5. BÖLÜM
ÇİZGE TEORİSİ

ÇİZGE (GRAPH) KAVRAMI

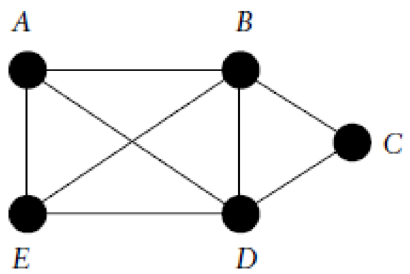
Matematikte nokta tanımsız terimdir. Teknolojide ve sosyal bilimlerde nokta yerine düğüm kavramı kullanılmaktadır. Biz de bu çalışmamızda matematikte kullanılan nokta kavramını terimi tercih etsek de yer yer düğüm kavramını kullanacağız.

5.1. Tanım: V, boş olmayan noktalar (düğümler) kümesi, E ise iki noktayı birbirine bağlayan bağlantıların (hatların) kümesi olmak üzere,

$$G(V, E) = \{(x, y) : x \in V, y \in E\}$$

kümesine çizge denir.

Örnek:



Şekil bir çizgedir. $V = \{A, B, C, D, E\}$ bir noktalar (noktalar) kümesidir.

$$E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{A, D\}, \{D, E\}, \{A, E\}, \{D, B\}, \{E, B\}\}$$

bağlantılar (hatlar) kümesidir. G(V, E) çizgesi üzerinde,

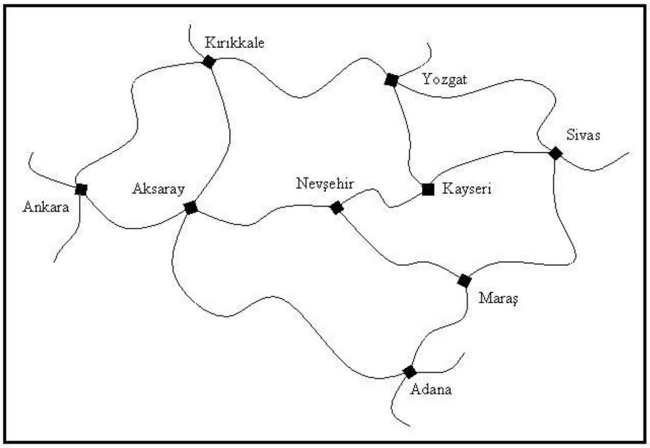
1. V insanlar kümesi ise G insanlar arasındaki tanışıklık çizgesi
2. V futbol takımlarının kümesi ise G takımlar arasındaki yaptıkları maçların çizgesi
3. V şehirler ise G şehirlerarasındaki uçak seferlerinin çizgesi
4. V bilgisayarlar ise G bilgisayarlar arasındaki ağ çizgesi

5. V çeşitli sosyal bilimler ise G bu sosyal bilimler arasındaki ilişkiler çizgesi şeklinde gösterilebilir.

Örnek: Kırıkkale = K_1, Yozgat = Y, Sivas = S, Ankara = A_1, Aksaray = A_2, Nevşehir = N, Kayseri = K_2, Kahramanmaraş = M, Adana = A_3 ile gösterilmek üzere

$$V = \{A_1, A_2, A_3, N, K_1, K_2, M, N, S, Y\}$$

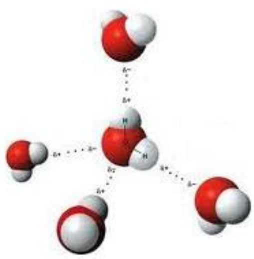
noktaları (düğümleri) verilsin. Bu noktalar arasındaki karayolları birer bağlantılar (hatlar) olsunlar. Bu takdirde şekilde ki bir çizge elde edilir.



E={(A_1,K_1), (Y,K_1), (Y,S), (A_1,A_2), (A_2,N), (N,K_2), (K_1,S), (A_2,A_3), (N,M), (M,A_3)}

olmak üzere G(V, E) bağıntısıdır.

Örnek:



Hidrojen bağı hatlar ve elektronlar noktalar olmak üzere hidrojen atomu çizge oluşturur. //

Bir çizgede noktaların konumu, uzunluğu, boyutu ya da bağlantıların şeklinin bir önemi yoktur. Önemli olan noktaların kendisi ile ya da diğer noktalara olan bağlantısının belirtilmesidir.

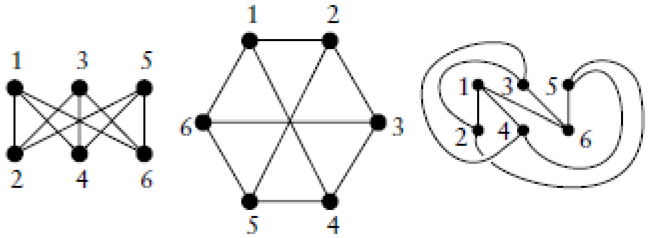
Çizgeyi nasıl görselleştirdiğimizin bir önemi yoktur. Noktaları istediğimiz gibi kâğıda yerleştirebiliriz. Aralarındaki bağlantıları istediğimiz gibi çizebiliriz, mesela bir doğru parçası olarak da, bir eğri olarak da yazılabilir. Örneğin, eğer noktalar kümesi

$V = \{1, 2, 3,4, 5,6\}$

ise ve tek sayılarla çift sayılar arasında bir bağlantı varsa, yani bağlantılar kümesi

E={{1,2}, {1,4}, {1,6}, {3,2}, {3,4}, {3,6},{5,2}, {5,4}, {5,6}}

ise, G(V, E) çizgesini aşağıdaki şekillerden herhangi biri olarak görselleştirebiliriz:

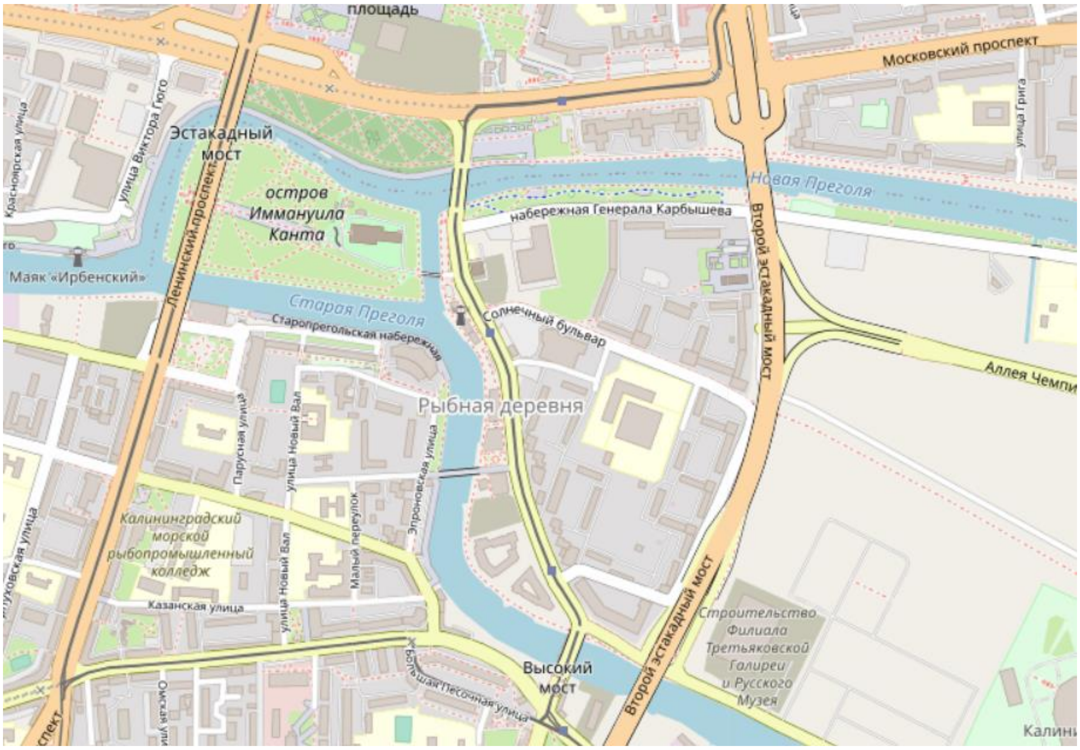


Çizgeleri yukarıdaki gibi görsel olarak ifade etmenin büyük avantajları olsa da, nokta sayısı çok olan çizgeleri görsel olarak ifade etmek kolay olmayabilir. Uç noktaları A ve B olan bir bağlantılı {A, B} diye yazacağımıza kısaca AB olarak yazacağız. Yine bu yazılımla, $AB = BA$ eşitliği geçerlidir.

ÇİZGE TEORİSİNİN TARİHİ

Leonhard Euler
15 Nisan 1707, Basel, İsviçre - 18 Eylül 1783, St. Petersburg, Rusya

Çizge teorisi, Euler'in 1736'da yazdığı "Königsberg (Kaliningrad)'in yedi köprüsü" isimli makalesi ile başlar. O yıllarda Königsberg'deki Pregolya (Pregel) nehri Knaypkhof (Kneiphof) adasının iki yanından akmakta ve üzerinde yedi farklı köprü bulunmaktaydı. Şehir halkı, her bir köprüden sadece bir kez geçerek tüm kıyıları dolaşmanın ve tekrar başlangıç noktasına dönmenin mümkün olup olmadığını merak ediyordu. İsviçreli matematikçi şekilde görüldüğü gibi, önce problemi bağlantı (hat) ve noktalardan oluşan bir yapıya dönüştürdü. Sonradan çizge (graph) adı verilen bu yapıyı kullanarak problemin çözümüne ulaştı. Königsberg halkı aradıkları yolu bulamamışlardı, çünkü böyle bir yol yoktur.

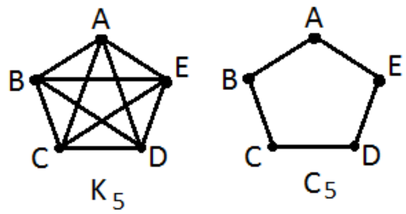


Königsberg (Kaliningrad) Pregolya (Pregel) nehri köprülerin bugünkü şekli

ALT ÇİZGE KAVRAMI

5.2. Tanım: Bir G(V, E) çizgesinin altçizgesi $W \subseteq V$ ve $F \subseteq E$ olmak üzere H(W, F) olarak tanımlanır.

Örnek: Şekilde C_5, K_5 in bir alt çizelgesidir.

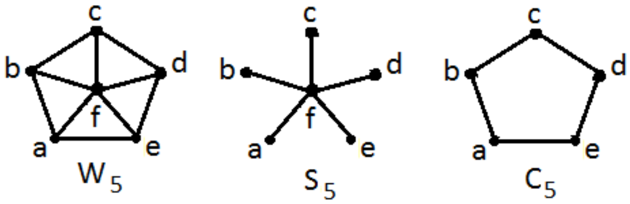


K_5={{A,B},{B,C},{C,D},{D,E},{E,A},{A,C},{B,D},{C,E},{D,A},{E,B}}
C_5={{A,B},{B,C},{C,D},{D,E},{E,A}}

ÇİZGELERİN BİRLEŞİMİ

5.3. Tanım: $G_1(V_1, E_1)$ ve $G_2(V_2, E_2)$ olmak üzere iki basit çizgeden $V = V_1 \cup V_2$ ve $E = E_1 \cup E_2$ olmak üzere $G(V, E)$ çizgesi üretilirse, G çizgesine G_1 ve G_2 çizgelerinin birleşimini ($G_1 \cup G_2$) denir.

Örnek: W_5; S_5 ve C_5 çizgelerinin birleşimidir.



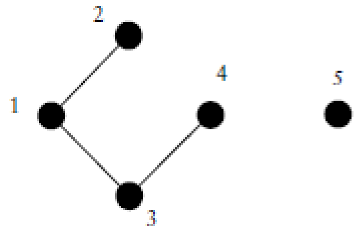
W_5={{a, b}, {b, c}, {c, d}, {d, e}, {e, a}, {a, f}, {b, f}, {c, f}, {d, f}, {e, f}}
S_5={{a, f}, {b, f}, {c, f}, {d, f}, {e, f}}
C_5={{a, b}, {b, c}, {c, d}, {d, e}, {e, a}}
$W_5 = S_5 \cup C_5$

ÇİZGE ÖZELLİKLERİ

Tekparça Çizge

5.4. Tanım: Her iki nokta arasında en az bir bağlantının bulunduğu çizgelere tek parça çizge denir. Yani bir çizgede hat kopukluğu yoksa tek parça çizge oluşur.

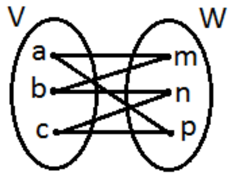
Örnek: Eğer V={1, 2, 3, 4, 5} ve E={{1,2}, {1,3}, {3,4}} ise, (V, E) çizgesi-ni, olarak görselleştirebiliriz. Bu çizge tek parça olmadığından, bu çizge tekparça çizge değildir, iki ayrı parçadan oluşmuştur, birbiriyle bağıntılı olan {1, 2, 3, 4} parçası ve tek başına duran {5} parçası.



İki Kümeli (Parçalı) Çizge

5.5. Tanım: Bir C_n çevirim kümesi, V_1 ve V_2 iki düğüm kümesi olacak şekilde iki kümeli olsunlar. Eğer bu, V_1 ve V_2 iki düğüm kümeleri arasında bir çizge varsa iki kümeli (parçalı) çizge denir.

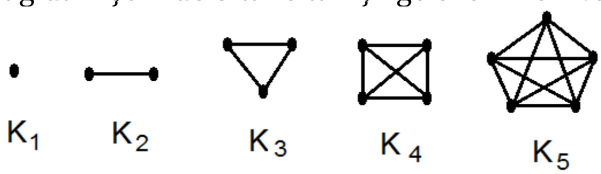
Örnek: C_6 iki kümelidir. Çünkü noktaları iki ayrı küme olarak $V = \{a, b, c\}$ ve $W = \{m, n, p\}$ şeklinde ifade edilebilir. Her bağlantı V ve W noktaları kümeleri arasındadır.



Tamçizge

5.6. Tanım: Tüm noktaların hepsi arasında bir bağlantı içeren çizgeler tamçizge olarak tanımlanır ve K_n ile gösterilirler.

Örnek: Aşağıdaki şekilde 5 tane tamçizge özellikleri vardır.



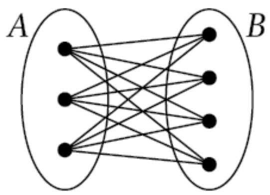
5.1. Teorem: n noktadan oluşan bir tamçizgenin $\frac{n(n-1)}{2}$ tane bağlantıları vardır. Buna göre $K_n = \frac{n(n-1)}{2}$ dir.

İspat: n tane noktanın 2 noktalı kombinasyonu tamçizge sayısını göstereceğinden

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

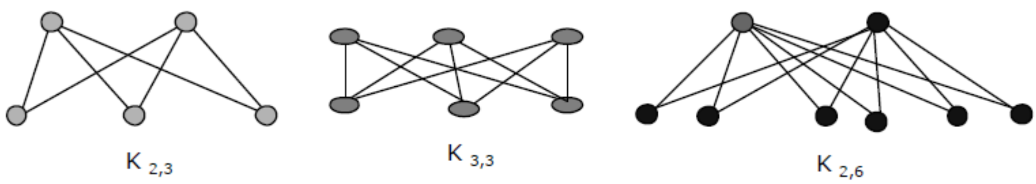
olarak bulunur.

5.7. Tanım: $K_{n,m}$ çizgesi, noktaların n ve m elemanlı olmak üzere iki A ve B kümesine ayrılmış, A'daki her noktanın B'deki her noktaya bağlandığı başka da kenarı olmayan çizgedir. $K_{n,m}$'ye iki parça ya da iki kümeli tamçizge denir.



$K_{3,4}$ çizgesi

Örnek: Aşağıda $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ ve $K_{2,6}$ özellikli İki kümeli tamçizgeler verilmiştir.



5.2. Teorem: $K_{n,m}$ iki parça tamçizgelerin bağlantı (hat) sayısı $n \cdot m$ tanedir.

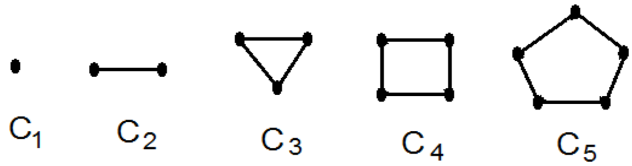
Teoremin ispatı saymanın temel prensibinden görülmektedir.

Döngü ve Çevrim

5.8. Tanım: Aynı noktada başlayıp, aynı noktada sonlanan bağlantılara (hatlara) döngü denir. Bir döngüde aynı bağlantıda tekrar yapmamaya çevrim denir. Yani, her noktaya tam iki bağlantıya değen tekparça n noktalı çizgelerdir. Döngü C_n ile gösterilir.

Yine çevrim $n \geq 3$ olmak üzere, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ olarak n nokta içerdiği ve $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, … , $\{v_{n-1}, v_n\}$ ve $\{v_1, v_n\}$ bağlantılarından oluştuğu ifade edilebilir.

Örnek: Döngüye aşağıdaki C_1, C_2, C_3, C_4 ve C_5 birer örnektir. Çevrim için ise C_3, C_4 ve C_5 birer örnektir.

