# 3. BÖLÜM
# UZAY GEOMETRİ



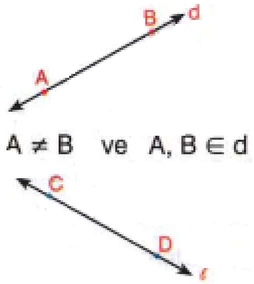
**UZAY GEOMETRİYE GİRİŞ**

Geometriye bu kısma kadar iki boyutlu düzlemde nokta, doğrunun sağladığı tanımlar, aksiyomlar ve aksiyomlar ile bunların sonuçlarını kullanarak, bazı düzlemsel şekillerin özellikleri ve bu şekillerin elemanları arasındaki bağıntıları incelemiştik. Bu kısma düzlem geometrisi dendiğini biliyoruz. Şimdi uzay geometrisini tanımlayalım.

**3.1. Tanım:** Kâinattaki bütün noktaların kümesine uzay denir. Uzayda en, boy ve derinlik olmak üzere üç ayrıtı vardır. Üç boyutu geometrik olarak incelemeye uzay geometrisi denir.

Uzay geometri, kâinatta ve içinde bulunan nesnelerin sahip olduğu özellikleri inceler. Özelliklerin bazıları açıklanamaz, fakat doğrulukları görülür ve herkes tarafından kabul edilir. Bu benzeri kavramlarda tanımsız terim ve doğruluğundan şüphe edilmeyen özelliklere aksiyom denildiği geometriye giriş kısmında anlatılmıştı.

**3.1. Aksiyom:** Uzayda farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

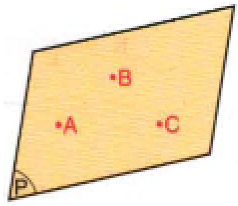



Uzayın farklı iki noktası olan A ve B noktalarını üzerinde bulunduran bir tek d doğrusu vardır.

Uzayın C ve D gibi farklı iki noktasından geçen bir tek $\ell$ doğrusu vardır.

Bu aksiyom düzlem geometrisi için de geçerlidir.

**3.2. Aksiyom:** Uzayda, bir doğru üzerinde bulunmayan farklı üç noktadan bir tek düzlem geçer.

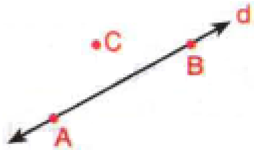



A, B, C ∈ P

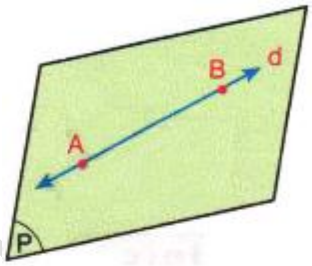
A, B, C doğrusal olmayan farklı üç nokta olup, bir tek düzlem belirtir.

Bütün üçgenler düzlemsel şekillerdir. Çünkü doğrusal olmayan üç nokta bir üçgen belirtir.

**3.3. Aksiyom:** Herhangi bir doğru üzerinde en az iki ve dışında en az bir nokta vardır.

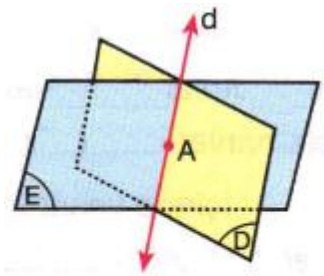



**3.4. Aksiyom:** Bir doğrunun farklı iki noktası, bir düzlemin içinde ise, bu doğru üzerindeki bütün noktalar da bu düzlem içindedir.



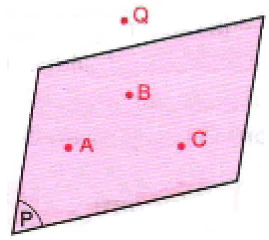

$A,B \in d$ ve $A,B \in P$ ise $d \in P$

**3.5. Aksiyom:** Farklı iki düzlemin ortak bir noktası varsa, bu noktadan geçen bir de ortak doğruları vardır.

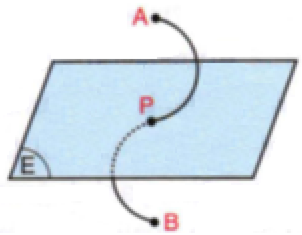



E ve D düzlemlerin ortak noktası d doğrusu ise bu iki düzlemin ara kesiti

**3.6. Aksiyom:** Uzayda bir düzlemin dışında en az bir nokta vardır.

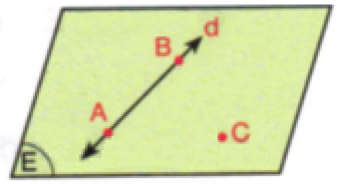



**3.7. Aksiyom (Uzay Ayırma Aksiyomu):** Bir düzlem uzayı iki yarı uzaya ayırır.




Bu yarı uzaydaki iki noktayı birleştiren doğru veya eğri ile düzlemin ara kesiti bir nokta olur.

**3.1. Teorem:** Uzayda bir doğru ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir nokta, bir tek düzlem belirtir.

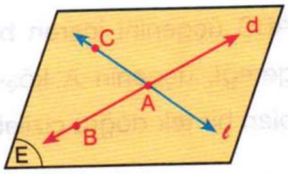



d doğrusu ve doğru üzerinde olmayan C noktası verilsin. Bu takdirde d doğrusu ile C noktasını içeren bir tek düzlem vardır.

İspat: d doğrusu ve d doğrusu üzerinde olmayan bir nokta C olsun. 3.3. Aksiyom "Herhangi bir doğru üzerinde en az iki ve dışında en az bir nokta vardır." aksiyomundan dolayı d doğrusu üzerinde A ve B gibi farklı iki nokta alabilir. 3.2. Aksiyom "Bir doğru üzerinde bulunmayan farklı üç noktadan bir tek düzlem geçer." aksiyomundan A, B, C noktaları bir tek düzlem belirtir.

Bir doğrunun farklı iki noktası bir düzlem üzerinde ise bu doğru üzerindeki bütün noktalar da bu düzlem üzerindedir. Dolayısıyla d doğrusu ile C noktası bir tek düzlem belirtir.

**3.2. Teorem:** Uzayda kesişen farklı iki doğru bir tek düzlem belirtir.



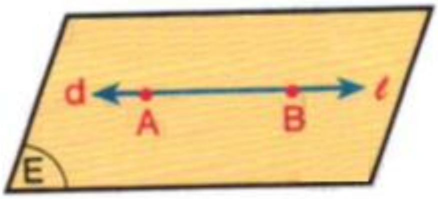

$d \neq \ell$ ve $d \cap \ell = \{A\}$ ise d ve $\ell$ doğrusunu içeren bir tek düzlem vardır.

İspat: d ve $\ell$ doğruları A noktasında kesişen farklı iki doğru olsun. 3.3. Aksiyom “Herhangi bir doğru üzerinde en az iki ve dışında en az bir nokta vardır.” Aksiyomundan dolayı d doğrusu üzerinde A noktasından farklı bir B noktası ve $\ell$ doğrusu üzerinde de bir C noktası vardır. 3.2. Aksiyom “Uzayda, bir doğru üzerinde bulunmayan farklı üç noktadan bir tek düzlem geçer.” gereği A, B, C noktaları bir tek düzlem belirtir, d ve $\ell$ doğruları da bu düzlem içindedir.

## DÜZLEMDE İKİ DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE KONUMLARI

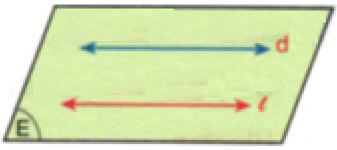
Uzayda, bir düzlemin içinde bulunan d ve $\ell$ doğruları, birbirine göre üç farklı konumda bulunur.

**1.** İki doğru çakışık olabilir. Buna göre; d ve $\ell$ doğrularının en az iki noktası ortak ise, bu iki doğru çakışıktır.




$A, B \in d$ ve $A, B \in \ell$ ise $d \cap \ell = d = \ell$

**2.** İki doğru birbirine paralel olabilir. Bu durumda doğruların ara kesitleri boş kümedir.

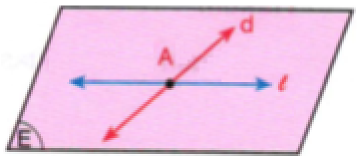



Paralel iki doğruyu içine alan bir tek düzlem vardır.

$d \subset E, \ell \subset E$ ve $d // \ell \Rightarrow d \cap \ell = \varnothing$

$d \subset E, \ell \subset E$ ve $d \cap \ell = \varnothing \Rightarrow d // \ell$

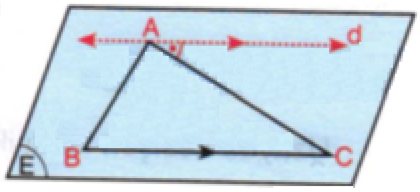
**3.** Aynı düzlemdeki iki doğru birbirine paralel değilse, bu doğrular bir noktada kesişirler.




$d \subset E, \ell \subset E \text{ ve } (d // \ell)' \Rightarrow d \cap \ell = \{A\}$

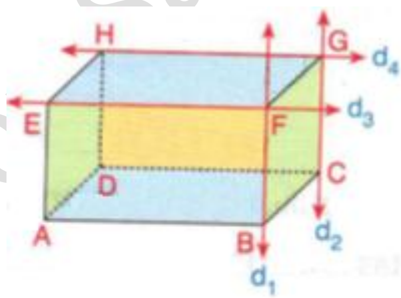
**3.8. Aksiyom (Paralellik Aksiyomu):** Düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan, bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebilir.

**Örnek:** Uzayda bir ABC üçgeninin A köşesinden geçen ve [BC] kenarına paralel olan bir tek doğru çizilebileceğini gösterelim.




Çözüm: Bir üçgenin köşeleri doğrusal olmayan farklı üç nokta olduğundan, bütün üçgenler düzlemsel şekillerdir. Yani, ABC üçgenini içeren bir tek düzlem vardır. Paralellik aksiyomu gereği, üçgenin A köşesinden geçen ve [BC] kenarına paralel olan bir tek doğru çizilebilir.

**UZAYDA İKİ DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE KONUMLARI**




Şekilde dikdörtgenler prizmasının yan ayrıtlarını taşıyan FB, GC, HG ve EFE doğruları uzayda iki doğrunun birbirine göre konumları hakkında bilgi verilmektedir. Buna göre;

1. İki doğru çakışık olabilir.
2. İki doğru birbirine paralel olabilir.
3. İki doğru kesişebilir.
4. İki doğru aykırı olabilir.

İlk üç durum, düzlemdeki doğruların durumları ile aynıdır. Fakat uzayda kesişmeyen iki doğru için farklı durum vardır.

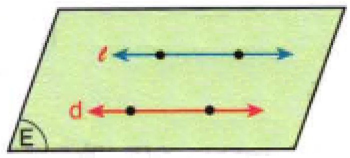
**3.2. Tanım:** Uzayın aynı düzleminde bulunmayan ve kesişmeyen doğrularına **aykırı doğrular** denir.

Şekildeki $d_1$ ve $d_4$ doğruları aykırı doğrulardır. $d_1 \cap d_4 = \varnothing$ dir ve bu doğrular aynı düzlemde değildir.

**3.3. Tanım:** Uzayın aynı düzleminde bulunan ve kesişmeyen doğrularına paralel doğrular denir.

Şekildeki $d_1$ ve $d_2$ doğruları paralel doğrulardır. $d_1$ ve $d_2$ doğruları aynı düzlemde olup $d_1 \cap d_2 = \varnothing$ dir. Şekilde $d_1 // d_2$ ve $d_3 // d_4$ iken $d_1$ ve $d_4$ ve $d_2$ ve $d_3$ doğruları aykırı doğrulardır.

**3.3. Teorem:** Uzayda paralel iki doğru bir tek düzlem belirtir, yani paralel iki doğru bir tek düzlem içindedir.




$d // \ell$

d ve $\ell$ doğruları birbirine paralel ise d ve $\ell$ doğruları bir tek düzlem belirtir.

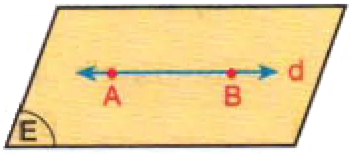
İspat: d ve $\ell$ doğruları birbirine paralel iki doğru ve bu doğruların içinde olduğu düzlem E olsun. 3.4. Aksiyom "Bir doğrunun farklı iki noktası, bir düzlemin içinde ise, bu doğru üzerindeki bütün noktalar da bu düzlem içindedir." gereği d ve $\ell$ doğrularının her noktası bu düzlem üzerindedir. d üzerindeki herhangi iki nokta ve $\ell$ üzerindeki herhangi bir nokta 3.2. aksiyom gereği E düzlemini bir tek düzlem olarak belirtir.

**UZAYDA BİR DOĞRU İLE BİR DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE KONUMLARI**

**3.4. Tanım:** Uzayda bir düzlem ile doğrunun ortak noktaları yoksa (arakesitleri boş küme ise), bu doğru ile düzlem birbirine paraleldir denir.

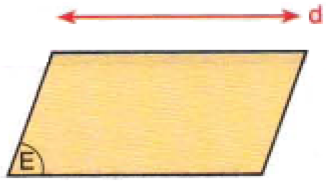
Uzayda bir doğru ile bir düzlem üç farklı konumda bulunabilir:

**1.** Doğru düzlemin içinde olabilir. Doğru düzlemin içinde ise doğrunun her noktası düzlemin içindedir.



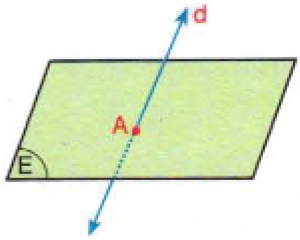

$d \subset E \Leftrightarrow d \cap E = d$

**2.** Doğru düzleme paralel olabilir. Doğru düzleme paralel ise doğru ile düzlemin ara kesitleri boş kümedir.




$d // E \Leftrightarrow d \cap E = \varnothing$

**3.** Doğru düzlemi kesebilir. Doğru düzlemi kesiyorsa, doğru ile düzlemin ara kesitleri bir noktadır.




$d \cap E = \{A\}$



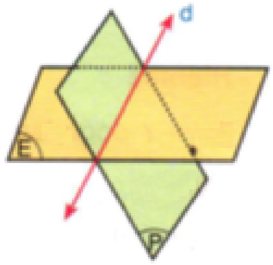
**UZAYDA İKİ DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE KONUMLARI**

Uzayda iki düzlem birbirine göre üç farklı konumda bulunabilir.

