2. BÖLÜM
GEOMETRİK YER

GEOMETRİK YER KAVRAMI

Belli şartları sağlayan noktalar kümesi anlamına gelen geometrik yer, noktaların yer ve yer değiştirmesi olayıdır. Geometrik yer bir şekildir. Verilen şartlara uyan noktaların bir kümesidir.

2.1. Tanım: Verilen bir noktalar kümesini, başka şekilde aynı özellikteki noktaların oluşturduğu kümeye, bu noktaların geometrik yeri denir. Oluşan şeklin geometrik yer olabilmesi için;

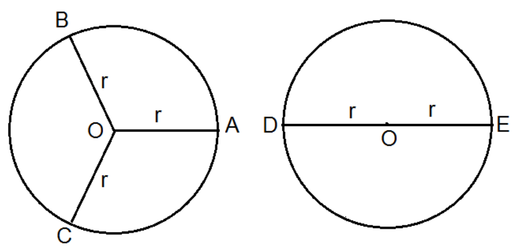
1. Verilen özellikteki tüm noktalar, geometrik yere ait olmalıdır.
2. Geometrik yere ait tüm noktalar, verilen özellikte olmalıdır.

Geometrik yeri bulabilmek için, bu iki şartın sağlanması gerekir. Ayrıca geometrik yeri tespit edebilmek için;

a) Verilen özellikler belirlenir.
b) Her bir özellikleri sağlayan ortak noktaların oluşturduğu küme bulunur.
c) Bütün özellikleri sağlayan ortak noktaların oluşturduğu küme tespit edilir.

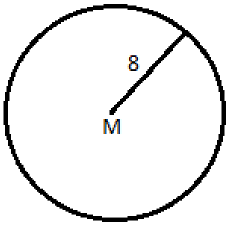
1. Bir Noktadan Eşit Uzaklıktaki Noktaların Kümesi

2.1. Aksiyom: $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, düzlemde sabit bir O noktasından eşit r birim uzaklıktaki noktaların geometrik yeri, O merkezli r birim yarıçaplı çemberdir.



$|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = |OE| = r$ olduğundan, A, B, C noktaları geometrik yeri çember üzerindedir.

Örnek: Düzlemde sabit bir M noktasından 8 cm uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, Merkezi M, yarıçapı 8 olan bir çember belirtir.

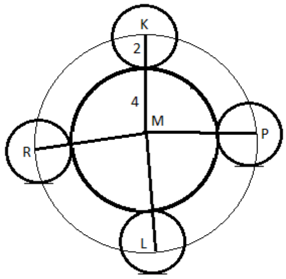


Örnek: Yarıçapı 4 cm olan M merkezli bir çembere dıştan teğet ve yarıçapı 2 cm olan çemberin merkezlerinin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: M merkezli 4 cm yarıçaplı çembere dıştan teğet olan 2 cm yarıçaplı çemberlerden bir kısmının merkezleri P, K, N, R olsun.

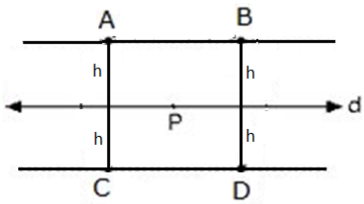
$|MN| = 4 + 2 = 6\,\text{cm}$ ve $|MN| = |MK| = |MP| = |MR| = ... = 6\,\text{cm}$

olduğundan geometrik yer, M merkezli 6 cm yarıçaplı bir çemberdir.



2. Bir Doğrudan Eşit Uzaklıkta Bulunan Noktaların Geometrik Yeri

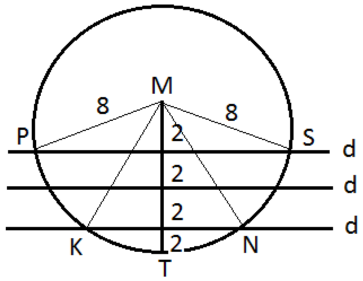
2.2. Aksiyom: Düzlemde bir d doğrudan eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri h birim uzunluğunda çizilen paralel d_1 ve d_2 gibi iki doğrudur.



d_1 ve d_2 üzerindeki her nokta d doğrusuna h kadar uzaklıktadır.

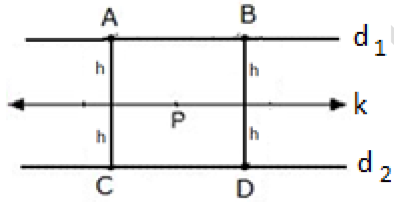
Örnek: Bir d doğrusu ile aynı düzlemde d doğrusuna 4 cm uzaklıkta olan bir M noktası veriliyor. M noktasından 8 cm ve d doğrusundan 2 cm uzakta bulunan noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: d doğrusundan 2 cm uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, d doğrusunun farklı tarafında ve 2 cm uzaklıkta çizilen d doğrusuna paralel d_1 ve d_2 doğrularıdır. M noktasından 8 cm uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri M merkezli 8 cm yarıçaplı çemberdir. O halde, bu iki geometrik yerin kesim noktaları olan P, K, N, S noktaları aradığımız geometrik yerdir.



