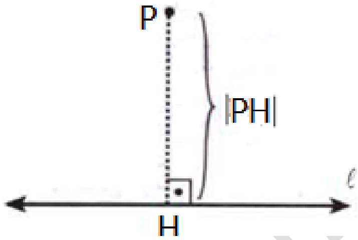
4. BÖLÜM
DİK İZDÜŞÜM

DOĞRU ÜZERİNE DİK İZDÜŞÜM

Düzlemde Bir Doğrunun Bir Doğru Üzerine Dik İz Düşümü

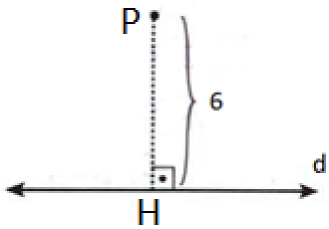
4.1. Tanım: Düzlemde, P noktasından ℓ doğrusuna indirilen dikmenin ayağı olan H noktasına P noktasının ℓ doğrusu üzerindeki dik izdüşümü denir.



P ile H dik izdüşümü arasındaki uzaklık $|PH|$ dir. $|PH|$ değerine, P noktasının ℓ doğrusuna uzaklığı denir.

P noktası ℓ doğrusu üzerinde ise $|PH|=0$ olur, yani P noktasının ℓ doğrusu üzerinde dik izdüşümü yine kendisidir.

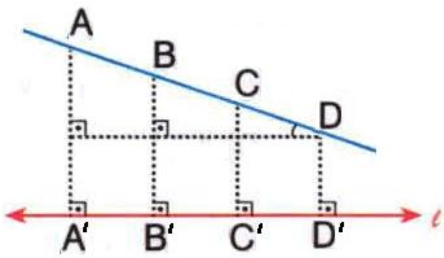
Örnek:



Verilen şekilde, $[PH]\perp d$ ve $|PH|=6$ cm ise P noktasının d doğrusuna uzaklığı 6 cm dir.

Düzlemde Bir Doğrunun Bir Diğer Doğru Üzerine Dik İz Düşümü

Düzlemde bir doğru parçasının, bir doğru üzerine dik izdüşümü için iki farklı durum vardır:



a. Bir doğru parçasının, bir doğru üzerine dik izdüşümü yine bir doğru parçasıdır.

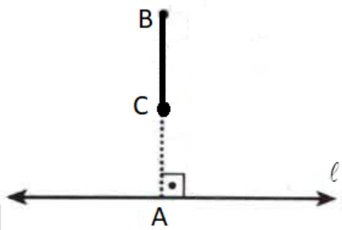
Bir doğrunun diğer bir doğru üzerindeki dik izdüşümü, bu doğrunun her noktasının diğer doğru üzerine dik izdüşümü olan noktaların kümesidir.

Şekilde AB ve CD doğru parçalarının ℓ doğrusu üzerinde dik izdüşümü $A'B'$ ve $C'D'$ ise Tales teoreminden,

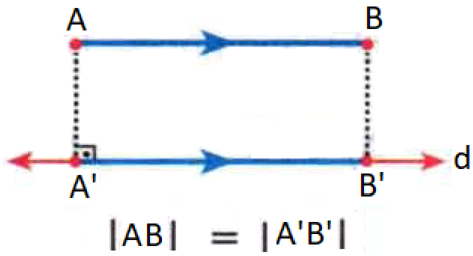
$$\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|CD|}{|C'D'|}=k \text{ veya } |AB|=k|A'B'|,\ |CD|=k|C'D'|$$

olur.

b) Bir doğru parçası, verilen doğru dikse, izdüşümü bir noktadır.

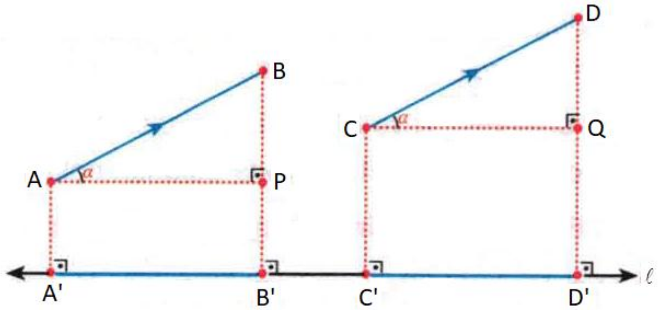


Doğru parçası, verilen doğruya paralel ise, dik izdüşümünün uzunluğu, kendi uzunluğuna eşittir.



Düzlemde bir doğru parçasının, diğer bir doğru üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğu her zaman, doğru parçasının uzunluğundan küçük veya doğru parçasının uzunluğuna eşittir.

4.1. Teorem: Uzunlukları eşit ve paralel olan iki doğru parçasının, aynı doğru üzerindeki dik izdüşümlerinin uzunlukları da eşittir.



$|AB| = |CD|$ ve $[AB]//[CD]$ olup ℓ doğrusu üzerine izdüşümleri sırasıyla $[A'B']$ ve $[C'D']$ ise $|A'B'| = |C'D'|$ dir.

İspat: A, B, C ve D noktaları ℓ doğrusu üzerdeki dik izdüşümleri sırasıyla A', B', C' ve D' noktaları olsun.

$[AP]//[A'B']$ ise $|AP| = |A'B'|$

$[CQ]//[C'D']$ ise $|CQ| = |C'D'|$

dür. A.K.A. eşlik teoremi gereği,

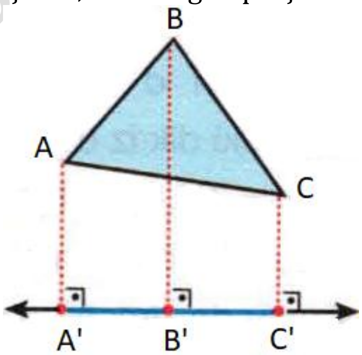
$A\overset{\Delta}{B}P \cong C\overset{\Delta}{D}Q$

$|AP| = |CQ|$ ve $|A'B'| = |C'D'|$

olur.