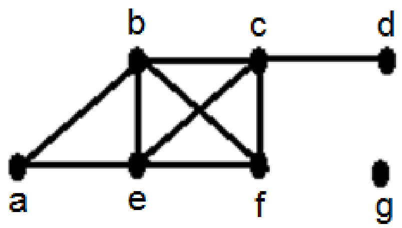


5.1. Sonuç: Bir çizgedeki derecesi nokta (nokta) sayısına eşit ya da fazlaysa, o çizge en az bir nokta içermektedir.

Bir Noktanın Derecesi

5.9. Tanım: Bir çizgede bu nokta ile bağlı bağlantıların sayısına bu noktanın derecesi denir ve $\deg v$ ile gösterilir. Bu sayı hesaplanırken kendisine dönen döngü iki olarak sayılır.

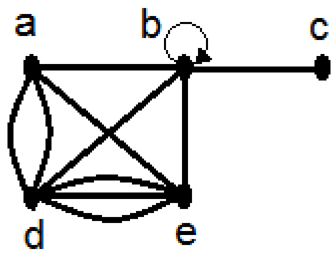
Örnek: Şekildeki noktaların derecelerini bulunuz.



Çözüm:

$$\deg a = 2, \deg b = 4, \deg c = 4, \deg d = 1, \deg e = 4, \deg f = 3, \deg g = 0$$

Örnek: Şekildeki noktaların derecelerini bulunuz.



Çözüm: $\deg a = 4, \deg b = 6, \deg c = 1, \deg d = 5, \deg e = 6$

5.3. Teorem: n noktadan oluşan bir tamçizgenin her noktanın derecesi $n - 1$ dir.

İspat: n noktadan oluşan bir tamçizgede bir noktanın kendisi hariç diğer kenarlarla bağlantı kuracağından o noktanın $n-1$ tane bağlantı sayısı vardır.

5.4. Teorem: Sonlu bir çizgede derecesi tek olan nokta sayısı çift sayıdadır.

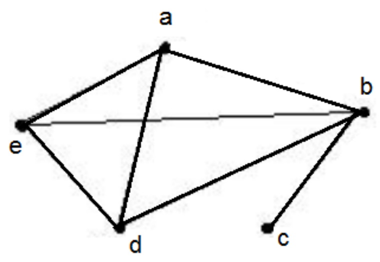
İspat: $n(n-1) = 2\binom{n}{2}$ eşitliği kolayca gösterilir. n noktadan oluşan bir çizgenin her noktanın derecesi $n - 1$ olduğundan tamçizgede toplam derece sayısı $2\binom{n}{2}$ tanedir. Bu ise toplam derece sayısının çift olduğunu gösterir. Sonucun çift olması için derece sayısı tek olan nokta sayısı çift tane olmalıdır.

Basit Çizge

5.10. Tanım: Boş olmayan noktalar kümesi V olsun. V ile sıralı olmayan farklı bağlantı elemanlarım kümesinden oluşan çizgeye basit (simple) çizge denir.

Basit çizgelere örnek olarak farklı şehirlerdeki bilgisayarların birbirine bağlayan telefon hatları örnek verilebilir.

Örnek:



Çoklu (Multi) Çizge

5.11. Tanım: İki ya da daha fazla nokta arasında birden fazla bağlantı varsa bu tür çizgelere çoklu (multi) çizge denir. Örneğin iki şehir arasında iki farklı yol varsa, bu durum çoklu çizgeyi temsil edilir. Çoklu çizgelerde, E bağlantılar kümesi üzerinde

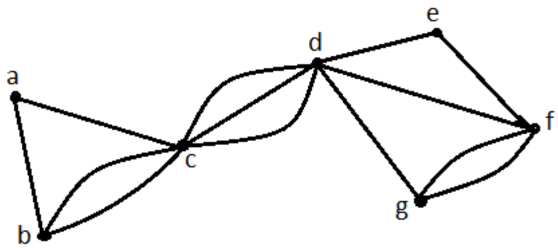
$$\{(u,v): u,v \in V, u \neq v\}$$

bir fonksiyon vardır. Bu fonksiyonlarda eğer, $f(e_1) = f(e_2)$ ise, e_1 ve e_2 bağlantılarına çoklu ya da paralelkenarlar denir.

Yani çoklu bir çizgede, iki nokta arasında birden çok yol olabilir. Örnek olarak iki şehir arasındaki uçak seferlerini göstermek gerektiğinde böyle bir gösterim uygun olabilir. Bu durumda bağlantılar günlük uçuş sayısını gösterir. Ankara ile İstanbul arasında günde dört uçak seferi varsa bu durum, İstanbul ve Ankara'yı temsil eden iki nokta arasındaki dört bağlantıyla gösterilebilir.

Farklı şehirdeki bilgisayarları birbirlerine bağlayan çoklu telefon hatları ya da farklı şehirlerarasındaki yolları da çoklu çizge ile gösterebilir. Bir başka örnekte de noktaları atom, bağlantılarında kimyasal bağ olarak düşünebiliriz. Bu durumda ikili ya da üçlü bağları iki ya da üçlü bağlantıyla gösterebiliriz.

Örnek: Aşağıdaki şekil çoklu çizgeyi göstermektedir.



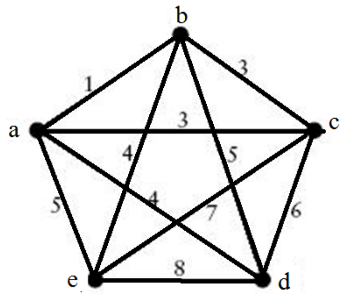
Ağırlıklı (Maliyetli) Çizge

Uygulamaya bağlı olarak bazen her bağlantıya farklı bir ağırlık derecesi verilmesi gerekebilir. Örnek olarak noktalar şehirleri, bağlantılar da yolları gösteriyorken, ağırlık saatte yoldan geçen araç sayısını gösteriyor olabilir.

5.12. Tanım: Eğer çizge yapısındaki bağlantılar birer değer alıyor ve bu değerler çizgenin yapısına katılıyorsa ağırlıklı (maliyetli) çizge denir. Ağırlıklı (maliyetli) çizgede E bağlantılar kümesi, iki bağlantı ve ağırlık (maliyet) değeri katılarak sıralı üçlülerden oluşur.

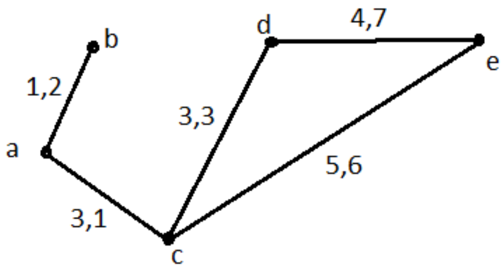
Bir çizgenin üzerindeki bağlantıların değerleri eşit değilse ve her biri farklı bir değer alabiliyorsa bu tip çizgelere maliyetli ya da ağırlıklı çizge (weighted graph) denir. Bütün bağlantıların değeri aynı ise bu çizge maliyetli çizge olarak anılamaz. Ağırlıkların bir anlamı yoktur ve her bağlantının değerinin 1 olduğu basit çizge gibi değerlendirilir. İş akış şemalarındaki, her işin bitirilme süresini gösteren çizgeler da yine maliyetli çizgeler için ağırlıklı çizgeye bir örnektir. Bir çizgedeki tüm hatlara ait ağırlığın (maliyetin) toplamı ise o çizgenin toplam ağırlığını (maliyeti) verecektir.

Örnek: Aşağıda ağırlıklı (maliyetli) çizge örneği verilmiştir.



V={a, b. c, d, e} ve E={{a, b, 1}, {b, c, 3}, {c, d, 6}, {d, e, 8}, {a, e, 5}, {a, c, 3}, {b, e, 4}, {d, b, 5}, {d, a, 4}, {c, e, 7}} olarak ifade edilir. Bu gösterimde mesela {a, b, 1.2} ifadesi a ile b noktaları arasına ağırlığın (maliyetin) 1,2 olduğunu gösterir. Bu örnekte toplam ağırlık (maliyet) 46’dır.

Örnek: Aşağıda ağırlıklı (maliyetli) çizge örneği verilmiştir.



V={a, b, c, d, e} ve E={{a, b, 1.2}, {a, c, 3.3}, {c, e, 6.4}, {c, d, 3.1}, {d, e, 4.5}} olarak ifade edilir. Bu gösterimde mesela {a, b, 1.2} ifadesi a ile b bağlantılar arasına ağırlığın (maliyetin) 1,2 olduğunu gösterir. Bu örnekte toplam ağırlık (maliyet) 17,9'dır.

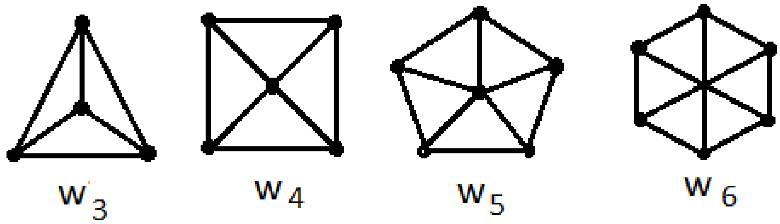
Düzenli Çizge

5.13. Tanım: Tüm noktaların dereceleri aynı olan çizgelere düzenli çizge denir. Tamçizge aynı zamanda düzenli çizgedir. Ama her düzenli çizge tamçizge olmak zorunda değildir.

Çarklar

5.14. Tanım: $n \geq 3$ olmak üzere, bir çevrimin tüm noktalarda bağlantılar oluşturmasına çark denir. W_n ile gösterilirler.

Örnek: Aşağıda W_3, W_4, W_5 ve W_6 çarkları verilmiştir.

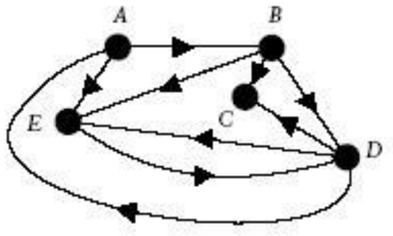


Yönlü Çizge

5.15. Tanım: V noktalar kümesi ile V nin sıralı (u, v) ikililerinden oluşan bağlantılar kümesini yönlü çizge içerir. Sıralı çifte yönlü çizge denir.

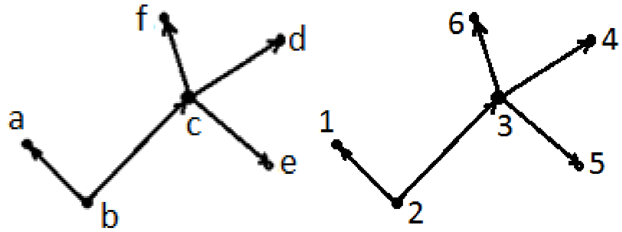
Eğer bu bağlantıları oluşturan nokta çiftleri sıralı olmazsa çizge yönlü olmayan çizge adını alır.

Örnek: Aşağıda verilen çizge bir yönlü çizgedir.



Bu çizgede
V={A, B C, D, E} , E={{A,B}, {A,E}, {B,E}), {B,D}, {B,C}, {D,E}, {E,D}, {D,A}} kümelerini oluşturmaktadır.

Örnek: Aşağıda verilen çizge bir yönlü çizgedir.



Bu çizgede V={a, b, c, d, e, f}, E={{b, a}, {b, c}, {c, d}, {c, e}, {c, f}} kümelerini oluşturmaktadır. //

Her basit çizge yönlü bir çizge olarak tanılanabilir. Basit çizgedeki her {a,b} bağlantı, {a,b} ve {b,a} yönlü bağlantıları olan yönlü çizge olarak kabul edilebilir. Genellikle tek parça (bağlantılı) yönlü çizgeler ağ olarak adlandırılır.

Yönlü olmayan çizgede iki nokta bir bağlantıyla bağlanır ve bu bağlantı her iki yöndedir. Bir yolda her iki yönde de gelip gidilebilmesi buna örnek olarak verilebilir. Eğer yol tek yönlü ise bunu göstermek için yönlü çizgeye gerek vardır. Burada bağlantı bir noktadan diğerine gidişi gösterir.

Örnek olarak noktalar haritada çeşitli konumları ve bağlantılar da yolları temsil etmek üzere yönlü çizge basit çizgeden daha kullanışlıdır. Çünkü bazı yollar tek yönlüdür.

İnternette noktalar sayfaları, bağlantılar bir sayfadan diğerine bağ olan yönlü bir çizgedir.

Yönlü çizgelerde bir noktanın derecesi;

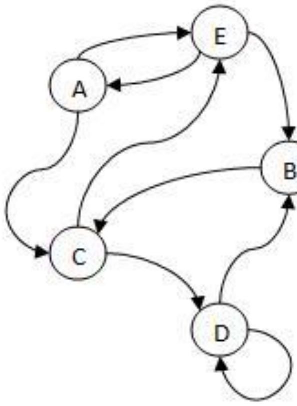
Yönlü çizgelerde noktanın derecelerinde iki farklı değer bulunur:

1. Giren derecesi
2. Çıkan derecesi

Bir noktanın giren derecesi yönü noktaya doğru olan bağlantı sayısıdır. Aynı zamanda bir noktaya ulaşılabilen diğer noktaların sayısıdır.

Çıkan derecesi ise bir noktadan çıkan bağlantıların sayısı veya bir noktadan ulaşılabilen diğer noktaların sayısı olarak tanımlanır.

Örnek: Aşağıdaki çizgedeki giren ve çıkan yönlü çizgelerin derecelerini bulalım.



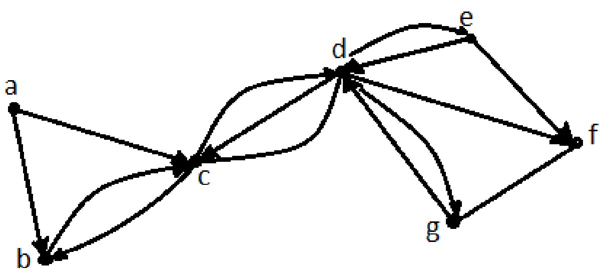
Giren Derece: $\deg A = 1, \deg B = 2, \deg C = 2, \deg D = 2, \deg E = 2$

Çıkan Derece: $\deg A = 2, \deg B = 1, \deg C = 2, \deg D = 2, \deg E = 2$

Dikkat edilirse bir çizgedeki çıkan dereceleri ile giren derecelerinin toplamı eşit olmalıdır. Örneğimizde 9 = 9 durumu doğrudur.

5.16. Tanım: Yönlü çoklu bir çizgede V noktalar kümesi, E bağlantılar kümesi ve E den $\{(u, v): u, v \in V\}$ olmak üzere bir f fonksiyonundan olsun. Eğer $f(e_1) = f(e_2)$ ise, e_1 ve e_2 bağlantılarına çoklu bağlantılar denir.

Örnek:



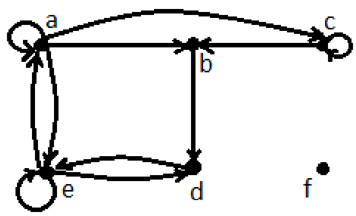
İç ve Dış Derece

Yönlü bağlantıları olan bir çizgede, bir v noktasına gelen bağlantılara iç, v noktadan giden bağlantılara dış bağlantı denir. Bir v noktasının iç derecesi $\deg^{-} v$ olarak gösterilir. v noktasının dış derecesi $\deg^{+} v$ olarak gösterilir. Yönlendirilmemiş bağlantıları olan bir çizgede

$$\sum_{A \in V} \deg^{-}(A) = \sum_{A \in V} \deg^{+}(A)$$

dir.

Örnek: Şekildeki çizgede bulunan noktaların iç ve dış derecelerini hesaplayalım.



G çizgesinin noktalarının iç bağlantı sayıları;

$$\deg^{-} a = 2, \deg^{-} b = 2, \deg^{-} c = 2, \deg^{-} d = 2, \deg^{-} e = 3, \deg^{-} f = 0$$

Çizgenin noktalarının dış sayıları;

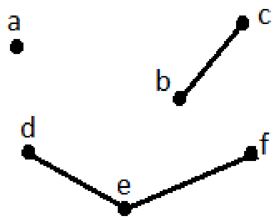
$$\deg^{+} a = 3, \deg^{+} b = 1, \deg^{+} c = 1, \deg^{+} d = 1, \deg^{+} e = 2, \deg^{+} f = 0$$

dir.

Yol (Path)

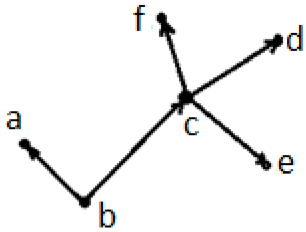
5.17. Tanım: Bir çizgede, yönlü çizge ya da ağırlıklı bir çizgedeki nokta listesine yol denir. Yani, bir noktadan diğerine gidilirken izlenecek noktaların tamamı bir yol oluşturur. Listedeki her komşu çift için uygun bağlantı çizgede olmalıdır. Çizge ya da yönlü çizgedeki yol uzunluğu yoldaki derecesine eşittir. Fakat ağırlıklı çizgelerde yol uzunluğu, her bir hattın aldığı değerlerin toplamına eşittir.

Örnek:



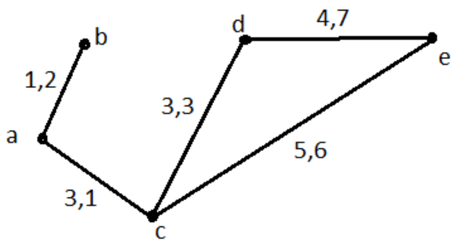
d → e → f dizisi 2 uzunluğunda bir yoldur. a→ b → c bir yol değildir. a den f ya bir yol yoktur.

Örnek:



b → c → d, b → c → e, b → c → f, 3 uzunluğunda bir yoldur. Ancak e → c → b →a bir yol değildir.