3. Paralel İki Doğrudan Eşit Uzaklıkta Bulunan Noktaların Geometrik Yeri

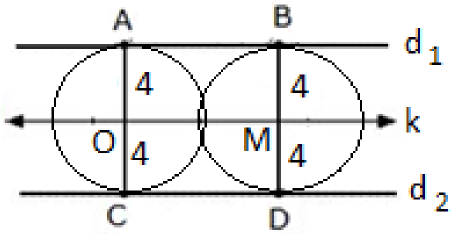
2.3. Aksiyom: Düzlemde paralel d_1 ve d_2 gibi iki doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik, bu iki doğruya eşit uzaklıkta ve paralel olan bir k doğrudur.



d_1 ve d_2 doğruları k doğrusuna eşit uzaklıktadır.

Örnek: $d_1 // d_2$ olmak üzere iki doğru veriliyor. Bu iki doğruya teğet ve yarıçapı 4 cm olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: d_1 ve d_2 doğrularına teğet çemberlerden iki tanesi (0, 4) ve (M,4) çemberleri olsun. (M, 4) çemberi, d_1 ve d_2 doğrularına C ve D noktalarında, (0, 4) çemberi de A ve B noktalarında teğettir. [AB] ve [CD] çapları d_1 ve d_2 doğrularına diktir. O halde, O ile M noktalarının d_1 ve d_2 doğrularına uzaklıkları eşittir.

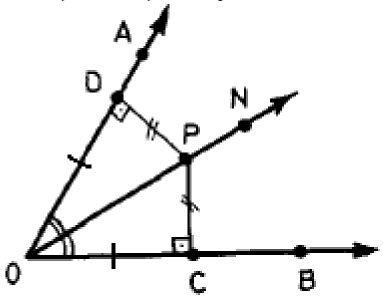


$$|OA| = |OB| = |MC| = |MD| = ... = 4\text{cm}$$

dir. O halde d_1 ve d_2 doğrularına teğet olan 4 cm yarıçaplı çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, d_1 ve d_2 doğrularına 4 cm uzaklıkta ve paralel olan k doğrusudur.

4. Bir Açının Kenarlarından Eşit Uzaklıkta Bulunan Noktaların Geometrik Yeri

2.4. Aksiyom: Düzlemde, bir açının kenarlarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu açının açıortayıdır.

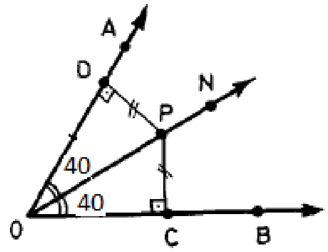


C noktası [OA ve [OB ışınları eşit uzaklıkta $|DP| = |PC|$ olsun. ODP ile OCP üçgenlerinin birer dik kenarları eş ve hipotenüsleri ortak olduğundan, $O\overset{\Delta}{D}C \sim O\overset{\Delta}{C}P$ olur.

Eş üçgenlerde karşılıklı açılar eş olacağından, $m(AOP) = m(BOP)$ dir. O halde [OC açıortay ve C noktası da AOB açısının açıortayı üzerindedir.

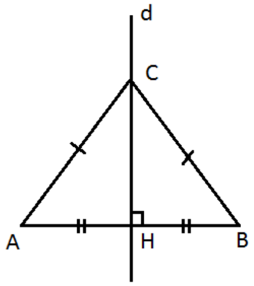
Örnek: Ölçüsü 80^0 olan AOB açısının kenarlarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: AOB açısının [OA ve [OB kenarlarına eşit uzaklıktaki noktalarının geometrik yeri, $m(AOP) = m(BOP) = 40^0$ olacak şekilde çizilen [OC dır.



5. Bir Doğru Parçasının Uç Noktalarından Eşit Uzaklıkta Bulunan Noktaların Geometrik Yeri

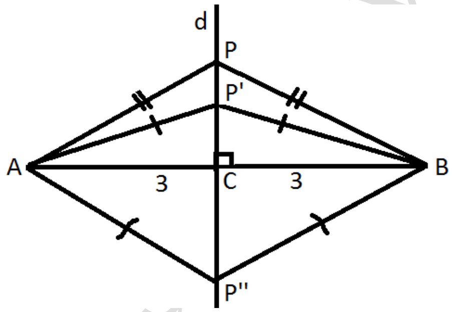
2.5. Aksiyom: Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları eşit noktaların geometrik yeri orta dikme doğrusudur.



