1. BÖLÜM
KÜMELER CEBİRİ

KÜMELER AİLESİ

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ kümelerim göz önüne alalım. Bunların birleşimi ve arakesitleri sırasıyla

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

ve

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

ile gösterilir.

1.1. Tanım: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ kümelerinin birleşim kümesi

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{x : 1 \leq k \leq n, \exists\ k \text{ için } x \in A_k\}$$

şeklindedir.

1.2. Tanım: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin arakesit kümesi

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{x : 1 \leq k \leq n, \forall\ k \text{ için } x \in A_k\}$$

şeklindedir.

1.1. Teorem (De'Morgan Kuralı): Kümelerin birleşimlerinin ve arakesitlerinin tümleyeni,

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^t = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^t \quad \text{ve} \quad \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^t = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^t$$

biçimindedir.

Bu teoremin De'Morgan kuralı uygulanacağından ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

1.3. Tanım: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ kümelerinin $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ kümesine kümeler ailesi denir. Bu aile,

$$\{A_k\}_{k\in\{1,2,\cdots,n\}}$$

biçiminde de yazılır. $\{1, 2, \cdots, n\}$ kümesine damgalayan küme, A_k, ye de k ile damgalanmış küme, k'ye de A_k'nin damgası denir. Damgalayan küme $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ise kümeler ailesi $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ biçiminde gösterilir. Damgalayan küme herhangi bir D kümesi ise kümeler ailesi $\{A_k\}_{k\in D}$ biçiminde yazılır.

1.1. Not: Kümeler ailesi $\{A_k\}_{k\in D}$ biçiminde verilmiş ise bu ailenin birleşimi ve arakesiti karşılıklı olarak,

$$\bigcup_{k\in D} A_k = \{x : \exists k \in D, x \in A_k\}$$

$$\bigcap_{k\in D} A_k = \{x : \forall k \in D, x \in A_k\}$$

biçiminde gösterilmelidir.

Örnek: $A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

...

$A_n\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

kümeleri verildiğine göre;

a) $A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap \cdots \cap A_n$ kümesini bulunuz.

b) $A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup \cdots \cup A_n$ kümesini bulunuz.

Çözüm: Verilen kümeler incelendiğinde, $A_5 \subset A_6 \subset A_7 \subset \cdots \subset A_n$ olduğu görülür. Buna göre;

a) $A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap \cdots \cap A_n = A_5$

b) $A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup \cdots \cup A_n = A_n$

dir.

Örnek: $N_1=\{1, 2, 3, 4, ...\}$

$N_2=\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$N_3=\{3, 4, 5, 6, ...\}$

$N_4=\{4, 5, 6, 7, ...\}$

...

olduğuna göre, $\bigcup_{k\in N_k} N_k$ kümesini belirtiniz.

Çözüm: Verilen kümeler incelendiğinde, $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \cdots$ olduğu hemen görülür. Buna göre, $\bigcup_{k\in N_k} N_k = N_1$ dir.

1.2. Teorem: (A_n) bir X kümesinin alt kümelerinin bir dizisi olsun. $E_0 = \varnothing$ olmak üzere

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad F_n = A_n \setminus E_{n-1}$$

şeklinde tanımlanan (E_n) ve (F_n) dizileri veriliyor.

(a) (E_n) dizisi artan dizidir
(b) (F_n) dizisi ayrık dizidir
(c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

dir.

İspat: a) Her n için;

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup A_{n+1} \\ &= E_n \cup A_{n+1} \end{aligned}$$

olduğundan $E_n \subset E_{n+1}$ yazılır ki, bu (E_n) dizisinin artan dizi olduğunu gösterir.

b) $m, n \in \mathbb{N}, (m \neq n)$ olmak üzere $F_n \cap F_m = \varnothing$ olduğunu göstermeliyiz. İki durum söz konusudur.

i) $m > n$ olsun. Bu durumda $m - 1 \geq n$ olur.

$$F_n = A_n \setminus E_{n-1}, F_m = A_m \setminus E_{m-1}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} F_n \cap F_m &= \left\{A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)^t\right\} \cap \left\{A_m \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right)^t\right\} \\ &= \left(A_n \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^t\right) \cap \left(A_m \cap \bigcap_{k=1}^{m-1} A_k^t\right) \\ &= \left(A_n \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^t\right) \cap \left(A_m \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^t \cap A_n^t \cap \bigcap_{k=n+1}^{m-1} A_k^t\right) \end{aligned}$$

$= \varnothing$

ii) $n > m$ olsun. Bu durumda $n-1 \geq m \geq m-1$ olur.

$$F_n \cap F_m = \left\{A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)^t\right\} \cap \left\{A_m \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right)^t\right\}$$
$$= \left(A_n \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^t\right) \cap \left(A_m \cap \bigcap_{k=1}^{m-1} A_k^t\right)$$
$$= \left(A_n \cap \bigcap_{k=1}^{m-1} A_k^t \cap A_m^t \cap \bigcap_{k=m+1}^{n-1} A_k^t\right) \cap \left(A_m \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^t\right)$$
$$= \varnothing$$

bulunur.

c) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$
$$= A_1 \cup (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cdots$$
$$= \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

bulunur.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus E_{n-1})$$
$$= (A_1 \setminus E_0) \cup (A_2 \setminus E_1) \cup (A_3 \setminus E_2) \cup \cdots$$
$$= A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup [A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)] \cup \cdots$$
$$= (A_1 \cup A_2) \cup [A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)] \cup \cdots$$
$$= (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup \cdots$$
$$= \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

bulunur.

1.3. Teorem: $(A_i)_{i\in I}$, T kümesinin alt kümeler ailesi olsun.

i) $$\bigcup_{i\in I} (T - A_i) = T - \bigcap_{i\in I} A_i$$

ii) $$\bigcap_{i\in I} (T - A_i) = T - \bigcup_{i\in I} A_i$$

İspat: i) $x\in\bigcup_{i\in I}(T-A_i)$ olsun. En az bir $i \in I$ için $x \in T - A_i$ dir. Böyle en az bir $i \in I$ için $x \notin A_i$ dir. O zaman $\forall\, i \in I, x \in A_i$ dir. Dolayısıyla $x\notin\bigcap_{i\in I}A_i$ dir. Sonuç olarak $x\in T-\bigcap_{i\in I}A_i$ elde ederiz. Yani $\bigcup_{i\in I}(T-A_i)\subset T-\bigcap_{i\in I}A_i$ dir.

Tersine, $x\in T-\bigcap_{i\in I}A_i$ alalım. O zaman bir $i \in I$ vardır öyleki bu $i \in I$ için $x \notin A_i$ dir. Dolayısıyla bir $i \in I$ için $x \in T - A_i$ dir. O zaman $x\in\bigcup_{i\in I}(T-A_i)$ dir. Yani $T-\bigcap_{i\in I}A_i\subset\bigcup_{i\in I}(T-A_i)$ dir. Sonuç olarak $\bigcup_{i\in I}(T-A_i)=T-\bigcap_{i\in I}A_i$ dir.

Benzer şekilde (ii) ispatlanır.

1.4. Teorem: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için ve $A_i \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,

i) $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f(A_i)$

ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(A_i)$

iii) $f(f^{-1}(B)) = B \setminus f^{-1}(B), B \subset \mathbb{R}$

dir.

İspat: i) $y\in f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\Rightarrow y=f(x)$ olacak şekilde bir $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ vardır. Buradan,

$$x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \Rightarrow \exists\, n_0 \ni x \in A_{n_0}$$
$$\Rightarrow f(x) \in f(A_{n_0})$$
$$\Rightarrow f(x)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}f(A_i)$$

eşitliğinden $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}f(A_i)$ dir. Tersine,

$$y\in\bigcup_{i=1}^{\infty}f(A_i)\Rightarrow \exists\, n_0 \ni x \in f(A_{n_0})$$
$$\Rightarrow y = f(x), \exists x \in A_{n_0}$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\Rightarrow f(x) \in f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

eşitliğinden $\bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ dir.

Bu iki alt küme bağıntısından $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i)$ eşitliği elde edilir.

ii) Kolayca görüleceği gibi

$y \in f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \Rightarrow y \in f(x)$ olacak şekilde $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ vardır.

$$\Rightarrow x \in A_i, \forall i \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow f(x) \in f(A_i), \forall i \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow f(x) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i)$$
$$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$$

dir.