**1.** İki düzlem çakışık olabilir. İki düzlem çakışık ise ara kesitleri düzlemlerin kendisidir ve doğrusal olmayan en az üç ortak noktası vardır.

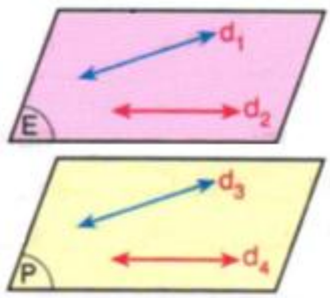

**3.1. Sonuç:** Doğrusal olmayan farklı üç noktası ortak olan iki düzlem çakışıktır.

**2.** İki düzlem kesişebilir. İki düzlem kesişiyorsa, bu iki düzlemin ara kesitleri bir doğrudur.




$P \cap E = d$

**3.** İki düzlem birbirine paralel olabilir. İki düzlem birbirine paralel ise bu iki düzlemin ortak noktası yoktur veya ara kesitleri boş kümedir.




$E // P \Leftrightarrow E \cap P = \varnothing$

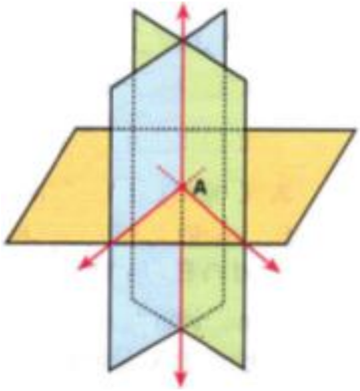
Paralel iki düzlem içindeki doğrular, birbirine paralel veya aykırı doğrulardır.

**PARALEL DÜZLEMLER**

**3.5. Tanım:** Uzayda iki düzlemin ortak noktaları yoksa, bu düzlemlere paralel düzlemler denir. Dikdörtgenler prizması şeklindeki bir ambalaj kutusunun yan yüzleri, sınıfımızın duvarları ile taban ve tavan düzlemleri paralel düzlemlere birer örnektir.

**BİR NOKTADAN GEÇEN DÜZLEMLER**

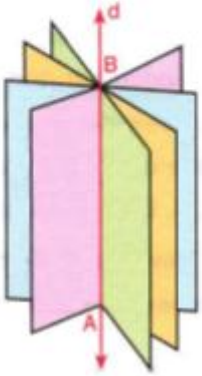
**3.9. Aksiyom:** Herhangi bir A noktasından geçen sonsuz çoklukta düzlem vardır veya bir noktadan sonsuz düzlem geçer.



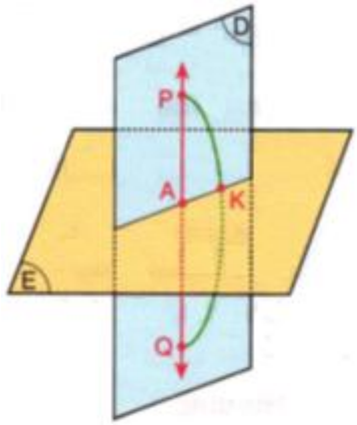

## BİR DOĞRUDAN GEÇEN DÜZLEMLER (DÜZLEM DEMETİ)

**3.6. Tanım:** İki düzlemin ara kesitinden geçen bütün düzlemlere uzayda **düzlem demeti** denir.

Bir doğrudan geçen sonsuz çoklukta düzlem vardır. Doğrusal olmayan farklı üç nokta bir tek düzlem belirttiğinden, bir doğruyu içine alan bir tek düzlem yoktur veya bir doğru düzlemin tekliği için yeterli değildir.




**3.4. Teorem:** Farklı iki düzlemin bir ortak noktası varsa, iki düzlemin bu noktadan geçen bir ortak doğrusu vardır.




A noktası, E ve D gibi farklı iki düzlemin ortak bir noktası ise E ile D düzlemlerinin, A noktasından geçen bir ortak doğruları vardır.

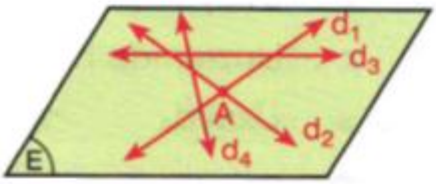
İspat: D ile E düzlemleri farklı iki düzlem ve A noktası da bu düzlemin ortak noktası olarak verildiğine göre, D düzlemi içinde bir P noktası alalım. E düzleminin ayırdığı diğer yarı uzayda AP doğru üzerinde bir de Q noktası alalım. P ve Q noktalarını birleştiren eğri E düzlemini K noktasında keser (3.7. Uzay Ayırma Aksiyomu), K noktası E düzlemine ait olduğundan AK doğrusu E ve D düzleminde olur.

3.1. teoremden "Uzayda bir doğru ile dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir düzlem geçtiğinden" bu iki düzlemin ara kesiti sadece AK doğrusudur.

**3.2. Sonuç:** Farklı iki düzlemin en çok bir ortak doğrusu vardır veya farklı iki düzlem kesişirse, bu düzlemlerin ara kesiti bir tek doğrudur.

**Örnek:** İkişer ikişer kesişen farklı dört doğrunun düzlemsel olduğunu gösterelim.

Çözüm: $d_1, d_2, d_3$ ve $d_4$ doğruları ikişer ikişer kesişsinler.




$d_1 \cap d_2 = \{A\}$ ise $d_1$ ve $d_2$ doğruları bir tek düzlem belirtir. $d_3$ doğrusu $d_1$ ve $d_2$ doğruları ile kesişiyorsa, bu doğru, farklı iki noktası düzlemin içinde olduğundan, düzlemin içindedir. Aynı şekilde $d_4$ doğrusu da düzlemin içindedir. Böylece bu dört doğru da düzlemseldir.

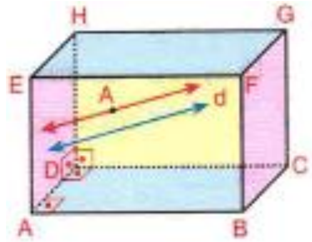
**Örnek:** Uzayda herhangi üçü doğrusal olmayan ve aynı düzlemde bulunmayan A, B, C, D, E, F noktalarından kaç farklı düzlem geçer?

Çözüm: Doğrusal olmayan herhangi üç noktadan bir düzlem geçeceğinden, bu altı noktadan herhangi üçünü

$$C(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!.3!=20}$$

farklı şekilde seçebiliriz. Bu da herhangi üçü doğrusal ve düzlemsel olmayan altı noktadan 20 farklı düzlem geçeceğini gösterir.

**3.5. Teorem:** Uzayda bir doğrunun dışında alınan bir noktadan bu doğruya bir tek paralel doğru çizilebilir.




Uzayda A noktası d doğrusunun dışında ise A noktasından d doğrusuna paralel bir tek doğru çizilebilir.

İspat: 3.1. teoremden "Uzayda bir doğru ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir nokta, bir tek düzlem belirtir." den d doğrusu ile dışındaki A noktası bir tek düzlem belirtir. "Düzlemde, bir doğruya dışındaki bir noktadan, bir tek paralel doğru çizilebilir." Paralellik aksiyomundan dolayı uzayda bir doğrusuna, dışındaki A noktasından bir tek paralel doğru çizilebilir.

**Örnek:** Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

p: "Düzlemde paralel iki doğrudan birini kesen bir doğru diğerini de keser"

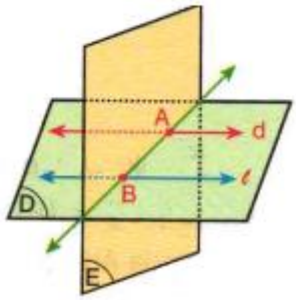
q: "Uzayda paralel iki doğrudan birini kesen doğru diğerini kesmeyebilir."

r: "Uzayda bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz çoklukta paralel doğru çizilebilir."

s: "Düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir."

Çözüm: p, q ve s önermeleri doğru iken r önermesi yanlıştır.

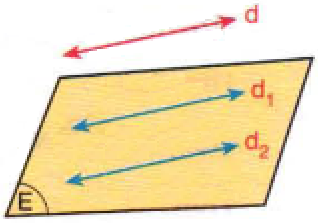
**3.6. Teorem:** Uzayda paralel iki doğrudan birini bir tek noktada kesen bir düzlem, diğer doğruyu da keser.




$d // \ell$ ve $E \cap d = \{A\}$ ise $E \cap \ell = \{B\}$

İspat: $d // \ell$ ve $E \cap d = \{A\}$ dır. d ve $\ell$ doğruları düzlemseldir D ve E düzlemlerinin A noktası ortak olduğundan 3.4. teorem gereğince ortak bir doğruları vardır. Düzlemde paralel iki doğrudan birini kesen doğru doğruyu da keser. Bundan dolayı iki düzlemin ara kesit doğrusu, $\ell$ doğrusunu da B noktasında keser.

**3.7. Teorem:** Uzayda aynı doğruya paralel olan farklı iki doğru birbirine paraleldir.



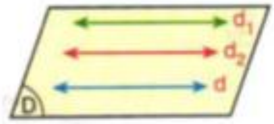

$d_1 // d$ ve $d_2 // d \Leftrightarrow d_1 // d_2$

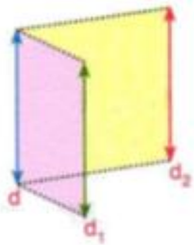
İspat: $d_1 // d$ ise $d_1$ ve d doğruları düzlemseldir. $d_2$ doğrusunun bu düzleme göre iki farklı durumu vardır:

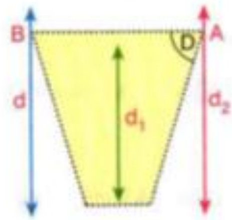
**1.** Her üç doğru da düzlemseldir. Bu nedenle, bir düzlemde paralel iki doğrudan birine paralel olan doğru diğerine de paraleldir.

**2.** $d_2$ doğrusu düzlemin dışında ve d doğrusuna paraleldir. Buna göre $d_1 // d$ ve $d_2 // d$ iken $d_1$ ve $d_2$ doğruları kesişmez. Çünkü $d_1$ ve $d_2$ doğruları bir A noktasında kesişseler bu noktadan geçen ve d doğrusuna paralel olan iki doğru olurdu ki bu durum paralellik aksiyomu ve 3.5. teoremi ile çelişir. d, $d_1$ ve $d_2$ doğruları düzlemsel değilken $d_1$ ve $d_2$ doğrularının düzlemsel olduğunu göstermek gerekir.

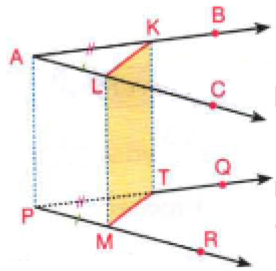
Bu durumda $d_1$ ve $d_2$ doğruları düzlemsel olmadığını varsayalım. $d_1$ doğrusunu içinde bulunduran ve $d_2$ doğrusunun A noktasından geçen D düzlemi d doğrusunu da 3.6. teorem gereğince B noktasında keser. Oysa B noktası ile $d_1$ doğrusu da D düzleminde olduğu için B noktasından geçen $d_1$ doğrusuna paralel olan d doğrusu da D düzlemi içinde olur. Bu durum da $d_1$ ve $d_2$ doğruları aynı düzlemdedir. Bu durum bir çelişkidir.








**Örnek:** Uzayda [AB // [PQ ve [AC // [PR olmak üzere [AB ve [PQ ile [AC ve [PR ışınları üzerinde $|AK|=|PT|$ ve $|AL|=|PM|$ olacak şekilde sırasıyla K, T, L ve M noktalarını alalım. Bu durumda AKTP, ALMP, KLMT dörtgenlerinin paralelkenar olduklarını gösteriniz.

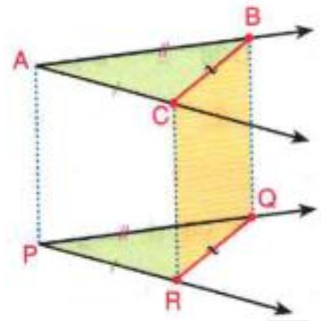



Çözüm: [AB // [PQ ve $|AK|=|PT|$ olduğundan, AB doğrusu ile PQ doğrusu düzlemsel ve AKTP dörtgeni bir paralelkenardır. AKTP bir paralelkenar ise $|AP|=|KT|$ olur.

Aynı şekilde [AC // [PR ve $|AL|=|PM|$ olduğundan, AC doğrusu ile PR doğrusu düzlemsel ve ALMP dörtgeni bir paralelkenardır. ALMP bir paralelkenar ise $|AP|=|LM|$ olur.

ALK ve PMT üçgenlerinin düzlemleri birbirine paralel ve $|KT|=|LM|$ olduğundan KLMT dörtgeni bir paralelkenardır.

**3.8. Teorem:** Uzayda kenarları aynı yönde paralel olan açılar birbirine eştir.



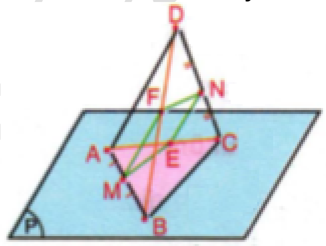

$B\hat{A}C$ ve $Q\hat{P}R$ açılarının kenarları aynı yönde ise $B\hat{A}C \cong Q\hat{P}R$ dir.

İspat: BAC ile QPR açılarının karşılıklı kenarları üzerinde $|AB| = |PQ|$ ve $|AC| = |PR|$ uzunluklarını alalım. APRC, APQB ve CRQB dörtgenlerinde karşılıklı kenarlar eş ve paralel olur. Dolayısıyla bu dörtgenler birer paralelkenardır. O halde K.K.K. eşlik teoremi gereği $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{PQR}$ olur.