CAB üçgeninde [CH] hem kenarortay, hem de yükseklik olduğundan CAB üçgeni ikizkenardır. $|AC| = |BC|$ dir. Dolayısıyla C noktası orta dikme üzerindedir. O halde, [AB] doğrusunun uç noktalarına eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri [AB] nın orta dikmesi yani d doğrusudur.

Örnek: Uzunluğu 6 cm olan AB doğru parçasının uç noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm:



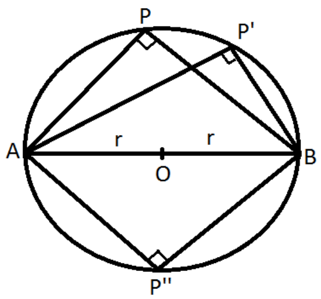
$C \in [AB]$ ve $|AC| = |CB| = 3\text{cm}$ olacak şekilde alınan C noktasından geçen ve [AB] noktasına dik olan d doğrusu A ve B noktalarına eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir. Şekilde;

$|PA| = |PB|$, $|P'A| = |P'B|$, $|P''A| = |P''B|$, ...

olur.

6. Bir Doğru Parçasını Dik Açı Altında Gören Noktaların Geometrik Yeri

[AB] çaplı çemberin A ve B noktalarından farklı her P noktası için, $m(APB) = 90^0$ (çapı gören çevre açı) dir.



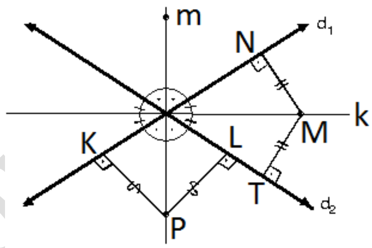
$m(APB) = 90^0$ şartını sağladığı halde, çembere ait olmayan herhangi bir nokta yoktur.

1. [AB] çaplı çemberin A ve B noktalarından farklı her P noktası [AB] doğrusunu dik açı altında görür.

2. Çemberin [AB] çapını dik açı altında göre her P noktası çemberin üzerindedir.

GEOMETRİK YER İLE İLGİLİ YORUMLAR

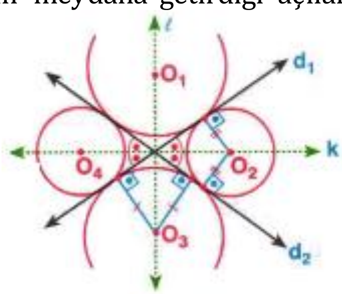
1. Düzlemde kesişen iki doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu iki dorunun oluşturduğu açıların açıortaylarıdır.



$|PK| = |PL|$ ise [OP açıortaydır.

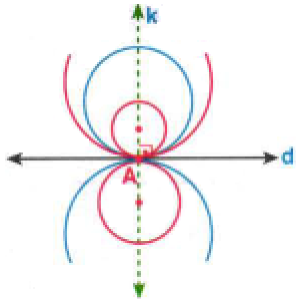
$|MT| = |MN|$ ise [OM açıortaydır.

2. Düzlemde, kesişen iki doğruya teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, bu doğruların meydana getirdiği açıların açıortaylarıdır.



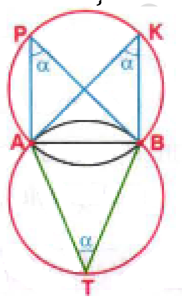
k ve l doğrusu, d_1 ve d_2 kesişen doğrularına teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeridir.

3. Düzlemde bir d doğrusuna üzerindeki bir A noktasında teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, A noktasından d doğrusuna çizilen bir dik doğrudur.



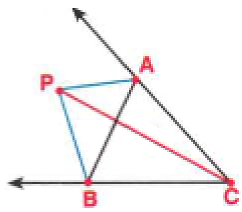
d doğrusu bütün çemberlerle A noktasında teğet ve yarıçap değme noktasında teğet dik olacağından, çemberlerin yarıçapları A noktasında d doğrusuna dik olacaktır. Dolayısıyla k doğrusu da bu merkezlerin oluşturduğu geometrik yerdir.

4. Düzlemde bir [AB] doğrusu α açısı altında gören noktaların geometrik yeri, [AB] doğrusunu kiriş kabul eden iki çember yaydır.

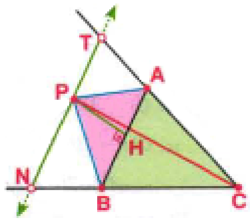


[AB] doğrusu α açısı altında gören noktaların geometrik yeri APB yayıdır. A ve B noktaları dâhil değildir.

Örnek: P noktası ABC üçgeninin dışında ve ABC açısının iç bölgesinde herhangi bir noktadır. $A(\overset{\Delta}{PBC})+A(\overset{\Delta}{APC})$ daima sabit olduğuna göre, alınan P noktalarının geometrik yerini bulunuz.