Bu eşitsizliğin tersi yoktur. Tersinin sağlanmadığını göstermek için bir örnek vermek yeterlidir. Bunun için $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ şeklinde verilmiş olsun. $A_1 = \{-1, 0\}$ ve $A_2 = \{0, 1\}$ diyelim. $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ olup $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$ dır. Oysa,

$$f(A_1) = f(\{-1, 0\}) = \{0, 1\} \text{ ve } f(A_2) = f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$$

dir. Buna göre, $f(A_1) \cap f(A_2) = \{0, 1\}$ olup $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ dir. Bu sonuç da, eşitliğin sağlanmadığını göstermek için yeterlidir. Sonuç olarak $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ dir.

iii) $B \subset \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y \in f(x)$ olacak şekilde $x \in f^{-1}(B), x \in \mathbb{R}$ vardır.

$$\Rightarrow f(x) \in B, x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow y \in B \cap f(\mathbb{R})$$
$$\Rightarrow f(f^{-1}(B) \subset B \cap f(\mathbb{R})$$

dır. Diğer taraftan,

$$y \in\in B \cap f(\mathbb{R}) \Rightarrow y \in B \text{ ve } y \in f(\mathbb{R})$$
$$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} \ni y = f(x) \text{ ve } f(x) \in B, x \in f^{-1}(B)$$
$$\Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$$

$$\Rightarrow B \cap f(\mathbb{R}) \subset f(f^{-1}(B))$$

lup, bu iki altküme bağıntısından $B \cap f(\mathbb{R}) = f(f^{-1}(B))$ eşitliği elde edilir.

1.5. Teorem: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için ve $B_i \subset \mathbb{R}$ olmak üzere;

i) $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)$

ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)$

iii) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), A, B \subset \mathbb{R}$

dir.

İspat: i) Her $x \in A$ için $x \in B$ ise $A \subset B$ ve her $x \in B$ için $x \in A$ ise $B \subset A$ dır. Bu iki altküme bağıntısı da geçerli ise $A = B$ dir. Buradan,

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \Rightarrow f(x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$\Rightarrow \exists\, n_0 \ni f(x) \in B_{n_0}$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_{n_0})$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)$$

olduğundan $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \Rightarrow \exists\, n_0 \ni x \in f^{-1}(B_{n_0})$$

$$\Rightarrow f(x) \in B_{n_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

olup $\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$ dir. Bu iki alt küme bağıntısından da,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu da ispatın (i) kısmını tamamlar.

ii) Benzer şekilde,

$$x\in f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)\Rightarrow f(x)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$$
$$\Rightarrow f(x)\in B_i,\forall i$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}(B_i),\forall i$$
$$\Rightarrow x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)$$

olduğundan $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)$ alt küme bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan,

$$x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)\Rightarrow x\in f^{-1}(B_i),\forall i$$
$$\Rightarrow f(x)\in B_i,\forall i$$
$$\Rightarrow f(x)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)$$

eşitliğinden $\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)\subset f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)$ alt küme bağıntısı elde edilir. Bu iki alt küme bağıntısından $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)$ eşitliği elde edilmiş olur.

iii) Öncelikle $f^{-1}(B^t)=[f^{-1}(B)]^t$ olduğunu gösterelim.

$$x\in f^{-1}(B^t)\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B)$$
$$\Leftrightarrow f(x)\notin B$$
$$\Leftrightarrow f(x)\in B^t$$
$$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B^t)$$

önermesinden açıktır. Buradan da,

$$f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A\cap B^t)$$
$$=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B^t)$$
$$=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)^t$$
$$=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$$

bulunur.

KÜMELER DİZİSİ KAVRAMI

1.4. Tanım: Değer kümesi "kümelerden" oluşan dizilere kümeler dizisi denir. A bir küme olmak üzere;

$A_n : \mathbb{N}^+ \to B$

fonksiyonları bir küme dizisidir.

Örnek: Genel terimi $A_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}\right\}$ olan küme dizisinin ilk 5 terimini bulunuz.

Çözüm: $A_n = \left(1, \left\{1, \frac{1}{2}\right\}, \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}, \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}, \cdots\right)$

Örnek: Genel terimi $A_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ olan küme dizisinde;

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1, 2, 3, \ldots, n\} = \{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \cdots = \mathbb{N}$$

ve

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{1, 2, 3, \ldots, n\} = \{1\} \cap \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} \cap \cdots = \{1\}$$

dir.

İÇ İÇE ARALIKLAR DİZİSİ

1.5. Tanım: I_n , n doğal sayısına bağlı, bir reel (gerçel) sayılar aralığını göstersin. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

i) $I_{n+1} \subset I_n$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$

oluyorsa (I_n) dizisine iç içe aralıklar dizisi denir. Burada $|I_n|$, I_n aralığının uzunluğudur.

Örnek: Genel terimi $A_n = \left[1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right]$ olan küme dizisinin ilk 5 terimini bulunuz.

Çözüm: $A_n = \left([0; 2], \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right], \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right], \left[\frac{3}{4},; \frac{5}{4},\right], \left[\frac{4}{5}; \frac{6}{5}\right], \cdots\right)$

Örnek: $I_n = \left[0;\ \frac{1}{n}\right]$ aralığı için (I_n) dizisinin iç içe aralıklar dizisi midir?

Çözüm: Bu dizi $I_1 = [0;1]$, $I_2 = \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $I_3 = \left[0;\frac{1}{3}\right]$, ..., $I_n = \left[0;\frac{1}{n}\right]$ biçimindedir. Bu dizinin özelliklerini incelersek, her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

i) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ olduğundan $I_{n+1} \subset I_n$ dir.

ii) $\lim_{n\to\infty}|I_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\right| = 0$

olduğundan (I_n) dizisinin iç içe aralıklar dizisidir.

Örnek: $I_n = \left[\frac{n-1}{n};\frac{n+1}{n}\right]$ aralığı için (I_n) dizisinin iç içe aralıklar dizisi midir?

Çözüm: Bu dizi $I_1 = [0;2]$, $I_2 = \left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$, $I_3 = \left[\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right]$, ..., $I_n = \left[\frac{n-1}{n};\frac{n+1}{n}\right]$ biçimindedir. Bu dizinin özelliklerini incelersek, her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

i) $I_n = \left[\frac{n-1}{n};\frac{n+1}{n}\right]$ ve $I_{n+1} = \left[\frac{n}{n+1};\frac{n+2}{n+1}\right]$

olacağından $\frac{n-1}{n} \geq \frac{n}{n+1}$ ve $\frac{n+1}{n} \leq \frac{n+2}{n+1}$ olduğundan $I_{n+1} \subset I_n$ dir.

ii) $\lim_{n\to\infty}|I_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{n}\right| = 0$

olduğundan (I_n) dizisinin iç içe aralıklar dizisidir.

Örnek: $I_n = \left(0; n - \frac{1}{2}\right)$ aralığı için (I_n) dizisinin iç içe aralıklar dizisi midir?

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$\left(0; (n+1) - \frac{1}{2}\right) \geq \left(0; n - \frac{1}{2}\right)$$

olduğu küçük bir işlemle görülür. Buna göre $I_{n+1} \not\subset I_n$ dir. Şu halde (I_n) dizisinin iç içe aralıklar dizisi değildir.

Örnek: Her $n \in \mathbb{N}^+$ için, $S_n = \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$ dizisini alalım.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = (-1,1)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \varnothing$$

KÜMELER DİZİLERİNDE LİMİT

Reel sayı dizilerindeki kavramlardan biraz farklı olarak küme dizilerinin limiti tanımlanır. Küme dizilerinde büyüklük ve küçüklük gibi kavramlar tanımlı olmadığı için alt küme kavramı kullanılır. (A_n) küme dizisini kapsayan bir çok alt küme bulunabilir. O zaman, (A_n) dizisini kapsayan alt kümelerden her biri (A_n) dizisi için bir üst sınır olarak alınabilir. Benzer şekilde (A_n) küme dizisi için alt sınırlar da yazılabilir.