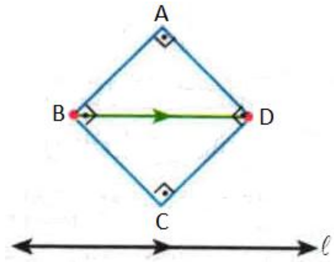
Düzlemde Bir Şeklin Bir Doğru Üzerindeki Dik İz Düşümü

Bir şeklin bir doğru üzerindeki dik iz düşümü bu şeklin her noktasının, bu doğru üzerindeki dik izdüşüm noktalarının kümesidir. Şekilde ABC üçgeninin ℓ doğrusu üzerindeki dik izdüşümü, B'C' doğru parçasıdır.

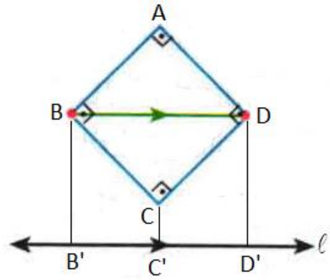


Aynı düzlemde, bir şeklin bir doğru üzerindeki dik izdüşümü bir doğru parçasıdır.

Örnek: Alanı 49 cm² olan bir karenin köşegeni ℓ doğrusuna paraleldir Bu karenin ℓ doğrusu üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğunu bulunuz.



Çözüm:



Alanı 49 cm² olan bir karenin kenar uzunluğu 7 cm dir. Karenin köşegeni ℓ doğrusu üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğu, karenin köşegen uzunluğuna eşittir.

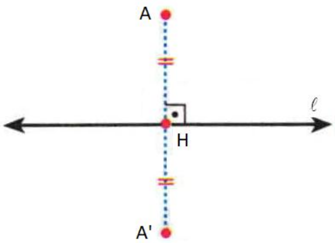
$$|BD| = |B'D'| = 7\sqrt{2} \text{ cm}$$

bulunur.

Düzlemde Bir Şeklin Bir Doğruya ve Bir Noktaya Göre Simetriği

a. Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Simetriği

4.2. Tanım: A ve A' noktaları aşağıdaki şartları sağlıyorsa, A' noktasına, A noktasının ℓ doğrusuna göre simetriği denir.



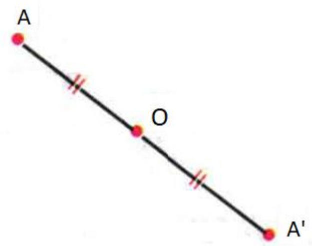
1. A ve A' noktaları, ℓ doğrusunun farklı tarafındadır.
2. A ve A' noktaları, ℓ doğrusuna eşit uzaklıktadır.
3. A ve A' noktaları, ℓ doğrusuna dik AA' doğrusu üzerindedir.

4.3. Tanım: ℓ doğrusuna A ve A' noktalarının simetri ekseni denir. Simetri ekseni üzerindeki her nokta kendi kendisinin simetriğidir.

Bir düzlemin, A ve A' gibi iki noktasının ancak bir simetri ekseni mevcut olup, düzlemde A ve A' noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeridir.

b. Bir Noktanın Bir Noktaya Göre Simetriği

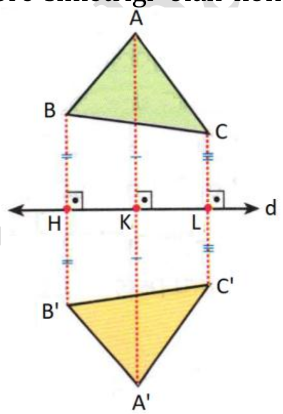
4.4. Tanım: O noktası, [AA'] nın orta noktası ise, A' noktasına, O noktasına göre A noktasının simetriği ve O noktasına da simetri merkezi denir.



Simetri merkezi, kendi kendisinin simetriğidir. Düzlemde, A ve A' gibi iki noktanın tek simetri merkezi vardır.

c. Bir Şeklin Bir Doğruya Göre Simetriği

Bir şeklin bir doğruya veya bir noktaya göre simetriği, bu şeklin her noktasının doğruya veya noktaya göre simetriği olan noktalarının kümesidir.



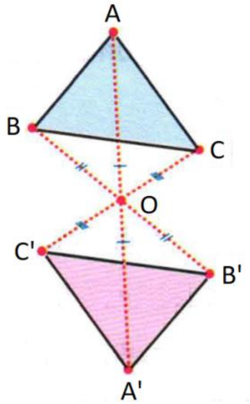
Düzlemde ABC üçgeni ile d doğrusunu alalım. Üçgenin B köşesinden d doğrusuna inilen dikmeyi, B noktasının d doğru üzerindeki dik izdüşümü olan H_1 noktasından ters tarafa, $|BH| = |HB'|$ olacak şekilde uzatırsak B' noktasını buluruz. B' noktasına, B noktasının d doğrusuna göre simetriği denir. Burada d doğrusu da simetriğidir.

Benzer şekilde ABC üçgeninin bütün noktalarının d doğrusuna göre simetrileri alınarak elde edilen A'B'C' üçgenine ABC üçgeninin d doğrusuna göre simetriği denir.

Burada ABC üçgeni ile d doğrusuna göre simetriği olan A'B'C' üçgeni eştir. O halde

$|BH| = |HB'|$, $|AK| = |KA'|$ ve $|CL| = |LC'|$

Bir şeklin bir doğruya göre simetriği kendisine eş bir şekildir. Simetri ekseni üzerindeki herhangi bir nokta, simetrik noktalara eşit uzaklıktadır.

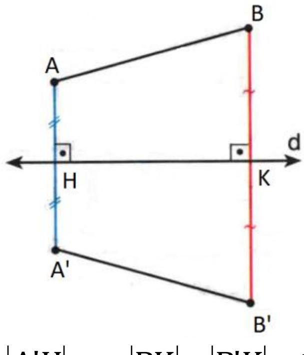


Benzer şekilde ABC üçgeninin bütün noktalarının O noktasına göre simetriği alınarak, ABC üçgeninin O noktasına göre simetriği olan A'B'C' üçgeni elde edilir. Bu simetri de, C ve B köşeleri çapraz yer değiştirmekle beraber, $A\overset{\Delta}{B}D \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$ dir.

Burada, O noktası simetri merkezidir.

Örnek: Verilen bir doğru parçasının bir doğruya göre simetriğini bulunuz.

Çözüm: Verilen bir doğru parçası [AB] ve doğru d olsun. A ve B noktalarından d doğrusuna sırasıyla [AH] ve [BK] dikmelerini çizelim.