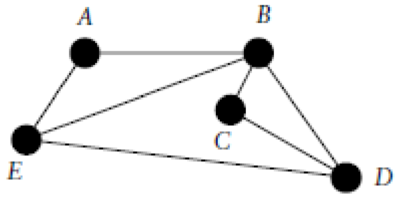
Örnek:



Ağırlıklı bir çizgede, bir yol uzunluğu bağlantılarının her birinin toplamıdır. b → a → c→ d → e yolunun toplam ağırlığı 1,2 + 3,1 + 3,3 + 4,7 = 12,3'dir. b → a → c → e toplam ağırlığı 1,2 + 3,1 + 5,6 = 9,9 olup b 'den e 'ye en kısa yol budur. c → d → e → c bir çevrimdir.

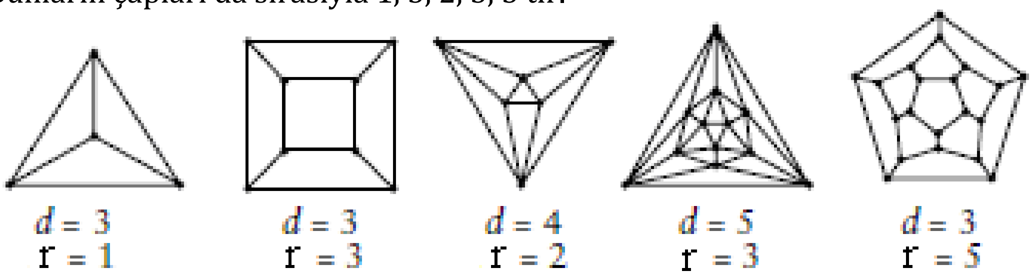
Mesafe, Çap, Düzgün Çizge ve Moore Sabiti

5.18. Tanım: Bir çizgenin iki nokta arasındaki en kısa yolun derecesine o iki nokta arasındaki mesafe denir. Örneğin aşağıdaki çizgede A ve C arasındaki mesafe 2'dir.



5.19. Tanım: Tekparça bir çizgedeki en uzun mesafeye o çizgenin çapı denir. Örneğin herhangi iki nokta arasında bir bağlantı olan n noktalı K_n tam-çizgesinin çapı 1'dir. Yukarıdaki çizgenin çapı 2'dir.

5.20. Tanım: Her noktanın derecesi deg = d olarak göstermek üzere bir çizgeye d düzgün çizge denir. Örneğin K_n, (n−1)-düzgün bir çizgedir. Yukarıdaki çizge düzgün değildir. Aşağıdaki çizgeler sırasıyla 3, 3, 4, 5 ve 3–düzgündür. Bunların çapları da sırasıyla 1, 3, 2, 3, 5'tir.



d-düzgün ve r çaplı bir çizgenin nokta sayısı çok çok fazla olamaz, d ve r'ye bağlı olarak büyüyebilir.

5.21. Tanım: d-düzgün ve r çaplı bir çizgenin en fazla noktasına Moore sabiti denir.

5.5. Teorem: d-düzgün ve r çaplı bir çizgenin Moore sabiti

$$M(d, D) = \frac{d(d-1)^r - 2}{d-2}$$

dir.

İspat: Biz çizgede herhangi bir nokta seçelim ve başka noktalara uzaklığı 0, 1,..., r olan noktaları sayalım. Bunlardan en fazla (sırasıyla)

$$1, d, d(d-1), d(d-1)^2, \dots, d(d-1)^{r-1}$$

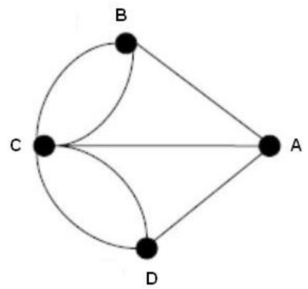
tane olabileceği aşikardır. Şu halde, d-düzgün ve r çaplı bir çizgenin en fazla

$$1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + \cdots + d(d-1)^{r-1} = \frac{d(d-1)^r - 2}{d-2}$$

noktası vardır.

TEK HAMLEDE ÇİZİLEN YOLLAR

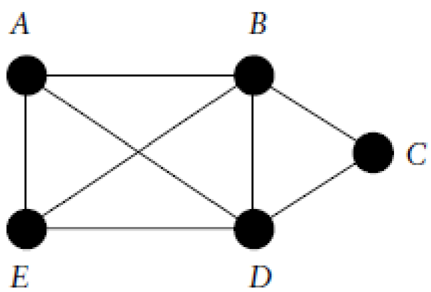
Euler Yolu



Şekil 1.

Yukarıda şekil 1'deki çizgesinde (V={A, B, C, D} noktalarından bir şartı aramamak üzere) elinizi kâğıttan hiç kaldırmadan ve bağlantılardan bir kez geçerek çizebilir misiniz? Çizebilirseniz nasıl çizersiniz, çizemezseniz neden çizemezsiniz?

Bu sorunun cevabı maalesef olumsuzdur. Bu çizge el kâğıttan en fazla bir kez kaldırılarak (ama iki kez aynı noktadan geçmeye hakkımız var) çizilebilir.



Şekil 2.

Ama şekil 2'deki mektup zarfı şeklini veren çizgeyi, elimizi hiç kaldırmadan çizebiliriz. Dikkat edersek bu çizgede A ve E noktalarında derecesi tek olan iki noktadır. Bundan da çizime bu noktadan birinden başlayıp diğerinde bitirmemiz gerektiği anlaşılır. Şimdi şu soruları sorabiliriz.

1. Soru: Hangi çizgeleri elimizi kaldırmadan tek hamlede çizebiliriz?

Eğer çizge tekparça değilse, yani birbiriyle bağıntısı olmayan birkaç (birden fazla) altçizgeden oluşuyorsa, örneğin çizgede başka hiçbir noktaya bağlanmamış bir nokta varsa, çizge elbette tek bir hamlede çizilemez. Yukardaki soruyu "tekparça" olan çizgeler için sormalıyız.

Demek ki, iki kez aynı kenardan geçmeyecek biçimde tek hamlede çizilen çizgeler tekparça olmalılar ve bu çizgelerin tek dereceli nokta sayısı ya 0 ya da 2 olmalı. Eğer yolculuk başladığımız noktada sona eriyorsa, o zaman her noktanın derecesi çift olmalı. Eğer yolculuk başladığımız noktada sona ermiyorsa, o zaman yolculuğun başladığı ve sona erdiği noktaların dereceleri tek olmalı, diğer noktaların dereceleri çift olmalı. Ama bunun tersi doğru değildir.

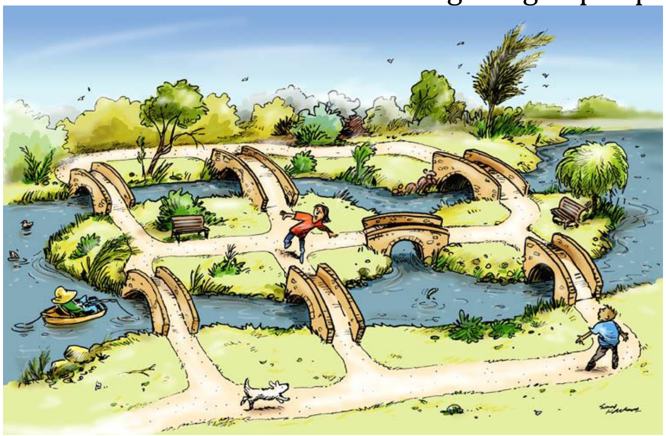
Yukarda söylediklerimizin hepsi, iki nokta arasında birden fazla kenarın olduğu ya da bir noktadan gene aynı noktaya giden tekdöngülerin olduğu çizgeler için de geçerlidir.

2. Soru: Tek dereceli nokta sayısının 0 ya da 2 olduğu tekparça çizgeler tek hamlede (el kaldırmadan) her kenardan sadece bir kez geçilerek çizilebilir mi?

Cevap "evet"tir. Şimdi bu sorunun cevabını Euler Turu alt başlığı altında inceleyeceğiz.

Euler Turu

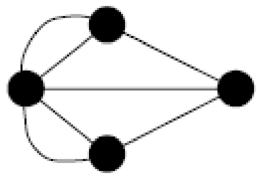
Çizge teorisi bilinen en eski sorusu "Königsberg köprü problemi"dir.



Königsberg'in yedi köprüsü[1]

Yukarda, Königsberg'deki Pregolya (Pregel) nehrinin ve karalar arasında geçişi sağlayan yedi köprünün planını görüyorsunuz. Bu yedi köprünün her birinden sadece bir kez geçecek bir yolculuk mümkün müdür?

Euler 1736'da bunun mümkün olmadığını göstermiştir: Kara parçalarını (yani nehrin iki yakasını ve iki adacığı) dört noktaya, yedi köprüyü de bu noktalar arasına koyacağımız kenarlarla gösterirsek çizgesini[2] elde ederiz. Her köprüden tam bir kez geçmek demek, yukardaki çizgenin her kenarından tam bir kez geçecek bir yolculuk bulmak demektir. Bir yukarıdaki haritada bu mümkün değildir, çünkü derecesi[3] tek olan noktalar sayısı 0 ya da 2 değildir.



5.22. Tanım: Her kenardan tam bir kez geçen ve başladığı noktaya geri dönen yolculuklara Euler turu denir.

Euler turu olan çizgelerin tekparça ve her noktanın çift dereceli olması gerektiğini biliyoruz, yukarıda görmüştük bunu. Şimdi bu iki şartın çizgede Euler turu olması için yeterli olduğunu gösterelim.

5.6. Teorem: Her noktasının derecesinin en az iki olduğu bir çizgede, başladığı noktaya dönen ve hiçbir kenardan iki kez geçmeyen bir yolculuk vardır. (Dikkat edilirse yolculuğun her kenardan ya da her noktadan geçeceğini söylemiyor.)

İspat: A_0 çizgenin herhangi bir noktası olsun. A_0 noktanından başlayan bir yolculuğa çıkalım. Önce A_0'dan A_0'a bağlı herhangi bir A_1 noktasına gidelim. Sonra A_1, A_0'a bağlı; ama derecesi en az iki olduğundan A_1'e bir başka yol daha değmeli. Diyelim A_1, A_2 noktasına A_0A_1 yolundan değişik bir yolla bağlı, diyelim A_1A_2. Şimdi A_0A_1 diye başladığımız yolculuğa A_1'den A_2'ye giderek devam edelim.

---

[1] http://hanifihoca.com/istanbul-ozel-ders/2017/06/06/konigsbergin-yedi-koprusu

[2] Bu yazıda iki nokta arasında birden fazla kenarın olduğu çizgeleri de kabul edeceğiz. Hatta çizgelerimizde, başka bir noktadan geçmeden, bir noktadan gene aynı noktaya giden tekdöngüler de, yani AA gibi kenarlar da olabilir.

[3] A noktasına eğer AA kenarı varsa, bu kenar A'nın derecesine 2 katar. Eğer A ≠ B ise ve çizgede AB kenarı varsa, bu kenar A'ya 1 derece katar.

Daha sonra A_2, A_1'e bağlı, ama derecesi en az iki olduğundan A_2'ye bir başka yol daha değmeli, diyelim A_2A_3. Şimdi $A_0A_1A_2$ diye başladığımız yolculuğumuza A_2'den A_3'e giderek devam edelim.

Daha sonra A_3, A_2'ye bağlı; ama derecesi en az iki olduğundan A_3'e bir başka yol daha değmeli, diyelim A_3A_4. Yolculuğumuza A_3'ten A_4'e giderek devam edelim.

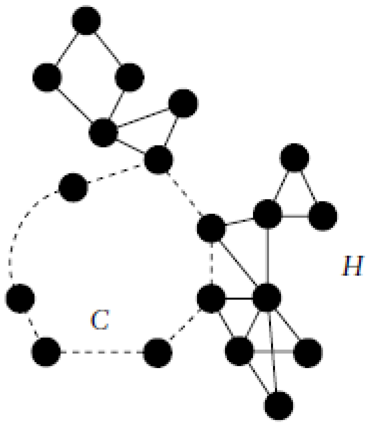
Bu yolculuğu böylece sürdürelim.

$A_0A_1A_2A_3A_4$... diye bir yolculuktayız ve her i için $A_iA_{i+1} \neq A_{i+1}A_{i+2}$ dir.

Çizge sonlu olduğundan, bir zaman sonra aynı noktaya ikinci kez rastlamalıyız. Örneğin $A_4 = A_7$ olabilir, hatta $A_8 = A_9$ olabilir. Daha önce geçtiğimiz bir noktaya ilk rastladığımızda duralım. Bu (birbirine eşit olan) ilk noktası ve arasındaki yolu alalım. Örneğin ilk nokta eşitliği A_4 ve A_7'de rastlanıyorsa, $A_4A_5A_6A_7$ yolunu ele alalım. Bu yol başladığı noktaya (örneğimizde A_4) geri döner (örneğimizde $A_7 = A_4$ noktasına) ve iki kez aynı bağlantıdan geçmez.

5.7. Teorem (Euler, 1736): Her noktasının derecesinin çift olduğu sonlu ve tekparça bir çizgede Euler turu vardır.

İspat: Çizgemize G diyelim. İspatımız G'nin bağlantı sayısına göre tümevarımla yapalım. Çizgemiz tekparça olduğundan, derecesi 0 olan nokta yoktur. Dolayısıyla her noktanın derecesi en az ikidir (ve çifttir). Bir önceki 5.6. teoreme göre çizgede aynı bağlantıdan iki kez geçmeyen ve başladığı noktaya geri dönen bir yolculuk vardır. C böyle bir yolculuk olsun. Eğer C, G'deki tüm bağlantıları içeriyorsa C bir Euler turudur ve işimiz bitmiştir. İçermiyorsa G'den C'deki bağlantıları çıkardığımızda, G'den daha az bağlantıya sahip, muhtemelen birkaç parça ve yine her düğmünün derecesi çift olan bir H çizgesi elde ederiz.

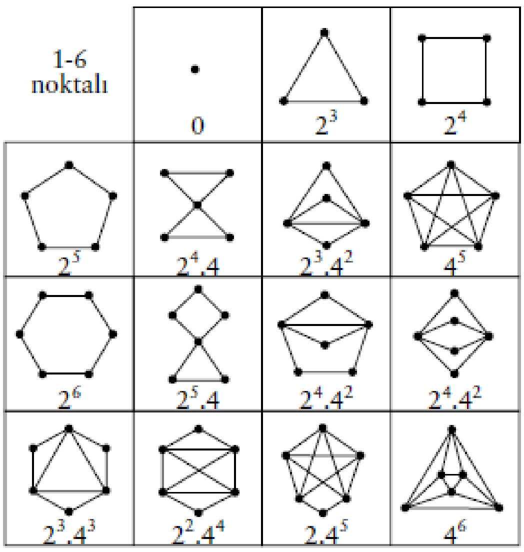


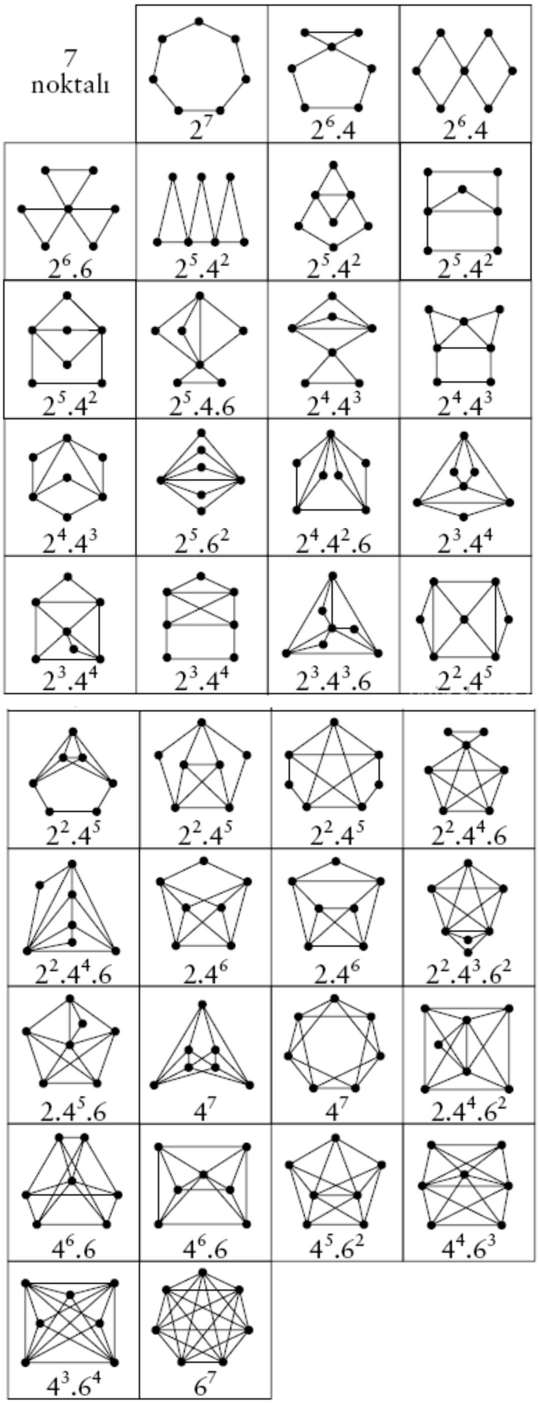
Tümevarım varsayımına göre, H çizgesinin her parçasında bir Euler turu vardır. Ayrıca H çizgesinin her parçasının C ile ortak en az bir noktası olmalıdır, yoksa G tekparça olamazdı. G'de aradığımız Euler turunu şöyle elde edelim: C'deki bağlantıları izleyelim ve H çizgesinin bir noktasına gelince o noktanın bulunduğu parçanın Euler turunu izleyip aynı noktaya geri dönelim ve C'de ilerlemeye devam edelim. C'deki başladığımız noktaya dönünce G'nin Euler turunu tamamlamış oluruz.