S'nin alt kümelerinden oluşan bir dizi (A_n) olsun. Açıkça görüleceği gibi bütün $n \in \mathbb{N}$ ler için $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n$ dir. Buna göre $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ kümeleri her n için (A_n) dizisinin bir alt sınırı olarak alınabilir. Bu alt sınırların en büyüğü olarak bu kümelerin birleşimi alınabilir. Benzer şekilde, $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ olduğundan $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ kümeleri A_n dizisi için bir üst sınırdır. Bu üst sınırların en küçüğü de bu kümelerin arakesiti olur.

1.6. Tanım: Bir (A_n) küme dizisinde;

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

ise (A_n) küme dizisinin limit supremumu,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

ise (A_n) küme dizisinin limit infimumu denir. Buradaki en büyük alt sınır ve en küçük üst sınır için,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{w \in S : \exists\ n_0 \text{ için } w \in A_{n_0}, n > n_0$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{w \in S: \text{Sonsuz çokluktan } n \text{ için } w \in A_n\}$$

ifadeleri de kullanılabilir. $\limsup_{n\to\infty} A_n$ için bazen

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{w \in S: w \in A_n, \text{i. o.}\}$$

ifadesi de kullanılır.

1.7. Tanım: Bir (A_n) küme dizisinin limit infimumu ile limit supremumu eşit ise, (A_n) dizisinin limiti vardır denir.

Bu tanıma göre, $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ ise, (A_n) dizisi yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ dır denir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} w \in \liminf_{n\to\infty} A_n &\Rightarrow w \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\ &\Rightarrow \exists n_0 \text{ için } w \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \\ &\Rightarrow w \in A_k, k = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots \\ &\Rightarrow w \in \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k, \text{her } n_0 \\ &\Rightarrow w \in \bigcap_{n_0+1}^{\infty}\bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_n \end{aligned}$$

olduğundan $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$ dir.

Örnek: $A_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ olarak verilen (A_n) küme dizisinin limiti varsa bulalım. Bunun için dizinin limit infimumu ile limit supremumunun hesaplanması gerekir. Önce, (A_n) artan bir dizi (Her n için $A_n \subset A_{n+1}$) olduğundan $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ dir. Buradan, dizinin limit infimumu

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$$

dir. Benzer şekilde (A_n) artan olduğundan, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$ olup dizinin limit supremumu da

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$$

dir. $\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n = \mathbb{N}$ olup (A_n) dizisinin limiti vardır ve $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \mathbb{N}$ dir.

Örnek: $A_n = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$ olsun. $\lim\sup A_n$ ve $\lim\inf A_n$ ni bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty}\sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{k, k+1, k+2, ...\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{n, n+1, n+2, ...\} = \varnothing$$

$$\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{k, k+1, k+2, ...\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\,\} = \varnothing$$

olur. O halde

$$\lim A_n = \varnothing$$

dir. //

Artan ya da azalan küme dizisinin limitini bulmak için kullanılabilir.

1.6. Teorem: (A_n) artan (Her n için $A_n \subset A_{n+1}$) ya da azalan (Her n için $A_{n+1} \subset A_n$) kümelerin bir dizisi ise limiti vardır ve

i) (A_n) artan küme dizisi ise $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

ii) (A_n) azalan küme dizisi ise $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

dir.

İspat: i) Önce (A_n) artan küme dizisi ise $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ olup dizinin limiti infimumu,

$$\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

dır. Şimdi, dizinin limit supremumunu bulalım. Bunun için (A_n) artan olduğunda,

$$\lim_{n\to\infty}\sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Eğer

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ve} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

her iki kapsama bağıntısıda gerçekleşirse, dizinin limit supremumu bulunmuş olur. Önce,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olduğundan

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad (1)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow x \in A_{n_0}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. (A_n) dizisi artan ise her $k \in \mathbb{N}$ için $x \in A_{n_0+k}$ dir. Dolayısı ile, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_0+k} \Rightarrow x \in \bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k$$

dir. Buradan,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) den artan (A_n) dizisi için

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

elde edilir. Buna göre (A_n) dizisinin limit supremumu

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

dir. Buradan

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

bulunur.

ii) Şimdi (A_n) azalan küme dizisi (Her n için $A_{n+1} \subset A_n$) olsun. (A_n) azalan ise $(A_n)^t$ dizisi artan olup limiti vardır. Buradan, (i) deki sonuç kullanıldığında, A_n^t artan küme dizisi için

$$\liminf_{n\to\infty} A_n^t = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^t = \limsup_{n\to\infty} A_n^t = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^t = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^t$$

olup $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^t = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^t$ dir. Diğer taraftan,

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n^t)^t = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^t\right)^t = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^t == \limsup_{n\to\infty} A_n^t$$

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n^t)^t = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^t\right)^t = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^t = \liminf_{n\to\infty} A_n^t$$

eşitlikleri yazılır. Buradan da, (A_n) dizisinin limiti için alt ve üst limitler

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^t\right)^t = \left(\limsup_{n\to\infty} A_n^t\right)^t = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^t\right)^t = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^t\right)^t = \left(\liminf_{n\to\infty} A_n^t\right)^t = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^t\right)^t = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

şeklinde hesaplanmıştır. Dolayısı ile

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

olduğundan dizinin limiti vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

dir.

SAYILABİLİR KÜMELER

Kümeler konusunda 2.8. tanımda denk kümeler “Eleman sayıları eşit olan kümeler” olarak tanımlamıştık. Bu hatırlatmadan sonra şu aksiyomu vermek gerekir.

1.1. Aksiyom: A ve B kümeleri verilmiş olsun. A’dan B’ye 1–1 ve örten bir fonksiyon tanımlanabiliyorsa A kümesi B kümesine denktir.

Örnek: Doğal sayılar kümesi olan $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ ile çift sayılar kümesi olan $Ç = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi denk kümelerdir.

Çözüm: ℕ'den Ç'ye $f(n) = 2n$ olacak biçimde tanımlanan $f : ℕ \to Ç$ fonksiyonu, 1–1 ve örten fonksiyondur. Çünkü her $m, n \in ℕ$ için,

$$f(m) = f(n) \Rightarrow 2m = 2n \Rightarrow m = n$$

olduğundan f fonksiyonu 1–1 dir. Ayrıca, $2n \in Ç$ iken $n \in ℕ$ olduğundan f fonksiyonu örten bir fonksiyondur. Öyleyse ℕ doğal sayılar kümesi Ç çift sayılar kümesine denktir.

1.8. Tanım: Bir A kümesi, ℕ doğal sayılar kümesinin herhangi bir alt kümesine denk ise, A kümesine sayılabilir küme denir. $A \equiv ℕ$ ise, A'ya sayılabilir sonsuz küme denir. Aksi takdirde sayılamayan sonsuz küme denir.

Örnek: Doğal sayılar kümesi $ℕ \equiv ℕ$ olduğundan sayılabilir sonsuz bir kümedir. Benzer şekilde tek sayılar, çift sayılar ve asal sayılar da sayılabilir sonsuz kümelerdir, neden olduğu okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: ℚ Rasyonel sayılar kümesi olan sayılabilir sonsuz kümedir.

Çözüm: Rasyonel sayılar kümesini

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots & \frac{2}{n} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \cdots & \frac{3}{n} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{n}{1} & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} & \cdots & \frac{n}{n} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

biçiminde oluşturmaya çalışalım. Bu kümede tekrar eden elemanlar bir defa yazılmak üzere

$$ℚ = \left\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \cdots\right\}$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazım tek nokta kümesi olup, doğal sayılarla 1–1 ve örten olacak şekilde eşleşebilir. Şu halde Q rasyonel sayılar kümesi sayılabilir sonsuz bir kümedir.

Örnek: (0, 1) aralığındaki reel (gerçel) sayılar kümesi sayılamayan sonsuz kümedir.

Çözüm: Önce (0, 1) aralığında sonsuz sayıda reel (gerçel) sayı olduğunu gösterelim. $\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesini düşünelim. Burada,

$$f : \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} \to \mathbb{N}, f\left(\frac{1}{n+1}\right) = n$$

olacak biçimde 1–1 ve örten fonksiyonu tanımlanabilir. Öyleyse, $\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi sayılabilir sonsuz kümedir. $\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset (0,1)$ olduğundan, (0, 1) aralığı da sonsuz kümedir.