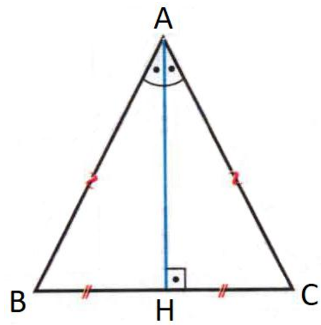


Aynı zamanda, $|AH| = |A'H|$ ve $|BK| = |B'K|$ olacak şekilde [AH] ve [BK] dikmelerini uzatalım. A' ve B' doğru parçasının d doğrusuna göre simetriği olur.

Dolayısıyla, $|AB| = |A'B'|$ dir.

Örnek: İkizkenar üçgenin, aynı zamanda iç açıortayı ve kenarortayı olan yüksekliğe göre simetrik olduğunu gösterelim.

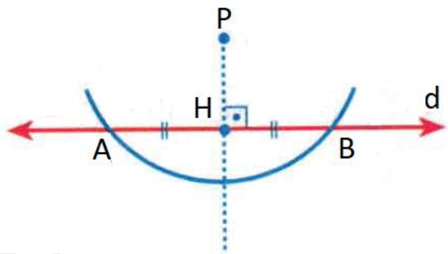
Çözüm:



Şekilde ABC ikizkenar üçgeninde $|AB|=|AC|$ ise, A açısına ait yükseklik, hem iç açıortay hem de kenarortay olduğundan, ABH üçgeni AH doğrusuna göre simetrik olup, $A\overset{\Delta}{B}H \cong A\overset{\Delta}{C}H$ dir ve AH doğrusu simetri eksendir.

Örnek: Düzlemde bir d doğrusu ile dışındaki bir P noktası verildiğinde, P'nin d üzerinde dik izdüşümünü ve P'nin d'ye uzaklığını bulunuz.

Çözüm:



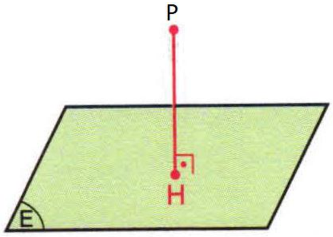
Pergelimizin sivri ucunu P'ye koyarak d doğrusunu kesecek şekilde bir yay çizelim. Çizdiğimiz yay, çemberi A ve B noktaları da kessin. $|AB|$ nun orta noktası, P'nin d doğrusu üzerine dik izdüşümü olan noktadır. Bu noktaya H diyelim. $|PH|$ uzunluğu da P'nin d'ye uzaklığıdır.

UZAYDA BİR DÜZLEM ÜZERİNE DİK İZDÜŞÜM

Bir Noktanın Bir Düzem Üzerindeki Dik İzdüşümü

4.5. Tanım: Uzayda bir P noktasından, bir E düzlemine indirilen dikmenin ayağı olan H noktasına, P noktasının E düzlemi üzerindeki dik izdüşümü nedir.

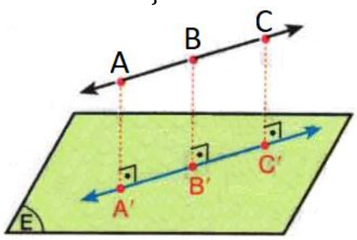
Bir P noktası ile bu noktanın düzlem üzerindeki dik izdüşümü arasındaki mesafe, noktanın düzleme olan uzaklığıdır ve $|PH|=0$ olur.



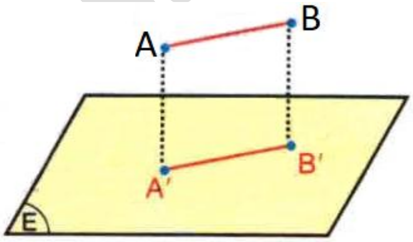
Verilen bir noktanın bir düzlem üzerindeki dik izdüşümü bu noktadan düzleme çizilen dikmenin ayağıdır. Şekilde H noktası dikmenin ayağıdır.

Bir Doğrunun Bir Düzlem Üzerindeki Dik İzdüşümü

Uzayda bir doğrunun bir düzlem üzerindeki dik izdüşümü, bu doğrunun her noktasının, düzleme dik izdüşüm noktalarının kümesidir. Doğru düzleme dik değilse, u doğrunun düzle üzerindeki dik izdüşümü yine bir doğrudur. Doğru düzleme dikse, düzlem üzerindeki dik izdüşümü bir noktadır.



Şekilde E düzlemine dik olmayan AB doğru parçasının düzlem üzerine dik izdüşümü verilmiştir.

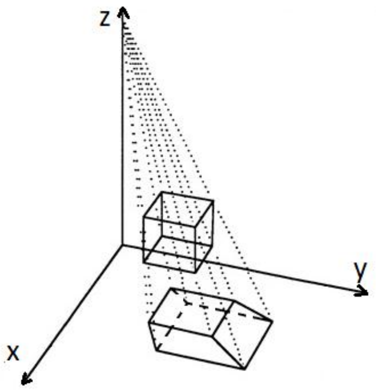


A ve B noktalarının E düzlemi üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla A' ve B' noktaları olsun. A' ve B' noktaları birleştiğinde [AB] nın E düzlemi üzerine dik izdüşümü olan [A'B'] elde edilir.

[AB] // E ise $|AB| = |A'B'|$ ve $[AB] \perp E$ ise dik izdüşüm bir noka olur.

Bir Şeklin Bir Düzlem Üzerindeki Dik İzdüşümü

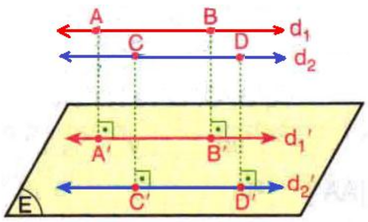
Bir şeklin bir düzlem üzerindeki dik izdüşümü, bu şeklin her noktasının, düzleme dik izdüşüm noktalarının kümesidir. Bir şeklin, düzlem üzerindeki dik izdüşümü şeklin aynısı olabileceği gibi çok farklı da olabilir.



4.2. Teorem: Paralel doğruların bir düzlem üzerindeki dik izdüşümleri paraleldir.

$d_1 // d_2$ ve bu doğruların E düzlemi üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla, d'_1 ve d'_2 ise $d'_1 // d'_2$ dir.