Euler Çizgeleri

5.23. Tanım: Her bağlantısının derecesinin çift olan noktalı tekparça yalın çizgelere Euler çizgeleri denir.

Örnek: Aşağıda n = 2, 3, 4, 5, 6, 7 olan Euler çizgeleri görülmektedir.



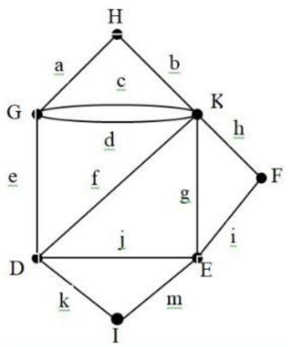


Her bağlantıdan bir kez geçerek ve el kaldırmadan tek hamlede çizilen çizgeleri saptayalım şimdi. Yukarıda izah edildiği gibi bu tür çizgeler tekparça olmalı ve derecesi tek olan 0 ya da 2 noktası olmalı. Şimdi göreceğimiz üzere, bu şartlar, çizgenin her bağlantıdan bir kez geçerek tek hamlede çizilebilmesi için yeterlidir.

5.7. Teorem. Tek dereceli nokta sayısının 0 ya da 2 olduğu tekparça çizgeler tek hamlede (el kaldırmadan) her bağlantıdan sadece bir kez geçilerek çizilebilir.

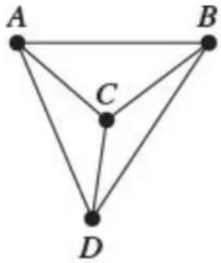
İspat: Çizgemize G diyelim. Eğer tek dereceli nokta sayısı 0 ise, yani her noktanın derecesi çift ise, bu, Euler'in yukarıda ispatladığımız teoremi olur. Şimdi çizgede tek dereceli sadece iki nokta olduğunu varsayalım. Bu noktalara A ve B diyelim. A ve B arasına yeni bir bağlantı ekleyelim (aralarında bağlantı varsa da ekleyelim, anımsarsanız çizge tanımımız bu yazıda daha geniş, iki nokta arasında birden çok bağlantı olduğu çizgeleri de kabul ediyoruz.) Elde ettiğimiz çizgeye H adını verelim. Elbette H'nin her noktasının derecesi çifttir. Ayrıca H tekparçadır, çünkü G'nin kendisi tekparça, bir bağlantı eklemekle tekparçalık bozulmaz, tam tersine çizge daha da tekparça olur! Demek ki, yukarda ispatladığımız Euler'in teoremine göre H'nin bir Euler turu vardır. Bu Euler turuna istediğimiz bağlantıdan başlayabileceğimize dikkatinizi çekeriz. Tura, G'ye eklediğimiz AB bağlantısıyla başlayalım. Tur AB diye başlayıp gene A'da bitiyor. Bu Euler turundan en baştaki AB bağlantısını atarsak, G'de her bağlantıdan sadece bir kez geçen (B'de başlayıp A'da biten) bir yolculuk bulmuş oluruz.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde bütün noktalar çift dereceli olduğundan bu şekil el kaldırmadan çizilir.

Örnek:



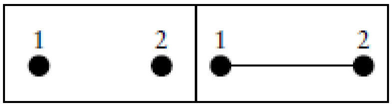
Verilen şekilde her noktanın derecesi 3 olduğundan el kaldırılamadan çizilemez.

n-NOKTALI ÇİZGE SAYISI

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n–tane noktanın oluşturduğu çizgelerin sayılarını incelemeye çalışalım. Bunu görsel incelersek,

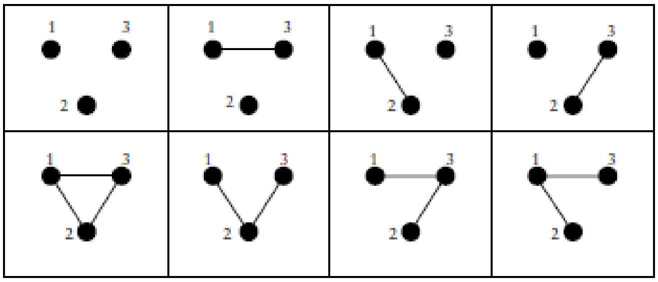
1. Bir Noktalı Çizge: Bir noktalı çizge sadece bir tanedir o çizge de şudur:

2. İki Noktalı Çizgeler: İki noktalı çizge 2 tane çizge farklı çizge oluşturur. Onlar:



şekilleridir.

3. Üç Noktalı Çizgeler: Üç noktalı çizge 8 tane farklı çizge oluşturur. Bunlar aşağıda verilmiştir:



Şimdi bu bilgileri genelleştirelim.

5.7. Teorem: $n \in \mathbb{N}$ için n–noktalı farklı çizge sayısı $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ tanedir.

İspat: {1, 2,…, n} noktalar kümesinde $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tane nokta çifti vardır. Her bir nokta çifti için "bağlantı var" ya da "bağlantı yok" yargısını vereceğiz. Yani $\frac{n(n-1)}{2}$ tane "evet" ya da "hayır" kararı vereceğiz. Buna göre ki n noktalı toplam $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ tane çizge vardır.

Örnek: $n = 4$ noktalı bir küme kaç farklı çizge çizilebilir.

Çözüm: $2^{\frac{5(5-1)}{2}} = 2^{10} = 1\ 024$ farklı çizge vardır

5.8. Teorem: $m, n \in \mathbb{N}$ için n noktalı ve m bağlantı bir kümede $\binom{n(n-1)/2}{m}$ tane çizge çizilebilir.

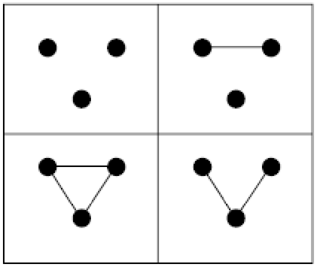
İspat: Olası bağlantı sayımız $\frac{n(n-1)}{2}$ tanedir. Bu olası $\frac{n(n-1)}{2}$ bağlantıdan m tanesini seçmemiz gerekiyor. Demek ki n noktalı m bağlantılı çizge sayısı

$$\binom{n(n-1)/2}{m}$$

dir.//

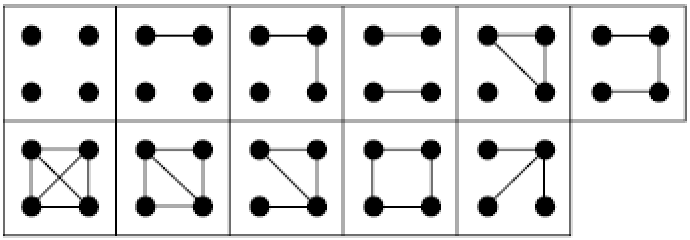
Şimdi de noktalara ad vermeden çizilen çizgelere bakalım.

Adsız Üç Noktalı Çizgeler: Yukarda teker teker her birini çizdiğimiz üç noktalı 8 çizgeye geri dönelim. Eğer bu 8 çizgenin noktalarının adlarını silersek geriye sadece 4 çizge kalır:



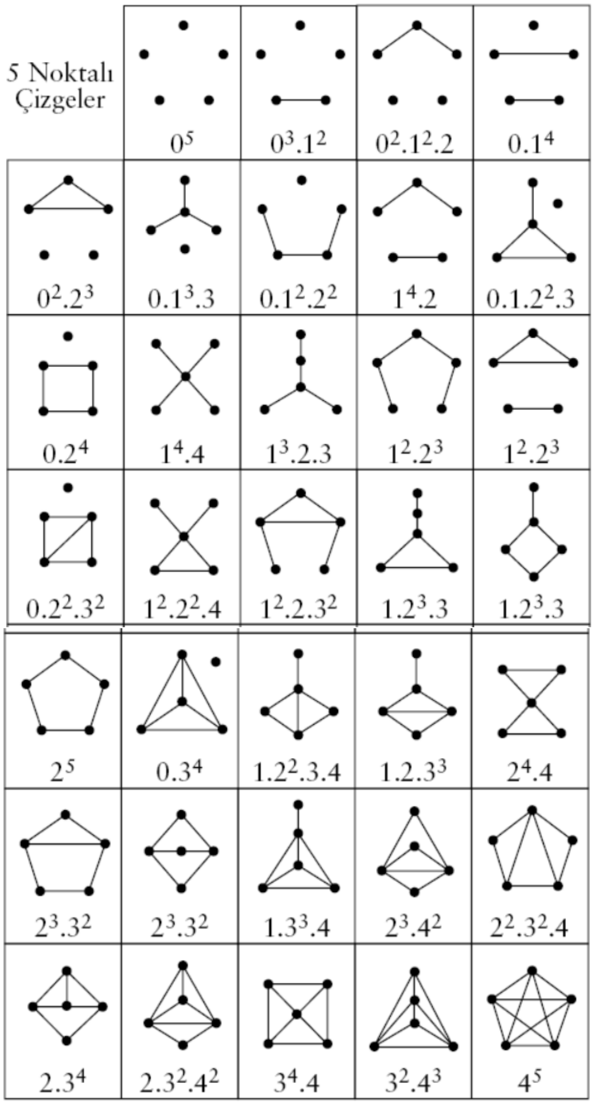
Noktaları adlandırılmış çizge sayısı (örneğimizde 8), noktaları adlandırılmamış çizge sayısından (örneğimizde 4 haliyle) çok daha fazladır.

Adsız Dört Noktalı Çizgeler: n = 4 olsun. n = 4 olduğundan $\binom{4}{2} = 6$ olup, noktaları adlandırılmış çizge sayısı $2^6 = 64$'dır. Eğer bu çizgelerden noktaların adlarını silersek bazılarının aynı şekil olduğunu görürüz. Böylece çizge sayısı azalır, 11'e iner. Bu 11 çizge aşağıda verilmiştir.



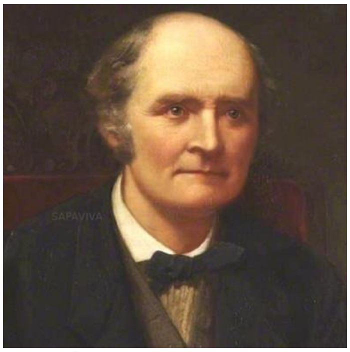
Adsız 5-Noktalı Çizge Sayısı

Eğer n = 5 ise, eşyapı dönüşümlü noktalı 34 çizge vardır. İşte o 34 çizge:



Çizgenin altındaki $2^2.3^2.4$ gibi kodları açıklayalım. Örneğin $2^2.3^2.4$ kodu, 2 dereceli 2 nokta olduğunu, 3 dereceli 2 nokta olduğunu ve 4 dereceli 1 nokta olduğunu söylüyor. $2^2.3^2.4$ kodlu çizgede 1 dereceli nokta yok. Çizgeler bu kodlara göre sıralanmışlar. En başta 0^5, yani 00000 kodlu çizge, sonra $0^3 1^2$, yani 00011 kodlu çizge… En sonda da 4^5, yani 44444 kodlu çizge…

Aynı koddan birkaç değişik çizge olabilir, örneğin $1^2.2^3$ kodlu iki değişik çizge var.



16 Ağustos 1821, Richmond, İngiltere 26 Ocak 1895, Cambridge, İngiltere

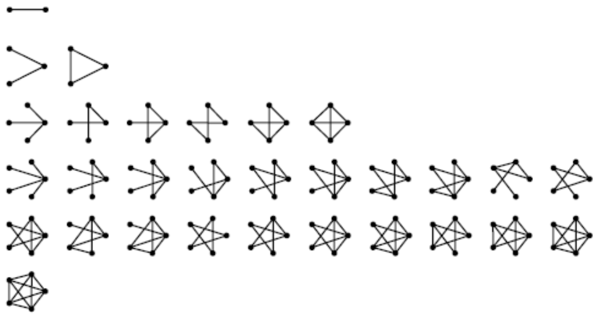
Noktaların adlandırılmamış çizge sayısını bulmak kolay değildir. Bu soru 1850'lerde ilk olarak Arthur Cayley tarafından sorulmuştur. Daha sonraları Cayley bu problemi belirli bir karbon atomuna sahip C_nH_{2n+2} alkalilerini sayma problemine uygulamıştır.

Küçük nokta sayısı için durum aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

n	G_n = n adsız noktalı çizge sayısı
1	1
2	2
3	4
4	11
5	34
6	156
7	1044
8	12346
9	274668
10	12005168
11	1018997864
12	165091172592
13	50502031367952
14	29054155657235488
15	31426485969804308768
16	64001015704527557894928
17	245935864153532932683719776
18	1787577725145611700547878190848

Tekparça Çizge Sayısı

Her iki nokta arasında en az bir yolun bulunduğu çizgelere tekparça çizge demiştik. n = 2, 3, 4, 5 için tekparça çizgeler aşağıdaki gibidir:



Tekparça çizge sayısı toplam çizge sayısından (G_n'den) daha azdır. n noktalı tekparça çizge sayısına T_n diyelim. Görüldüğü gibi T_n sayıları G_n'lerden çok çok küçük değil, hatta onlara oldukça yakın. $\frac{T_n}{G_n}$ sayıları 1'e yakınsarlar. Bir başka deyişle, rastgele sonlu bir çizge tekparçadır, yani n büyüdükçe, n noktalı bir çizgenin tekparça olma olasılığı artar.

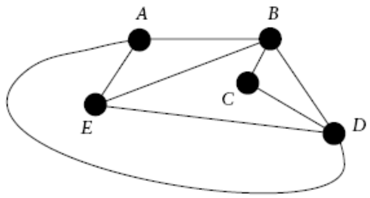
n	$\approx T_n/G_n$
1	1
2	0,5
3	0,5
4	0,545455
5	0,617647
6	0,717949
7	0,817050
8	0,900454
9	0,950529

n	$\approx T_n/G_n$
10	0,975961
11	0,987932
12	0,993753
13	0,996710
14	0,998256
15	0,999074
16	0,999509
17	0,999740
18	0,999862

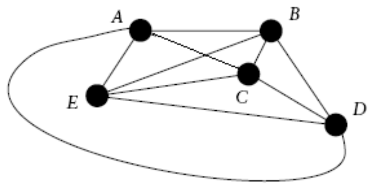
DÜZLEMSEL (HARİTA) ÇİZGE

5.24. Tanım: Bir çizgede birbirini kesmeyen bağlantılardan (hatlardan) oluşacak şekilde çizilebilen çizgelere düzlemsel çizge denir. Yani, hiçbir bağlantıyı birbirini kesmeyen çizge türüdür. Düzlemsel çizge bağlantıları kesişmeden bir düzleme çizilebilir. Harita çizge ya da harita olarak da adlandırılır.

Örnek:

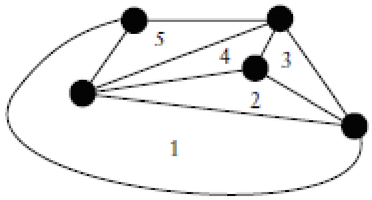


Düzlemsel Çizge



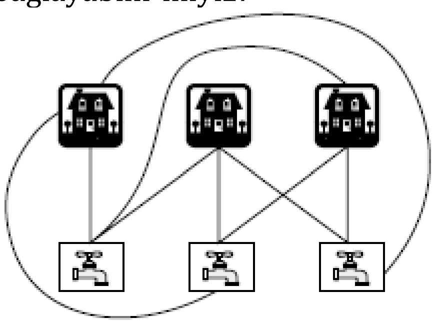
Düzlemsel Çizge değil

Düzlemsel Çizgelerin Bölgelere Ayırması

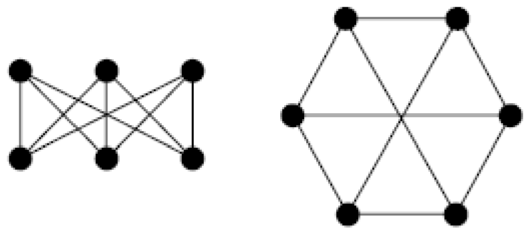


Düzlemsel bir çizge alalım. Bu çizgeyi bir biçimde düzleme çizelim. Çizge, düzlemi bölgelere ayırır. Örneğin bir üstteki çizge düzlemi beş parçaya ayırır (çizgenin dışında kalan parçaya dahil etmiyoruz).

Örnek: Bir köyde üç evde yaşayan üç aile varmış, evlerin dışında da üç su kaynağı bulunmuş. Bu üç aile de üç su kaynağına bir yoldan bağlanmak istiyor, ancak, kavgalı olduklarından yolların kesişmesini istemiyorlar. Nasıl yaparlar? Bu soruyu çizgeler kuramında nasıl ifade edilir? Alttaki çizgede, tepedeki üç noktanın her birini alttaki üç noktanın her birine çizgiler birbirleriyle kesişmeyecek biçimde bağlayabilir miyiz?



Bir başka deyişle aşağıda resimleri gösterilen $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel midir? Yani bu çizge bağlantılar kesişmeyecek biçimde bir düzleme çizilebilir mi?



$K_{3,3}$ çizgesinin iki değişik gösterimi

Cevap olumsuzdur, çünkü $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel değildir, yani üç ev üç su kaynağına borular birbirinin üstünden geçmeden bağlanamaz.

5.10. Teorem (Euler Formülü). Tekparça ve düzlemsel bir çizgenin bölge sayısı b, bağlantı sayısı k, nokta sayısı n ise, $b - k + n = 2$ eşitliği geçerlidir.

İspat: İspatımız b üzerine tümevarımla olacak.