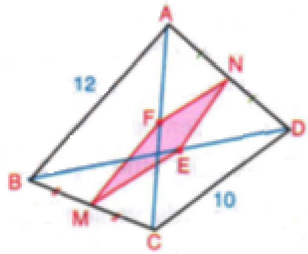
Eş üçgenlerde karşılıklı açılar eş olacağından $B\hat{A}C \cong Q\hat{P}R$ bulunur.

**UZAY DÖRTGENİ**

**3.7. Tanım:** Dört köşesi düzlemsel olmayan dörtgene uzay dörtgeni denir.




**Örnek:** Dört köşesi düzlemsel olmayan ABCD dörtgeninde $|AB| = 12\,\text{br}$ ve $|DC| = 10\,\text{br}$ dir. ABCD dörtgeninin karşılıklı iki kenarının orta noktalarının, köşegenlerin orta noktalarına birleştirilmesi ile oluşan dörtgenin çevresini bulunuz.




Çözüm: Her üçgen düzlemsel olduğundan ACD, BCD, ABC ve ABD üçgenleri düzlemseldir. Buna göre;

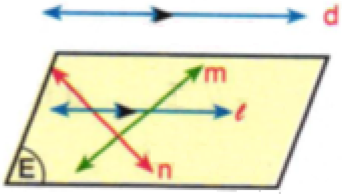
$[FN] // [CD]$, $[ME] // [CD]$ ise $[ME] // [FN]$ ve $|ME| = |FN| = \dfrac{|AB|}{2} = 5\,\text{br}$

$[MN] // [AB]$, $[EN] // [AB]$ ise $[MF] // [EN]$ ve $|MF| = |EN| = \dfrac{|AB|}{2} = 6\,\text{br}$

Ç(FMEN) = 5 + 6 + 5 + 6 = 22 br

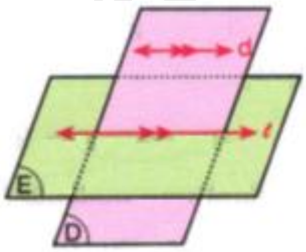
**UZAYDA BİR DOĞRUNUN BİR DÜZLEME PARALELLİĞİ**

**3.8. Tanım:** Uzayda bir doğru ile bir düzlemin ara kesitleri boş küme ise, bu doğru ile düzlem birbirine paraleldir denir.




Bir doğru bir düzleme paralel ise, düzlem içindeki doğrularla paralel veya aykırı doğrular oluşturur.

**3.9. Teorem:** Bir düzlemin içindeki bir doğruya paralel olan doğru bu düzleme de paraleldir.



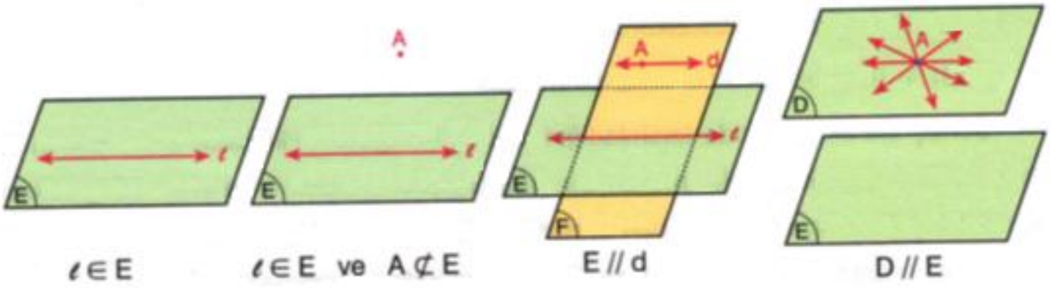

$\ell \in E$ ve $d // \ell$ ise $d // E$

İspat: d doğrusu E düzlemi içindeki $\ell$ doğrusuna paralel olsun. 3.3. teorem gereğince $\ell$ ve d doğruları düzlemseldir. Bu paralel iki doğrunun belirttiği düzlem D ise, $E \cap D = \ell$ dir. Eğer d doğrusu ile E düzleminin bir ortak noktası varsa bu nokta $\ell$ üzerinde olmak zorundadır. $d // \ell$ olduğundan bu durum mümkün değildir ve buradan E düzlemi ile d doğrusunun ortak noktası yoktur. Doğru ile düzlemin paralelliği tanımından d doğrusu E düzlemine paraleldir.

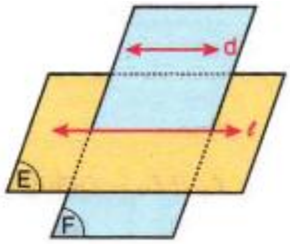
**Örnek:** Bir düzleme dışındaki bir noktadan paralel bir doğru çiziniz.

Çözüm: Bir düzleme dışındaki bir noktadan sonsuz çoklukta paralel doğru çizilebilir ve bu doğrulardan her birinin, düzlem içinde paralel olduğu en az bir doğru vardır. Düzleme dışındaki bir noktadan paralel bir doğru çizmek için düzlemin içinde bir $\ell$ doğrusu alınır. $\ell$ doğrusuna verilen noktadan paralel bir doğru çizilir. Bir doğru ve dışındaki bir nokta bir tek düzlem belirtir. Buna göre, bir düzleme dışındaki bir noktadan paralel bir doğru çizme işlemi gerçekleştirilmiş olur.

Uzayda verilen bir noktadan geçen ve verilen düzleme paralel olan sonsuz çoklukta doğru vardır.




**3.10. Teorem:** Bir doğru bir düzleme paralel ise, bu doğruyu üzerinde bulunduran ve verilen düzlemi kesen herhangi bir düzlemin ara kesit doğrusu, verilen doğruya paraleldir.



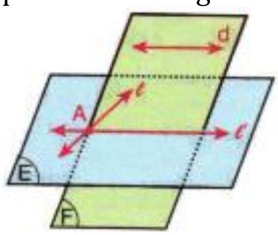

$d // E, d \subset F$ ve $E \cap F = \ell$ ise $d // \ell$

İspat: d doğrusu E düzlemine paralel olsun. D doğrusunun içinde olduğu düzlem de F düzlemi olsun. E ve F düzleminin ara kesit doğrusuna $\ell$ diyelim. Kabul edelim, $(d//\ell)'$ olsun. Bu takdirde

$(d//\ell)'$ ise $d \cap \ell = \{A\}$

olurdu. Öyleyse d doğrusunun E düzlemini kesmesi demektir ki hipotezdeki kabulle çelişir. O halde $d//\ell$ dir.

**3.11. Teorem:** Bir doğru bir düzleme paralel ise, bu düzlemdeki bir A noktasından geçen ve bu doğruya paralel olan doğru bu düzlemin içindedir.

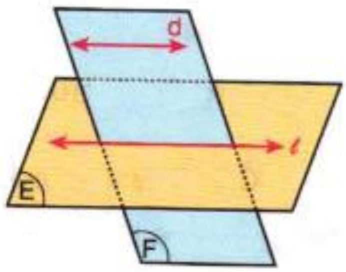



$d // E, A \in E, d // \ell$ ve $A \in \ell$ ise $\ell \subset E$

İspat: d doğrusu E düzlemine paralel olsun. $\ell$ doğrusu da E düzlemindeki A noktasından geçsin ve d doğrusuna paralel olsun. A noktası ile d doğrusunun belirttiği düzlemin ara kesiti $\ell'$ doğrusu olsun.

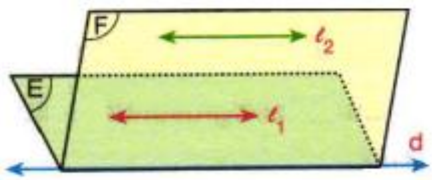
$\ell$ doğrusunun d doğrusuna paralel olduğunu 3.10. teoremden biliyoruz. A noktasından geçen, d doğrusuna paralel olan bir tek doğru olduğundan $\ell = \ell'$ olur ve bundan dolayı $\ell$ doğrusu E düzleminin içindedir.

**3.3. Sonuç:** Bir doğru bir düzleme paralel ise, bu doğru kendisinin de içinde bulunduğu herhangi bir düzlem ile paralel olan düzlemin ara kesitine paraleldir.




**3.4. Sonuç:** Uzayda bir doğrunun bir düzleme paralel olması için, bu doğrunun bu düzlem içindeki herhangi bir doğruya paralel olması gerek ve yeterdir.

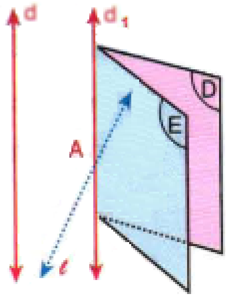
**3.12. Teorem:** Uzayda paralel iki doğrudan geçen ve kesişen iki düzlemin ara kesiti, bu doğrulara paraleldir.




$\ell_1 // \ell_2$, $\ell_1$ doğrusu E düzleminde, $\ell_2$ doğrusu F düzleminde ve $E \cap F = d$ ise $\ell_1 // \ell_2 // d$ dir.

İspat: $\ell_1 // \ell_2$ olduğundan $\ell_1$ doğrusu F düzlemine ve $\ell_2$ doğrusu E düzlemine paraleldir. 3.10. teoremden $\ell_2$ doğrusu d doğrusuna ve $\ell_1$ doğrusu da d doğrusuna paraleldir. Buradan $\ell_1 // \ell_2 // d$ olur.

**3.13. Teorem:** Bir doğru kesişen her iki düzleme de paralel ise bu düzlemlerin ara kesitine de paraleldir.




$D \cap E = d_1$ ve $d // D$, $d // E$ ise $d // d_1$ dir.

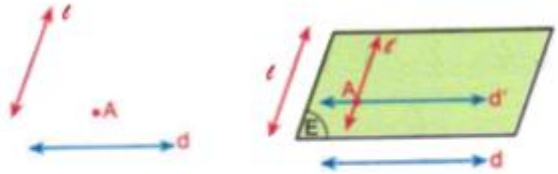
İspat: D ile E düzlemlerinin ara kesit doğrusu üzerinde alınan bir A noktasından, d doğrusuna paralel bir $\ell$ doğrusu çizilsin.

"Bir d doğrusu, bir E düzlemine paralel ise; E düzlemi içinde alınan bir A noktasından geçen bir $\ell$ paraleli, E düzleminin içindedir." A notası, iki düzlemin ara kesit doğrusu $d_1$ üzerinde olduğundan aynı zamanda $\ell$, D düzlemi içindedir. Dolayısıyla $\ell$ doğrusu, $d_1$ ara kesit doğrusuyla çakışıktır. O halde $d // d_1$ dir.

**3.5. Sonuç:** Aykırı iki doğrudan birini içinde bulunduran ve diğer doğruya paralel bir tane düzlem vardır.

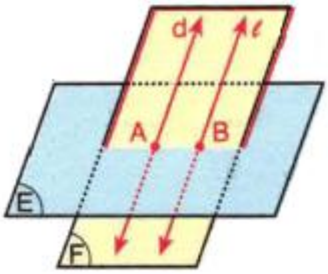
**Örnek:** $\ell$ ve d aykırı doğruları ile bu doğruların dışında bir A noktası veriliyor. A noktasından geçen ve her iki doğruyu da paralel olan düzlemin bir tane midir? Araştırınız.

Çözüm: A noktasından, $\ell$ ve d doğrularına sırasıyla $\ell'$ ve d' paralel doğrularını çizelim. A noktasından bu doğrulara çizilen paraleller birer tanedir. 3.3. teoremden "Kesişen iki doğru bir tek düzlem belirtir" ifadesinden $\ell'$ ve d' doğrularının belirttiği düzlem bir tane olduğundan bu doğruların ikisine de paralel ve A noktasından geçen düzlem bir tanedir.




**Örnek:** Paralel iki doğrudan biri düzlemi kesiyorsa, diğer doğrunun da düzlemi kestiğini gösteriniz.

Çözüm:

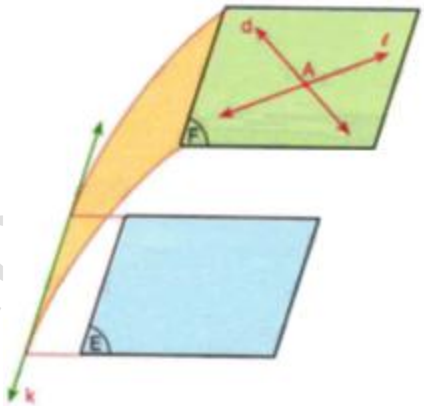



d ve $\ell$ birbirine paralel iki doğru olsun ve $\ell$ doğrusu E düzlemini B gibi bir noktada kessin. Kabul edelim d doğrusu E düzlemini kesmesin. Bu durumda $d \cap E = \varnothing$ ve $d // E$ olur. $d // \ell$ ve $d // E$ ise $\ell // E$ durumu $\ell$ doğrusu düzlemi B noktasında kestiğinden bir çelişkidir. O halde d doğrusu da E düzlemini A gibi bir noktada keser.

## PARALEL DÜZLEMLER

**3.9. Tanım:** İki düzlemin ortak noktaları yoksa bu düzlemlere paralel düzlemler denir. Bir evin tavanı ile tabanı paralel düzlemlere birer örnektir.

**3.14. Teorem:** Kesişen iki doğru, bir E düzlemine paralel ise, bu doğruların belirttiği düzlem de E düzlemine paraleldir.

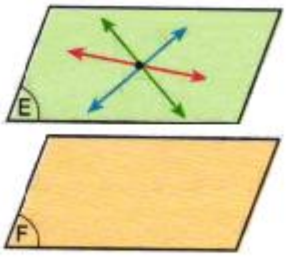



$d \cap \ell = \{A\}$, $d, \ell \in F$, $d // E$ ve $\ell // E$ ise $F // E$

İspat: Kabul edelim ki $(F // E)'$ ise, F ile E düzlemleri bir k doğrusu boyunca kesişirler. Bu durumda d ve $\ell$ doğrularından en az birinin, E düzlemini kesmesi gerekir. Bu ise hipoteze aykırıdır. Dolayısıyla F // E dir.