İspat:



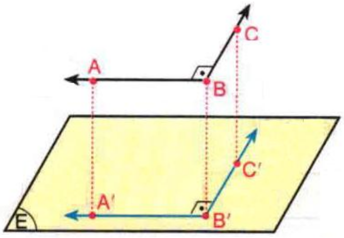
d_1 doğrusu üzerindeki bir A noktası ile d_2 doğrusu üzerindeki bir C noktasının E düzlemi üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla A' ve C' noktaları olsun.

$[AA'] \perp E$ ve $[AC'] \perp E$

olur. Buradan [AA'] // [CC'] olacağından, [AA'] ile d_1 doğrusunun belirttiği düzlem ile [CC'] ile d_1 doğrusunun belirttiği düzlem birbirine paralel olur. O halde, bu düzlemlerin E düzlemi ile ara kesitleri olan d'_1 ve d'_2 doğruları da birbirine paralel olurlar.

4.1. Sonuç: Paralel ve eş doğru parçalarının bir düzlem üzerindeki dik izdüşümleri de paralel ve eştir.

4.3. Teorem: Bir kenarı düzleme paralel ve diğer kenarı bu düzleme dik olmayan bir dik açının, bu düzlem üzerindeki dik izdüşümü de bir dik açıdır.



$m(A\hat{B}C) = 90^0$, [BA // E ve ABC açısının E düzlemi üzerindeki dik izdüşümü A'B'C' açısı ([BC düzleme dik değildir) ise $m(A'\hat{B}'C') = 90^0$ dir.

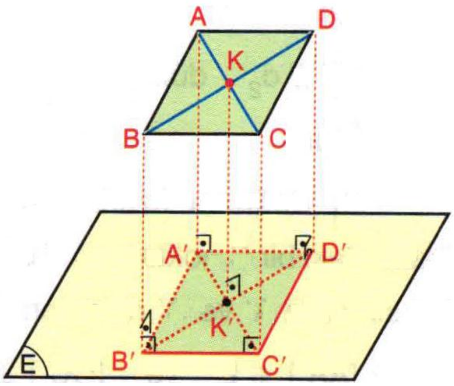
İspat: [BA üzerindeki A ve B noktalarının E düzlemindeki dik izdüşümleri A', B' ve [BC üzerindeki C noktasının dik izdüşümü de C' noktası olsun.

[BA // E olduğundan, [B'A' // [BA dır.

[BA // [B'A' ve $[BA \perp [BC$ ise $[BC \perp [B'A'$ olacağından, [B'A', BB' ve CC' paralel doğrularının belirttiği düzleme diktir. O halde, $[B'C' \perp [B'A'$ olur.

Örnek: Düzlemi dik izdüşüm düzlemine dik olmayan bir ABCD paralelkenarının köşegenlerinin kesim noktasının bir düzlem üzerindeki dik izdüşümü, bu paralelkenarın dik izdüşümünün köşegenlerinin keşim noktası olduğunu gösterelim.

Çözüm: ABCD paralelkenarının köşegenlerinin kesim noktası K olsun. $\frac{|AK|}{|KC|} = 1$ olur.



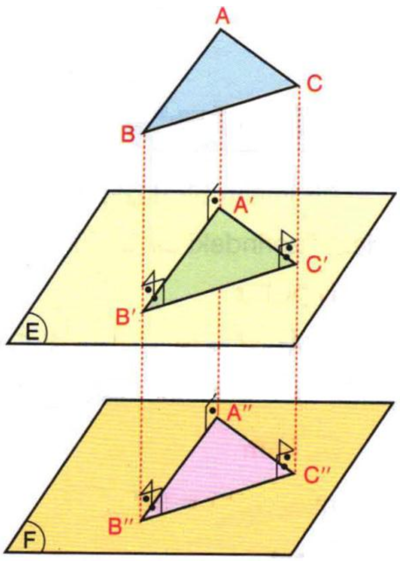
A, B, C, D ve K noktalarının E düzlemi üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla A', B', C', D' ve K' noktaları olsun. [AA'] // [BB'] // [CC'] // [DD'] paralel doğruları birer düzlem üzerindedir.

Tales teoreminden, $\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|A'K'|}{|K'C'|} = 1$ ve $\frac{|BK|}{|KD|} = \frac{|B'K'|}{|K'D'|} = 1$ dir.

O halde, K' noktası A'B'C'D' paralelkenarının köşegenlerinin kesim noktasıdır.

4.4. Teorem: Bir üçgenin paralel iki düzlem üzerindeki dik izdüşümleri eştir.

ABC üçgeninin E ve F paralel düzlemlerindeki dik izdüşümleri sırasıyla A'B'C' ve A''B''C'' üçgenleri ise $A'\overset{\Delta}{B'}C' \cong A''\overset{\Delta}{B''}C''$ dir.



İspat: A'B' ve A''B'' doğru parçaları ABB''A'' düzlemi üzerindedirler. [A'B'] ve [A''B''], AB B''A'' düzlemi ile birbirine paralel E ve F düzlemlerinin ara kesit doğruları üzerinde olurlar. Bundan dolayı $|A'B'| = |A''B''|$ dir. Aynı şekilde, $|A'C'| = |A''C''|$ ve $|B'C'| = |B''C''|$ olduğu görülür. O halde K.K.K. eşlik teoreminden,

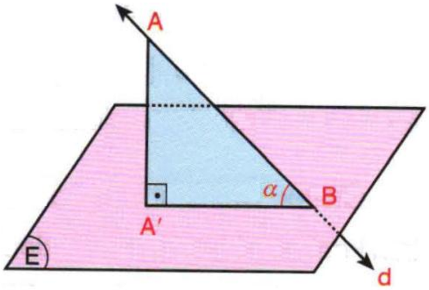
$$A'\overset{\Delta}{B'}C' \cong A''\overset{\Delta}{B''}C''$$

bulunur.

4.2. Sonuç: Bir şeklin paralel iki düzlem üzerindeki dik izdüşümleri eştir.

BİR DOĞRUNUN BİR DÜZLEMLE YAPTIĞI AÇI

4.6. Tanım: Bir doğru düzleme paralel değilse, bu doğrunun düzlem üzerindeki dik izdüşümü ile yaptığı dar açıya bu doğrunun bu düzlemle yaptığı açı denir.