Eğer $b = 1$ ise, o zaman çizgede hiç döngü yok demektir, yani çizge bir ağaçtır. Ağaç ve Orman adlı kısmında $k = n - 1$ eşitliğini ispatlamıştık. Demek ki bu durumda, $b - k + n = 1 - (n - 1) = 2$ olup eşitlik doğru olur.

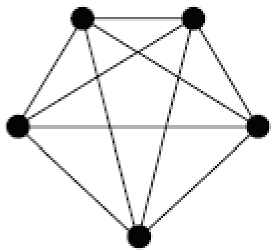
Şimdi $b > 1$ olsun. Çizgeye G adını verelim. Bu AB, çizgenin (bir bölge oluşturan) bir döngüsünün bir bağlantısı olsun. AB bağlantısını kaldıralım. Geri kalan çizgeye G_1 adını verelim. G_1 çizgesinin bölge, bağlantı ve nokta sayıları sırasıyla b_1, k_1 ve n_1 olsun. AB bağlantısı bir döngünün parçası olduğundan, AB, G'nin iki bölgesine ortaktır. Dolayısıyla AB'yi kaldırdığımızda G'nin iki bölgesi tek bir bölge haline gelir. Yani $b_1 = b - 1$ eşitliği geçerlidir. Ve elbette $k_1 = k - 1$ ve $n_1 = n$ eşitlikleri de geçerlidir. Ayrıca G_1 hâlâ daha tekparça bir çizgedir. Dolayısıyla tümevarım varsayımına göre Euler formülü G_1 çizgesi için doğru, yani $b_1 - k_1 + n_1 = 2$ dir. Buna göre

$$b - k + n = (b_1 + 1) - (k_1 + 1) + n_1 = b_1 - k_1 + n_1 = 2$$

olur.

Örnek. K_5 tamçizgesi düzlemsel değildir.

Çözüm:

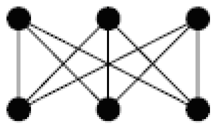


K_5 çizgesi

Şekilde görüldüğü gibi, n = 5 nokta, k = 10 bağlantı ve b = 11 bölgeden oluşmaktadır. Bu ise $b - k + n = 2$ olmayıp 6 olacağından K_5 tamçizgesi düzlemsel değildir.

Örnek. $K_{3,3}$ İki kümeli tamçizgesi düzlemsel değildir.

Çözüm:

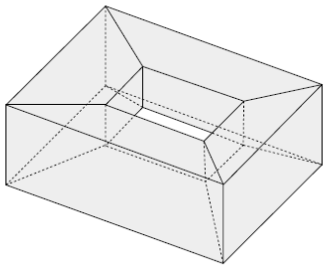


$K_{3,3}$ çizgesi

Şekilde görüldüğü gibi, n = 6 nokta, k = 9 bağlantı ve b = 12 bölgeden oluşmaktadır. Bu ise $b - k + n = 2$ olmayıp 9 olacağından $K_{3,3}$ İki kümeli tamçizgesi düzlemsel değildir. //

Euler Formülü üç boyutlu uzayda geçerli değildir. Şimdi bu Euler formülün geçerli olmadığını göstermek için bir örnek verelim:

Örnek:



Bir küpün ortasına, aynı yönde küçük bir küp yerleştirelim. Büyük küpün köşe noktalarını küçük küpe eş düşen noktalarla birleştirelim. Küçük küpü büyük küpün ortasındaki bir delik gibi görelim. Bir çizge elde ederiz. Nokta sayısı n=16, bağlantı sayısı k = 32 dir. Euler Formülü'nün doğru olması için bölge sayısı 18 olmalı. Öte yandan, bakış açısına göre, bölge sayısı b = 24 dir. Buna $b-k+n=24-32+16=8$ dir. Bu ise Euler Formülü, ifade edildiği biçimde üç boyutlu uzayda geçerli değildir. //

Bir çizgesinin düzlemsel olmayışı aşağıdaki teoremden de çıkar:

5.9. Teorem: En az $n \geq 3$ noktalı bir çizgede en küçük döngünün uzunluğu $g \geq 3$ ise, o zaman çizgenin kenar sayısı ya $n-1$ den ya da $\frac{g}{g-2}(n-2)$ den küçüktür.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

5.2. Sonuç: $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel değildir.

Çözüm: $K_{3,3}$ çizgesinde $g=4, n=6$ ve kenar sayısı $k=9$ dur. Ama $9>6-1=5$ ve $9>\frac{4}{4-2}(6-2)=8$ dir. Buna göre $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel olamaz.

5.3. Sonuç: K_5 çizgesi düzlemsel değildir.

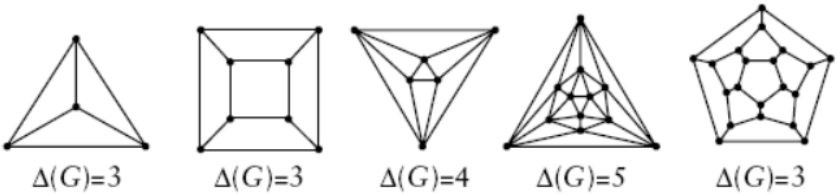
Çözüm: K_5 çizgesinde $g=3, n=5$ ve kenar sayısı $k=10$ dur. Ama $10>5-1=4$ ve $10>\frac{3}{3-2}(5-2)=9$ dir. Buna göre K_5 çizgesi düzlemsel olamaz.

ÇİZGELERİ BOYAMAK

Sonlu bir çizgeyi ortak noktaları olan bağlantılar ayrı renklerde olmak koşuluyla çeşitli renklere boyamak isteyelim. Böyle boyama için yeterli en az renk sayısını bulmaya çalışalım. G çizgesinin bağlantı renk sayısı R(G) ile gösterelim.

R(G), G'nin noktalarının derecelerinin en büyüğünden daha az olamaz, bu durum aşikârdır. Yani, eğer G çizgesinin nokta derecelerinin en büyüğüne Δ(G) dersek, $\Delta(G) \leq R(G)$ eşitsizliği karşımıza çıkar.

Örnek: Aşağıda beş Platon cisminin çizgelerinin bağlantı ve nokta renk sayılarını bulunuz.

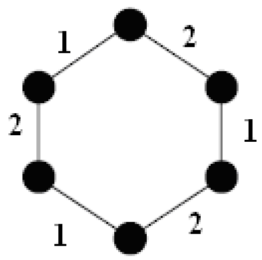


5.17. Teorem (V.G. Vizing 1964): $\Delta(G) \leq R(G) \leq \Delta(G) + 1$

İspat: Bu teoremi 4 aşamada doğruluğunu göreceğiz.

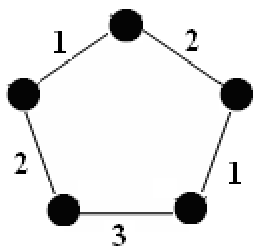
i) $\Delta(G) = 1$ ise, o zaman $R(G) = 1 = \Delta(G)$; bu durum aşikar.

ii)



Yukarıdaki C_6 döngüsünü görüyorsunuz. $R(C_6) = 2$ dir. Yani 2 tane renk yeterlidir. Her noktanın derecesi $\Delta(C_6) = 2$ olduğundan $R(C_6) = 2 = \Delta(C_6)$ bulunur.

iii)



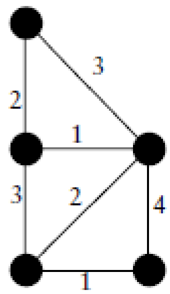
Şimdi de C_5 döngüsüne bakalım. $R(C_5) = 3$ dir. Yani 3 tane renk yeterlidir. Her noktanın derecesi $\Delta(C_5) = 2$ olduğundan $R(C_5) = \Delta(C_5) + 1$ bulunur. Buna göre ii ve iii. den şu sonucu çıkarırız. n noktalı döngüde,

n çiftse $R(C_n) = \Delta(C_n) = 2$

n tekse $R(C_n) = \Delta(C_n) + 1 = 3$

elde edilir.

iv)



Yukarıdaki çizgenin bağlantı renk sayısı 4'tür. Renkleri 1, 2, 3 ve 4 ile ifade edip bağlantıları şekildeki gibi bu 4 renge boyayabiliriz. Bu boyama bu G çizgesi için $R(G) \leq 4 = \Delta(G)$ eşitsizliğini ispatlıyor. Ama bu çizge daha az sayıda renkle de boyanamaz, çünkü derecesi 4 olan bir nokta var, yani $4 = \Delta(G) \leq R(G)$ dir. Demek ki $R(G) = 4$ olur.

Bu ifadeler genelleme yapıldığında istenen sonuç elde edilir. //

Hangi çizgelerin bağlantı renk sayısının Δ hangilerinin $\Delta + 1$ olduğunu anlamak her zaman kolay değildir. Ancak özel bazı çizgeler için bu sayı bulunmuştur. Örneğin, olası her bağlantının olduğu n noktalı K_n tamçizgeleri için bu sayı bilinmektedir:

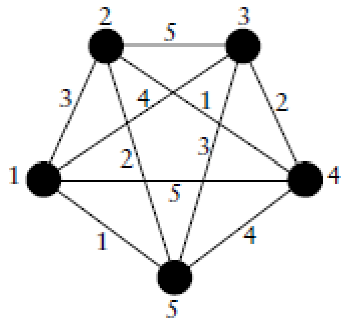
5.10. Teorem:

n tek sayı ise $R(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$

n çift sayı ise $R(K_n) = n - 1 = \Delta(K_n)$

dir.

İspat: Önce K_n tamçizgesinin bağlantılarını n renge boyayabileceğimizi ispatlayalım.



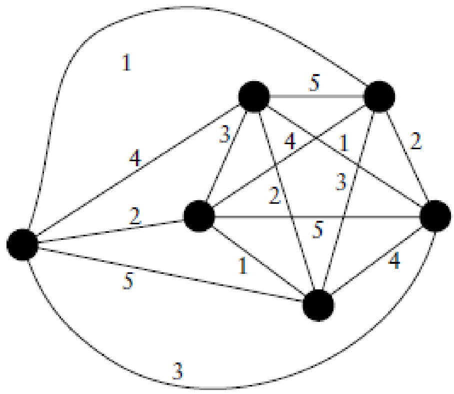
Noktaları her zamanki gibi 1, 2, ..., n diye adlandıralım. Renklerimize de 1, 2, ..., n diyelim. ab bağlantısını alalım. $a + b \equiv i \pmod n$ eşitliğini sağlayan bir i rengi bulalım. Şimdi ab bağlantısını i rengine boyayalım. Böylece K_n çizgesi n farklı renkle boyanmış olur. Kolayca görüldüğü üzere, bu yöntemle, a noktasına 2a'ya tekabül eden renge boyanmış bir bağlantı değmez, bu bilgiyi daha sonra kullanacağız.

Şimdi, eğer n tekse K_n'yi daha az boyayla boyayamayacağımızı, eğer n çiftse K_n'yi n-1 boyayla boyayabileceğimizi gösterelim.

Önce n'nin tek olduğu durumu ele alalım. Aynı renkte k bağlantı olduğunu varsayalım. Ortak noktaları olamayacağından, bu k bağlantının toplam 2k uç noktası vardır. Buna göre $2k \leq n$, yani $k \leq \frac{n}{2}$, (n tek sayı olduğundan) $k \leq \frac{n-1}{2}$ dir.. Demek ki her bir renkle en fazla $\frac{n-1}{2}$ bağlantı boyanabilir. Dolayısıyla en fazla $n-1$ renkle en fazla $\frac{(n-1)(n-1)}{2}$ bağlantı boyanabilir. Oysa K_n'nin daha fazla, tam $\frac{n(n-1)}{2}$ bağlantısı vardır ve boyanmamış bağlantı kalacaktır. Demek ki n tekse, K_n çizgesi n'den daha az renge boyanamaz.

Şimdi de n'nin çift olduğu durumu ele alalım. K_n tamçizgesini $n-1$ renge boyayacağız.

K_n tamçizgesi, {1, 2, ..., $n-1$} noktalarından oluşmuş K_{n-1} tamçizgesine bir nokta (n noktası) ekleyerek ve o noktadan diğer bütün noktalara birer bağlantı ekleyerek elde edilir.



K_{n-1} çizgesinin bağlantılarını bir Önceki yöntemle $n-1$ renge boyayalım. Her noktada bir eksik renk olacaktır: i noktasına değen 2i'ye tekabül eden renge boyanmış bağlantı yoktur. Noktalara değmeyen renklerin hepsi birbirinden farklıdır ($n-1$ tek sayı olduğundan $2a \equiv 2b \bmod (n-1)$ ise $a = b$'dir.) Bu eksik renklerle eklenen noktanın bağlantılarını boyadığımızda K_n çizgesini $n-1$ renkle boyama işlemimiz tamamlanmış olur. Buna göre

$R(K_n) \leq n-1 = \Delta(K_n) \leq R(K_n)$ yani $R(K_n) = n-1$
olur. //

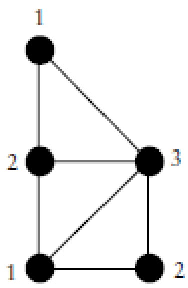
Şimdi benzer bir sonucu iki kümeli çizgeler için ispatlayacağız.

5.19. Teorem (König, 1916): İki kümeli bir G çizgesinin bağlantı renk sayısı Δ(G)'dır. [4]

İspat: İspatımız Konig'in orijinal ispatından farklı olacak ve bu sayımızda açıkladığımız başka bir sonuca dayanacak.

G çizgesine yeni nokta ve bağlantılar ekleyerek, her noktasının derecesi Δ(G) olan ve G çizgesini içinde barındıran iki kümeli G_1 çizgesini elde edelim. Örneğin G_1 çizgesi belli bir n için $K_{n,n}$ çizgesi olabilir. Noktalarının derecesi eşit olan iki kümeli çizgelerin mükemmel eşlemesi olduğunu Çöpçatanlık Problemi 2. sonuçta. G_1 çizgesinin mükemmel eşlemesinin bağlantılarını 1 rengine boyayalım ve boyadığımız bu bağlantıları G_1 çizgesinden silelim. Yeni oluşan çizgeye G_2 adını verirsek, G_2 çizgesi de noktalarının derecesi Δ(G)-1 olan iki kümeli çizgedir ve mükemmel bir eşlemesi vardır. G_2 çizgesindeki mükemmel eşlemeyi 2 rengine boyayıp G_2 çizgesinden 2 rengine boyadığımız bu bağlantıları silelim. Oluşan yeni çizge, noktalarının derecesi Δ(G)–2 olan iki kümeli çizgedir ve mükemmel bir eşlemesi vardır. Bu yöntemi tüm bağlantıları boyamayı bitirene dek sürdürürsek G_1 çizgesini dolayısıyla G çizgesini Δ(G) renkle boyamış oluruz.

Noktaları Boyamak



Benzer bir boyamayı bağlantılar yerine noktalar için de tanımlamak mümkün. G yine bir çizge olsun. G'nin noktalarını boyayalım, ama komşu noktaların aynı renge boyanmamış olmasına özen göstereceğiz. Noktaları, komşu noktalar ayrı renklerde olacak biçimde boyamak için gereken en az renk sayı-

[4] Bu kısımdaki çizgelerimizin noktaları arasında birden fazla kenar olabilir, yani kavram ve ispatlarımız daha genel çizgeler için de geçerlidir.

sına nokta renk sayısı diyelim. Nokta renk sayısı R(G) ile gösterilir. Yukarıdaki çizgenin nokta renk sayısı 3'tür. Önce nokta renk sayısıyla ilgili bariz bazı sonuçları sıralayalım.

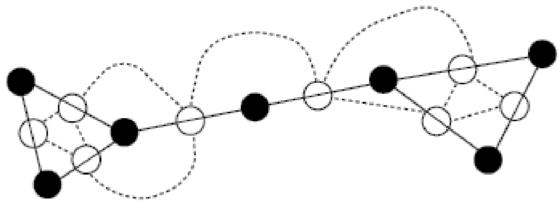
1) $R(G) = 1$ eşitliği için gerek ve yeter şart G'nin bağlantısız bir çizge olmasıdır.

2) $R(G) = 2$ eşitliği içi gerek ve yeter şart G'nin iki kümeli bir çizge olmasıdır. Dolayısıyla bir ağacın noktaları her zaman iki renge boyanabilir.

3) $R(C_{2n+1}) = 3 = \Delta(C_{2n+1}) + 1$ ve $R(C_{2n}) = 2 = \Delta(C_{2n})$

4) $R(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$ //

Herhangi bir G çizgesi ele alalım. Bu G çizgesinden hareket ederek bir G_1 çizgesi elde edelim. G_1 çizgesinin noktaları G çizgesinin bağlantıları olur. Şimdi G_1 çizgesinin iki noktasının ne zaman bir bağlantıyla birleştirileceğine karar vermemiz gerekiyor. Eğer G_1 çizgesinin iki noktasına tekabül eden G'nin bağlantıları kesişiyorlarsa G_1 çizgesinin o iki noktasını bir bağlantıyla birleştirelim. Örneğin, eğer G aşağıdaki koyu noktalı ve düz bağlantılı çizgeyse, G_1 içi beyaz noktalı ve kesik bağlantılı çizgedir. //



Brook'un 1941'de ispatladığı aşağıdaki sonuç nokta renk sayısı için üst sınır vermektedir.

5.20. Teorem (Brook 1941): G tekparçaysa ve K_n ya da C_{2n+1} değilse $R(G) \leq \Delta(G)$ 'dir.

Bu teoreme göre, $R(G) \leq \Delta(G) + 1$ eşitsizliği geçerlidir ve üst sınır $G = K_n$ ve $G = C_{2n+1}$ durumlarında elde edilir.