Her reel sayının, sonsuz ondalık bir açılımı vardır. Örneğin,

$$0{,}4 = 0{,}3999\cdots;\quad \frac{1}{3} = 0{,}333\cdots;\quad \pi = 3{,}14159\cdots;\quad 0{,}21 = 0{,}21000\cdots$$

gibi. (0, 1) aralığındaki S_i reel sayısının sonsuz ondalık açılımı,

$$S_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{in}\cdots \quad , (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

olsun. Burada, $a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{in}\cdots$ sayıları, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin elemanlarıdır. Bu düşünceden hareket ederek

$$\begin{aligned}
S_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots \\
S_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots \\
S_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots \\
&\ldots \\
S_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots \\
&\ldots
\end{aligned}$$

tablosundaki bütün sayıların ya da $\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots\}$ kümesinin, (0, 1) aralığındaki reel sayılan gösterdiğim varsayalım. Öte yandan,

$$\text{Her } i \in \mathbb{N} \text{ için } b_i = \begin{cases} 0, & a_{ij} \neq 0 \\ 1, & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

olmak üzere, $t = 0, b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$ reel sayısını oluşturalım. $t \in (0,1)$ dir. Fakat, bu sayının kuruluş düzeninden, $t \notin \{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots\}$ olduğu anlaşılır. Öyleyse,

$$(0,1) \neq \{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots\}$$

dir. Başka bir deyişle, (0, 1) aralığındaki reel sayılar sayılamaz.

1.2. Not: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi sayılamaz.

1.3. Not:
i) Sayılabilir kümenin alt kümesi de sayılabilirdir.
ii) Sayılabilir kümelerin sayılabilir çarpımı da sayılabilirdir.
iii) Sayılabilir kümelerin sayılabilir birlesimi sayılabilirdir.

SEÇME AKSİYOMU

1.9. Tanım: $\{S_i\}_{i\in I}$ boştan farklı kümeler ailesi olsun. Her bir $i \in I$ için $f(i) \in S_i$ olacak şekilde $f : I \to \bigcup_{i\in I} S_i$ fonksiyonu vardır. Bu fonksiyona seçme aksiyomu adı verilir.

Bağıntı konusunda tanımlanan iyi sıralama prensibi ile Zorn's lemma kullanılarak aşağıdaki teoremleri ispatlanır.

1.7. Teorem:
a) İyi Sıralama Prensibi seçme aksiyomunu gerektirir.
b) Zorn's Lemması, seçme aksiyomunu gerektirir.

CANTOR KÜMESİ

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
03 Mart 1845, St. Petersburg, Rusya - 06 Ocak 1918, Halle, Almanya

$C_0 = [0,1]$ yazalım. S_0 dan ortadaki üçte bir açık aralığı çıkaralım. S_1 kümesi her biri $\frac{1}{3}$ uzunluğa sahip iki kapalı aralıktan oluşmaktadır.

$$C_1 = [0,1] \backslash \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

dir. Şimdi S_1 deki iki aralığın her birinin üçte bir açık aralığını çıkaralım.

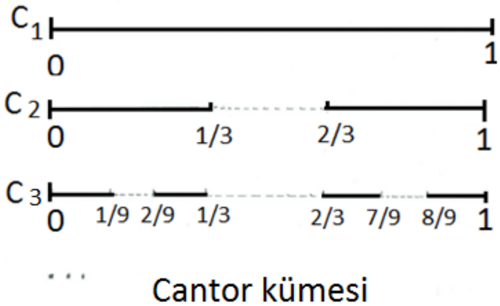
$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

olur. Benzer şekilde devam ederek, C_{n-1} deki her bir kapalı aralıktan üçte bir açık aralıkları çıkartarak C_n kümesini oluşturalım.

1.9. Tanım: Yukarıda tanımlanan C_n kümeleri olmak üzere;

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

denklemine **Cantor kümesi** denir.



Cantor kümesi

Her bir C_n kapalı ve sınırlı olduğunu dolayısıyla kompakt olduğunu görüyoruz (Kompaktlık topoloji biliminde geniş şekilde izah edilecektir. Burada kapalı ve sınırlı kümeler olarak izah edelim.) Dolayısıyla boş olmayan kompakt reel sayı kümelerinin iç içe küme dizisinin arakesiti boş olmayan bir küme olacağından dolayı $C \neq \varnothing$ dır. Kapalıların herhangi bir kesişimi kapalı olacağından dolayı C Cantor kümesi kapalıdır ve ayrıca sınırlıdır. Kapalı ve sınırlı her küme kompakt olduğundan C Cantor kümesi kompakttır.

1.8. Teorem: Cantor Kümesi sayılanilir sonsuz kümedir.

İspat: Cantor kümesinin her bir elemanına terimleri 0 ve 1 lerden meydana gelen bir diziyi eşleyebiliriz. Herhangi bir $x \in C=\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ alalım. x sayısına terimleri 0 ile 1'lerden oluşan sonsuz bir dizi eşleyeceğiz. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in C_n$ dir. $x \in C_1$ dir. Eğer x sayısı C_1 in sol yarısında ise dizinin birinci terimi 0 olsun eğer x sayısı C_1 kümesinin sağ yarısında ise dizinin birinci terimi 1 olsun. $x \in C_2$ dir. Bu takdirde eğer dizimizin birinci terimi ilk adımda 0 olarak alındıysa x sayısı C_2 kümesinin sol yarısı C_{21} de ve eğer dizimizin birinci terimi ilk adımda 1 olarak alındıysa x sayısı C_2 kümesinin sağ yarısı C_{22} dedir. Bu durumlardan hangi durum olursa olsun bu yarım uzunluğu 3^{-2} olan iki aralıktan ibarettir. Eğer x sayısı bu iki aralıktan çoğunun solunda ise dizinin ikinci terimini 0 olarak alalım aksi takdirde 1 alalım. Bu şekilde devam ederek bütün terimleri 0 ile 1'lerden meydana gelen bir dizi elde ederiz. x sayısını bu diziye eşleyelim. C'nin her bir elemanını bu şekilde bir diziye eşleyebiliriz. Bütün terimleri 0 ile 1'lerden meydana gelen tüm dizilerin kümesi sonsuz elemanlı olduğundan C Cantor kümesi sayılabilir sonsuz kümedir.

1.3. Not: Cantor kümesinin yığılma (limit) noktaları kümesinin yine Cantor kümesindedir.

1.9. Tanım: Eğer reel sayılar kümesinin bir alt kümesi kapalı ve her noktası kendisinin yığılma noktası ise mükemmel küme denir. Bu tanıma göre mükemmel kümenin ayrılmış noktası yoktur. Örneğin [0,1] aralığı kapalı ve her bir noktası yığılma noktası olduğundan mükemmeldir.

1.9. Teorem: Cantor kümesi mükemmeldir.

İspat: Cantor kümesi kapalı kümelerin arakesiti olduğundan ve kapalıların her hangi topluluğun arakesiti kapalı olduğundan dolayı, Cantor kümesi kapalı bir kümedir. Şimdi Cantor kümesinin her noktasının yığılma noktası olduğunu göstereceğiz.

Herhangi bir $x \in C$ alalım. $x \in C_1$ dir. Bu takdirde x sayısı C_1 kümesini oluşturan iki aralıktan birindedir. x sayısı C_1 yi meydana getiren bu aralıklardan ait olduğu aralığın uç noktalarından en azından birisinin (belki de her ikisinin de) uç noktasına eşit değildir. Bu eşit olmayan uç noktaya a_1 diyelim. $x \in C_2$ dir. x sayısı C_2 kümesini meydana getiren aralıklardan birisindedir. x sayısı C_2 yi meydana getiren bu aralıklardan ait olduğu aralığın uç noktalarından en azından birisinin (belki de her ikisinin de) uç noktasına eşit değildir. Bu uç noktaya a_2 diyelim. Böyle devam ederek bir (a_n) dizisi elde ederiz. Bu dizinin her bir terimi Cantor kümesinin elemanıdır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $|x - a_n| \leq \frac{1}{3^n}$ dir. O halde x sayısı bu dizinin limitidir, dolayısıyla x sayısı Cantor kümesinin bir yığılma noktasıdır. x sayısı Cantor kümesinin rast gele bir elemanı olduğundan Cantor kümesinin her noktası yığılma noktasıdır. O halde Cantor kümesi mükemmeldir.