Doğru düzleme paralelse, doğru ile düzlem arasındaki açı 0^0 dır.

Bir doğru parçasının düzlemle yaptığı açı, doğru parçasını taşıyan doğrunun bu düzlemle yaptığı açıdır.

Verilen bir doğrunun verilen bir düzlemle yaptığı açıyı bulalım.

Bir d doğrusu ve bir E düzlemi verilmiş olsun. d doğrusunun herhangi bir A noktasının E düzlemindeki dik izdüşümü A' noktası ise ABA' açısı, d doğrusunun E düzlemi ile yaptığı açıktır.

Üç dikme teoreminden, B noktasından d doğrusuna dik çizilen ve E düzlemi içinde bir doğru ℓ ise $\ell \perp A'B$ dir.

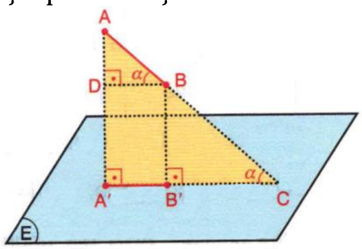
O halde, üç dikme teoreminden yararlanarak bir d doğrusunun, kestiği bir düzlemle yaptığı α açısını bulmak için;

a. d doğrusunun düzlemi kestiği noktada, düzlem içinde d doğrusuna dik bir doğru çizilir.

b. İki doğrunun kesiştiği noktadan, düzlem içindeki doğruya dik çizilen doğru ile d doğrusu arasındaki açı, d doğrusunun düzlemle yaptığı açıdır.

BİR DOĞRU PARÇASININ DİK İZDÜŞÜNÜN UZUNLUĞU

4.5. Teorem: Bir doğru parçasının bir E düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğu, bu doğru parçasının uzunluğu ile doğru parçasının E düzlemyle yaptığı açının kosinüsünün çarpımına eşittir.



[AB] nın E düzlemi üzerindeki dik izdüşümü [AB] ve [A'B'] ile E düzlemi arasındaki açının ölçüsü α ise $|A'B'| = |AB|\cos\alpha$ dir.

İspat: Dik izdüşümün tanımından,

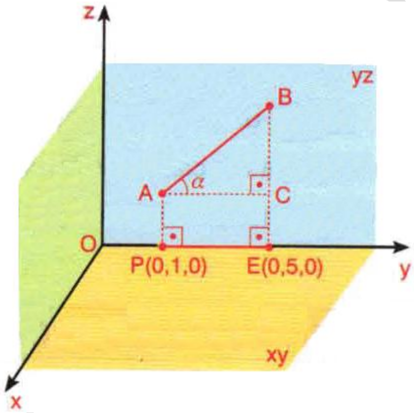
$[AA'] \perp E$ ve $[BB'] \perp E$ dir. B noktasından [A'B'] na paralel çizildiğinde, $[BD] // [A'B']$ ve $|BD| // |A'B'|$ olur.

$$m(A\hat{C}A') = m(A\hat{B}D) = \alpha \text{ ve } \cos\alpha = \frac{|DB|}{|AB|} \text{ ise } |A'B'| = |AB|\cos\alpha$$

bulunur.

Örnek: Şekilde, yz düzlemindeki A(0, 1, 2) ve B(0, 5, 5) noktaları veriliyor. Buna göre [AB] doğru parçasının xy düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Uzayda iki nokta arasındaki uzaklık denkleminden,



$$|AB| = \sqrt{0^2 + (5-1)^2 + (5-2)^2} = 5\,\text{br}$$

bulunur. Buna göre;

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} \text{ ise } |AC| = |PE| = 5.\frac{4}{5} = 4\,\text{br}$$

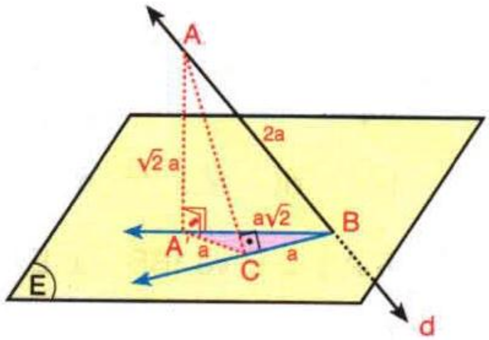
elde edilir.

Örnek: Aşağıda verilen şekilde, d doğrusu üzerindeki A noktasının, E düzlemindeki dik izdüşümü A' noktasıdır. $C \in E$ olmak üzere,

$$[AC] \perp [BC] \text{ ve } |AA'| = \sqrt{2}|CB| = \sqrt{2}|A'C|$$

olduğuna göre, ABC ve A'CB açılarının ölçülerini bulunuz.

Çözüm: $|CB| = a$ birim dersek,



$|A'C| = a$ ve $|AA'| = \sqrt{2}a$ br olur. $[AA'] \perp E$ olduğundan, $[AA'] \perp [A'C]$ dir. AA'C dik üçgeninde, $|AC| = \sqrt{3}a$ br bulunur.

Aynı şekilde, ACB dik üçgeninde $|AB| = 2a$ br olur. O halde AA'B ve A'CB üçgenleri ikizkenar dik üçgen ve ACB üçgeni de $30^0, 60^0, 90^0$ üçgenidir. Bu duruma göre

$$m(A\hat{B}C) = 60^0 \text{ ve } m(A'\hat{C}B) = 90^0$$

bulunur.

BİR ŞEKLİN DİK İZDÜŞÜMÜNÜN ALANI

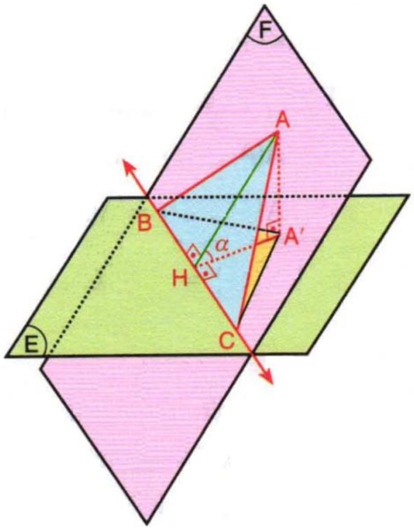
4.6. Teorem: Bir düzlemsel çokgenin bir düzlem üzerindeki dik izdüşümünün alanı, bu çokgenin alanı ile bu kesişen iki düzlem arasındaki açının kosinüsünün çarpımına eşittir.