DÖRT RENK PROBLEMİ VE TEOREMİ

Siyasi haritalarda komşu ülkeler farklı renklerle boyanır. Her türlü siyasi haritayı bu biçimde boyamak için gerekli en az renk sayısı kaçtır? Dört renk problemi, her haritanın, komşu iki ülke aynı renkte olmayacak biçimde sadece dört renkle boyanıp boyanamayacağı problemidir.

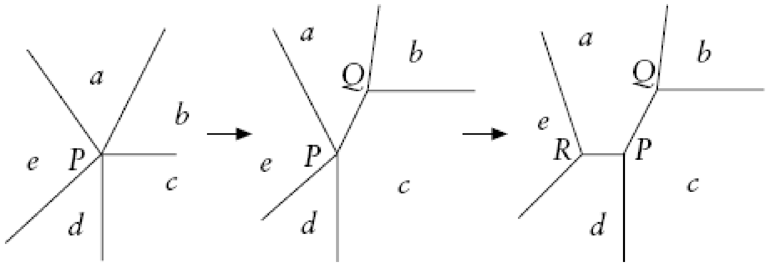
1852'de ünlü matematikçi De Morgan'ın eski bir öğrencisi olan Francis Guthrie bir İngiltere haritasını renklendirirken, komşu şehirler değişik renkte olacak biçimde şehirleri dört renge boyayabileceğini gördü. Aynı yıl, tam olarak 23 Ekim'de, Francis'in kardeşi Frederick, şimdi Dört Renk Problemi olarak anılan soruyu De Morgan'a sordu: Bir haritanın ülkeleri, sınırdaş ülkeler ayrı renklerde olacak biçimde her zaman dört değişik renge boyanabilir mi? Soruya bayılan De Morgan soruyu hemen, aralarında filozof William Whewell'in de bulunduğu arkadaşlarıyla paylaştı. Whewell, De Morgan'ın Buluşun Felsefesi adlı kitabına yazdığı eleştiri yazısında bu sorudan söz etti. Soru bir süre unutuldu. 13 Haziran 1878'de ünlü matematikçi Cayley Londra Matematik Derneği'ne bu sorunun çözümünün bulunup bulunmadığını sordu.

Haritayı düzlemsel bir çizge olarak görebiliriz: Çizgenin noktaları en az üç değişik ülkenin sınırlarının kesişimi olsun, kenarları da iki ülkenin ortak sınırı. Problem, çizgenin kenarlarından oluşan bölgeleri, birbiriyle sınırı olan bölgeler aynı renk olmayacak biçimde boyamak. Yalnız, iki bölgenin sınırdaş olması için iki bölgenin kenarlarının birkaç noktada kesişmeleri yetmez; iki bölge ancak ortak kenarları varsa sınırdaş sayılırlar.

Problem tümevarıma çok yatkın bir problem. Ülke sayısı, sınır sayısı, nokta sayısı üzerine ya da hepsi üzerine tümevarım yapabiliriz. Cayley de problemi çözemedi ama en azından zorluğun nereden kaynaklandığını buldu:

5.21. Teorem [Cayley]: Bir haritada üçten fazla ülkenin bağlantıları aynı noktada kesişmemektedir.

İspat: En az dört ülkenin bir noktada kesiştiği bir harita alalım. O noktalardan birine P diyelim. Bu noktada $k \geq 4$ ülkenin kesiştiğini varsayalım. Haritayı hafifçe değiştirerek yeni bir harita elde edeceğiz, öyle ki bu yeni haritada en az dört ülkenin kesiştiği nokta sayısı, eski haritanın bu tür nokta sayısından daha az olacak. Şöyle yapacağız bunu (aşağıdaki şekilden takip edin): P noktasından iki nokta yaratacağız: Üç ülkenin kesiştiği bir nokta ve $k-1$ ülkenin kesiştiği bir başka nokta.



H haritası.
Komşular:
ab, bc, cd, de, ea

H_1 haritası.
Komşular:
ab, bc, cd, de, ea, ac

H´ haritası.
Komşular:
$ab, bc, cd, de, ea, ac, ad$

Ayrıca yeni harita dört renge boyandığında eski harita da dört renge boyanacak, yani eski haritada komşu olan ülkeler yeni haritada da komşu olacaklar (ama yeni haritada yeni komşuluklar belirecek.) Eğer $k - 1 > 3$ ise bu işlemi tekrarlayacağız. Bunu böylece $k - 3$ kez yapacağız. En sonunda elde ettiğimiz haritanın P noktasında üçten fazla ülke kesişmeyecek. Bu işlemi diğer noktalarda da yaparsak üçten fazla ülkenin hiçbir zaman bir noktada kesişmediği bir harita elde ederiz. Ve bu son harita boyandığında ilk harita da boyanmış olur. //

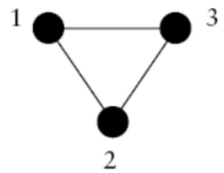
5.4. Sonuç: Bir ülkenin siyasi haritasını boyamak için en az dört renk yeterlidir.

Örnek: Türkiye'nin siyasi haritasını dört renge boyaması aşağıdaki şekilde gibidir.

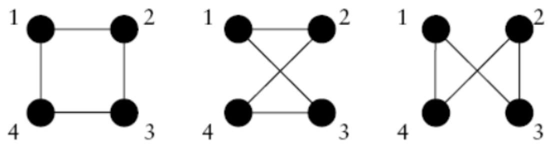
Sarı, Yeşil, Pembe, Turuncu

TAM TUR OLASILIĞI

Kabul edelim ki 1, 2, …, n olan n tane şehir olsun. Her şehirden her şehre giden bir yol olsun, yani K_n tamçizgesinde olduğumuzu varsayalım. Her şehirden sadece bir kez geçen ve başladığı şehirde biten tur sayısını bulalım. Önce n = 3 olsun. Bu özelliği olan tek bir tur vardır. İşte o tur:



Burada turun hangi şehirde başladığını ve hangi yöne doğru gittiğini önemsemiyoruz, bizim için önemli olan turun kendisinden çok o turu veren yol olacak. Şimdi n = 4 olsun. Bu sefer istediğimiz özelliklere sahip üç değişik tur buluruz. İşte o üç tur:



Bu üç turu sırasıyla 1234, 1243 ve 1324 olarak gösterebiliriz.

1234 diye gösterdiğimiz birinci turu,

1234	1432
2341	2143
3412	3214
4123	4321

olarak da gösterebilirdik. Bunların hepsi aynı turdur.

Şimdi K_n çizgesinde kaç tane C_n altçizgesi olduğunu hesaplayalım.

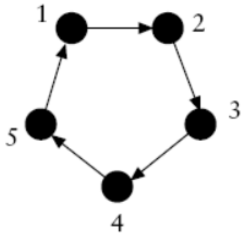
Eğer n = 5 ise her şehirden bir kez geçen kaç tur vardır? Bu turları teker teker çizebiliriz. Teker teker çizdik ve toplam 12 tur bulduk:

12345	12354
12435	12453
12534	12543
13245	13254
13425	13524
14235	14325

turları, başka da yoktur.

Genel olarak, n şehirden sadece bir kez geçen ve başladığı şehirde biten kaç tur vardır?

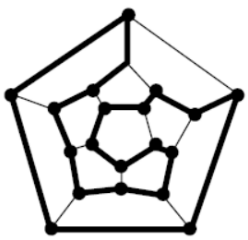
n sayıyı n! biçimde sıraya dizebiliriz. Her sıralamayı bir yolculuk olarak görebiliriz. Örneğin 12345 yolculuğu 1'den başlar, 2'ye gider, sonra 3'e, 4'e, 5'e ve en sonunda 1'e geri döner. Bu bir turdur. Ancak bazı yolculuklar aynı turu verirler.



Örneğin, 12345 yolculuğunu yönünü değiştirmeden bir başka şehirden başlayarak yapabilirdik. Sözgelimi ikinci şehirden başlayıp (yön değiştirmeden) 23451 yolculuğunu elde edebilirdik, ya da beşinci şehirden başlayıp ve gene yön değiştirmeden 51234 yolculuğunu elde edebilirdik. Ayrıca, her yolculuğu ters yöne doğru da yapabiliriz. Bunlar da aynı turu verir, örneğimiz olan 12345 yolculuğunun ters yöndeki yolculuğu 15432 yolculuğudur. Sonuç olarak aşağıdaki yolculukların her biri aynı turu (12345 turunu) verir:

12345	15432
23451	21543
34512	32154
45123	43215
51234	54321

Demek ki tam 2n yolculuk bize aynı turu veriyor. Toplam n! yolculuk olduğundan ve her 2n yolculuk tek bir tur verdiğinden, toplam tur sayısı $\frac{n!}{2n}$, yani $\frac{(n-1)!}{2}$'dir.



Bir çizgenin bir Hamilton turu

Burada yaptığımız, K_n tamçizgesinin tüm Hamilton turlarını, yani her noktadan tek bir kez geçen (dolayısıyla her kenardan en fazla bir kez geçen) ve başladığı noktada biten turları bulmaktır.

Eğer devlet n şehir arasına rastgele n yol döşese, bu yolların bir tam tur olma olasılığı kaçtır?

n = 3 ise bu olasılık 1'dir (yüzde yüz).

Eğer n = 4 ise bu olasılık $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$'tir, çünkü n = 4 ise tam tur sayısı yukarda gördüğümüz üzere 3'tür ve 4 noktalı ve 4 kenarlı çizge sayısı

$$\binom{4(4-1)/2}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

tir.

Eğer n = 5 ise bu olasılık $\frac{12}{252} = \frac{1}{21}$'e düşer çünkü yukarda sıraladığımız üzere 5 noktalı 12 tam tur vardır ve 5 noktalı ve 5 kenarlı çizge sayısı

$$\binom{5(5-1)/2}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

dir.

Görüldüğü gibi – en azından küçük n'ler için – n arttıkça devletin rastgele n şehir arasına rastgele n yol döşeyerek bir tam tur elde etme olasılığı azalıyor.

n noktalı ve n kenarlı

$$\binom{n(n-1)/2}{n}$$

çizge olduğundan, n noktalı ve n kenarlı rastgele seçilmiş bir çizgenin bir tam tur (yani bir Hamilton turu) olma olasılığı

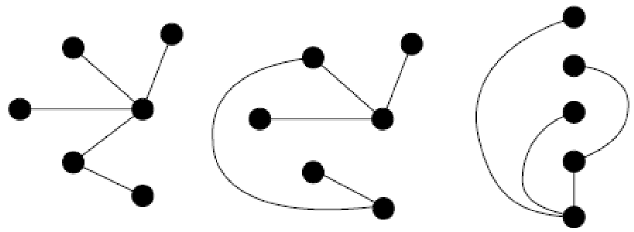
$$\frac{(n-1)!/2}{\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{n}}$$

dır.

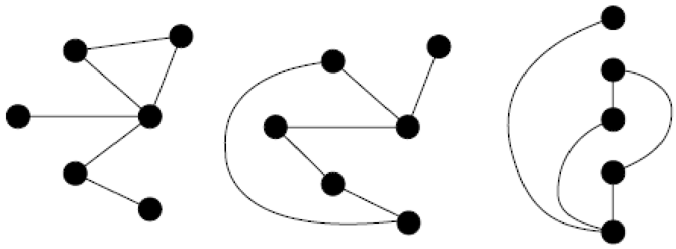
AĞAÇ VE ORMAN

5.25. Tanım: "Döngü"sü olmayan çizgelere orman denir. Ağaç ise tekparça bir ormandır. Yani ağaç, döngüsü olmayan tek parça çizgedir. Ayrıca tek parça bir çizgenin herhangi bir bağlantısının kaldırılması çizgeyi iki parçaya ayıracaksa, bu çizge ağaçtır da denebilir. Tahmin edileceği üzere, ormanlar ağaçlardan (en az bir ağaçtan) oluşur.

Örnek:

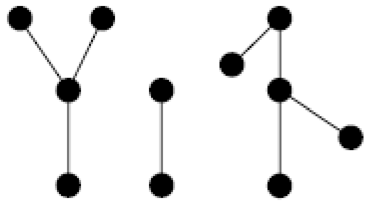


Bu çizgeler birer ağaçtır.

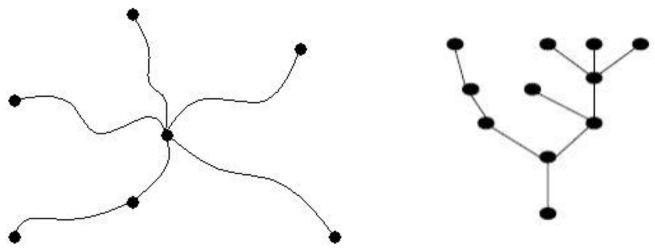


Bu çizgeler birer ağaç değildir.

Örnek: Aşağıdaki çizge üç ağaçtan oluşmuş bir ormandır.



Örnek: Aşağıdaki çizgeler iki ağaçtan oluşmuş bir ormandır.



Ağaçlar, en basit, en yalın, en sade çizgelerdir diyebiliriz. Kolay ispatlanan ilginç özellikleri de vardır. Örneğin, bir ağacın herhangi iki noktası birbirine tek ve tek bir yolla bağlıdır. Ağacın iki noktası iki değişik yolla bağlanmış olsa, bu iki yoldan kolaylıkla bir döngü elde edilebilir.

Çizge teorisinde bir soruyu önce ağaçlar için cevaplamak başlangıç noktası olarak kabul edilir. Amaç daha sonra o soruyu genel olarak çizgeler için ispatlamaktır. Bu nedenle ağaçlar için doğru olduğu gösterilmiş ama ağaç olmayan bir çizge için doğru olup olmadığı bilinmeyen birçok sanı vardır.

n–noktalı bir ağacın bağlantı sayısını bulalım. Yukarıdaki ormanın ağaçlarını soldan sağa T_1, T_2, T_3 diye adlandırırsak,

T_1'in nokta sayısı = 4, T_1'in bağlantı sayısı = 3
T_2'nin nokta sayısı = 2, T_2'nin bağlantı sayısı = 1
T_3'ün nokta sayısı = 5, T_3'ün bağlantı sayısı = 4

eşitliklerini fark ederiz. n noktalı bir ağacın n−1 bağlantısı gerektiğini tahmin etmişsinizdir.

5.11. Teorem: n noktalı bir ağacın n−1 bağlantısı vardır.

İspat: İspatı nokta sayısı üzerine tümevarımla yapacağız.

n = 1 ise, ağacımız tek noktalı kenarsız bir çizge olmak zorunda olduğundan teoremimiz bu aksiyom için doğrudur.

Şimdi n > 1 olsun ve 0 < r < n ise, her r noktalı ağacın r – 1 kenarı olduğunu varsayalım. n noktalı bir T ağacını ele alalım. T'nin bir kenarını silelim (ama kenarın uç noktalarını silmeyelim.) Böylece T'den daha az kenarlı ve iki ağaçtan oluşmuş bir orman elde ederiz. Bu iki ağacın nokta sayılarına n_1 ve n_2 diyelim. Elbette $n_1 + n_2 =$ n'dir. Tümevarım varsayımından dolayı bu iki küçük ağaçta $n_1 - 1$ ve $n_2 - 1$ kenar vardır. Dolayısıyla T ağacında

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$$

tane kenar vardır.

5.5. Sonuç: En az n bağlantılı n noktalı bir çizgede bir döngü vardır.

5.6. Sonuç: n noktalı bir çizgenin en az n bağlantısı varsa o zaman o çizgede mutlaka bir döngü vardır.

5.26. Tanım: Bir ağacın derecesi 1 olan noktaları ve o noktalara değen bağlantıları atalım. Geriye gene bir ağaç kalır. Bu ağaçtan da derecesi 1 olan noktaları ve o noktalara değen bağlantıları atalım. Bu işleme böyle devam edelim. Geriye ya bir nokta kalır ya da hiç kalmaz. Eğer geriye bir nokta kalırsa, geriye kalan o noktaya ağacın merkezi denir. Yani bir ağacın derecesi en büyük noktaya o ağacın merkezi denir.

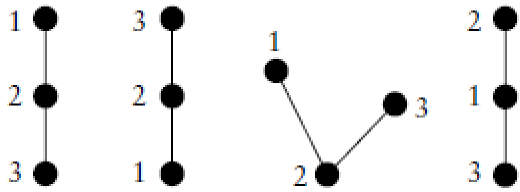
Başladığımız ağaca T_0, daha sonra elde ettiğimiz ağaçlara sırasıyla T_1, T_2, ... dersek, T_0'ın her eşyapı dönüşümü T_i ağaçlarını gene kendine götürmek zorundadır. Ağaçlarla ilgili diğer bir özellik de şudur:

5.12. Teorem: En az iki noktalı sonlu bir ağaçta derecesi 1 olan en az iki nokta vardır.

İspat: Ağacımıza T adını verelim. T ağacındaki en uzun yolu ele alalım. Bu yol A'da başlayıp B'de bitsin. Bu yol en uzun yol olduğundan A ve B noktalarının dereceleri 1 olmak zorundadır.

Prüfer Dizisi ve Adlandırılmış Ağaç Sayısı

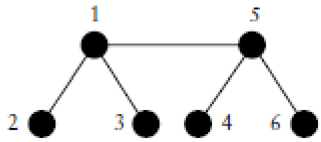
Şimdi Cayley'e ithaf edilen bir problem vereceğiz. Bu problemle noktaları adlandırılmış ağaç sayısını bulalım. Dikkat edecek olursak aşağıdaki adlandırılmış ağaçların ilk üçü aynı adlandırılmış ağaçtır, dördüncüsü ilk üçünden değişiktir.