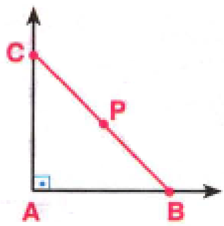


Çözüm: $A(\overset{\Delta}{PBC})+A(\overset{\Delta}{APC})=A(\overset{\Delta}{ABC})+A(\overset{\Delta}{PBC})$ dir.



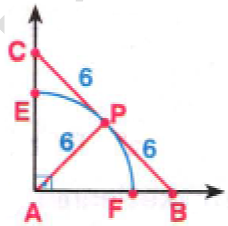
dır. Burada $A(\overset{\Delta}{ABC})$ sabit olduğundan, $A(\overset{\Delta}{PBC})$ sabitliğini sağlamalıyız. PBA üçgeninin bir tabanını [AB] doğrusunu alırsak, [AB] kenarına ait yüksekliği sabitlememiz gerekir. P noktasından geçen ve [AB] kenarına paralel olan TN doğrusunu alalım. TN doğrusu üzerindeki her noktanın [AB] doğrusu üzerinde taşıyan doğruya uzaklığı eşittir. O halde, P noktalarının geometrik yeri, TN doğrusu üzerinde olan ve ACB açısının iç bölgesinde kalan]TN[dir.

Örnek:



Şekilde, [AB $\perp$ [AC, $|BC| = 12\text{cm}$ olmak üzere [BC] doğrusunun uç noktaları B ve C, [AB ve [AC üzerinde değiştiğine göre, [BC] doğrusunun P orta noktalarının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm:



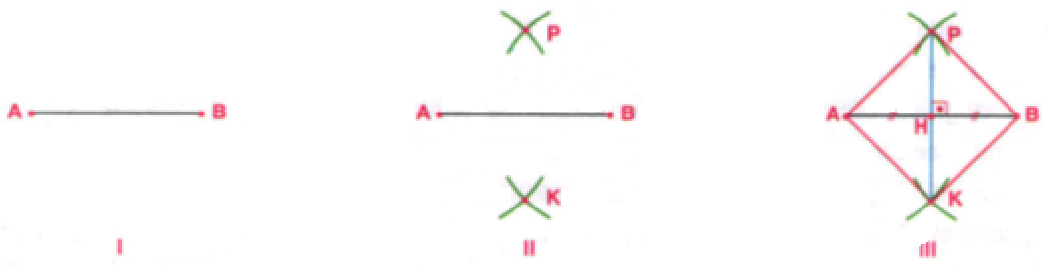
CAB dik üçgeninde [BC] hipotenüsüne ait kenarortayın uzunluğu

$$|AP| = \frac{|BC|}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{cm}$$

dir. O halde, P noktalarının geometrik yeri, A merkezli EF yayıdır.

TEMEL ÇİZİMLER

1. Verilen Bir Doğru Parçasının Orta Dikmesini Çizmek



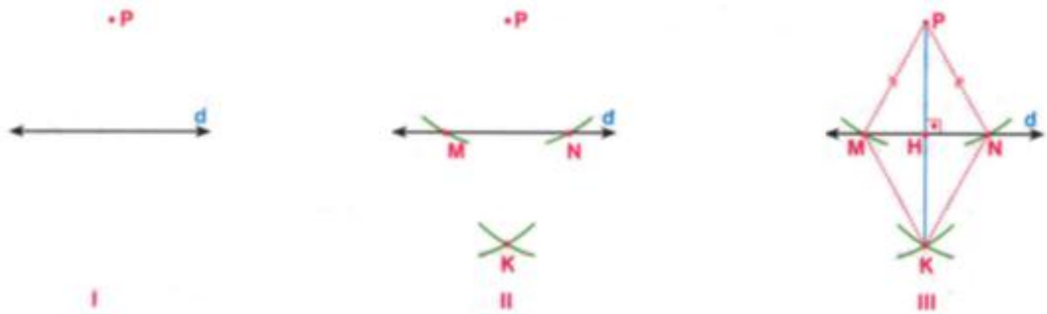
I. [AB] doğru parçası veriliyor.

II. $r \geq \dfrac{|AB|}{2}$ olacak şekilde A ve B merkezli r yarıçaplı P ve K da kesişen yaylar çiziliyor.

III. P ile K noktaları birleştiriliyor. H noktası [AB] doğrusunun orta noktasıdır. AKBP dörtgeni eşkenar dörtgen olur.

Buna göre $|AH| = |HB|$ ve $[AB] \perp [PK]$ dır.