Kesişen iki düzlem arasındaki açı α, düzlemsel çokgenin alanı S ve dik izdüşümünün alanı S' ise $S' = S.\cos\alpha$ dır.

İspat: Teoremin ispatı bir üçgen için yapılıp, her bir çokgen üçgenlere ayrılabileceğinden, durum çokgen için genellemesi yapılır.

ABC üçgeni ile düzlemi üç farklı konumda alarak ispatı başlayalım:

i) ABC üçgeninin [BC] kenarı, düzlemlerin ara kesiti üzerinde olsun.



F düzlemindeki ABC üçgeninin E düzlemi üzerindeki dik izdüşümü A'BC üçgeni olsun. ABC üçgeninin yüksekliği [AH] ve [AH] yüksekliğinin dik izdüşümü [A'H] dir. A'BC üçgeninin yüksekliği de üç dikme teoreminden [A'H] olur.

Bu durumda, $m(A'HA)=\alpha$ açısı E ve F düzlemlerinin ölçek açısı olur ve üçgenlerinin alanları;

$$S=\frac{1}{2}|BC|.|AH|, \quad S'=\frac{1}{2}|BC|.|A'H| \text{ ve } |A'H|=|AH|\cos\alpha$$

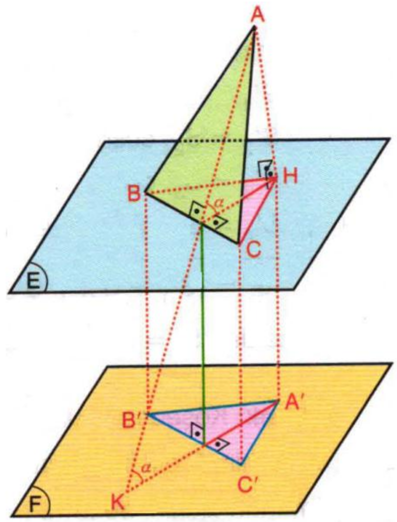
olduğundan

$$\frac{S}{S'}=\frac{|BC|.|AH|}{|BC|.|A'H|}=\frac{|BC|.|AH|}{|BC|.|AH|\cos\alpha}$$

$$S'=S\cos\alpha$$

bulunur.

ii) ABC üçgeninin [BC] kenarı, üçgenin düzlemi ile F düzleminin ara kesitine paralel olsun.



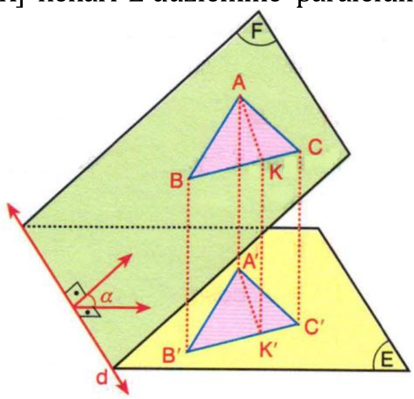
[BC] kenarı F düzlemine paralel ise, [BC] nı içine alan ve F düzlemine paralel bir tek E düzlemi vardır. Bir üçgenin paralel iki düzlem üzerindeki dik izdüşümleri eş ve E // F olduğundan ABC üçgeninin E düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün alanı ile F düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün alanı eş olacaktır.

ABC üçgeninin E düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün alanı, F düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün alanına eşit olduğundan 2. Durum 1. Duruma dönüşür ve $S' = S\cos\alpha$ olur.

iii) ABC üçgeni E düzleminin dışında herhangi bir konumda olsun. Her üçgen düzlemsel olduğundan E düzlemi ile, üçgenin içinde bulunduğu düzlemin ara kesiti d olsun. ABC üçgeninin A köşesinden arakesit doğrusu d'ye [AK] paralelini çizelim.

[AK] nın E düzlemi üzerindeki dik izdüşümü [A'K'] da E ve F düzlemlerinin arakesiti olan d doğrusuna paralel olur.

ABC üçgeni AKB ve AKC gibi birer kenarı E düzlemine paralel olan iki üçgene dönüşür. Burada [AK] kenarı E düzlemine paraleldir.



E ve F düzlemlerinin ölçek açısı α ise,

$$A(A'\overset{\Delta}{B'}K') = A(A\overset{\Delta}{B}K)\cos\alpha$$

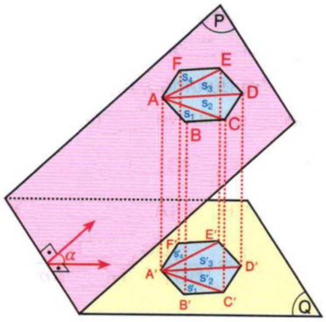
$$A(A'\overset{\Delta}{B'}C') = A(A\overset{\Delta}{K}C)\cos\alpha$$

eşitlikleri taraf tarafa toplandığında

$$A(A'\overset{\Delta}{B'}C') = A(A\overset{\Delta}{B}C)\cos\alpha$$

olur. O halde $S' = S\cos\alpha$ olur.

4.3. Sonuç: P düzleminde verilen ABCDEF düzlemsel çokgenin Q izdüşüm düzlemindeki dik izdüşümü A'B'C'D'E'F' çokgeni olsun. Çokgenin bir köşesinden komşu olmayan köşeleri birleştirdiğimizde,



ABC, ACD, ADE ve AEF üçgenleri meydana gelir ve iii duruma dönüşür. Bu üçgenlerin alanlarını bulalım: P ve Q düzlemlerinin ölçek açısı α ise,

$$S'_1 = S_1 \cos\alpha$$
$$S'_2 = S_2 \cos\alpha$$
$$S'_3 = S_3 \cos\alpha$$
$$S'_4 = S_4 \cos\alpha$$

eşitlikleri taraf tarafa topladığımızda;

$$S' = (S'_1 + S'_2 + S'_3 + S'_4) = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)\cos\alpha = S\cos\alpha$$

bulunur.

