık veya su ürünleri yapacak çiftçilere ilk 3 yıl ödeme yapmaksızın sonraki 4 yılda her 3 ayda bir taksitlere toplam 7 yılda geri ödenecek biçimde kredi vermektedir. Yıllık faiz oranı %12 ise ₺ 400 000 kredi alacak bir kişinin 3 ayda bir ödeyeceği taksitler kaç lira olur?

Çözüm: $t = 4 \cdot 4 = 16$ ay, $g = 3 \cdot 4 = 12$, $R = ₺\ 400\ 000$, $n = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03$

$$a = R \cdot \frac{(1+n)^{t+g} \cdot n}{(1+n)^t - 1}$$

$$= 400\ 000 \cdot \frac{(1+0{,}03)^{16+12} \cdot 0{,}03}{(1+0{,}03)^{16}-1}$$
$$= ₺\ 45\ 402{,}41$$

10. 2 yıl sonra başlamak üzere her ay sonunda ₺ 1 500'lik taksitleri 4 yıl süreyle tahsil edebilmek için %0,9 aylık faiz veren bir bankaya bugün kaç lira yatırılmalıdır?

Çözüm: $t = 4 \cdot 12 = 48$ ay, $g = 2 \cdot 12 = 24$, $R = ₺\ 400\ 000$, $n = 0{,}09$

$$R = a \cdot \frac{(1+n)^{t}-1}{(1+n)^{t+g} \cdot n}$$
$$= 1\ 500 \frac{(1+0{,}009)^{48}-1}{(1+0{,}009)^{48+24} \cdot 0{,}009}$$
$$= ₺\ 46\ 984{,}14$$

11. ₺ 400 000 emekli ikramiyesi alan bir şahıs, yıllık %24 faiz veren bir bankaya yatırmıştır. Bu şahıs, faiz olarak her ayın başında kaç lira olarak taksitleri alabilecektir?

Çözüm: $R = ₺\ 400\ 000$, $n = 0{,}02$
$$a = R \cdot \frac{n}{1+n}$$
$$= 400\ 00 \cdot \frac{0{,}02}{1+0{,}02}$$
$$= ₺\ 7\ 843{,}14$$

12. Her ay sonunda ₺ 6 000 almayı düşünen bir kimse, %36 faiz veren bir bankaya bugün kaç lira yatırmalıdır?

Çözüm: $a = ₺\ 6\ 000$, $n = \frac{0{,}36}{12} = 0{,}03$

$$R = \frac{a}{n} = \frac{6\ 000}{0{,}03} = ₺\ 200\ 000$$

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Nurhan AYDIN, Finans Matematiği, Detay Yayıncılık, Ankara, 2016.

2. Doç. Dr. Zehra BAŞKAYA, Yrd. Doç. Dr. Alper DEĞER, Finans Matematiği, Ekin Kitabevi Yayınları, Bursa, 2012.

3. Turhan KORKMAZ, Mehmet PEKKAYA, Excel Uygulamalı Finans Matematiği, Ekin Basım Yayın Dağıtım, Bursa, 2012.

4. Doç. Dr. Metin COŞKUN, Yrd. Doç. Dr. Murat ERTUĞRUL, Finans Matematiği, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 2769, Eskişehir, 2013.

5. Doç. Dr. Furkan BAŞER, Ankara Üniversitesi Uygulamalı Bilimler Fakültesi, Finans Matematiği Ders Notları, Ankara, 2021.

6. Prof. Dr. Osman YOZGAT, Finans Matematiği, Marmara Üniversitesi Yayınları: 436, İstanbul, 1986.