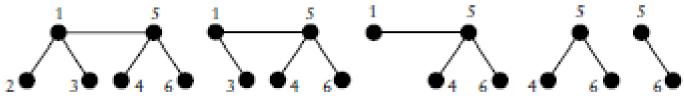
Noktalar adlandırılmamış olsaydı dördünün de birbirinden farkı kalmayacaktı.

5.27. Tanım: Nokta adlandırılmış 1, 2, ..., n noktalar olduğunu varsayalım. b_1, derecesi 1 olan adı en küçük nokta olsun. a_1 de b_1'in bitişik olduğu tek nokta olsun. Dizimizin ilk terimine a_1 yazıp, b_1 noktasını ve ona bitişik bağlantıyı silip n-1 noktalı yeni ağaca bakalım ve aynı işlemi bu yeni ağaca uygulayalım. Bu işlemi sadece iki nokta kalana kadar uygularsak aradığımız (a_1, a_2, ..., a_{n-2}) dizisini elde ederiz. Bu yöntemle elde edilmiş dizi, T ağacının Prüfer dizisi diye adlandırılmıştır.

Örnek:



Yukarıdaki ağaç için sırasıyla {1,2}, {1,3}, {5,1} ve {5,4} bağlantılarını silip ağaçlarını elde ederiz. T ağacının eşleştiği dizi (1, 1, 5, 5) dizisidir.

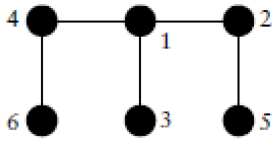


5.12. Teorem (Cayley, 1889). n noktalı n^{n-2} tane noktaları adlandırılmış ağaç vardır. (Bu teoremin ispatını Prüfer ve Clarke tarafından yapmışlardır.)

İspat: n = 2 için sonuç bellidir, 2 noktalı tek bir ağaç vardır. Buna göre $n \geq 3$ eşitsizliğini varsayalım. Noktaları adlandırılmış n noktalı her ağaç için, terimleri {1, 2, ..., n} kümesinden olan bir $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ dizisi bulacağız. Yöntemimiz, noktaları adlandırılmış n noktalı ağaçlarla, terimleri {1, 2, ..., n} kümesinden olan n-2 uzunluğundaki diziler arasında bir eşleme verecek. Bu biçimde yazılmış n^{n-2} adet dizi olduğundan sonucu elde etmiş olacağız.

Şimdi terimleri {1, 2, ..., n} olan herhangi bir $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ dizisinin Prüfer dizisine göre hangi ağaca karşılık geldiğini bulalım. b_1 bu dizide görünmeyen en küçük nokta olsun. a_1 ve b_1 noktaları arasına bir bağlantı koyalım. Ardından diziden a_1'i kaldırıp n-3 terimli yeni diziye bakalım ve b_1'i yok sayıp yöntemimizi yeni diziye uygulayalım. Bu şekilde adım adım ağacın bağlantılarını belirleyebiliriz. Son adımda ise hâlâ daha kullanabileceğimiz atılmamış son iki nokta arasına bağlantı koyarak ağacımızı tamamlarız.

Örnek: (1, 2, 1, 4) dizisine bu yöntemi uygulayarak eşleştiği T ağacını bulalım. Dizimiz dört terimli olduğuna göre noktalar kümesi {1, 2, 3, 4, 5, 6} olacak. Dizinin ilk noktası 1, görünmeyen en küçük noktası 3'tür. Dolayısıyla (1, 3) çizeceğimiz ilk bağlantıdır. Yeni dizimiz (2, 1, 4). Bu sefer 3'ü dikkate almayacağız, yani noktalar kümemizin {1, 2, 4, 5, 6} olduğunu varsayacağız. Yeni dizimizin ilk terimi 2, dizide görünmeyen en küçük nokta da 5'dir. Demek ki 25 de bir bağlantıdır. 2'yi dizimizden silip geri kalan (1, 4) dizisini ele alalım. 3 ve 5 noktalarını artık kullanmayacağız. 1 dizinin ilk terimi, 2 ise dizide görünmeyen en küçük noktadır, dolayısıyla 12 diğer bir bağlantı olacaktır. Artık 2, 3 ve 5 noktalarını kullanmayacağız. Son dizi (4) dizisi, dizide görünmeyen en küçük nokta 1, demek ki (1, 4) diğer bir bağlantı olacaktır. 1 de kullanmayacağımız noktalar arasına eklendi. Son adımda, kullanabileceğimiz kalan iki nokta arasına bir bağlantı koyacağız, yani (4, 6) da bir bağlantı. Demek ki (1, 2, 1, 4) dizisi ağacıyla eşleşir. İlk yöntemi uygulayarak bu ağacın eşleştiği dizinin (1, 2, 1, 4) olduğunu kontrol edebilirsiniz.



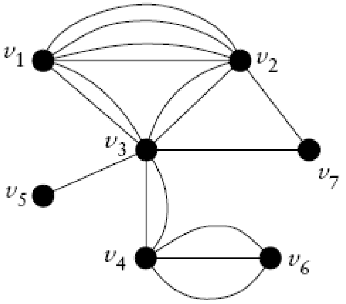
Bu iki yöntem noktaları adlandırılmış n noktalı ağaçlarla, terimleri {1, 2, ..., n} kümesinden olan n−2 uzunluğundaki diziler arasında eşleme vermektedir. Demek ki noktaları adlandırılmış n noktalı ağaç sayısı n^{n-2}'dir.

KAPSAYICI AĞAÇ SAYISI
(Matris-Ağaç Teoremi)

Gustav Robert
Kirchhoff
(1824-1887)

Şimdi her noktayı içeren ağaç sayısını hesaplamaya çalışalım. Bir çizgenin her noktasını içeren ağaçlarına çizgenin kapsayıcı ağacı adı verilir. Örneğin bir üçgende (yani K3'te) üç kapsayıcı ağaç vardır: Üçgenin üç kenarından herhangi birini atarsak bir kapsayıcı ağaç buluruz. Aynı şekilde bir karede de dört kapsayıcı ağaç vardır. Soruyu herhangi bir çizge için soralım ve yanıtlayalım: Bir çizgenin kaç kapsayıcı ağacı vardır? Bu sorunun yanıtı ilk kez Prusyalı matematikci Kirchhoff tarafından 1847'de Matris-Ağaç Teoremi olarak bilinen bir teoremin sonucu olarak bulunmuştur. Ama bizim ispatımız Harary'nin ispatına dayanacak ve lineer cebir gerektirecek. Matris-Ağaç Teoremini önce yazalım, teoremde kullandığımız terimleri daha sonra açıklarız:

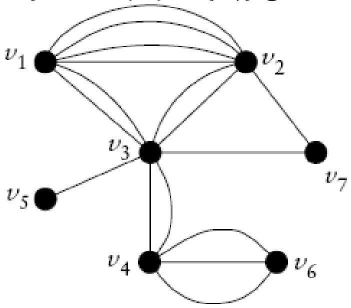
5.13. Teorem: Köseleri adlandırılmış bir G çizgesinin komşuluk matrisi A ve derece matrisi D olsun. G'nin kapsayıcı ağaç sayısı, D – A matrisinin herhangi bir eşçarpanının değeridir. Noktaları v_1, ..., v_n olan bir çizge alalım. Bu çizgenin komşuluk matrisi, (i, j) girdisi v_i ile v_j noktaları arasındaki bağıntı (kenar) sayısı olan n × n boyutlu matristir.



$$\begin{array}{cc} & v_3 \\ & \begin{matrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \\ v_4 & \begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

Komşuluk matrisi

Çizgenin derece matrisi ise, (i, i) girdisi v_i noktasının derecesi (yani v_i'yi içeren bağıntı sayısı) ve i ≠ j için (i, j) girdisi ise 0 olan n × n boyutlu matristir.



$$\begin{matrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Derece matrisi

Elbette komşuluk ve derece matrisleri çizgenin noktalarının kabul edilen sıralamasına göre değişebilir, Örneğin $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ için elde edilen matrisler, $v_2, v_1, v_3, ..., v_n$ için elde edilen matrislerden değişiktir. (İlk iki sütunu ve ilk iki satırı değiştirirsek birinden diğerini elde ederiz.) Biz noktaların önceden belirlenmiş belli bir sıralamayla verildiğini varsayacağız; böylece çizgenin komşuluk ve derece matrisleri belirlenmiş olacak.

1. Hatırlatma: A ve B, n × m ve m × n boyutlu iki matris olsun. n ≤ m olduğunu varsayalım. A'dan m − n sütun silerek n × n boyutlu bir A_i altmatrisi elde edelim. A_i altmatrisinde A'nın hangi sütunları gözüküyorsa B'den o numaralı satırları alarak n × n boyutlu B_i matrisini elde edelim. Bu durumda A'nın olası turu n × n boyutlu A_i altmatrisleri için,

$$\det(AB) = \sum_i \det A_i \times \det B_i$$

olur.

Örnek: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

Bu çarpım matrisinin determinantı 39'dur. Eş düşen altmatrislerin determinantlarının çarpımlarının toplamını hesaplayalım:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

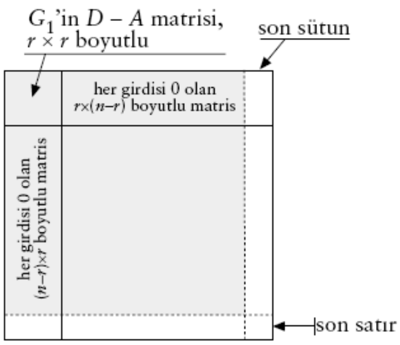
Yine 39 sonucu bulunur.

2. Hatırlatma: Her satırının ya da her sütununun toplamı 0 olan bir matrisin determinantı 0'dır. Her satır ve her sütunun toplamı 0 olan bir matrisin determinantı 0'dır ve eşcarpanları aynı değerdedirler. İkinci olgunun ispatı oldukça kolay, sütun ve satırların yerlerini değiştirerek ya da birini diğerlerine ekleyerek elde edilir. İspatımızda matrislerle ilgili başka sonuçlar da kullanacağız, ama onları yeri geldiğinde tanıtalım.

Matris-Ağaç Teoreminin İspatı: A matrisinin her i-inci satırının (ve her i-inci sütununun) girdilerinin toplamı v_i noktasının derecesine eşit olduğundan, D – A matrisinde her satır ve her sütunun girdilerinin toplamı 0 olur. Hatırlatma 2'den dolayı D – A matrisinin determinantı 0'dır ve eşcarpanları hep aynı değerdedirler.

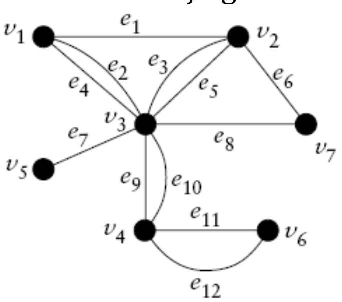
Önce G'nin yekpare (tek) olmadığını varsayalım, yani G, aralarında bağıntı bulunmayan en az iki altçizgeden oluşsun. O zaman çizgede hiç kapsayıcı ağaç olmadığından, D − A matrisinin eşcarpanlarının 0 olduğunu göstermeliyiz.

G'nin noktalarına $v_1, v_2, \ldots, v_n$ diyelim. G_1, G'deki bir bileşen olsun (yani G_1'in noktalarıyla G'nin diğer noktaları arasında bağıntı olmasın.) G_1'in noktalarının $v_1, v_2, \ldots, v_r$ olduğunu varsayalım. D – A matrisinden son satır ve sütunu atıp $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu bir E matrisi elde edelim. E matrisinin ilk r satırının toplamı, her girdisi 0 olan bir satır oluşturacağından E matrisinin determinantı 0 olur. Bu akıl yürütme son satır ve son sütun yerine herhangi bir satır ve sütunla yapılabileceğinden, D – A matrisinin her eşcarpanının değerinin 0 olduğu anlaşılır. Böylece bu durumda istediğimizi göstermiş olduk.



G'nin $D - A$ matrisi, $n \times n$ boyutlu.
Gri matris, $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu E matrisidir.

Şimdi çizgemizin yekpare (tek) olduğunu varsayalım. Ayrıca çizgemizin n noktası ve m bağıntısı olsun. Çizgemiz yekpare olduğundan $m \geq n - 1$'dir. Çizgenin oluşum matrisi B olsun. (Yani v_i noktası e_j kenarındaysa B matrisinin (i, j) girdisi 1, değilse 0 olsun. Elde ettiğimiz n × m boyutlu matris G çizgesinin oluşum matrisidir. Burada n çizgenin nokta sayısı, m de kenar sayısıdır.)



$$B = \begin{array}{cccccccccccc|c}
 & & & & & e_6 & & & & & & & \\
1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0& \\
1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0& \\
0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0& \\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1& \\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0& v_5 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1& \\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&
\end{array}$$

Oluşum matrisi

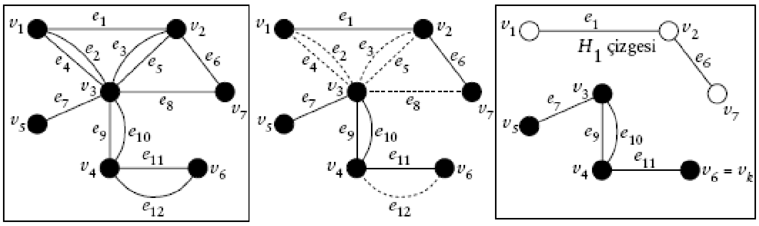
Her sütun bir kenarı simgelediğinden, B matrisinin her sütununda sadece iki tane 1 vardır ve diğer girdileri 0'dır. Şimdi B matrisindeki her sütundaki sıfırdan farklı olan iki girdiden herhangi birini −1 yaparak elde ettiğimiz matrise C adını verelim.

$$C = \begin{matrix}
1&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&-1&1&-1&0&-1&1&1&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&-1&0&-1&0&0&0&0
\end{matrix}
\qquad
C^t = \begin{matrix}
1&-1&0&0&0&0&0\\
1&0&-1&0&0&0&0\\
0&1&-1&0&0&0&0\\
-1&0&1&0&0&0&0\\
0&1&-1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&-1\\
0&0&-1&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&-1\\
0&0&1&-1&0&0&0\\
0&0&-1&1&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&1&0\\
0&0&0&-1&0&1&0
\end{matrix}$$

C'nin sütunlarının toplamı 0'dır, çünkü girdilerinin biri 1, diğeri −1 ve geri kalanları 0'dır. Bu, birazdan önemli olacak. CC^t matris çarpımını dikkatlice inceleyelim. (C^t matrisi, yukardaki örnekte görüldüğü gibi, C matrisinin çapraza göre simetriğidir, C^t matrisinde C matrisinin sütunları satır, satırları sütun olmuştur.) Cebirsel bir işlem olan CC^t matris çarpımının geometrik anlamı irdelendiğinde, $i \neq j$ ise bu çarpımın (i, j) girdisinin v_i ile v_j noktaları arasındaki kenar sayısı çarpı −1 olduğu gözlemlenir; i = j durumunda ise bu girdi v_i'nin derecesidir. Demek ki $CC^t = D - A$ dır. Dolayısıyla G'nin kapsayıcı ağaç sayısının CC^t matrisinin herhangi bir eşcarpanının değeri olduğunu göstermeliyiz.

G'nin n – 1 bağıntılı herhangi bir H altçizgesine bakalım. C'den sadece H'nin kenarlarına karşılık gelen sütunları kabul edip (yani diğerlerini atıp), sıralardan da herhangi birini, diyelim k-inci sırayı atarak elde ettiğimiz (n – 1) × (n – 1) boyutlu C′ matrisinin determinantının mutlak değerini bulalım.

Önce H altçizgesinin bağlı olmadığını varsayalım. O zaman H'nin v_k noktasını barındırmayan bir bileşeni vardır. Bu bileşen H_1 olsun. Attığımız k-inci satırın H_1'in noktalarına karşılık gelen girdileri 0'dır. Çünkü v_k noktası H_1'de değildir. Dolayısıyla C′ matrisinin H_1 çizgesine karşılık gelen altmatrisin sütunlarının toplamı da aynen C matrisinin sütunlarında olduğu gibi 0'dır. Demek ki H_1 çizgesine tekabül eden matrisin (resimde griyle gösterilmiş) determinantı 0'dır. Bundan da det C′ = 0 çıkar.



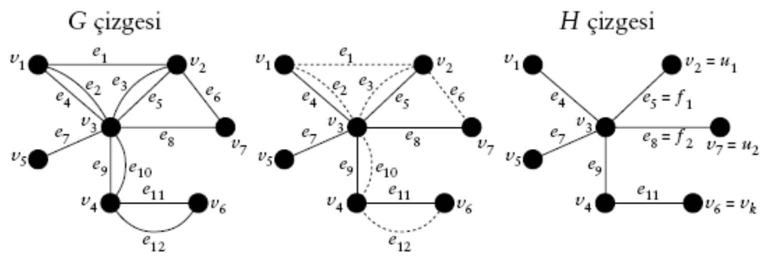
G çizgesi H çizgesi

$$C = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$C' = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$k = 6$

Şimdi H çizgesinin bağlı olduğunu, yani H altçizgesinin G'nin bir kapsayıcı ağacı olduğunu varsayalım. C′ matrisinin satır ve sütunlarını değiştirerek C′ matrisini, çaprazın altındaki girdileri 0 olan ama çaprazında hiç 0 olmayan bir matrise (üstüçgen matrisine) dönüştüreceğiz. C′ matrisinin girdileri 1 ya da −1 olduklarından ve satır ve sütun değişmelerinden determinantı n mutlak değeri değişmediğinden, böyle bir donuşum yapabilirsek, |det C′| = 1 eşitliğini göstermiş olacağız.



$$C = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$C' = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$k = 6$

u_1 adını vereceğimiz v_k'den farklı ve derecesi 1 olan bir nokta seçelim. f_1 ise u_1 noktasına bağlı kenar olsun. u_2, v_k ve u_1'den farklı ve $H \setminus \{u_1\}$ çizgesinde derecesi 1 olan bir nokta, f_2 ise u_2'ye bağlı kenar olsun. Bu işlemi elimizde sadece v_k noktası kalana kadar uygulayalım. (Bir sonraki adımda $H \setminus \{u_1, u_2\}$ çizgesinden derecesi 1 olan bir u_3 noktası seçeceğiz.) Böylece seçilen her u_i noktası sadece f_1, ..., f_i noktalarına bağlı olabilir ve e_i noktası f_i kenarına hep bağlı olur. Eğer C′ matrisini bu tabanda yazacak olursak, çaprazında 1 ya da − 1 olan üçgensel bir matris elde ederiz. Demek ki |det C′| = 1'dir.