Örnek: Köşegen uzunlukları $4\sqrt{3}$ cm ve 12 cm olan bir eşkenar dörtgenin içinde bulunduğu düzlemin, E dik izdüşüm düzlemi ile ölçek açısı 30^0 dir. Buna göre, eşkenar dörtgenin dik izdüşümünün alanını bulunuz.

Çözüm: Şekilde köşegen uzunlukları $4\sqrt{3}$ cm ve 12 cm olan bir eşkenar dörtgenin alanı,

$$A(ABCD) = \frac{1}{2}e.f = \frac{4\sqrt{3}.12}{2} = 24\sqrt{3}\ cm^2$$

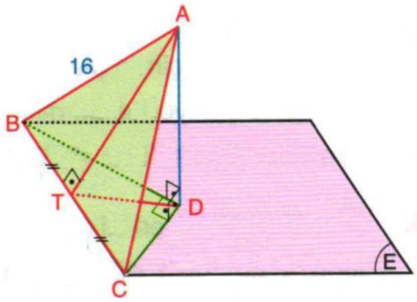
dir. Bir düzlemsel çokgenin bir düzlem üzerindeki dik izdüşümünün alanı, bu çokgenin düzlemi ile izdüşüm düzlemi arasındaki açının kosinüsünün çarpımına eşit olduğundan,

$$A(A'B'C'D') = A(ABCD)\cos\alpha$$

$$S' = S\cos\alpha \text{ ise } S = 24\sqrt{3}\cos 30 = 24\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 36\,cm^2$$

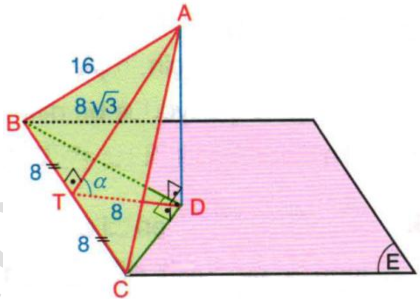
bulunur.

Örnek: Verilen şekilde ABC kenar uzunluğu 16 cm olan bir eşkenar üçgendir. Bu üçgenin BC kenarından geçen E düzlemi üzerindeki dik izdüşümü, D açısı dik açı olan DBC üçgenidir.



Buna göre ABC üçgeninin belirttiği düzlem ile E düzlemi arasındaki ölçek açının ölçüsünün kosinüsünü bulunuz.

Çözüm: ABC eşkenar üçgeninde BC kenarının orta noktası T olsun. Bu durumda, $[AT]\perp[BC]$ ve üç dikme teoreminden, $[DT]\perp[BC]$ dir.



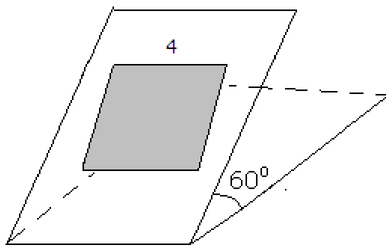
$[BD]\perp[DC]$ olduğundan, $|DT| = |BT| = |TC| = 8\,cm$ dir.

ÜNİVERSİTEYE GİRİŞ SINAVI SORULARI

1. İki düzlem 60° lik açı altında kesişmektedir. Biri üzerine 4 cm kenarlı bir kare çizilirse, bu karenin diğer düzlem üzerindeki izdüşüm alanı nedir?

A) 16 B) 8 C) 4 D) $16\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{3}$

Çözüm:



Şekle göre karenin alanı A, izdüşümün alanı B olsun.

$$B = A.\cos 60 = 4^2.\frac{1}{2} = 8\,cm^2$$

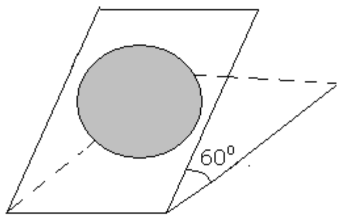
bulunur.

(1967 ÜSS) Cevap: B

2. Kesişen iki düzlemin arasındaki açı 60^0 dir. Düzlemden birisi üzerinde bulunan ve yarıçapı 10 cm olan bir dairenin diğer düzlem üzerindeki izdüşümünün alanı kaç cm^2 dir?

A) 100π B) $50\sqrt{3}\,\pi$ C) $\frac{100}{\sqrt{3}}\pi$ D) 50π E) $25\sqrt{2}\,\pi$

Çözüm:



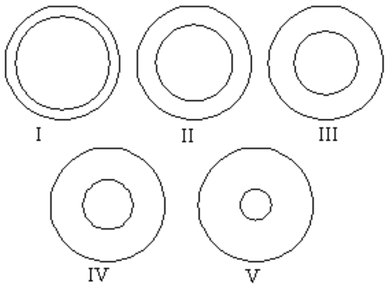
Şekle göre dairenin alanı A, izdüşümün alanı B olsun.

$$B = A.\cos 60 = 10^2.\frac{1}{2}\pi = 50\pi\ cm^2$$

bulunur.

Cevap: D

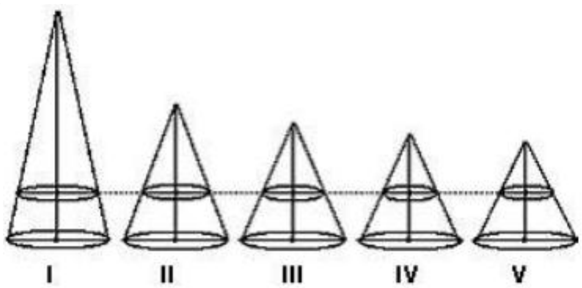
3.



Yukarıda aynı merkezli ikişer çemberden oluşan I, II, III, IV, V şekillerinde dıştaki çemberler, eş (eşit) tabanlı beş dik koninin tabanlarını göstermektedir. İçteki çemberler ise tabana eşit uzaklıktaki dik kesitlerin, taban üzerindeki dik izdüşümleridir. Hangi şekilde gösterilen koninin yüksekliği en büyüktür?

A) I B) II C) III D) IV E) V

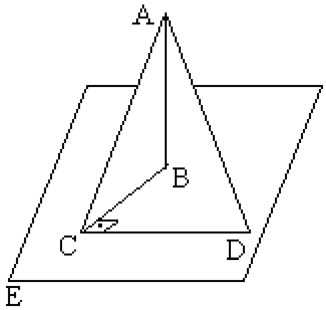
Çözüm: Verilere göre



şekli çizilebilir.