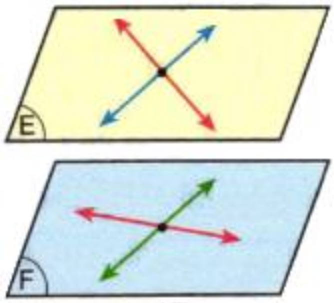
Buna göre bir düzleme paralel olan ve kesişen iki doğrunun belirttiği düzlem, bu doğruların paralel olduğu düzleme paraleldir.

**3.6. Sonuç:** Bir düzlemin dışındaki bir noktadan geçen ve düzleme paralel olan doğruların hepsi, bu noktadan geçen ve verilen düzleme paralel olan düzlem içindedir.



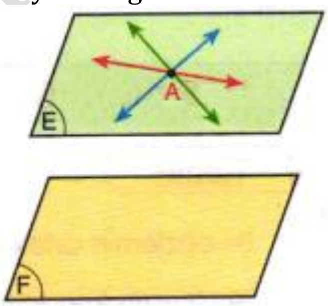

İki düzlemin birbirine paralel olduğunu göstermek için, bu düzlemlerden birinin içinde bulunan ve kesişen iki doğrunun diğer düzleme paralel olduğunu göstermek gerek ve yeterdir.

**3.7. Sonuç:** Paralel iki düzlemden birinin içindeki her doğru diğer düzleme paraleldir.




E // F

**3.8. Sonuç:** Uzayda verilen bir düzlemin dışındaki bir noktadan geçen ve düzleme paralel olan sonsuz sayıda doğru vardır.




A noktasından geçen ve F düzlemine paralel doğrular, E düzlemindeki doğru demetidir.

Paralel iki düzlemden birinin içindeki tüm doğrular diğer düzleme paraleldir.

**Örnek:** p: "Aykırı iki doğrunun ikisine de paralel bir düzlem çizilebilir."

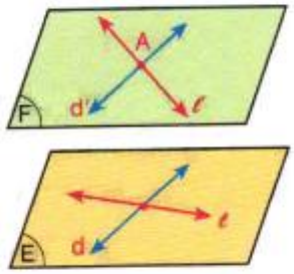
q: “Bir düzlemin dışındaki bir noktadan geçen paralel bir doğru ile ortak noktası bulunan ve bu düzleme paralel olan tüm doğrular düzlemseldir.”

r: “Bir E düzlemi ile bu düzleme paralel bir d doğrusunu alalım. d doğrusunu kapsayan ve E düzlemine paralel olan bir tek düzlem vardır.”

s: “Paralel iki düzlem içindeki tüm doğrular birbirine paraleldir.”

Çözüm: p, q ve r önermeleri doğru iken s önermesi yanlıştır.

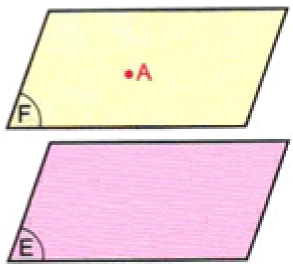
**3.15. Teorem:** Uzayda bir düzlem dışındaki bir noktadan, bir ve yalnız bir düzlem çizilebilir.




$A \notin E$ ise A noktasından E düzlemine paralel, bir tek düzlem çizilebilir.

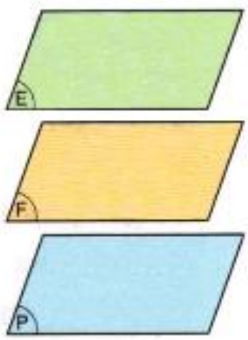
İspat: d ve $\ell$ doğruları E düzlemi içinde iki doğru olsun. Paralellik aksiyomundan E düzleminin dışındaki A noktasından d doğrusuna paralel olan tek d′ doğrusu vardır. Aynı şekilde A noktasından $\ell$ doğrusuna paralel olan tek $\ell'$ doğrusu vardır. Kesişen iki doğru E düzlemine paralel ise bu doğruların ikisinin birden içinde bulunduğu düzlem, E düzlemine paraleldir. Kesişen iki doğrunun da bir tek düzlem belirtmesi, E düzleminin dışındaki bir A noktasında düzleme paralel bir tek düzlem çizilebileceğini gösterir.

**3.9. Sonuç:** Verilen bir noktadan geçen ve verilen düzleme paralel bir tek düzlem vardır.




**3.10. Sonuç:** Bir düzlemin dışındaki bir noktadan geçen ve bu düzleme paralel doğruların tümü düzlemseldir.

**3.16. Teorem:** Aynı düzleme paralel olan düzlemler birbirine paraleldir.



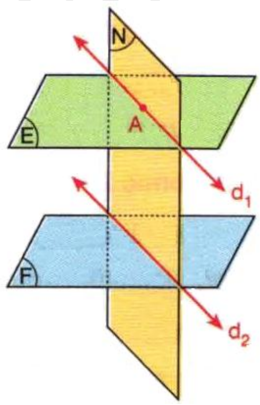

$$E//F \text{ ve } F//P \Leftrightarrow E//P$$

İspat: Kabul edelim ki, E düzlemi P düzlemine paralel olmasın. Bu takdirde, bu düzlemlerin en az bir ortak noktası vardır. Yani, ara kesitleri A noktasından geçen bir doğrudur.

Oysa uzayda bir düzlem ve düzlem dışında bir nokta verildiğinde, verilen noktadan geçen ve verilen düzleme paralel bir tek düzlem vardır. Bu durum E = P çelişkisini verir.

O halde, E // P dir.

**3.17. Teorem:** Paralel iki düzlemden birini kesen bir düzlem, diğerini de keser ve ara kesit doğruları birbirine paraleldir.

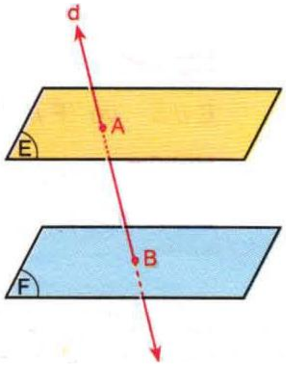



$$E//F \text{ ve } E \cap N = d_1 \text{ ise } F \cap N = d_2 \text{ ve } d_1 // d_2$$

İspat: $E//F$ ve $E \cap N = d_1$ olduğuna öre, E düzlemi üzerinde, $A \in d_1$ noktasını aldığımızda $A \in E$ ve $A \in N$ dir. A noktasından geçen E düzlemi F düzlemine paralel olduğundan $N//F$ olamaz. Yani N düzlemi E ve F düzlemlerini keser.

$F \cap N = d_2$ olsun. Burada $d_1 // d_2$ olduğunu gösterdiğimizde ispat tamamlanmış olur. $d_1 \subset N$ ve $d_2 \subset N$ dir. Farz edelim $d_1 // d_2$ olmasın, aynı düzlem üzerindeki iki doğru paralel değilse, K gibi bir noktada kesişirler. Dolayısıyla E ve F düzlemlerinin K gibi bir ortak noktaları olur. Bu durumda $E//F$ olmaz. Bu durum hipotezle çelişir. Buna göre $d_1//d_2$ dir.

**3.18. Teorem:** Paralel iki düzlemden birini kesen bir doğru diğerini de keser.

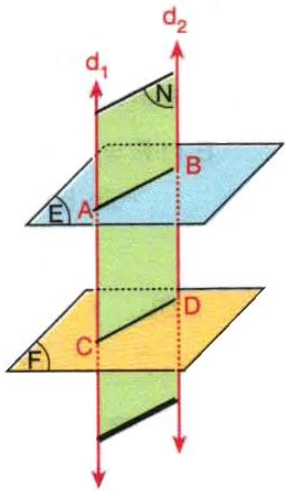



$E//F$ ve $d \cap E = \{A\}$ ise $d \cap F = \{B\}$

İspat: Bu ispatı çelişki bulma yöntemiyle yapalım.

Kabul edelim ki, d doğrusu F düzlemini kesmesin. "Bir düzlemin dışındaki belli bir noktadan geçen ve verilen düzleme paralel olan düzlemin içindedir" sonucu gereği, d doğrusu F düzlemini kesmezse, E düzlemi içinde bulunması gerekir. Oysa d doğrusu E düzlemini A gibi tek bir noktada kesmektedir. Bu durum hipotezle çeliştiğinden, d doğrusu E düzlemini keserse, E düzlemine paralel olan F düzlemini de B gibi bir notada keser.

**3.19. Teorem:** Paralel düzlemler arasında kalan paralel doğru parçaları birbirine eştir.




$E//F$, $d_1//d_2$, $d_1 \cap E = \{A\}$, $d_1 \cap F = \{C\}$ ve $d_2 \cap F = \{D\}$ ise $|AC| = |BD|$

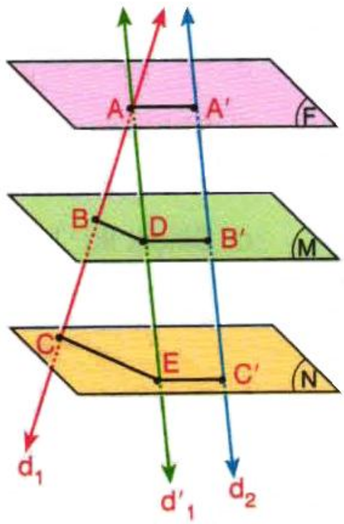
İspat: $d_1$ ve $d_2$ doğruları paralel iki doğru olduğundan N gibi bit tek düzlem belirtirler. N düzleminin E ve F düzlemleri ile ara kesitleri AB ve CD doğrularıdır.

Paralel iki düzlemin üçüncü bir düzlemle ara kesitleri birbirine paralel doğrular olduğundan, [AB] // [CD] dir. Bu durumda ABCD dörtgeni bir paralelkenardır. O halde, $|AC| = |BD|$ dir.

$d_1$ ve $d_2$ doğruları paralel iki doğru olduğundan N gibi bir tek düzlem belirtirler. N düzleminin E ve F düzlemleri ile ara kesitleri AB ve CD doğrularıdır.

Paralel iki düzlemin üçüncü bir düzlemle ara kesitleri birbirine paralel doğrular olduğundan, [AB]//[CD] dir. Bu durumda ABCD dörtgeni bir paralelkenardır. O halde, $|AC| = |BD|$ dir.

**3.20. Teorem:** Uzayda, herhangi iki doğruyu paralel düzlemler keserse, bu düzlem arasında kalan doğru uzunlukları orantılıdır.




F//M//NN, $d_1$ doğrusu F, M, N düzlemlerini sırasıyla A, B ve C noktalarında, $d_2$ doğrusu ise aynı düzlemleri A', B' ve C' noktalarında kesiyor ise

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

dir.

İspat: F düzlemindeki A noktasından geçen ve $d_2$ doğrusuna paralel olan $d'_1$ doğrusunu çizelim. Bu doğru M ve N düzlemlerini sarasıyla D ve E noktalarında kessin.

Paralel düzlemler arasında kalan paralel doğru parçaları birbirine eş olacağından, $|A'B'| = |AD|$ ve $|B'V'| = |DE|$ olur. Kesişen iki doğru tek düzlem belirteceğinden, A, B, D, C ve E noktaları $d_1$ ve $d'_1$ doğrularının belirttiği düzlem üzerinde bulunurlar. Burada önceki teoremlerden yararlanarak, [BD] // [CE] dir.

ACE üçgeninde temel orantı teoreminden,

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BE|} \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

bulunur. $|A'B'| = |AD|$ ve $|B'C'| = |DE|$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

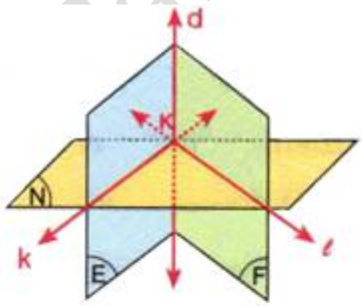
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

olur.

**Örnek:** Herhangi ikisi birbirine paralel olmayan farklı üç düzlemin birbirine göre konumlarını şekil çizerek gösterelim.

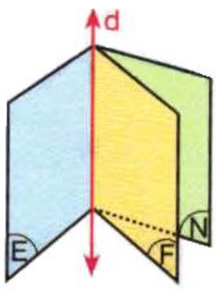
Çözüm: Bu üç düzlem E, F ve N düzlemleri olsun. Bu düzlemlerin herhangi ikisi paralel olmadığından $E \cap F, E \cap N$ ve $F \cap N$ birer doğrudur. Buna göre üç farklı durum vardır

1. Durum



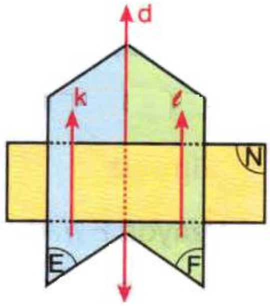

$E \cap F = d$ doğrusu N düzlemini bir noktada keser. Bu durumda üç düzleminin bir tek ortak noktası vardır. Şekildeki K noktası ortak noktadır.

2. Durum



$E \cap F = d$ doğrusu N düzlemini içinde bulunur. Bu durumda E, F ve N düzlemleri bir doğru boyunca kesişirler. Bu ortak doğru, d doğrusudur.

3. Durum



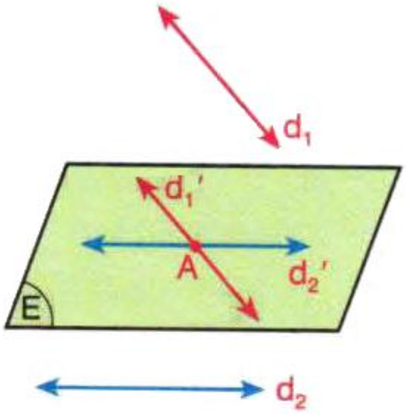

$E \cap F = d$ doğrusu N düzlemine paraleldir. Bu durumda üç ara kesit doğrusu birbirine paraleldir. Verilen şekilde $d // k // \ell$ dir.

**Örnek:** Sınıfımızın duvarları ile taban ve tavan düzlemlerini ve ara kesitlerini inceleyerek;

1. Birbirine paralel olan düzlemleri yazınız.
2. Kesişen düzlemler ile ara kesit doğrularını yazınız.
3. Bitişik iki duvarın ortak noktaları hangi doğru üzerindedir?
4. Bir ortak noktası olan üç düzlem gösteriniz.
5. Bir düzleme paralel olan doğruları yazınız.
6. Bir düzlem ile bu düzlemin dışında bir nokta gösteriniz.
7. Tavan düzlemindeki her doğru hangi düzleme paraleldir?