2. Verilen Bir Doğruya Herhangi Bir Noktadan Dik Doğru Çizmek

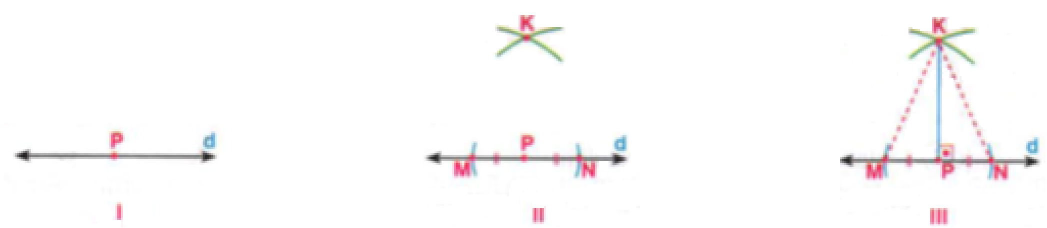


I. d doğrusu ve dışındaki bir P noktası veriliyor.

II. P merkezli yay, d doğrusunu M ve N noktalarında kesiyor. Aynı yarıçaplı M ve N merkezli yaylar K noktasında kesişiyor.

III. P ve K noktasını birleştiren doğru d doğrusuna dik olur. Oluşan PMKN dörtgeni bir deltoid olduğundan, köşegenler dik kesişir. Buna göre $d \perp [PK]$ dır.

3. Verilen Bir Doğruya Üzerindeki Bir Noktadan Dik Doğru Çizmek



I. d doğrusu ve üzerinde bir P noktası veriliyor.

II. $|PM| = |PN|$ olacak şekilde M ve N noktaları tespit ediliyor. Aynı yarıçaplı M ve N merkezli çember yayları K noktasında kesişiyor.

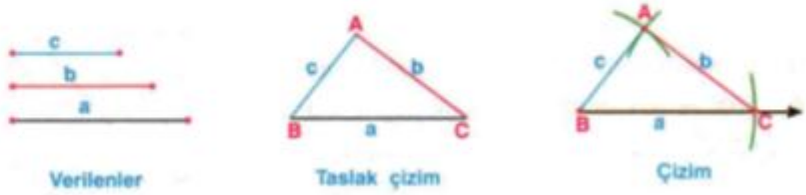
III. P ile K noktasını birleştiren doğru d doğrusuna diktir.

ÜÇGEN ÇİZİMİ

ABC üçgen de $V_a, V_b, V_c, h_a, h_b, h_c, n_A, n_B, n_C$ elemanları üçgenin yardımcı elemanları, $|AB| = c, |BC| = a, |CA| = b$ kenarlardır.

Bir üçgeni çizebilmek için en az üç elemanı bilinmelidir. Bu elemanlardan en az biri uzunluk olmalıdır.

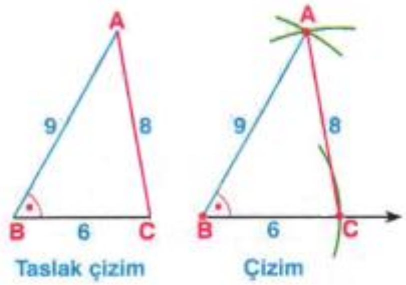
1. Üç Kenar Uzunluğu Verilen Üçgenin Çizimi



Üç kenarı verilen bir üçgenin çizilebilmesi için kenar uzunluklarının üçgen eşitsizliğini sağlaması gerekir. Başlangıç noktası B olan bir ışın alınır. Merkezi B ve yarıçapı a olan çemberin ışını kestiği nokta C köşesi olur. Aynı şekilde merkezi B ve yarıçapı c olan çemberle, merkezi C ve yarıçapı b olan çemberin kesişme noktası A köşesini verir.

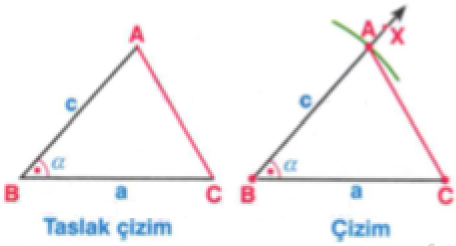
Örnek: Kenar uzunlukları $a = 6\,cm$, $b = 8\,cm$ ve $c = 9\,cm$ olan ABC üçgenini çiziniz.

Çözüm: Başlangıç noktası B olan bir ışın alınıyor, B merkezli 6 cm yarıçaplı yay ışını C de kesiyor. B merkezli 9 cm yarıçaplı yay ile C merkezli 8 cm yarıçaplı yay A noktasında kesişiyorlar. A, B, C noktalarının birleşimi ile ABC üçgeni ortaya çıkar.



2. İki Kenar Uzunluğu ile Bu Kenarlar Arasında Kalan Açısının Ölçüsü Verilen Üçgenin Çizimi (a, m(B), c)

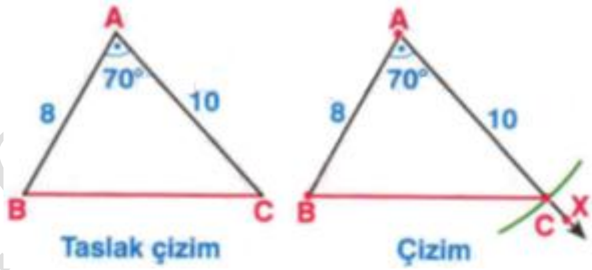
$|BC| = a$ olacak şekilde [BC] kenarını çizelim. $m(\hat{B}) = m(C\hat{B}X)$ olacak şekilde [BX ışınını çizelim. B merkezli c yarıçaplı yayın ışını kestiği nokta üçgenin A köşesidir. A ile C birleştirilirse ABC üçgeni oluşur.