(1981 ÖSS) Cevap: A

4.



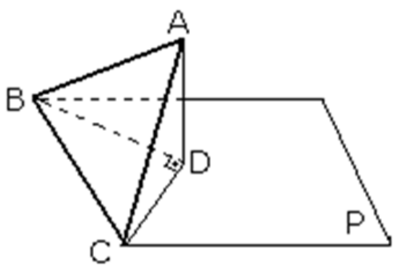
Yukarıdaki şekilde A noktasının E düzlemi içindeki dik izdüşümü B dir. CD doğrusu. E düzlemi içinde ve $B\hat{C}D = 90^0$ olduğuna göre, aşağıdaki açılardan hangisi kesinlikle diktir?

A) $A\hat{D}C$ B) $A\hat{C}B$ C) $A\hat{C}D$ D) $C\hat{B}D$ E) $A\hat{D}B$

Çözüm: Verilenlere göre m(ACD) = 90 dir.

(1981 ÖYS) Cevap: C

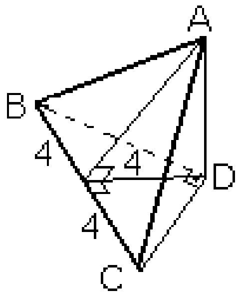
5.



Yandaki şekilde ABC, kenar uzunluğu 8 cm olan eşkenar üçgendir. Bu üçgenin BC kenarından geçen P düzlemi üzerindeki dik izdüşümü, D açısı dik açı olan DBC üçgenidir. DBC üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

Çözüm: $|AB| = |AC|$ ve $|AD| \perp |BD|$ olduğundan,



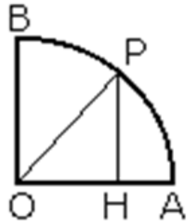
şekli çizilebileceğinden $|BD| = |BC|$ olup BDC ikizkenar üçgendir. Buna göre,

$$A(ACD) = \frac{4.8}{2} = 16$$

dir.

(1982 ÖYS) Cevap: A

6.



Dik yarıçaplı [OA], [OB] olan dörtte bir birim çember üzerindeki değişken bir P noktasının OA üzerindeki dik izdüşümü H olduğuna göre, POH üçgeninin çevresi <u>en çok</u> kaç birim olabilir?

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}-1$ C) $2\sqrt{3}-1$ D) $1+\sqrt{3}$ E) $1+\sqrt{2}$

Çözüm: $|OH| = x$ olsun. Birim çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 1$ olduğundan $y = \sqrt{1-x^2}$ olur. Buna göre üçgeninin çevresi maksimum olması için,

$$Ç(x) = 1 + x + \sqrt{1-x^2}$$

$$Ç'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

$$\sqrt{1-x^2} = x$$

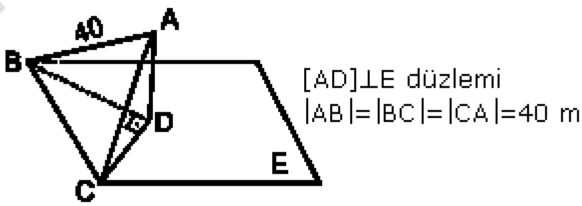
$$x^2 = 1 - x^2$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Ç(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$$

(1990 ÖYS) Cevap: E

7.



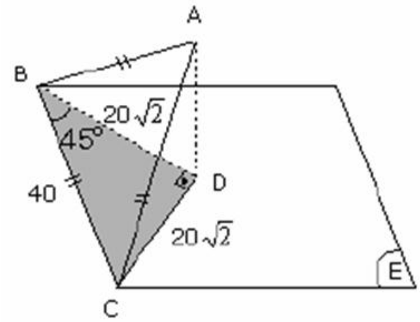
Bir kenarı 40 m olan ABC eşkenar üçgeni biçimindeki arsa, şekildeki gibi kazılıp düzeltilerek yatay BDC dik üçgeni biçimine getirilmiştir. ABC eşkenar üçgeninin dik izdüşümü olan BDC dik üçgeni biçimindeki yeni arsanın alanı kaç m^2 dir?

A) $400\sqrt{2}$ B) $200\sqrt{3}$ C) 200 D) 400 E) 1600

Çözüm: Eş uzunluktaki doğru parçalarının aynı düzlem üzerindeki dik iz-düşümleri de eşittir. Buna göre,

$$|AB| = |AC| \Leftrightarrow |BC| = |DC|$$

olur. BDC dik üçgeni ikizkenar dik üçgen olur.

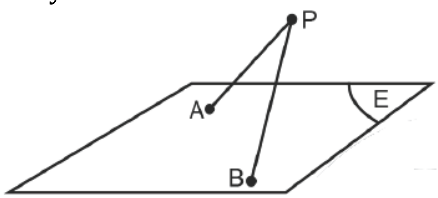


$$|BC| = 40 \Leftrightarrow |BD| = |DC| = 20\sqrt{2}$$

$$A(BDC) = \frac{|BD||DC|}{2} = \frac{20\sqrt{2}.20\sqrt{2}}{2} = 400\ m^2$$

(2000 ÖSS) Cevap: D

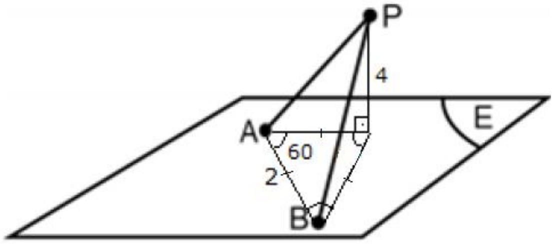
8. Uzayda bir E düzlemi üzerinde A ve B noktaları ve bu düzleme 4 birim uzaklıkta bir P noktası veriliyor.



PA ve PB doğru parçalarının E düzlemi üzerine dik izdüşümleri ile AB doğru parçası, kenar uzunluğu 2 birim olan bir eşkenar üçgen oluşturmaktadır. Buna göre, $|PA| \cdot |PB|$ çarpımı kaçtır?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm: Verilere göre aşağıdaki şekil çizilebilir.



$|PA| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

$|PB| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

$|PA| \cdot |PB| = 2\sqrt{5}.2\sqrt{5} = 20 \text{ br}$

(2018 AYT) Cevap: E