**Örnek:** Uzayda verilen bir noktadan geçen ve aykırı iki doğru paralel olan bir tek düzlem olduğunu ispatlayalım.

Çözüm: Verilen bir A ve verilen aykırı doğrular $d_1$ ve $d_2$ doğruları olsun.

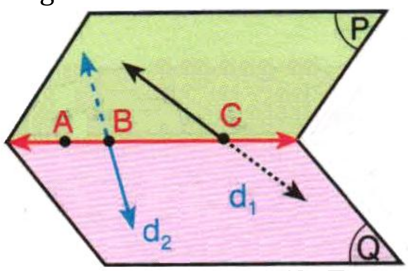



A noktasından geçen, $d_1$ doğrusuna paralel olan $d'_1$ doğrusunu alalım. Benzer şekilde, A noktası ile $d_2$ doğrusuna paralel $d'_2$ doğrusunu alalım. A noktasında kesişen $d'_1$ ve $d'_2$ doğrularının belirttiği E düzlemi $d'_1$ ve $d'_2$ doğrularına paraleldir. A noktasından geçen ve $d'_1$ ve $d'_2$ doğrularına da içine alan bir tek E düzlemi vardır.

**3.11. Sonuç:** Verilen aykırı iki doğrudan birini içine alan, diğerine paralel bir tek düzlem vardır.

**Örnek:** Aykırı iki doğru bu doğruların dışında bir nokta alalım. Bu noktadan geçen ve iki doğruyu da kesen bir doğrunun çizilebileceğini gösteriniz.

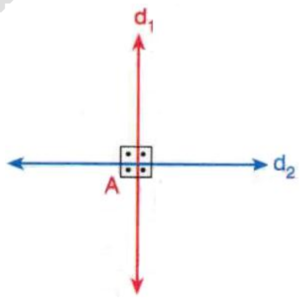
Çözüm: $d_1$ doğrusu ile A noktasının belirttiği düzleme P düzlemi ve A noktası ile $d_2$ doğrusunun belirttiği düzleme de Q düzlemi dersek, bu iki düzlemin ara kesiti olan AB doğrusu $d_1$ doğrusu C noktasında keser.



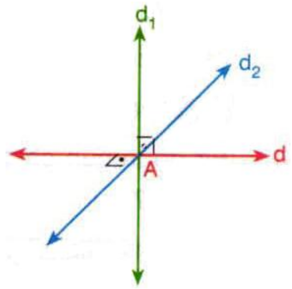

## UZAYDA DOĞRULARIN DİKLİĞİ

### Doğruların Dikliği

**3.10. Tanım:** Düzlemde, komşu bütünler ve eş olan açılar dik açılardır. Kesişen iki doğrunun oluşturduğu açılardan her biri dik açı ise bu iki doğru birbirine diktir.

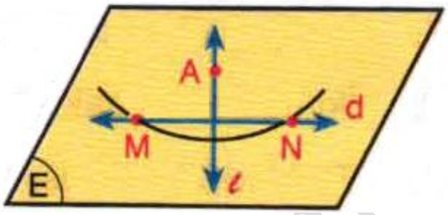



Düzlemde bir $d_1$ doğrusuna, üzerindeki bir A noktasından geçen ve bu doğruya dik olan bir tek $d_2$ doğrusu vardır. Bu durum, $d_1 \perp d_2$ şeklinde gösterilir.




Uzayda bir d doğrusuna, üzerindeki bir A noktasından dik olan sonsuz çoklukta doğru çizilebilir. Bir doğruyu içeren sonsuz çoklukta farklı düzlem olduğundan bir düzlemin içindeki bir doğruya dik, sonsuz çoklukta doğru vardır.

**Örnek:** Verilen bir doğruya dışındaki bir noktadan dik bir doğru çizerek bu doğrunun tekliğini gösterelim.

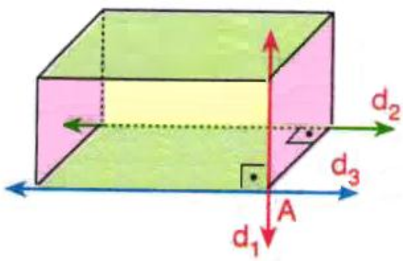



Çözüm: Bir d doğrusu ile bu doğrunun dışında bir A noktası alalım. Uzayda bir doğru ile dışındaki bir nokta bir tek düzlem belirttiğinden, d doğrusu ile A noktasını içine alan bir tek E düzlemi varıdır. Düzlemde bir doğruya verilen bir noktadan bir tek dik doğru çizilebilir.

E düzleminde A noktasından d doğrusuna dik bir doğru çizmek için, pergelimizin ucunu A'ya batırır ve diğer ucunu da d doğrusunu kesecek şekilde açarak MN yayını çizeriz. MN yayının orta noktası ile A noktasını birleştiren $\ell$ doğrusu d doğrusuna dik olur.

**3.11. Tanım:** Kesişen iki doğru arasındaki açılardan her birinin ölçüsü $90^0$ ise bu doğrulara dik doğrular denir.

Aynı iki doğrudan, birinin üzerindeki herhangi bir noktadan, diğerine çizilen paralel doğru bu doğruya dik ise, aykırı bu iki doğruya dik doğrular denir.



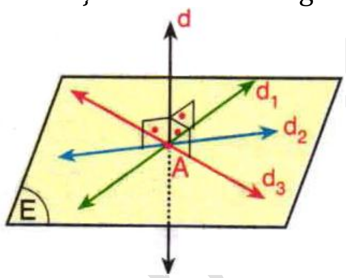
$d_1$ doğrusu ile $d_2$ aykırı doğrulardır. $d_1$ doğrusu üzerindeki A nokrasından $d_2$ doğrusuna paralel olan $d_3$ doğrusu $d_1$ doğrusuna dik olduğundan $d_1$ ile $d_2$ doğruları dik doğrulardır.

**Bir Doğrunun Bir Düzleme Dikliği**

**3.12. Tanım:** Bir doğru, bir düzlem içindeki bütün doğrulara dik veya dik durumlu ise doğru bu düzleme diktir denir. Bir doğru ile bir düzlemin dik olma durumu, $d \perp E$ olarak yazılır.

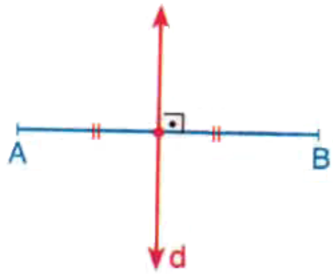
**3.13. Tanım:** d doğrusu E düzlemine A noktasında diktir. Doğru ile düzlemin ara kesit noktası olan A'ya, bu doğrunun dikme ayağı denir.

d doğrusu A noktasından geçen düzlemsel doğru demetine diktir ve A noktasından geçmeyen fakat düzlem içindeki bütün doğrular ile de dik durumludur.




**Düzlemde Bir Doğru Parçasının Orta Dikme Doğrusu**

**3.14. Tanım**: Düzlemde, bir doğru parçasının orta noktasından geçen ve bu doğru parçasına dik olan doğruyu dikme doğrusu denir.



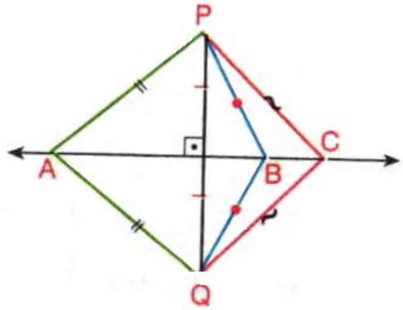

Orta dikme doğrusu üzerindeki her noktanın, [AB] nın uç noktalarına uzaklıkları eşittir.

**3.21. Teorem:** A ve B noktaları, P ve Q noktalarının her birinden eşit uzaklıkta iki nokta ise AB doğrusu üzerindeki her nokta, P ve Q noktalarından eşit uzaklıktadır.

A ve B noktaları, P ve Q noktalarından her birine eşit uzaklıktadır.

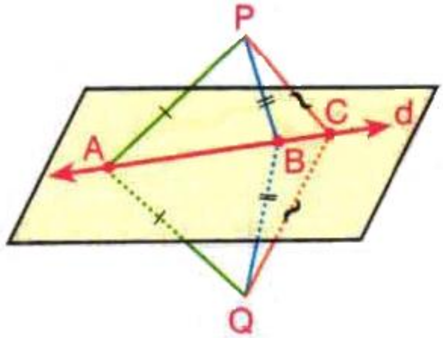
$|AP| = |AQ|$, $|BP| = |BQ|$ ve $c \in AB$ ise $|CP| = |CQ|$

Çözüm:




1. Durum

A, B, Q ve P noktaları düzlemsel ise, AB doğrusu, [PQ] doğru parçasının orta dikme doğrusudur. $c \in AB$ her zaman P ve Q noktalarına eşit uzaklıktadır.




2. Durum

A, B, Q ve P noktaları düzlemsel değilse, A ve B noktaları d doğrusu üzerinde iki nokta, P ve Q noktaları da

$$|AP| = |AQ| \text{ ve } |BP| = |BQ|$$

olacak şekilde, düzlemin dışında farklı iki nokta olsun. K.K.K. eşlik teoreminden,

$$\left.\begin{array}{l} |AP| = |AQ| \\ |BP| = |BQ| \\ |AB| = |AB| \end{array}\right\} P\overset{\Delta}{A}B \cong Q\overset{\Delta}{A}B$$

dir. K.A.K. eşkik aksiyomundan

$$P\overset{\Delta}{A}B \cong Q\overset{\Delta}{A}B \text{ ise } m(P\hat{A}B) = m(Q\hat{A}B)$$

olur. Yine K.A.K. eşkik aksiyomundan PAC ve QAC üçgenleri için;

$$\left.\begin{array}{l} |AP| = |AQ| \\ |BP| = |BQ| \\ m(P\hat{A}B) = m(Q\hat{A}B) \end{array}\right\} P\overset{\Delta}{A}B \cong Q\overset{\Delta}{A}B$$

dir.

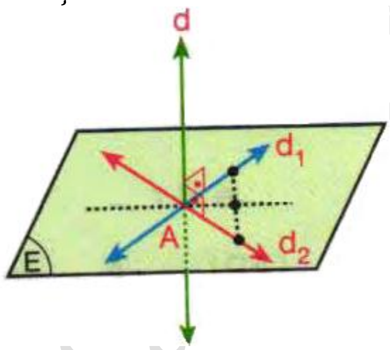
$P\overset{\Delta}{A}B \cong Q\overset{\Delta}{A}B$ ise $|CP| = |CQ|$ dir. PQ doğrusu ile AB doğrusunun dik durumlu iki doğru olduğuna dikkat ediniz.

**3.22. Teorem:** Bir düzlemin kesişen iki doğrusuna, kesişme noktasında dik olan bir doğru, bu düzleme diktir.

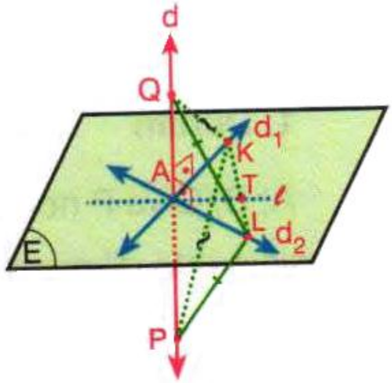
$d_1$ doğruları E düzleminde iki doğru ve A noktasında kesişiyorlar.

$$d \perp d_2 \text{ ve } d \perp d_2 \text{ ise } d \perp E$$

İspat: $d_1$ ve $d_2$ doğruları E düzleminde ve A noktasında kesişen iki doğrudur. d doğrusu A noktasında her iki doğruya dik olacak şekilde çiziliyor. d doğrusu A noktasında geçen herhangi bir $\ell$ doğrusuna, bu noktada dikliği ispatlanırsa, E düzlemine dikliği de ispatlanmış olur.




d doğrusu üzerinde $|AQ| = |AP|$ olacak şekilde P ve Q gibi farklı iki nokta alalım. $K \in d_1$ ve $L \in d_2$, K ve L noktalarını da $\ell$ doğrusunun farklı yarı düzlemlerinde seçelim. Düzlem ayırma aksiyomu gereğince $[KL] \cap \ell = \{T\}$ olur.




[PQ], QPK düzlemlerinin orta dikmesi olduğundan $|KP| = |KQ|$ ve $|LP| = |LQ|$ dir. K.K.K. eşlik teoremi

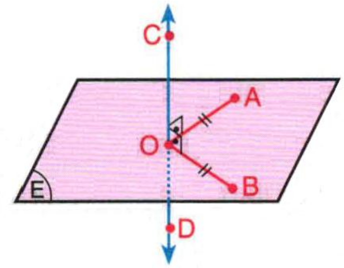
$$\left.\begin{array}{l} |TQ| = |TP| \\ |AQ| = |AP| \\ |AT| = |AT| \end{array}\right\} A\overset{\Delta}{Q}T \cong A\overset{\Delta}{P}T$$

$$A\overset{\Delta}{Q}T \cong A\overset{\Delta}{P}T \text{ ise } d \perp \ell$$

dir.

**3.12. Sonuç:** Bir doğru, düzlem içinde ve bir A noktasında kesişen iki doğruya, kesişme noktalarında dik ise, doğru düzleme diktir.

**Örnek:**

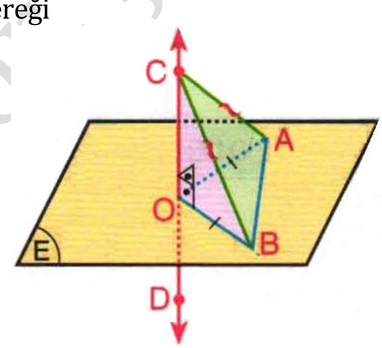



Şekilde, CD doğrusu E düzlemine diktir. $|AO| = |BO|$ ise ABC üçgeninin ikizkenar bir üçgen olduğunu gösteriniz.