σ−CEBİRİ (SİGMA CEBİRİ)

1.10. Tanım: X boş olmayan bir küme, U'da X'nin bazı alt kümelerinden oluşan bir küme olsun. (Yani U, X'nin kuvvet kümesinin alt kümesi olsun. $U \subset P(X)$, U kümesi,

i) $X \in U$

ii) Her $A \in U$ için $A^t \in U$

iii) Her $A, B \in U$ için $A \cup B \in U$

aksiyomlarını sağlıyorsa, U kümesine cebir denir. U kümesi iii özelliğinde yerine;

iii) Her n için, $A_n \in U$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

aksiyomunu sağlıyorsa, U kümesine σ – cebiri (sigma cebiri) denir. Burada U'nun her bir elemanına olay, (X, U) ikilisine de ölçülebilir uzay denir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi her σ – cebir aynı zamanda bir cebir olmasına rağmen tersi doğru değildir. Ancak, örnek uzay sonlu elemanlı ise cebir aynı zamanda σ – cebirdir.

Örnek: $X = \mathbb{N}$, $U = \{\varnothing, \{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}, \{0,2,4,\cdots,2n,\cdots\}, \mathbb{N}\}$ kümesi bir σ – cebiri olduğunu gösteriniz.

Çözüm: i) $X = \mathbb{N} \in U$ dir.

ii) $\varnothing^t = \mathbb{N}, \mathbb{N}^t = \varnothing$,
$\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}^t = \{0,2,4,\cdots,2n,\cdots\}$
$\{0,2,4,\cdots,2n,\cdots\}^t = \{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$

iii) Her n için, $A_n \in U$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$ olur. Şu halde U kümesi σ – cebiridir.

Örnek: $X = \{a,b,c,d\}$ olsun.

a) $U_a = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b,c,d\}\}$ kümesi bir cebir ve σ– cebirdir.

b) $U_a = \{X, \varnothing, \{b\}, \{a,c,d\}\}$ kümesi bir cebir ve σ–cebirdir.

C) $U_c = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ kümesi bir cebir ve σ–cebiri değildir.

σ–cebiri olması okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $X = [-1, 1]$, her n için $U = \{\varnothing, \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)^t, X\}$ kümesi bir σ−cebiri olduğunu gösteriniz.

σ−cebiri olması okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: Kuvvet kümesi tanımdaki üç aksiyomu sağladığından bir σ − cebiri olduğunu gösteriniz.

Çözüm: i) $U = P(X)$ ve $X \subset X$ olduğundan $X \in U$ dur.

ii) $A \in U$ ise $A \in X$ olup $A^t \in X$ olduğundan $A^t \in U$ dur.

iii) $n \geq 1$ için $A_n \in U$ ise her n için $A_n \subset X$ ve X evrensel küme olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset U$ dır. Buna göre, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$ dir. Öyleyse kuvvet kümesi bir σ− cebirdir.

Örnek: X sonsuz elemanlı herhangi bir küme olmak üzere;

$$U_1 = \{A \subset X : \text{ya } A \text{ ya da } A^t \text{ sonlu elemanlı}\}$$

olarak tanımlansın. Bu sınıf bir cebir olmasına rağmen σ−cebir değildir. Önce U_1 kümesi cebir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: i) X sonsoz elemanlı ise $X^t = \varnothing$ olup, $\varnothing$ nin eleman sayısı sonludur. O halde, $X \in U_1$ dir.

ii) $A \in U_1$ ise A ya da A^t sonlu elemanlıdır. A sonlu elemanlı ise, $(A^t)^t = A$ olup $A^t \in U_1$ dir. A^t sonlu elemanlı ise, sonlu elemanlı kümeler U_1 kümesinde olacağından $A^t \in U_1$ dir.

iii) U_1 deki herhangi iki küme A ve B olsun. Burada üç farklı durum olabilir:

- Kümelerin ikisi de sonlu elemanlı
- Kümelerin her ikisinin de tümleyeni sonlu elemanlı
- Kümelerden birinin kendisi sonlu elemanlı diğerinin tümleyeni sonlu elemanlı olabilir.

Her üç durumda da $A \cup B$ veya $(A \cup B)^t$ sonlu elemanlı olduğunun gösterilmesi gerekir. Şimdi bunları ayrı ayrı inceleyelim.

- A ve B'nin her ikiside sonlu elemanlı ise $A \cup B$ de sonlu elemanlıdır. Kendisi sonlu elemanlı kümeler U_1 de olduğundan $A \cup B \in U_1$ dir.
- A ve B'nin her ikisinin de tümleyeli sonlu elemanlı ise $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$ de sonlu elemanlıdır (sonlu elemanlı kümelerin arakesiti de sonlu elemanlıdır). Yani, $A \cup B$'nin tümleyeni sonlu elemanlıdır. Tümleyeni sonlu elemanlı kümeler U_1 de olduğundan $A \cup B \in U_1$ dir.
- A sonlu elemanlı, B'nin de tümleyeni sonlu elemanlı olsun. Buna göre, $(A \cup B^t)^t = A^t \cap B$ de sonlu elemanlıdır. Sonlu elemanlı bir kümenin alt kümesi de sonlu elemanlıdır. Yani, $A \cup B$'nin tümleyeni sonlu elemanlıdır. O halde, $A \cup B^t \in U_1$ dir.

Burada tanımlanan U_1 kümesi cebir olma koşullarını sağladığı için bir cebirdir. Bu küme bir cebir olmasına rağmen σ–cebir değildir. Bunu göstermek için tersine bir örnek vermek yeterlidir. Örnek uzay doğal sayılar kümesi $(X = \mathbb{N})$ olsun. Her n için, $A_n = \{2n\}$ denirse, tek elemanlı kümeler U_1 sınıfındadır, kendileri sonlu elemanlı olmalıdır. Bu kümenin bir σ–cebir olabilmesi için bu kümelerin sayılabilir birleşimlerinin de bu kümede olması gerekir. Oysa sayılabilir birleşim kümesi ve tümleyeni

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{2n\} \text{ ve } \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^t = \{2n-1\}$$

şeklinde olduğundan, her iki küme de sonlu elemanlı değildir. O halde, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin U_1$ olup U_1 kümesi bir σ–cebir değildir.

Örnek: X sayılamayan sonsuzlukta elemanı olan bir küme olsun. X'in bazı alt kümelerinden oluşan bir küme de

$$U_2 = \{A \subset X : \text{ya } A \text{ ya da } A^t \text{ sayılabilir elemanlı}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu küme σ–cebirin olduğunu gösteriniz.

Çözüm: i) X sonsuz elemanlı ise $X^t = \varnothing$ olup $\varnothing$ nin eleman sayısı sıfırdır. O halde $X \in U_2$ dir.

ii) $A \in U_2$ olsun. Buna göre, A ya da A^t sayılabilir elemanlı kümelerdir. A sayılabilir ise, $(A^t)^t = A$ olduğundan $A^t \in U_2$ sayılabilirdir. A^t sayılabilir ise $A^t \in U_2$ dir.

ii) Bütün $n \geq 1$ için $A_n \in U_2$ olsun. Seçilen A_n'ler üç farklı durumda olabilir.

- Bütün n'ler için A_n'ler sayılabilir olabilir. Bu durumda, sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimleri de sayılabilir olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U_2$ dir. Diğer taraftan, bütün n'ler için A_n'lerin tümleyenleri sayılabilir ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^t$ de sayılabilirdir. Buna göre,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^t = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^t$$

eşitliğinden $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U_2$ dir.

- Seçilen alt kümelerin bazılarının kendileri, diğerlerinin de tümleyeni sayılabilir olabilir. Kendileri sayılabilen olanları B_n, tümleyenleri sayılabilenleri de C_n ile gösterelim. Buna göre,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right)$$

olup $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j^t$ kümesi sayılabilirdir. Ayrıca,

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]^t = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^t\right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j^t\right) \subset \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j^t\right)$$

olduğundan sayılabilir bir kümenin her alt kümesi de sayılabilirdir. Buradan, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesinin tümleyeni sayılabilir olup $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U_2$ dır.

Buna göre U_2 kümesi σ−cebir bütün aksiyomlarını sağladığından bir σ−cebirdir.

Örnek: $f: U \to V$ olsun. A, V üzerinde bir σ−cebiri ise $f^{-1}(A)$ de U üzerinde σ−cebiridir.