Örnek: $b = 10cm$, $c = 8cm$ ve $m(\hat{A}) = 70^0$ olarak verilen ABC üçgenini çizelim.

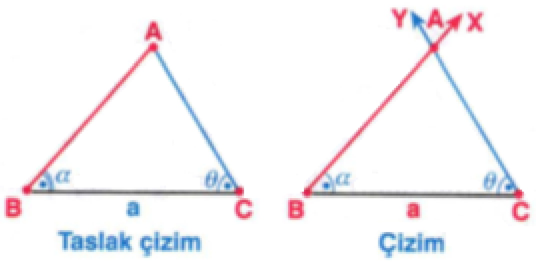
Çözüm: $|AB| = 8cm$ olacak şekilde [AB] kenarını çizelim. $m(B\hat{A}X) = 70^0$ olacak şekilde [AX ışınını çizelim ve A merkezli 10 cm yarıçaplı çember yayının ışını kestiği noktayı işaretleyelim.

Bu nokta üçgenin C köşesidir. B ile C birleştirirsek ABC üçgeni oluşur.



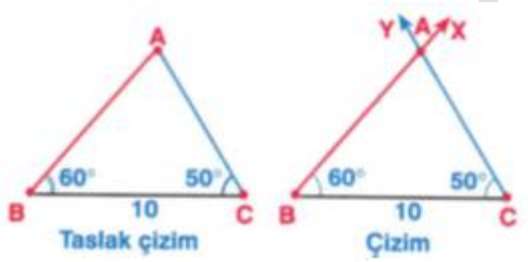
3. Bir Kenar Uzunluğu ile Bu Kenara Komşu İki Açısı Verilen Üçgenin Çizimi (a, m(B), m(C))

$|BC| = a$ olacak şekilde [BC] kenarını çizelim. $m(\hat{B}) = m(C\hat{B}X)$ olacak şekilde [BX ışını ve $m(\hat{C}) = m(B\hat{C}Y)$ olacak şekilde [CY ışını çizersek bu ışınların kesiştiği nokta A noktasıdır.



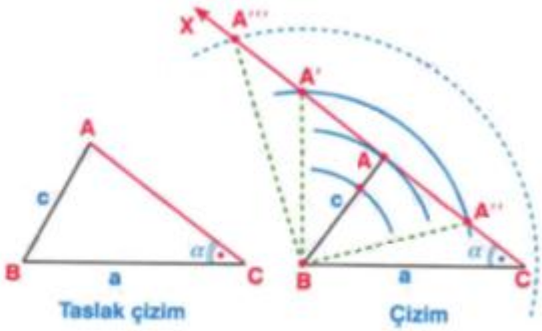
Örnek: $m(\hat{B})=60^0$, $a=10cm$ ve $m(\hat{C})=50^0$ olan ABC üçgenini çiziniz.

Çözüm: $|BC|=a=10cm$ olacak şekilde [BC] kenarını çizelim. $m(C\hat{B}X)=60^0$ ve $m(B\hat{C}Y)=50^0$ olacak şekilde [BX ve [CY ışınını çizelim. Bu ışınların kesiştiği nokta üçgenin A köşesidir.



4. İki Kenar Uzunluğu ile Bu Kenarlar Arasında Olmayan Bir Açısı Verilen Üçgenin Çizimi (a, m(C), c)

$|BC|=a$ olacak şekilde [BC] kenarını çizelim. $m(\hat{C})=m(B\hat{C}X)$ olacak şekilde [CX ışını çizelim. B merkezli c yarıçaplı çemberin [CX ışını kestiği nokta A köşesidir. A ile B birleştirilir ve ABC üçgeni çizilmiş olur.

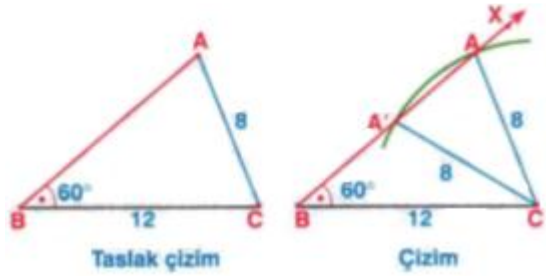


1. $c<a$ ise c yarıçaplı çember [CX ışınını iki nokta keserse, $A'\hat{B}C$ ve $A''\hat{B}C$ gibi iki çizim vardır. Teğet ise $A\hat{B}C$ gibi bir çizim vardır. Kesmez ise çizim mümkün değildir.