Çözüm: O noktasında $[OC \perp E$ ise $[CO] \perp [AO]$ ve $[CO] \perp [BO]$ dir.

$$m(C\hat{O}B) = m(C\hat{O}A)$$

dir. K.A.K. eşlik teoremi gereği



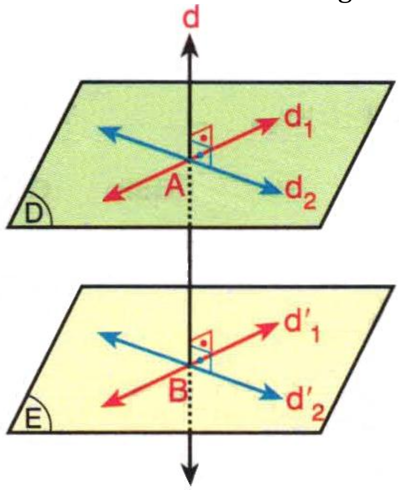

$$\left.\begin{array}{l} m(C\hat{O}B) = M(C\hat{O}A) = 90^0 \\ \quad |OC| = |OC| \\ \quad |AO| = |BO| \end{array}\right\} C\overset{\Delta}{O}B \cong C\overset{\Delta}{O}A$$

$C\overset{\Delta}{O}B \cong C\overset{\Delta}{O}A$ ise $|CA| = |CB|$ ve ABC üçgeni ikizkenar üçgendir.

**3.23. Teorem:** Paralel iki düzlemden birine dik olan doğru, diğer düzleme de diktir.

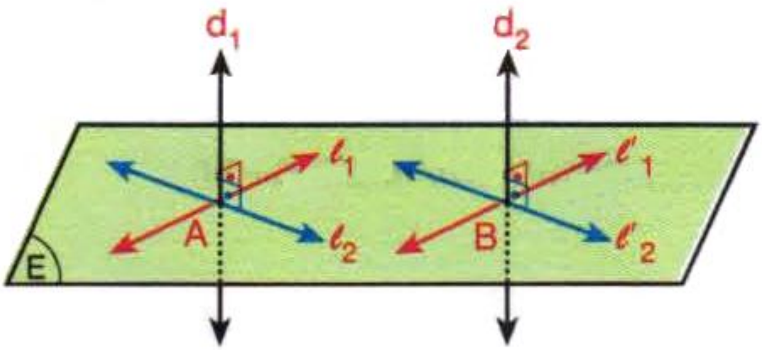
E ve D düzlemleri birbirine paralel iki düzlem ve $d \perp D$ ise $d \perp E$ dir.

A noktasından geçen d doğrusu D düzlemine dik olsun. Paralel iki düzlemden birini kesen doğru diğer düzlemi de keseceğinden, d doğrusu E düzlemini bir noktada kesecektir. d doğrusunun E düzlemini kestiği nokta B olsun.




$d \perp D$ olduğundan, $d \perp d_1$ ve $d \perp d_2$ dir. d ile $d_1$ doğrusunun oluşturduğu düzlemin E ile ara kesiti $d'_1$ olsun. "Paralel iki düzlemden birini kesen bir düzlem, diğerini de keser ve ara kesit doğruları birbirine paraleldir." teoreminden $d_1 // d'_1$ dir.

**3.24. Teorem:** Paralel iki doğrudan birine dik olan düzlem diğerine de diktir.




$d_1 // d_2$ ve $d_1 \perp E$ ise $d_2 \perp E$ dir.

İspat: $d_1 \perp E$ olduğuna göre, $d_1 \cap E = \{A\}$ olsun. E düzlemi içinde A noktasından geçen $\ell_1$ ve $\ell_2$ doğrularını çizdiğimizde, diklik tanımından

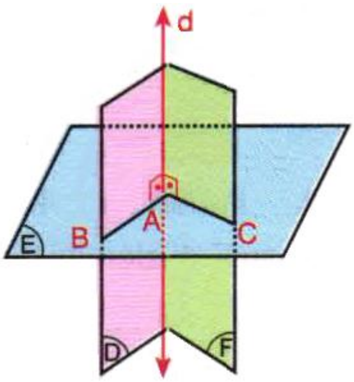
$d_1 \perp \ell_1$ ve $d_1 \perp \ell_2$ olur. B noktasından geçen ve $\ell_1$ ve $\ell_2$ doğrularına paralel sırasıyla $\ell'_1$ ve $\ell'_2$ doğrularını çizelim.

$\ell_1 // \ell'_1$, $\ell_2 // \ell'_2$, $d_1 \perp \ell_1$, $d_1 \perp \ell_2$ olduğundan, $d_2 \perp \ell'_1$, $d_2 \perp \ell'_2$ olur. Diklik tanımından, $d_2 \perp E$ dir.

**3.25. Teorem:** Bir noktadan geçen ve verilen ir doğruya dik olan bir tek düzlem vardır.

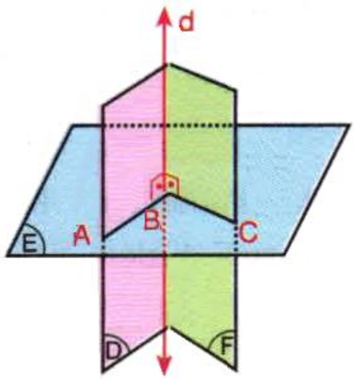
A uzayda herhangi bir nokta ve d bir doğru ise A noktasından geçen ve d doğrusuna dik olan bir tek E düzlemi vardır.

İspat: 1. Durum



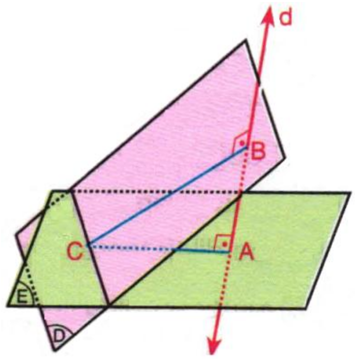

A noktası d doğrusu üzerinde olsun. d doğrusundan geçen D ve F gibi iki düzlem alalım. Bu düzlemlerin içinde, d doğrusuna dik olacak şekilde AB ve AC doğrularını aldığımızda, AB ve AC doğrularından geçen bir tek düzlem vardır ve bu düzlem d doğrusuna diktir.

2. Durum




A noktası d doğrusunun dışında olsun. d doğrusu ile A noktasından geçen bir tek düzlem vardır ve bu düzleme D ve F düzlemleri içinde d doğrusuna dik olacak şekilde AB ve BC doğrularını çizelim. AB ve AC doğrularının belirttiği E düzlemi d doğrusuna dik ve tektir.

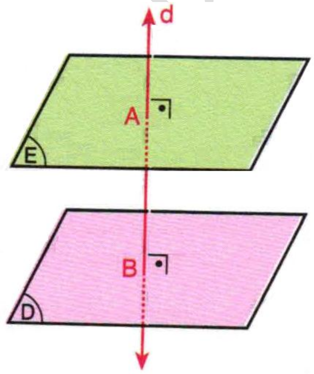
**3.26. Teorem:** Aynı doğruya farklı noktalardan dik olan iki düzlem birbirine paraleldir.




d doğrusu E ve D düzlemlerini A ve B noktalarında dik kesiyor ise E//D dir.

İspat: Bu ispatı çelişki bulma yöntemiyle gösterelim.

Kabul edelim ki d doğrusunun farklı A ve B noktalarında dik kestiği D ve E düzlemleri birbirine paralel olmasın. Bu durumda D ve E düzlemleri bir doğru boyunca kesişirler.




Bu ara kesit doğrusu üzerinde bir C noktası alalım. $d \perp D$ ve $d \perp E$ olduğundan AC ve BC doğruları d doğrusuna diktir. Bu durum ABC düzleminde, bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek dik doğru çizilebilmesi gerçeği ile çelişir.

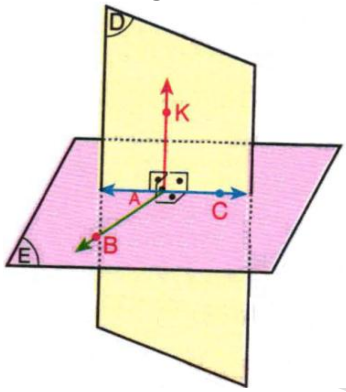
**3.27. Teorem:** Uzayda bir A noktasından geçen ve bir E düzlemine dik olan bir tek doğru çizilebilir.

Uzayda A bir nokta ve E bir düzlem ise A noktasından, E düzlemine dik bir tek AB doğrusu çizilebilir.

İspat: A noktası için iki farklı durum vardır.

1. Durum

A noktası E düzleminde olsun. E düzlemi içinde A noktasından geçen bir AB doğrusu ile AB doğrusuna dik bir AC doğrusu alalım. Yine E düzleminin dışında bir K noktasından AB doğrusuna dik AK doğrusunu çizelim. Burada AC ve AK doğrularının belirttiği D düzlemi AB doğrusuna ve E düzlemine dik olur.



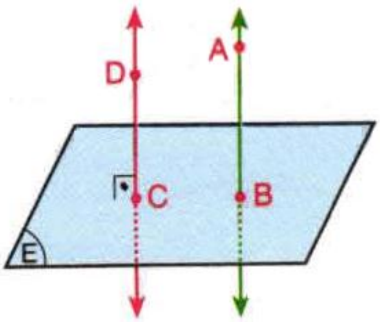

D ile E düzlemlerinin ara kesit doğrusu AC olur. D düzlemi içinde, AC doğrusuna dik AK doğrusunun dik ve tekliğini gösterdiğimizde ispat tamamlanmış olur.

$AB \perp D$ olduğundan, $AK \perp AB$ ve $AK \perp AC$ ise $AK \perp E$ dir.

Bu durumda, E düzlemindeki A noktasından düzleme dik AK doğrusu çizilmiş olur.

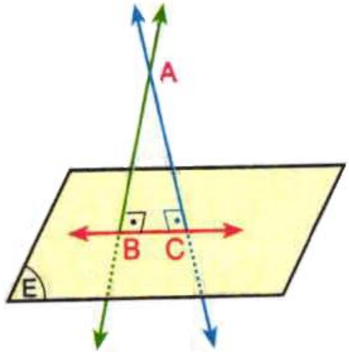
2. Durum

A noktası E düzleminin dışında olsun. 1. durumda olduğu gibi, E düzleminde bir C noktası alarak E düzlemine C noktasında dik CD doğrusunu çizelim. A noktasından DC doğrusuna paralel AB doğrusunu çizersek, paralel iki doğrudan birine dik olan düzlem, diğerine de diktir teoremi gereğince $AB \perp E$ olur.




Şimdi A noktasından geçen ve E düzlemine dik olan doğrunun teklifini gösterelim.

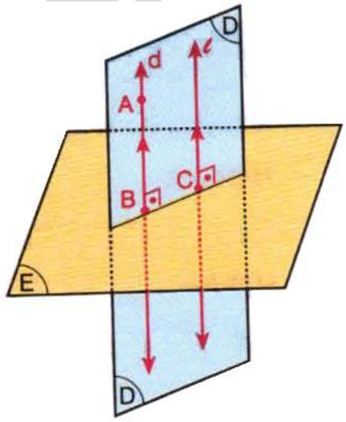
Bu göstermeyi çelişki bulma yöntemiyle yapalım. A noktasından geçen ve E düzlemine dik olan doğrunun tek olmadığını varsayalım. Yani $AB \perp E$ ve $AC \perp E$ gibi farklı iki doğru bulunsun. $AB \perp E$ ise $AB \perp BC$ ve $AC \perp E$ ise $AC \perp BC$ olur. Bu durum bir üçgenin iki açısının dik olamaması durumu ile çelişir. O halde, B noktası ile C noktası çakışıktır.



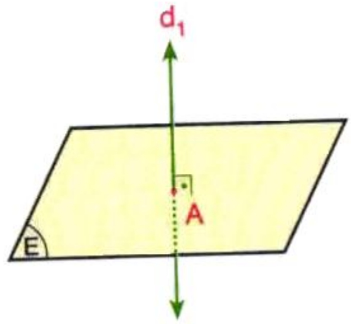

O hale, A noktasından geçen ve E düzlemine dik olan bir tek doğru çizilebilir.

**Örnek:** Verilen bir düzleme dışındaki bir noktadan, düzleme dik bir doğru çizerek bu doğrunun teklifini gösterelim.

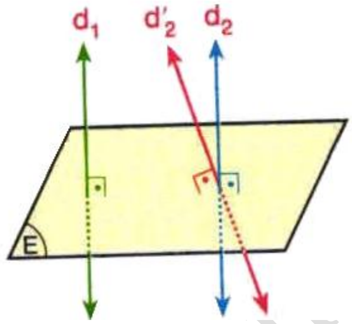
Çözüm: Düzlemin dışında bir A noktası alarak bu noktadan düzleme dik bir d doğrusu çizelim. A'dan düzleme çizilen dikmenin ayağı B noktası olsun. d doğrusu ile C noktasını içeren bir tek düzlem vardır. D düzleminde C'den geçen ve d'ye paralel çizilen $\ell$ doğrusu, C'de E düzlemine dik olacaktır.




**3.14. Sonuç:** Verilen bir düzleme üzerindeki bir noktadan, düzleme dik bir tek doğru çizilebilir.



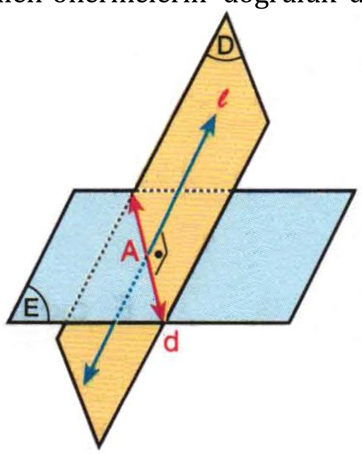

**3.28. Teorem:** Aynı düzleme dik olan farklı iki doğru birbirine paraleldir.




$d_1 \perp E$ ve $d_2 \perp E$ ise $d_1 \perp d_2$ dir.

İspat: Bu ispatı çelişki bulma yöntemiyle yapalım. $d_1 \perp E$ , $d_2 \perp E$ ve $d_1, d_2$ doğrularının birbirine paralel olmadıklarını varsayalım. $d_1$ doğrusu ile $d_2$ doğrusu birbirine paralel değilse bu iki doğru K gibi bir noktada kesişirler. Bu durum, uzayda bir A noktasından bir E düzlemine, bir tek dik doğru çizilebilir teoremi ile çelişir. Bu durumda $d_1 // d_2$ olur.