Çözüm: $f^{-1}(A) = \{f^{-1}(B): B \in U\}$ şeklinde olsun. A, V üzerinde bir σ−cebiri ise;

i) $Y \in A$ ise $f^{-1}(Y) = X = f^{-1}(A)$ dir.

ii) Her $B \in U$ için $f(B) = A \in V$ olacak şekilde A kümesi vardır. A, V üzerinde bir σ−cebiri olduğundan $A^t \in V$ kümesi mevcuttur.

$$f^{-1}(A^t) \in f^{-1}(V)$$
$$f^{-1}(A^t) \in U$$

$B^t \in U$

iii) Her n için, $B_n \in U$ olsun. $f(B_n) = A_n \in V$ olacak şekilde A_n kümesi vardır. A_n, V üzerinde bir σ–cebiri olduğundan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in V$$

mevcuttur. Her n için

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in f^{-1}(V)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in U$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in U$$

olur.

U kümesi tanımdaki bütün aksiyomları sağladığından bir σ–cebirdir.

Örnek: X boş olmayan bir küme, U da X üzerinde bir σ–cebir olsun. $B \in U$ için,

$$U_B = \{A : A = B \cap C, : C \in U\}$$

şeklinde tanımlanan U_B kümesinin B üzerinde bir σ–cebir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (i) $B \in U$ ve $B = B \cap B$ olduğundan, $B \in U_B$ dir.

(ii) $A \in U_B$ ise $A = B \cap C$ olacak şekilde bir $C \in U$ vardır. O halde, A'nın B'ye göre tümleyeni (A_B^t) de bu kümede olmalıdır.

$$A_B^t = B \cap (B \backslash A) = B \backslash A = B \cap A^t$$

olup, $B \cap A^t \in U$ olduğundan, $A_B^t \in U_B$ dir.

(iii) U_B deki elemanların sayılabilir birleşimleri de U_B de olmalıdır. Bunun için n için $A_n \in U_B$ olsun. O zaman $A_n = B \cap C_n$ olacak şekilde $C_n \in U$ küme dizisi vardır. Ayrıca,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap C_n) = B \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right] = B \cap C$$

olarak yazılabildiğinden, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U_B$ dir. Dolayısı ile, U_B kümesi, B üzerinde bir σ–cebirdir.

1.10. Teorem: X boş olmayan bir küme, U'da X üzerinde bir σ–cebir olsun. Buna göre,

i) $\varnothing \in U$

ii) Her n için $A_n \in U$ ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

iii) $A, B \in U$ ise $A \backslash B = A \cap B^t \in U$ dir.

İspat: i) U bir σ–cebir olduğundan $X \in U$ ve U'daki her elemanın tümleyeni de U'da olacağından $X^t = \varnothing \in U$ dur.

ii) U bir σ–cebir olduğundan her elemanının tümleyeni de U'dadır. Buna göre her $n \geq 1$ için $A_n \in U$ ise $A_n^t \in U$ dir. Yine U bir σ–cebir olduğundan bunların sayılabilir birleşimleri de U dadır. Buna göre $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^t \in U_2$ dir. Yine, σ–cebirin tanımından bu elemanın tümleyeni de U'nun bir elemanıdır. Buradan da

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^t \right)^t \in U$$

elde edilir.

iii) $A, B \in U$ için $A, B^t \in U$ olup (ii) den $A \backslash B = A \cap B^t \in U$ dur.

1.11. Teorem: X kümesi üzerindeki iki σ–cebir U_1 ve U_2 olsun. Bu durumda $U = U_1 \cap U_2$ de bir σ–cebirdir.

İspat: σ–cebirlerin arakesitlerinden oluşan U sınıfının bir σ–cebir olabilmesi için tanımdaki üç aksiyomu sağlaması gerekir.

i) U_1 ve U_2 birer σ–cebir olduğundan $X \in U_1$ ve $X \in U_2$ olup $X \in U_1 \cap U_2$ dir.

ii) $A \in U$ ise $A \in U_1$ ve $A \in U_2$ dir. U_1 ve U_2 birer σ–cebir olduğundan $A^t \in U_1$ ve $A^t \in U_2$ dir. Buna göre $A^t \in U_1 \cap U_2$ olup, $A^t \in U$ dur.

iii) $n \geq 1$ için $A_n \in U$ ise arakesitin özelliğinden her n için $A_n \in U_1$ ve $A_n \in U_2$ olup, U_1 ve U_2, σ−cebir olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U_1$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U_2$ dir. Buradan da $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$ elde edilir.

1.12. Teorem: X bir küme ve U'da X üzerinde bir cebir olsun. Eğer aşağıdaki iki şarttan biri sağlanırsa U cebiri X üzerinde bir σ−cebiridir.

a) A cebiri artan dizilerin birleşimi altında kapalıdır.

b) A cebiri azalan dizilerin kesişimi altında kapalıdır.

İspat: (a) şartı doğru olsun. U bir cebir olduğundan U'ya sayılabilir çokluktaki kümelerin birleşimlerinin U'ya ait olduğunu göstermemiz yeterlidir. (A_k), U'ya ait kümelerin herhangi bir dizisi olsun. Her n için $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ diyelim. (B_n) bir artan dizidir. U bir cebir olduğundan herbir n için $B_n \in U$ dır. Hipotezden $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in U$ dır.

Diğer taraftan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

olacağından

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$

dır.

(b) şartı doğru olsun. (A_k), U'daki elemanların bir artan dizisi olsun. Bu takdirde (A_k^c), U'daki kümelerin bir azalan dizisidir. (b) sağlandığından $\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^t\right) \in U$ dir. U bir cebir olduğundan $\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^t\right)^t \in U$ olur.

Diğer taraftan $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^t\right)^t$ olduğundan $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in U$ olur. Şu halde (a) gerçeklenir. Dolayısıyla U bir σ−cebirdir.

1.13. Teorem: X üzerindeki σ−cebirlerinin herhangi adetteki kesişimleri yibe bir σ−cebirdir.

İspat: I bir indir kümesi olsun. $i \in I$ için U_i bir $\sigma-$cebiri olduğundan $X \in U_i$ dir. Buradan $X \in \bigcap_{i \in I} U_i$ olur. Eğer $A \in U_i$ ise herbir $i \in I$ için U_i bir $\sigma-$cebiri olduğundan, $A^t \in U_i$ dir. Dolayıslıyla $A^t \in U_i$ dir. Herbir $k \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \bigcap_{i \in I} U_i$ olsun. Herbir i için $A_n \in U_i$ ve dolayısıyla $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U_i$ buradan da $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \bigcap_{i \in I} A_i$ bulunur.

1.14. Teorem: U kümesi $\sigma-$cebiri olabilmesi için gerek ve yeter şart, artan dizilerin sayılabilir sayıdaki birleşimine göre kapalı olmasıdır.

İspat: U bir $\sigma-$cebiri ise artan dizilerden oluşan sayılabilir birleşimine göre kapalı olacağı açıktır. Tersine

$$(B_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \text{ ve } A_n = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

tanımlansın. U bir küme olduğundan

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n \text{ ve } A_n \in U$$

dır. Böylece

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in U$$

olur. O halde U bir $\sigma-$cebiridir.

1.15. Teorem: X nın bazı alt kümelerinden oluşan bir küme F olsun ($\sigma-$cebiri olmak zorunda değildir). Bu F kümesini kapsayan en küçük bir $\sigma-$cebir vardır.

İspat: Kuvvet kümesi X'in bütün alt kümelerinden oluşan $\sigma-$cebir olduğundan bu sınıfı kapsar. Bu sınıfı kapsayan başka $\sigma-$cebirler de olabilir. Bunlara, I bir indis kümesi olmak üzere $\alpha \in I$ için U_α diyelim. Bu $\sigma-$cebirlerin herbiri F kümesini kapsadığından U_α ların arakesiti de F kümesini kapsar. Diğer taraftan, bu arakesit $\sigma-$cebiri F kümesini kapsayan diğer U_α kümesinden küçüktür. O halde, F kümesini kapsayan en küçük $\sigma-$cebir vardır.

1.11. Tanım: Herhangi bir F kümesini kapsayan en küçük bir σ−cebir σ(F) ile gösterilmek üzere bu F kümesini kapsayan en küçük σ−cebirine F'nin ürettiği σ−cebiri denir.