2. $c > a$ için $A'''\hat{B}C$ gibi tek bir çizim vardır.

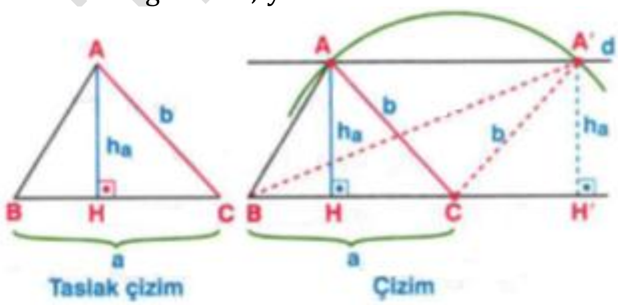
Örnek: $m(\hat{B}) = 60^0$, $b = 8cm$ ve $c = 12cm$ elemanları ile verilen ABC üçgenini çizelim.

Çözüm: $|BC| = a = 12cm$ olacak şekilde [BC] kenarını çizelim. $m(C\hat{B}X) = 60^0$ olacak şekilde [BX ışınını çizelim. C merkezli 8 cm yarıçaplı yay [BX ışınını A ve A' gibi iki noktada keser. A ve A' noktalarını C ile birleştirirsek $A\overset{\Delta}{B}C$ ve $A'\overset{\Delta}{B}C$ gibi iki tane çizim elde edilir.



5. İki Kenarı ve Bilinen Bir Kenara Ait Yüksekliği Verilen Üçgenlerin Çizimi (a, b, h_a)

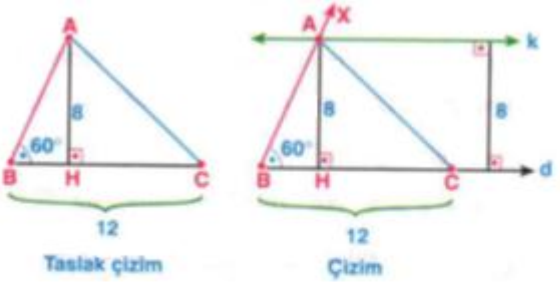
$|BC| = a$ olacak şekilde [BC] kenarını çizelim. [BC] doğrusuna h_a kadar uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olan d doğrusu çizilir. C merkezli b yarıçaplı çemberin d doğrusunu kestiği nokta, yani A noktasıdır.



1. $h_a > b$ ise üçgen çizilemez.
2. $h_a = b$ ise tek bir çizim vardır.
3. $h_a < b$ ise $A\overset{\Delta}{B}C$ ve $A'\overset{\Delta}{B}C$ gibi iki çizim vardır.

Örnek: $a = 12cm$, $m(B) = 60^0$ ve $h_a = 8cm$ elemanları verilen ABC üçgenini çiziniz.

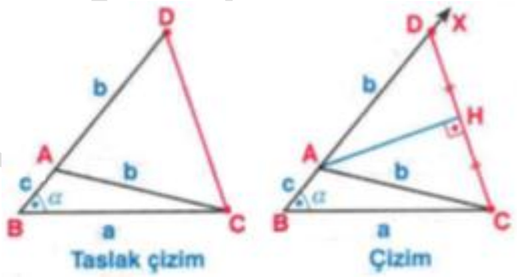
Çözüm: d doğrusu üzerinde $|BC| = 12cm$ olacak şekilde [BC] kenarını alalım. d doğrusundan 8 cm uzaklıktaki noktaların geometrik yeri k doğrusu olsun. k // d dir.



$m(C\hat{B}X) = 60^0$ olacak şekilde [BX ışınını çizersek bu ışının k doğrusunu kestiği nokta A köşesidir. A ile C yi birleştirirsek ABC üçgenini çizmiş oluruz.

6. Bir Kenarı, Diğer İki Kenarın Toplamı ve Toplanan Kenarlardan Birinin Açısı Bilinen Üçgenin Çizimi (a, b + c, m(B))

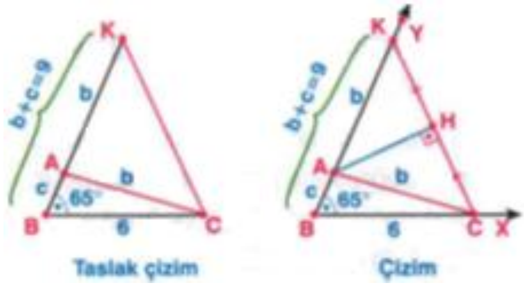
$|BC| = a$ olacak şekilde [BC] kenarını çizelim. $m(\hat{B}) = m(C\hat{B}X)$ olacak şekilde [BX ışını çizip, bu ışın üzerinde $|BD| = b + c$ olacak şekilde D noktasını işaretleyelim. D ile C yi birleştirirsek DBC üçgeni oluşur. [DC] doğrusunun orta dikmesini alırsak, bu dikmenin [BD] doğrusunu kestiği nokta A köşesidir. A ile C yi birleştirdiğimizde [AH] hem yükseklik, hem de kenarortay olduğundan $\overset{\Delta}{ACD}$ ikizkenardır. O halde, $|AC| = |AD|$ olup ABC üçgeni çizilmiş olur.