**Örnek:** Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini yazalım.



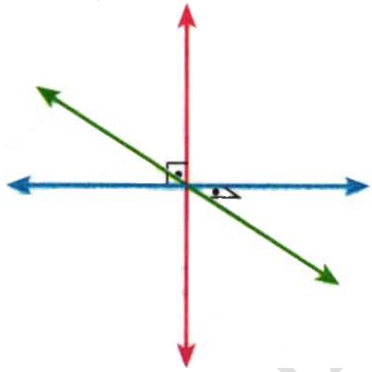

P: "Bir düzlemin içindeki herhangi bir doğrusuna dik olan doğru düzleme de diktir."

q: “Düzlemde ve uzayda bir doğru üzerindeki bir noktadan bu doğruya, bir tek doğru çizilebilir.

r: “Uzayda, bir düzlemin farklı iki doğrusuna dik doğrular her zaman birbirine paraleldir.”

Çözüm: Şekilde görüldüğü gibi $d \perp \ell$ fakat d doğrusu E düzlemine dik değildir. O halde, p önermesi yanlıştır.

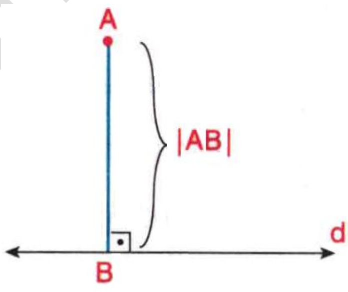
Düzlemde, bir doğruya üzerindeki bir noktadan tek dik doğru çizilebilir, fakat uzayda sonsuz sayıda dik doğru çizilebilir. O halde, q önermesi yanlıştır.



Yine ikinci şekilden r önermesinin de yanlış olduğunu söyleyebiliriz.

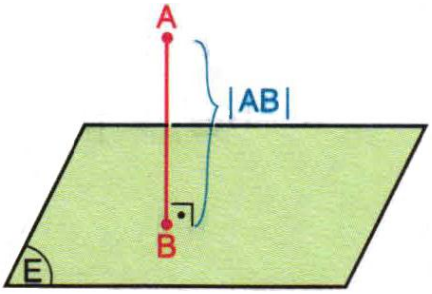
**Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı**

**3.15. Tanım:** Bir d doğrusuna dışındaki bir A noktasından inilen dik AB doğru parçasının uzunluğuna A noktasının d doğrusuna uzaklığı denir ve $|AB|$ ile gösterilir.

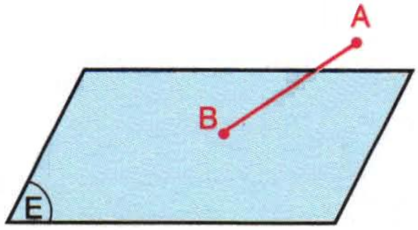



**Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı**

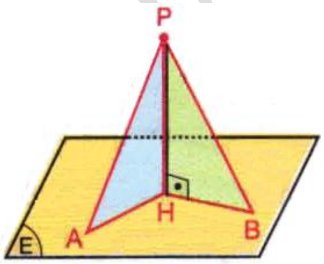
**3.16. Tanım:** Bir E düzlemine, dışındaki bir A noktasından inilen dik AB doğru parçasının uzunluğuna A noktasının E düzlemine uzaklığı denir ve $|AB|$ ile gösterilir. B noktasına dikme ayağı, AB doğru parçasına dikme denir.




**3.17. Tanım:** Düzlemi kesen bir doğru parçası düzleme dik değilse, bu doğru parçasına eğik denir. Bir doğru parçasının düzlem ile ara kesit noktasına da eğik ayağı denir.




**3.29. Teorem:** Bir düzlem dışındaki bir P noktasından çizilen dik doğru parçasının uzunluğu, bu noktadan düzleme çizilen diğer doğru parçalarından daha kısadır.




E düzlemine dışındaki bir P noktasından [PH] dikmesi ve [PA], ]PB] eğikleri çiziliyor ise $|PH| < |PA|$ ve $|PH| < |PB|$ olur.

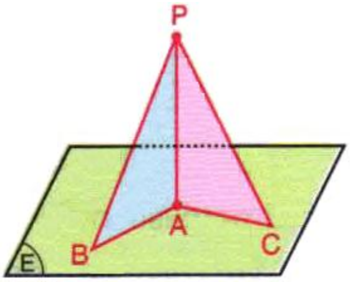
İspat: $[PH] \perp E$ olduğundan $[PH] \perp [AH]$ ve $[PH] \perp [HB]$ dır. PHA ve PHB üçgenleri dik üçgen olup, [PA] ve [PB] bu üçgenlerin hipotenüsleridir. Bir dik üçgende hipotenüs her zaman dik kenarlardan uzun olacağından $|PH| < |PA|$ ve $|PH| < |PB|$ elde edilir.

**3.15. Sonuç:** Bir düzleme dışındaki bir noktadan dikme ve eğikler çizilirse;
1. Dikmenin uzunluğu, bütün eğiklerin uzunluklarından kısadır.
2. Ayağı dikme ayağına daha yakın olan eğik, daha kısadır.
3. Ayakları, dikme ayağına eşit uzaklıkta olan eğiklerin uzunlukları eşittir.

**3.16. Sonuç (Karşıt Sonuç):** Bir düzlemin bütün noktaları dışındaki bir nokta ile birleştirilirse;

1. Birleştirilen doğru parçaları içerisinde, uzunluğu en küçük olanı düzleme diktir.
2. Uzunluğu kısa olan eğiğin ayağı dikme ayağına daha yakındır.
3. Uzunlukları eşit olan eğiklerin ayakları, dikme ayağına eşit uzaklıktadır.

**Örnek:** Verilen şekilde, E düzleminin dışındaki P noktasından, düzleme [PA] dikmesi çiziliyor.




a) $|AB| > |AC| \Leftrightarrow |PB| > |PC|$

b) $|AB| = |AC| \Leftrightarrow |PB| = |PC|$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) $[PA] \perp E$ ise $[PA] \perp [AB]$ ve $[PA] \perp [AC]$ dir. PAB ve PAC dik üçgenlerinde,

$$|PA|^2 + |AB|^2 = |PB|^2 \text{ ve } |PA|^2 + |AC|^2 = |PC|^2$$

ise $|AB| > |AC| \Rightarrow |PB| > |PC|$ dir. Aynı şekilde

$$|PB| > |PC| \Rightarrow |AB| > |AC|$$

dir.

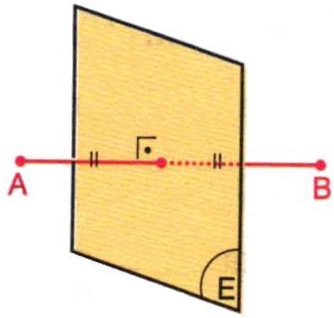
b) Okuyucuya bırakılmıştır.

### İki Nokta Arasındaki Uzaklık

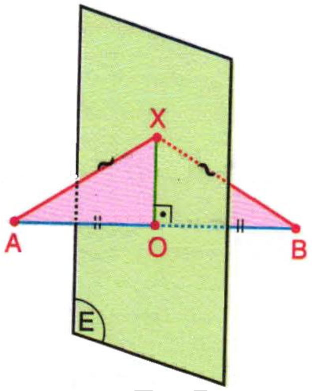
**3.18. Tanım:** İki noktayı birleştiren doğru parçasının uzunluğuna iki nokta arasındaki uzaklık denir. Bu tanım bütün uzaylar için geçerlidir.

### Bir Doğru Parçasının Orta Dikme Düzlemi

**3.19. Tanım:** Uzayda bir doğru parçasının orta noktasından geçen ve bu doğru parçasına dik olan düzleme, bu doğru parçasının orta dikme düzlemi denir.




**3.30. Teorem:** Uzayda bir doğru parçasının uç noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesi doğru parçasının orta dikme düzlemidir.




[AB] nin orta dikme düzlemi E ve X noktası bu düzlemde herhangi bir nokta ise, $|XA| = |XB|$ olur.

İspat: [AB] nin orta noktası O olsun. Eğer $X = O$ ise, $|XA| = |XB|$ olduğu açıktır. X noktası E düzleminde ve O noktasından farklı bir nokta olsun. [XA], [XB] ve [XO] doğru parçalarını çizdiğimizde, [XA], [XB] ve [AB] düzlemsel olduğundan, $A\overset{\triangle}{O}X$ ve $B\overset{\triangle}{O}X$ eş üçgenlerdir. K.A.K. eşlik aksiyomundan

$$A\overset{\triangle}{O}X \cong B\overset{\triangle}{O}X$$

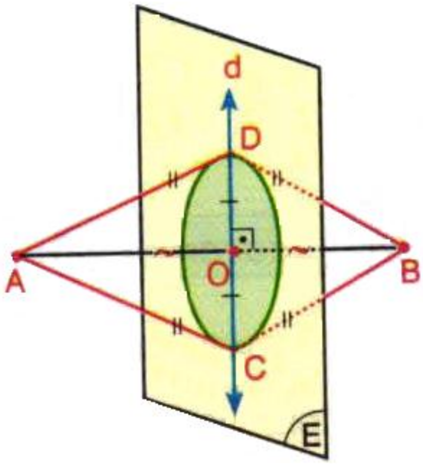
olduğundan

$$XO \perp [AB] \text{ ve } |XA| = |XB|$$

bulunur.

**Örnek:** Uzunluğu $12\sqrt{3}$ cm olan [AB] doğru parçasının uç noktalarına 12 cm uzaklıktaki noktaların geometrik yerini ve bu noktaların [AB] doğru parçasına uzaklığını bulunuz.

Çözüm:




Uzayda bir doğru parçasının uç noktalarında eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesi, bu doğru parçasının orta dikme düzlemi olduğundan, D ve C noktaları bu düzlem üzerindedir. K.A.K. eşilik aksiyomu $A\overset{\Delta}{D}O \cong B\overset{\Delta}{D}O$ ve $A\overset{\Delta}{O}C \cong B\overset{\Delta}{O}C$ olduğundan, $DC \perp AB$ dir. O halde A ve B noktalarına 12 cm uzaklıktaki noktaların geometrik yeri, O merkezli $|OD| = |OC|$ yarıçaplı çemberdir.

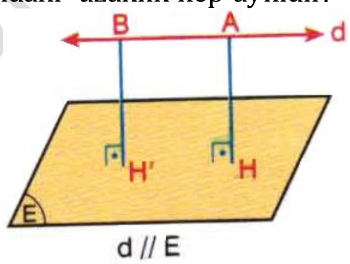
$$|AO| = |OB| \text{ ve } |DC| \perp [AB]$$

olduğundan

$$|OD| = |OC| = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6\,\text{cm}$$

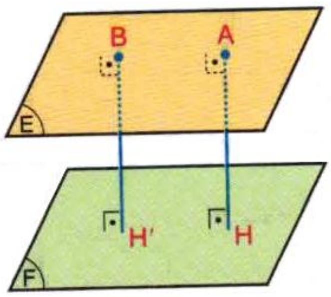
bulunur.

**3.20. Tanım**: Bir düzleme paralel olan doğrunun düzleme uzaklığı, doğru üzerindeki bir noktadan düzleme çizilen dikmenin uzunluğudur. Düzleme paralel olan doğru ile düzlem arasındaki uzaklık hep aynıdır.



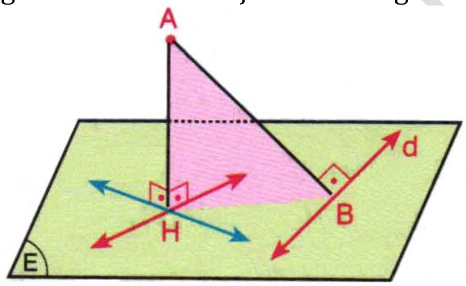

Şekilde d doğrusu E düzlemine uzaklığı $|AH|$ olur.

**3.21. Tanım:** Paralel iki düzlem arasındaki uzaklık, bu düzlemlerden biri üzerinde alınan bir noktanın diğer düzleme uzaklığıdır.



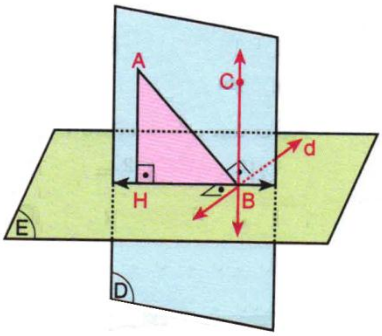

E ile F düzlemleri arasındaki uzaklık hep aynı ve $|AH|$ dir. Paralel iki düzlemin içindeki paralel iki doğru arasındaki uzaklığın bu düzlemler arasındaki uzaklığa her zaman eşit olmayacağını görürüz.

**3.31. Teorem (Üç Dikme Teoremi):** Bir E düzleminin dışında bulunan bir A noktasından bu düzleme [AH] dikmesi ve düzlem içindeki d doğrusuna da AB dikmesi çizilirse, HB doğrusu bu düzlem içindeki d doğrusuna dik olur.




$[AH] \perp E$, $d \subset E$ ve $[AB] \perp d$ ise $[AH] \perp d$ dir.

İspat: $BC \perp E$ olacak şekilde bir BC doğrusu çizelim. "Aynı düzleme dik olan iki doğru birbirine paraleldir." Teoremi gereğince, BC // AH olur.

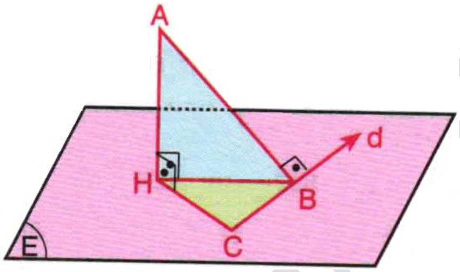



BC//AH olduğundan bir D düzlemindedirler. D ve E düzlemlerinin ara kesit doğrusu HB olur. d doğrusu D düzleminde hem AB, hem CB doğrularına dik olduğundan, D düzleminin B noktasından geçen diğer doğrularına da diktir. O halde $[HB] \perp d$ dir.