Reel sayılar doğrusu üzerindeki bir açık aralık, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, (a, b) şeklinde ifade edilir. Buna göre aşağıdaki sınıfları tanımlayalım:

$F_1 = \{(a,b): a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$, açık aralıkları kümesi

$F_2 = \{[a,b]: a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$, kapalı aralıkları kümesi

$F_3 = \{(a,b]: a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$, yarı açık aralıkları kümesi

$F_4 = \{[a,b): a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$, yarı açık aralıkları kümesi

olduğunu biliyoruz. Bu kümelerin hiçbiri σ−cebir değildir. $X = \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ olup ∞ bir reel sayı değildir. Dolayısı ile, $X \notin F_1, X \notin F_2, X \notin F_2$ ve $X \notin F_4$ dır. Bu kümeler birer σ−cebir olmamasına rağmen, 1.12. Teorem gereğince, bu kümeleri kapsayan en az bir σ−cebir vardır.

BOREL CEBİRİ

Emile Borel

Felix Edouard Emil Borel

07 Ocak 1871, Saint-Affrique, Fransa - 03 Şubat 1956, Paris, Fransa

1.12. Tanım: $\mathbb{R}$'deki açık aralıkların ürettiği σ−cebirine Borel cebiri denir. Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir. Borel cebirinin her elemanına Borel kümesi adı verilir. Bu tanıma göre, $\mathbb{R}$'deki bütün açık aralıklar üzerine Borel cebiri üretilebilir. $\mathbb{R}$'deki diğer alt kümeler üzerinde Borel cebiri üretilebilir. Buna göre, $\{a\}, \{a, b, c\}$ türündeki tek nokta kümeleri, $[a, b]$ gibi kapalı aralıklar, $(a\ ,b]$, $[a, b)$ gibi yarı-açık aralıklar da Borel cebiri türünden yazılabilir. Şimdi bunu gösterelim.

Burada $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A_n = \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ açık aralıklar dizisini ele alalım. A_n'ler açık aralıklar olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca, Borel cebiri aynı zamanda bir σ–cebir olduğundan 1.14. Teorem gereğince sayılabilir arakesitleri de Borel cebirindedir. Buna göre,

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

olup $\{a\}$ şeklindeki tek nokta kümeleri Borel cebirindedir.

1.16. Teorem: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel cebiri aşağıdaki sınıflar tarafından da üretilebilir.

a) $\mathbb{R}$ nin tüm kapalı alt kümelerinin sınıfı
b) $\mathbb{R}$ nin $(-\infty, b]$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfı
c) $\mathbb{R}$ nin $(a, b]$ biçimindei alt aralıklarının sınıfı

İspat: $\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_2$ ve $\mathcal{B}_3$ teoremin (a), (b) ve (c) şıklarında belitilen sınıfların doğurduğu σ–cebiri olsun. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ nin tüm açık alt kümelerini kapsadığından ve tümleme altında kapalı olduğundan $\mathbb{R}$ nin kapalı alt kümelerini de kapsar. Kapalı alt kümelerin doğurduğu σ–cebiri $\mathcal{B}_1$ olduğundan $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dir.

$(-\infty, b]$ biçimindeki kümeler kapalı olduğundan $\mathcal{B}_1$ sınıfına aittir. Dolayısıyla $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dir.

$$(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^t$$

yazılabildiğinden (a, b] tipindeki her aralık $\mathcal{B}_2$ ye aittir. Şu halde $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2$ dir. Buna göre;

$$\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad (1)$$

olur.

Diğer taraftan

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{b}\right)$$

yazılabildiğinden, $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ deki tüm açık aralıkları kapsar. Şu halde

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_3 \qquad (2)$$

dür. (1) ve (2) den

$$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

bulunur.

Örnek: Her tipten aralık, ışın ve tek nokta kümelerinin Borel cebirinin elemanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: 1.14. teorem gereği aşağıdaki aralıkların birer Borel cebiridir.

a) $(a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a,b+\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

b) $[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

c) $(b,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(b,b+n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

d) $(b,\infty) = [b,2b] \cup (2b,\infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

e) $(-\infty,a)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a-n,a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

f) $(-\infty,b) = \left(-\infty,\frac{a}{2}\right) \cup \left(\frac{a}{2},a\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

g) $\{a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Çünkü $\mathbb{R}$'deki her açık küme açık aralıkların sayılabilir birleşimi olacağından açık kümeler borel kümelerdir.

1.17. Teorem: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Borel cebiri aşağıdaki sınıflar tarafından üretilebilir:

a) $\mathbb{R}^n$ nin tüm kapalı alt kümelerinin sınıfı

b) $\mathbb{R}^n$ nin $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i \leq b, i = 1,2,\cdots,n\}$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfı

c) $\mathbb{R}^n$ nin $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): a_i < x_i \leq b_i, i = 1,2,\cdots,n\}$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfı

Bu teoremin ispatı 11.16. teoreminin ispatı gibi ispatlarınır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Kümeler Cebiri İşlemleri

1. A ve B kümeleri U kümeler cebirinin elemaları ise $A\Delta B$ ve $A \cap B$ kümeleri de U'da olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A \in U, B \in U$ ise $A\backslash B \in U$ ve $B\backslash A \in U$ dır.

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \text{ ve } A \cap B = A(A\backslash B)$$

yazılabileceğinden

$$A\Delta B \in U \text{ ve } A \cap B \in U$$

bulunur.

2. Bir kümeler ailesinin, iki kümesinin birleşimi ve kesişimi işlemlerine göre kapalı olması, bu ailenin bir kümeler cebri olmasını gerektirmediğini gösteriniz.

Çözüm: $U = \{A, B \in P(\mathbb{R}): B \subset A\}$ ailesi olsun.

$$A = A \cup B \in U \text{ ve } B = A \cup B \in U$$

dir. Fakat $A \backslash B \notin A$ olduğundan U, kümeler cebri olamaz.

3. U kümeler ailesi, simetrik fark alma ve kesişim işlemlerine göre kapalı ise bu ailenin bir kümeler cebri olduğunu gösteriniz.

Çözüm: U bir kümeler ailesi ve $A \in U, B \in U$ iken $A \cup B \in U$ ve $A \backslash B \in U$ olduğu gösterilebilir. Sorunun varsayımına göre, $A \in U, B \in U$ için $A\Delta B \in U$ ve $A \cap B \in U$ dir.

$$A \cup B = (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$$

ve

$$A \backslash B = (A\Delta B) \backslash (A \cap B)$$

denklemleri yazılabileceği için U bir kümeler cebiridir.

σ−Cebiri

4. X, kümelerin herhangi bir ailesi F, X üzerinde tanımlanmış bir σ−cebiri ve $B \subset X$ olsun. $F_B = \{B \cap A : A \in F\}$ biçiminde tanımlanan F_B, X üzerinde bir σ−cebiri olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

i) $X \in F$ olduğundan $B \in X$, $B \cap X = B \in F_B$, $\varnothing \in F$ ve $\varnothing \cap B = \varnothing \in F_B$ dır.

ii) $(F_k)_{k=1}^{\infty}$, F_B dan alınmış bir aile olsun. Her k için $F_k \in F_B$, $F_k = B \cap A_k$ olacak şekilde $A_k \in F$ vardır;

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B \cap A_k) = A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

ve $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in F$ dir. Buradan $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in F_B$ elde edilir.

iii) $F \in F_B$ alınsın. $F = B \cap A$ gerçeklenmek üzere bir $A \in F$ vardır. Böylece,

$$F^t = B \backslash F = B \backslash (B \cap A) = B \cap (B \cap A)^t = (B \cap B^t) \cup (B \cap A^t) = B \cap A^t$$

olur. $A^t \in F$ buradan da $F^t \in F_B$ dir.

O halde F_B, σ–cebiri olur.

5. X uzayının alt kümelerinden oluşan herhangi bir aile H olsun. X'de tanımlı H'yı kapsayan en küçük σ–cebirinin var olduğunu gösteriniz.