$b + c > a$ ise bu çizim yapılabilir.

Örnek: $a = 6cm$, $m(B) = 65^0$ ve $b + c = 9cm$ elemanları verilen üçgeni çiziniz.

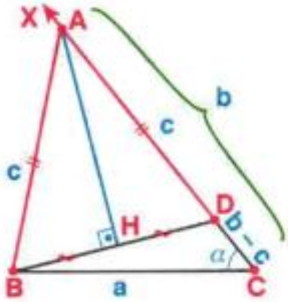
Çözüm: [BX üzerinde $|BC| = 6cm$ olacak şekilde [BC] kenarını alalım. $m(X\hat{B}Y) = 65^0$ olacak şekilde [BY ışınını çizelim ve $|BK| = b + c = 9cm$ olacak şekilde [BY üzerinde bir K noktası alalım. K ile C noktalarının birleştirilmesiyle KBC üçgeni oluşur. [KC] kenarının orta dikmesinin [KB] kenarını kestiği nokta A noktasıdır. A ile C noktası birleştiğinde ABC üçgeni çizilmiş olur.



7. Bir Kenarı, Diğer İki Kenarın Farkı ve Farkı Alınan Kenarın Açısı Bilinen Üçgenin Çizimi (b – c, a, m(C))

$|BC| = a$ olacak şekilde [BC] kenarını ve $m(\hat{C}) = m(B\hat{C}X)$ olacak şekilde [CX ışınını çizelim. [CX üzerinde $|CD| = b - c$ olacak şekilde D noktası alalım ve B ile birleştirelim.

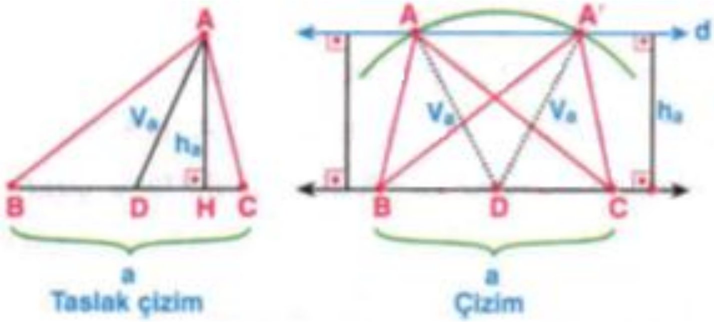
Oluşan DBC üçgeninde [BD] doğrusunun orta dikmesinin [CX ışınını kestiği nokta A köşesidir. [AH] hem yükseklik, hem kenarortay olduğundan $\overset{\Delta}{ABD}$ ikizkenardır. Buna göre $|AB| = |AD| = c$ ve $|AC| = b$ dir. Dolayısıyla ABC üçgeni çizilmiş olur.



$|b - c| < a$ ise bu çizim yapılabilir.

8. Bir Kenarı, Bu Kenara Ait Kenarortay ve Yüksekliği Bilinen Üçgenin Çizimi (a, V_a, h_a)

$|BC| = a$ olacak şekilde [BC] kenarını ve [BC] kenarına paralel h_a uzunluğunda noktaların geometrik yerini (d doğrusunu) çizelim. d // BC dir. D noktası [BC] doğrusunun orta noktası olsun ve D merkezli V_a yarıçaplı çember yayının d doğrusunu kestiği noktaları işaretleyelim. İşaretlediğimiz bu A ve A' noktaları A köşesidir. Bu noktaları B ve C ile birleştirirsek ABC ve A'BC üçgenleri çizilir.



1. $V_a > h_a$ ise iki tane çizim vardır.
2. $V_a = h_a$ ise tek çizim vardır.
3. $V_a < h_a$ ise çizim yapılamaz.

9. Bir Kenarının Yüksekliği, Diğer Kenarının Kenarortayı ve Kenarortay ile Yüksekliği Bilinen Doğrular Arasında Kalan Açı Biliniyorsa Üçgenin Çizimi (h_a, V_c, m(B))

[BX ışınına h_a uzaklığındaki noktaların geometrik yeri olan doğruyu çizelim ve d doğrusu diyelim. d // [BX olur. $m(\hat{B}) = m(X\hat{B}Y)$ olacak şekilde [BY ışınını çizersek, bu ışının d doğrusunu kestiği nokta A köşesidir. [AB] kenarının orta noktasını D olarak alalım. D merkezli V_c yarıçaplı çemberin [BX ışınını kestiği nokta C köşesi olur ve ABC üçgeni çizilmiş olur.