**3.17. Sonuç:** Bir E düzleminin dışında bulunan bir A noktasından bu düzleme [AH] dikmesi, H dikme ayağından E düzleminde bulunan bir d doğrusuna da [HB] dikmesi çizilirse, [AB], d doğrusuna dik olur.

**3.18. Sonuç:** Bir E düzlemindeki bir d doğrusu üzerinde alınan bir B noktasından bu doğruya, biri E düzleminin dışında ve diğeri E düzleminde olacak şekilde iki dikme çizilirse, düzlem dışında çizilen dikme üzerinde alınacak herhangi bir A noktasından, düzlem içinde alınan dikmeye dik olacak şekilde AH doğrusu çizilirse $[AH] \perp E$ olur.

**Örnek:** Verilen şekilde $[AH] \perp E$ ve $[AH] \perp d$ dir. $|AB| = 13\,br$ ve $|AH| = 12\,br$ olduğuna göre HBC üçgeninde $|HC| \in \mathbb{Z}$ en az kaç birim olabilir?




Çözüm: Üç dikme teoreminden $[AH] \perp E$ ve $[AB] \perp d$ olduğundan $[HB] \perp d$ dir. AHB dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$|AB|^2 = |AH|^2 + |HB|^2$$

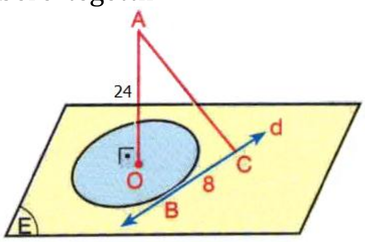
$$13^2 = 12^2 + |HB|^2$$

$$|HB| = 5\,br$$

bulunur.

HBC dik üçgeninde $|HC|$ hipotenüs olduğundan, diğer iki dik kenardan uzun olacaktır. O halde $|HC|$ en az 6 br olur.

**Örnek:** Verilen şekilde E düzlemi içindeki çemberin yarıçapı 6 cm ve d doğrusu, B noktasında çembere teğettir.




$[AO] \perp E$, $|BC| = 8\,cm$ ve $|AO| = 24\,cm$ olduğuna göre $|AC|$ uzunluğu kaç cm dir?

Çözüm: Üç dikme teoreminden $[AO]\perp E$ ve $[OB]\perp[BC$ olduğundan $[AB]\perp[BC]$ dir. AOB dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$|AO|^2+|OB|^2=|AB|^2$$

$$24^2+6^2=|HB|^2=612$$

ABC dik üçgeninde,

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2$$

$$|AC|^2=612+8^2$$

$$|AC|=26\,\text{br}$$

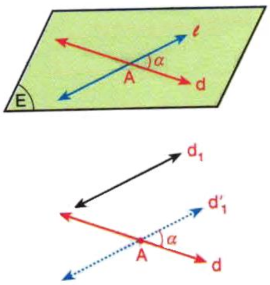
bulunur.

## UZAYDA AÇILAR

### İki Doğru Arasındaki Açı

**3.22. Tanım:** İki doğru bir noktada kesişiyorsa, bu doğruların arasındaki dar açıya iki doğru arasındaki açı denir.

Aykırı iki doğru arasındaki açı ise, aykırı doğrulardan birinin herhangi bir noktasından diğer doğruya çizilen paralel doğru arasındaki açıdır.



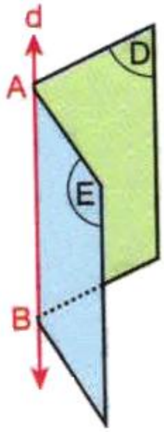

İki doğru birbirine paralel ise aralarındaki açının ölçüsü $0^0$ ve birbirine dikse aralarındaki açının ölçüsü $90^0$ dir.

### İki Düzlemli Açılar

**3.23. Tanım:** İki düzlemin ara kesit doğrusu ile bu doğrunun ayırdığı iki yarı düzlemin birleşimine iki düzlemli açı denir.

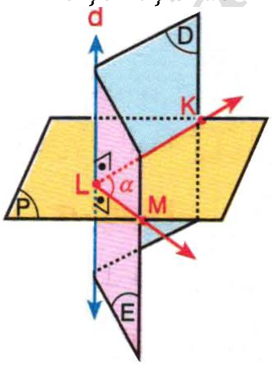
İki düzlemin ara kesiti olan d doğrusuna açının ayrıtı, yarı düzlemlere de açının yüzleri denir.

İki düzlemli açı, düzlemlerden birinin ismi başta, ara kesit doğrusu ortada, diğer düzleminki sonda olmak üzere $m(D,|AB|,E)$ veya $m(D,E)$ şeklinde gösterilir.




**Ölçek Açısı**

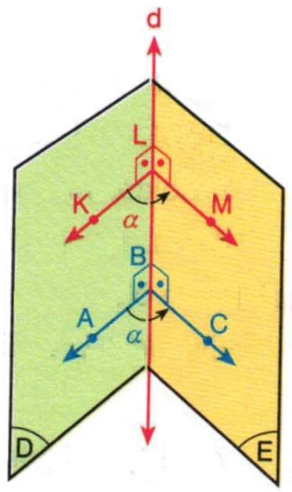
**3.24. Tanım:** İki düzlemli açının d ara kesit doğrusuna herhangi bir L noktasında dik olan P düzleminin, iki düzlemli açının yüzleri ile ara kesitlerinin belirttiği KLM açısına iki düzlemli açının ölçek açısı denir.




İki düzlemin ara kesiti olan d doğrusuna, üzerindeki herhangi bir L noktasından, düzlemlerin içinde kalmak üzere, $[LK \perp d$ ve $[LM \perp d$ olacak bicide [LK ve [LM çizildiğinde, oluşan KLM açısına $m(D,d,E)$ iki düzlemli açının ölçek açısı denir.

Kesişen iki düzlemin arasında ölçüleri eşit, sonsuz sayıda ölçek açı çizilebilir.

**3.32. Teorem:** Kesişen iki düzlem arasındaki tüm iki düzlemli açıların ölçek açısı birbirine eştir.




D ve E kesişen iki düzlemdir. $m(D,KLM,E)$ ve $m(D,ABC,E)$ iki düzlemli açılar ise $K\hat{L}M \cong A\hat{B}C$ dir.

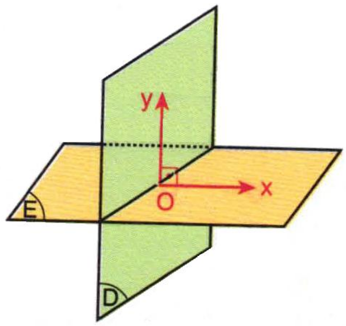
$[LM \perp d$ ve $[LK \perp d$ aynı şekilde, ölçek açının tanımından $[BC \perp d$ ve $[BA \perp d$ dir.

$[LM \perp d$ ve $[BC \perp d$ ise $[LM // [BC$
$[LK \perp d$ ve $[BA \perp d$ ise $[LK // [BA$
olduğundan
3.8. teoreminden KLM ve ABC açıları, uzayda kenarları aynı yönde paralel olan açıların eşliğinden $K\hat{L}M \cong A\hat{B}C$ dir.



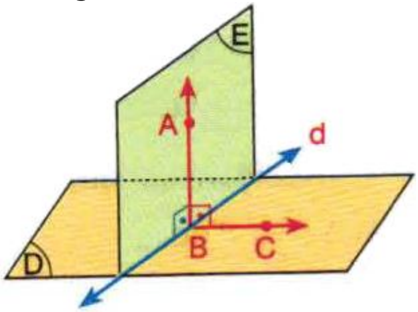
**UZAYDA DÜZLEMLERİN DİKLİĞİ**

**3.25. Tanım:** Kesişen iki düzlemin belirttiği açılardan birinin ölçek açısı $90^0$ ise bu iki düzleme birbirine dik düzlemler denir.




Şekilde D düzlemi ile E düzleminin ölçek açısı $90^0$ olduğundan, iki düzlem birbirine diktir. Bu durum, $D \perp E$ şeklinde gösterilir.

**3.33. Teorem:** Bir doğru bir düzleme dikse, bu doğruyu içinde bulunduran her düzlem, doğrunun dik olduğu düzleme diktir.

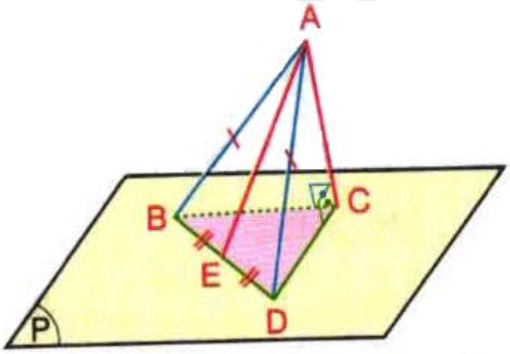



$AB \perp D$ ve E düzlemi, AB doğrusunu içinde bulunduran herhangi bir düzlem ise $D \perp E$ dir.

İspat: $D \cap E = d$ olsun. B noktasından, AB doğrusuna BC dikmesini çizelim.

$AB \perp D$ ise $AB \perp BC$ ve $AB \perp d$ olduğundan, D ile E düzleminin ölçek açısı $m(ABC) = 90^0$ dir. O halde, $D \perp E$ dir.

**Örnek:** Verilen şekilde $|AB| = |AD|$, $|BE| = |ED| = 6\,cm$ ve $|BC| = 10\,cm$ dir.




$[AC] \perp P$ ve $m(EAC) = 45^0$ olduğuna göre, ABD üçgeninin alanını bulunuz.

Çözüm: ABD ikizkenar üçgen olduğundan, $[AE] \perp [BD]$ dir. $[AC] \perp P$ ise üç dikme teoreminden $[CE] \perp [BD]$ dir. BEC dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$|EC|^2 = |BC|^2 - |BE|^2$$

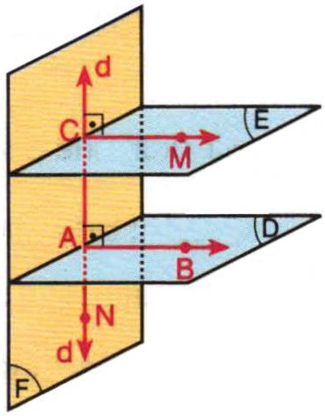
$$|EC| = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,cm$$

olur. $m(EAC) = 45^0$ olduğundan AEC üçgeni ikizkenar dik üçgendir ve $|AE| = 8\sqrt{2}\,cm$ olur.

$$A(ABD) = \frac{|AE|.|BD|}{2} = \frac{12.8\sqrt{2}}{2} = 48\sqrt{2}\,cm^2$$

bulunur.

**3.34. Teorem:** Paralel iki düzlemden birine dik olan bir düzlem diğerine de diktir.



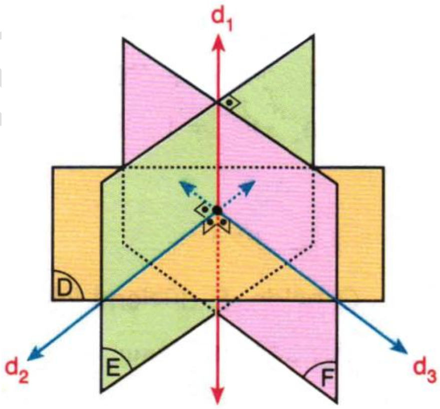

$D//E$ ve $F \perp D$ ise $F \perp E$ dir.

İspat: $F \perp D$ olduğuna göre, $m(NAB) = 90^0$ çizilirse, $d \perp D$ olur. Paralel iki düzlemden birine dik olan doğru diğerine de dik olduğundan, $d \perp E$ dir.

"Bir doğru bir düzleme dikse, bu doğrudan geçen her düzlem, bu düzleme diktir." teoremi gereğince, $F \perp E$ olur.

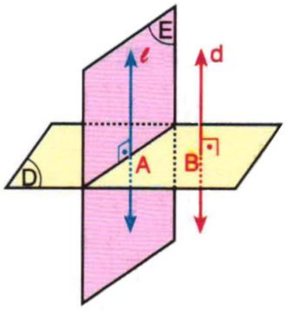
**Örnek:** Birbirine dik iki düzlemden birine dik olan üçüncü bir düzlemin diğerine de dik olabileceğini gösteriniz.

Çözüm:




Şekilde görüldüğü gibi, $F \perp E$ olduğundan $D \perp E$ ve $F \perp D$ dir.

**3.35. Teorem:** İki düzlemden birine paralel diğerine de dik ise, bu iki düzlem birbirine diktir.

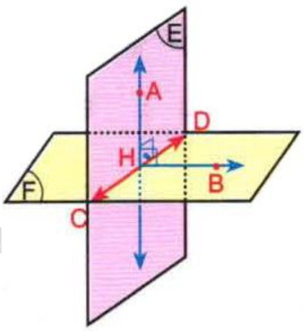



$d // E$ ve $d \perp D$ ise $D \perp E$ dir.

İspat: E düzleminin içinde, d doğrusuna paralel bir $\ell$ doğrusu çizelim. Bir düzleme dik olan bir doğruya, paralel olan doğru, düzleme dik olduğundan, $\ell \perp D$ dir. O halde, D düzlemine dik $\ell$ doğrusundan geçen her düzlem D düzlemine dik olacağından, $D \perp E$ dir.

**Örnek:** Birbirine dik verilen iki düzlemden birinin içindeki bir noktadan diğer düzleme dik olan doğruyu çiziniz.

Çözüm: Birbirine dik E ve F düzlemleri ile E düzleminin içinde bir A noktası verilsin. E ve F düzlemlerinin ara kesiti olan CD doğrusuna, A noktasından inilen [AH] dikmesi, F düzlemine de diktir.




F düzleminde DC doğrusuna H noktasında HB dik doğrusu çizilirse, $m(AHB) = 90^0$ iki düzlemin ölçek açısı olacağından, $AH \perp HB$ dir.

$AH \perp HB$ ve $AH \perp DC$ ise $AH \perp F$

olur. O halde E düzlemi içindeki bir A noktasından, F düzlemine dik çizilen AH doğrusu tektir.