Çözüm: H'yı kapsayan σ–cebiri U ile gösterilsin. U'ların ailesi U_i ise, $X \in U_i$ ve $U_i \neq \emptyset$ dir. $B = \bigcap\{U : U \in U_i\}$ tanımlanırsa, bir σ–cebiri olan her U, H'yi kapsadığı için $H \subset B$ dir. B bir σ–cebiridir. Gerçekten de $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset B$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \in U$, $U \in U_i$ dir. U ailesinin her biri σ–cebiri olduğundan her $U \in U_i$ için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in U$ ve buradan da $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in B$ bulunur. Benzer düşünce ile her $A \in B$ için $A \in U$, $U \in U_i$ dir. $A^t \in U$, $U \in U_i$ olacağından $A^t \in B$ bulunur. Öte yandan B kümesinin tanımı gereğince H'yi kapsayan tüm σ–cebirlerinin kesişimi olarak tanımlandığından, bu cebirlerin en küçüğüdür.

6. $X = \{a, b, c\}$ ve X kümesi üzerinde tanımlı σ–cebirleri

$$U_1 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\},\ U_2 = \{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}, X\}$$

nin birleşimi σ–cebiri olmadığını gösterimiz.

Çözüm: $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ için U_1 ve U_2, $\{\emptyset, A, A^t, X\}$ biçiminde ele alalım. U_1 ve U_2 bir σ–cebiri değildir. Çünkü;

$$U_1 \cup U_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b\}, \{c\}, X\}$$

dir. $\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\} \notin U_1 \cup U_2$ olduğundan cebir değildir, öyleyse σ–cebiri olamaz.

7. f, X kümeler ailesi Y kümeler ailesi üzerinde bir fonksiyon U'da X'in alt kmeleri ile tanımlanmış bir σ–cebiri ie

$$F = \{A \subset Y, f^{-1}(A) \in U\}$$

Y'nin alt kümeleri ile tanımlanmış bir $\sigma-$cebiri olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
i) $\varnothing \in F$ ve $Y = f^{-1}(X) \in F$ dir.

ii) $A \in F$ olsun. $f^{-1}(A) \in U$ dır ve U bir $\sigma-$cebiri olduğunu için

$$f^{-1}(A^t) = (f^{-1}(A))^t \in U$$

dir. O halde $A^t \in F$ dir.

iii) $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, F deki kümelerin sayılabilir bir ailesi olsun. Buna göre her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{-1}(A_n) \in U$ dır. U'nun $\sigma-$cebiri olduğundan;

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in U$$

ve buradan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ elde edilir. Böylece F, bir $\sigma-$cebiridir.

8. U, X üzerinde tanımlanmış bir $\sigma-$cebiri, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de U'nun kümelerinden oluşmuş herhangi bir kümeler ailesi olun. Buna göre U'da $n \neq m$ için $B_n \cap B_m = \varnothing$ ve her $n > 1$ için $B_n \subset A_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ şartını gerçeklenmek üzere bir $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ kümeler ailesi olduğunu göteriniz.

Çözüm: $B_1 = A_1$ ve her $n > 1$ için

$$\begin{aligned} B_n &= A_n \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}\} \\ &= A_n \cap A_1^t \cap A_2^t \cap \cdots \cap A_{n-1}^t\} \end{aligned}$$

Tanımlansın. U, bütünleyen alma ve kesişim işlemlerine göre kapalı olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \in U$ ve $n > 1$ oldukça tanımdan $B_n \subset A_n$ dır. B_n ve B_m, bu şekilde tanımlanmış iki küme, $m < n$ olsun. $m > 1$ için $B_m \subset A_m$ kapsamaı doğrudur. Buradan

$$B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_m = A_m \cap \{A_n \cap A_1^t \cap A_2^t \cap \cdots \cap A_{n-1}^t\} = \varnothing$$

bulunur. Öte yandan her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in A_n$ dır. $x \in A_n$ gerçeklendiği n indilerin en küçüğü n_0 olsun. $x \in B_{n_0}$ dır. O halde $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ve buradab da $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ters kapsama bağıntısı elde edilir. Böylece;

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

bulunur.

9. M, X ailesinin tanımladığı bir σ−cebiri olsun. Buradan X'in bütün sayılabilir alt kümelerinin ailesi F ise F'nin tanımladığı σ(F) ile gösterilecek σ−cebirlerinin birleşimi M olduğu gösterilsin.

Çözüm: F'nin tanımladığı σ−cebiri σ(F) ve bunların birleşimi M_1 olsun. $\sigma(F) \subset \sigma(X) = M$ yazılabileceğinden $M_1 \subset M$ dir. M_1, bir σ−cebiridir. Gerçekten de $\emptyset \in M_1$ ve $X \in M_1$ dir. Her σ(F) bütünleyen alma işlemine göre kapalı olacağından bunların birleşimi olan M_1 de bütünleyen alma işlemine göre kapalıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için F_n, X'in sayılabilir bir alt kümesi, $A_n \in \sigma(F_n)$ ve $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in M_1$ olsun. $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tanımlanırsa, her $A_n \in \sigma(F_n)$ için F de X'in sayılabilir bir alt kümesidir. Böylece

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(F) \subset M_1$$

olur. Bu kapsama M_1 in bir σ−cebiri olacağını ortaya koyar.

Öte yandan $S \in X$, $S \in \sigma(\{S\}) \subset M_1$ ise M_1, X ailesini kapsar, $X \subset M_1$ dir. X'i kapsayan en küçük σ−cebiri M olduğu için $M \subset M_1$ dir ve buradan $M_1 = M$ elde edilir.

10. M, $P(\mathbb{R})$ de tanımlı sonsuz elemanlı bir σ−cebiri ise ayrık ve boştan farklı kümelerden oluşan sonsuz elemanlı dizi içerdiğini gösteriniz.

Çözüm: M, sonsuz olduğundan $A \neq \emptyset$ ve $A \neq \mathbb{R}$ gerçekleyen bir $A \in M$ kümesi bardır. $B = \mathbb{R} \setminus A$ tanımlansın. $B \neq \emptyset$ ve $B \neq \mathbb{R}$ olduğu açıktır.

$$A \cap M = \{A \cap S : S \in M\} \text{ ve } B \cap M = \{B \cap S : S \in M\}$$

sonlu kümeler ise her $S \in M$ için

$$S = (A \cap S) \cup (B \cap S)$$

yazılabileceğinden

$$M = \{S_1 \cup S_2 : S_1 \in A \cap M, S_1 \in B \cap M\}$$

biçiminde bir aile olarak ifade edilebilir. Bu halde M sonlu olur. Bu ise varsayımla çelişir. Buradan ya $A \cap M$ ya da $B \cap M$ sonlu olmamalıdır. $B \cap M$ kümesinin sonsuz alınması genelliği bozmaz. $A_1 = A, B_1 = B$ tanımlanırsa $B_1 = A_2 \cup B_2$ $(A_2 \cap B_2 = \emptyset)$ biçiminde yazılabilir. $B_2 \cup M$ aynı nedenle sonsuzdur. Benzer biçimde

$$B_2 = A_3 \cup B_3, \cdots, B_n = A_{n+1} \cup B_{n+1}, A_3 \cup B_3 = \emptyset, \cdots, A_{n+1} \cap B_{n+1} = \emptyset, A_{n+1} \neq \emptyset$$

ve $B_{n+1} \cap M$ sonsuzdur. $n < m$ için

$$A_m \subset B_{m-1} \subset B_n \text{ ve } A_n \cap A_m \subset A_n \cap B_n = \emptyset$$

olmak üzere bu yolla oluşturulan $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ aranılan dizidir.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Reel Analiz, Seçkin Yayınları, Seçkin Yayıncılık, İstanbul, 2012.
2. Doç. Dr. Neşe Dernek, Reel Analiz Çözümlü Problemler, Nobel Yayıncılık, Ankara 2013.
3. Prof. Dr. Ertan İbikli, Reel Analiz Ders Notları, Ankara Üniversitesi, Ankara, 2020.
4. Doç. Dr. Sebahattin Şevgin, Reel Analiz, Ders Notları, Van Yüzüncüyıl Üniversitesi, Van, 2020.
5. Prof. Dr. Hüseyin Çakallı, Reel Analiz Ders Notları, Maltepe Üniversitesi, İstanbul, 2020.
6. Prof. Dr. Tunç Mısırlıoğlu, Reel Analiz Ders Notları, İstanbul Kültür Üniversitesi, İstanbul, 2011.
7. Prof. Dr. Yılmaz Akdi, Matematiksel İstatistik Ders Notları, Ankara Üniversitesi, Ankara, 2020.