D – A matrisinin (ya da CC^t matrisinin) her eşcarpanı aynı değerde olduğu için, D – A matrisinin i-inci satır ve sütunu atarak bulduğumuz eşcarpanı hesaplayalım. C matrisinden i-inci satırı çıkardığımızda elde ettiğimiz matrise C_i dersek, D – A matrisinden i-inci satır ve sütunu atarak elde ettiğimiz matris $C_iC_i^t$ matrisine eşittir. Demek ki det $(C_iC_i^t)$ değerini bulmalıyız.

Hatırlatma 1'e göre det $(C_iC_i^tt)$, C_i ve C_i^t matrislerinin sonucumuzda belirttiğimiz şekilde aldığımız altmatrislerinin determinantlarının çarpımlarının toplamlarına eşit. İlgili altmatrislerin deteminantlarının çarpımının, sütunlar bir kapsayıcı ağaçsa 1 diğer durumda 0 olduğunu da gördük. Böylece G'nin kapsayıcı ağaçlarının sayısının D – A matrisinin eşcarpanı olduğunu bulduk. //

Cayley Teoremide Matris-ağaç teoreminden kolaylıkla elde edilebilir. G'yi n noktalı tam çizge olarak alırsak

$$D-A=\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$$

olur. D – A matrisinden ilk satır ve sütunu atalım. (n – 1) × (n – 1) boyutlu

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -n & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulacağız. Önce ilk satırı diğer tüm satırlardan çıkararak matrisini bulalım. Ardından ilk sütuna diğer tüm sütunları eklersek

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Bu işlemler matrisin determinantını değiştirmez ve köşegeninin altındaki tüm girdileri 0 olan bu matrisin determinantı köşegendeki girdilerin çarpımıdır. Bu durumda matrisin determinantı ise beklediğimiz gibi n^{n-2} dir.

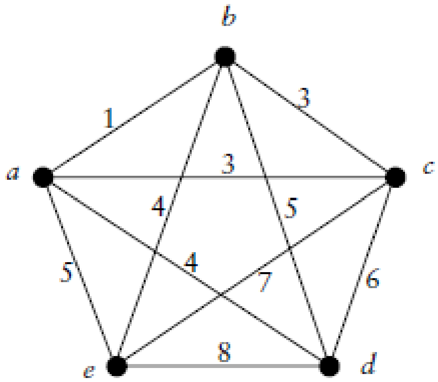
GEZGİN SATICI PROBLEMİ ve EN YAKIN ŞEHİR ALGORİTMASI

William Hamilton
04 Ağustos 1805, Dublin, İrlanda - 02 Eylül 1865, Dublin, İrlanda

Gezgin Satıcı Probleminden (GSP) amaç, bir satıcının, bulunduğu şehirden başlayıp, her şehre sadece bir kez uğradıktan sonra başladığı şehre geri dönen en kısa turu bulmaktır. Herhangi iki şehir arasında bir yol olduğunu ve o yolun uzunluğunu bildiğimizi varsayıyoruz.

Görüldüğü gibi, GSP, anlaşılması için matematiksel herhangi bir temel gerektirmeyen bir problemdir. Anlaşılması kolaydır ama çözümü zordur. GSP, çizge kuramı dilinde, şehirlerin noktalarla, şehirlerarası yolların bağlantılarla temsil edildiği (yalın) bir çizge üzerinde, en kısa Hamilton turunun bulunmasıdır. Hamilton turu, bir çizge üzerindeki her noktadan sadece bir kez geçen (dolayısıyla aynı yoldan da sadece bir kez geçen) ve başladığı noktada biten, 19. Yüzyılda yaşamış matematikçi William Hamilton'ın adıyla anılan turdur.

Örneğin n noktadan oluşan bir tamçizge, yani Kn tamçizgesi $\frac{(n-1)!}{2}$ Hamilton turu içerir. Bunu "Tam Tur Olasılığı" kısmında göstermiştik.



1. Soru: Yukarıdaki çizgede bütün Hamilton turlarını bulun ve uzunluklarını hesaplayın. Şehirlerarası uzaklıklar bağlantıların üstünde verilmiştir.

Çözüm: Verilen çizgede her nokta çifti arasında bir bağlantı bulunduğu için, bunun bir tamçizge olduğunu belirtelim. Bir tamçizgede, noktaların herhangi bir sırayla dizilişi, bir Hamilton turuna karşılık gelir. Örneğin, a şehrini başlangıç noktası kabul edersek, aşağıda verilen $\frac{(5-1)!}{2} = 12$ turu buluruz.

Tur	Uzunluk
abcdea	1+3+6+8+5=23
abceda	1+3+7+8+4=23
abdcea	1+5+6+7+5=24
abdeca	1+5+8+7+3=24
abecda	1+4+7+6+4=22
abedca	1+4+8+6+3=22
acbdea	3+3+5+8+5=24
acbeda	3+3+4+8+4=22

acdbea	3+6+5+4+5=23
acebda	3+7+4+5+4=23
adbcea	4+5+3+7+5=24
adcbea	4+6+3+4+5=22

Burada en kısa tur için 22 birim uzunluğunda dört seçenek vardır. Bu dört turdan herhangi birini, örneğin abecda turunu, bu GSP'nin en iyi çözümü olarak kabul edebiliriz.

Bu örnekteki çözüm yöntemini izleyerek, GSP için üç adımlık bir çözüm yolu geliştirilebilir:

1. Çizgenin tüm Hamilton turlarını bulalım.
2. Her turun uzunluğunu hesaplayalım.
3. Turlar arasından en kısasını seçelim.

Bu çözüm yöntemiyle, 10 şehir içeren bir GSP için bulunması gereken tur sayısı $\frac{9!}{2} = 181\,440$ 'tır. Şehir sayısı 20'ye çıktığında ise bulunması gereken tur sayısı $\frac{19!}{2} \approx 6{,}08 \times 1016$ 'yı bulur. 25 şehir için GSP problemini bu yolla çözmek isteyen bir satıcının, yaklaşık 3,1 × 1023 turu incelemesi gerekir. Bu sorunun çözüm yolunun uygulanması olanaksızdır.

2. Soru: Bir Türkiye karayolları haritasında verilen iller arası mesafe bilgilerini kullanarak, bulunduğunuz şehirden başlayıp yine aynı şehirde biten ve 81 ili dolaşan bir tur belirleyin. Bulduğunuz tur, bulunabilecek en kısa tur mu?

GSP Çözüm Yöntemleri: Araştırmacılar, GSP'nin kökenini Euler'in 1759 ve Vardemonde'nin 1771'teki çalışmalarına dayandırır. Ancak, 1940'ların sonlarına doğru popüler olmaya başlayan GSP için 1954'te Dantzig, Fülkerson ve Johnson, doğrusal programlama tekniğine dayalı bir çözüm yöntemini geliştirmiştir. GSP için geliştirilen çözüm yöntemlerinin "ilk"i kabul edilen bu yaklaşım, "polyhedral combinatorics" alanının gelişmesine de öncülük etmiştir. Ancak, GSP'nin zor problemler sınıfına ait olmasından da anlaşılacağı gibi, bu yaklaşım dahil, bugüne kadar geliştirilen en iyi algoritmaların bile çözüm karmaşıklığı, problemdeki şehir sayısını temsil eden n'nin üssel kuvvetine bağlıdır. Büyük bir olasılıkla polinom zamanlı bir GSP algoritması da hiçbir zaman bulunamayacaktır, hatta büyük bir olasılıkla böyle bir algoritma yoktur.

Çok şehirli GSP'leri çözmek için pratik bir yöntem, yaklaşık çözüm üreten sezgisel algoritmalar kullanmaktır. Sezgisel algoritmalar, en iyi çözümü garanti etmemelerine karşın, en iyi çözüme yakın, oldukça iyi bir sonucun makul bir sürede bulunmasını sağlarlar.

Bu sezgisel algoritma, gezginin bir şehirden diğerine giderken, henüz ziyaret etmediği şehirler arasından en yakındakini tercih edeceği ilkesine dayanır.

3. Soru: Birinci soruda verilen çizge için a şehrini başlangıç noktası kabul ederek "en yakın şehir algoritması"yla bir çözüm bulunuz.

Cevap: Satıcı a'dayken henüz ziyaret edilmemiş şehirler kümesi {b, c, d, e}'dir. Bu küme içinde a'ya en yakın b'dir ve algoritmaya göre satıcı önce b'ye gider. b'ye en yakın ziyaret edilmemiş şehir c'dir. Dolayısıyla satıcı c'den d'ye geçer. Buradan e'ye gider, sonra da başlangıç şehrine geri dönerek turunu tamamlar. Buna göre 23 birim uzunluğundaki abcdea turu bulunur. Ancak, bu çözüm maalesef çizgedeki en kısa turdan bir birim daha uzundur.

Eğer bir çizgede tüm i, j, k noktalarının (şehirlerinin) arasındaki uzaklıklar $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$ eşitsizliğini sağlıyorsa, bu çizge "üçgen eşitsizliğini sağlayan çizge" olarak adlandırılır. Bunun yararı, böyle bir çizgede iki nokta arasındaki en kısa yolun, o iki nokta arasındaki tek bağlantıları sağlanacağının garanti edilmesidir. Çizgemizin noktaları şehirler, noktalar arasındaki uzaklık da şehirlerarası en kısa mesafe ise, bu varsayım geçerlidir elbette.

4. Soru: İlk soruda verilen çizgenin "üçgen eşitsizliği"ni sağladığını ispatlayın.

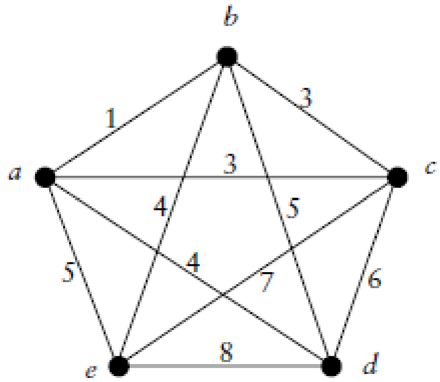
Cevap: Şimdi üçgen eşitsizliğini sağlayan bir çizgede, en kısa Hamilton turunun en fazla iki katı uzunluğunda bir Hamilton turu bulan sezgisel bir algoritmayı inceleyelim.

En Kısa Tur Algoritması: Bir G çizgesi üzerindeki en kısa kapsayıcı ağacı T'yle gösterelim. Yani G'nin bütün noktaları T ağacında bulunsun ve T'nin bağlantılarının uzunluklarının toplamı olabildiğince küçük olsun.

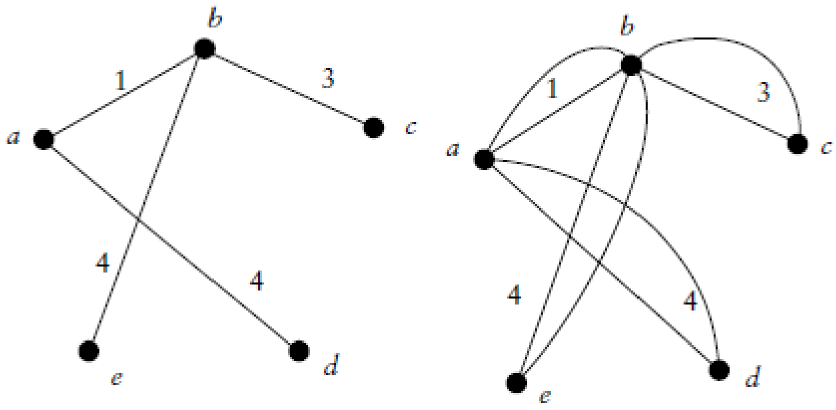
T'nin her bir bağlantısı için ikinci bir bağlantı ekleyerek, yeni bir G_1 çizgesi oluşturalım. Bu yeni çizge yalın bir çizge olmasa da gene de bir çizgedir. G_1 çizgesinde bütün noktalar birbirlerine çift sayıda bağlantıyla bağlanmış olur, yani her noktanın derecesi çifttir. Böyle bir çizgede, Euler turu olarak adlandırılan, bütün bağlantılardan sadece bir kez geçen, dolayısıyla her noktadan en az bir kez geçen ve başlama noktasına geri dönen bir tur vardır, bunu

Euler Turu yazısında görmüştük. G_1 çizgesinde bulduğumuz bir Euler turunun noktalarını rastladığımız sıraya göre dizelim. Bu turu bir Hamilton turuna dönüştürmek için, sıraya dizilmiş noktalar arasında tekrar edilmiş bir noktaya rastladığımızda, bu noktayı atlayıp bütün noktaların turda sadece bir kez yer almasını sağlayarak, başlama noktasında tamamlanan yeni bir tur bulmamız yeterlidir. Eğer çizge üçgen eşitsizliğini sağlıyorsa, tekrar eden noktaların atlanmasının turun uzunluğunu değiştirmeyeceği hatta belki de kısaltacağı muhakkaktır.

Şimdi ilk soruda verilen çizge üzerinde bu algoritmayı uygulayalım.



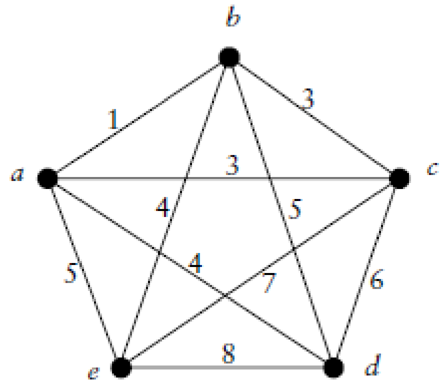
Önce, Prim algoritmasıyla çizge üzerinde en kısa kapsayıcı ağacı, yani çizgenin her noktasını içeren en kısa ağacı bulalım. Bu algoritmada, önce, çizgenin bağlantıları en kısadan en uzuna doğru sıraya dizilir. Soruda verilen çizge için bu sıra şöyle oluşur: ab, bc, ac, be, ad, ae, bd, cd, ec, ed. Sıranın en başındaki en kısa bağlantıyla başlarız. Bu bağlantının iki noktası, yani {a,b} noktaları en kısa kapsayıcı ağacımızın iki noktası olacak. Sonra, soldan sağa doğru bağlantıları gözden geçiririz. O ana dek seçtiğimiz noktalara kattığımızda ağaç özelliğini bozmayacak ilk bağlantısı seçtiğimiz noktalara ekleriz. Sıradaki ikinci en kısa bağlantı, ya bu ağaca yeni bir nokta ekler ya da iki bağlantı ve dört noktadan oluşan bir orman verir. Ağaç elde edersek bu bağlantısı da katarız, yoksa bir sonraki noktaya geçeriz. Örnek çizgede bc bağlantısı ağaç özelliğini bozmaz, dolayısıyla c'yi de katarak {a,b,c} noktalarından oluşan bir ağaç elde ederiz. Üçüncü ac bağlantısı ağaç özelliğini bozuyor, dolayısıyla bu bağlantıyı atlayarak, dördüncü bağlantıya geçmeliyiz. Bu şekilde devam edersek, çizgedeki bütün noktaları içeren en kısa kapsayıcı ağacı buluruz.



Sağdaki T ağacı, G çizgesinin en kısa kapsayıcı ağacıdır. Uzunluğu 1+3+4+4=12'dir. Çizgede daha kısa bir kapsayıcı ağaç bulunamaz. Şimdi T'deki bağlantıları çiftleyelim ve oluşturduğumuz yeni çizgeye G′ diyelim. Daha önce söylediğimiz gibi, eğer bir çizgenin noktaları çift sayı da bağlantıyla bağlıysa, Euler turunu bulmak kolaydır ve nasıl bulunacağı Euler Turu yazısında açıklanmıştır. Örneğin, bu çizge üzerinde ebcbadabe bir Euler turudur. (Çiftlenen bağlantılar arasında bir fark gözetmedik.) e'den yola çıkan bir gezgin, eb bağlantısından b'ye, bc bağlantısıyla c'ye, cb bağlantısıyla tekrar b'ye ulaşır. Buradan da ba bağlantısıyla a'ya ulaşan ve a noktasından itibaren geriye kalan bütün bağlantıların üzerinden sırayla geçen gezgin, en son olarak tekrar e noktasına erişir. Euler turunu izleyen gezgin, örneğin, turun başlarında c'den tekrar b'ye döner. Şimdi, bu turu Hamilton turuna dönüştürürken, bu aşamada ikinci kez ziyaret edilen b noktasının ikinci ziyaretini engellememiz gerekir. Yani, ebcba… dizisinde ikinci b'yi atlayarak ebca… dizisini oluşturmalıyız. Eğer cb ve ba bağlantılarını silip, bu bağlantılar yerine ca bağlantısını eklersek, b'nin ikinci kez ziyaret edilmesini engellemiş oluruz ve gezgin (3+1) birimlik uzunluk yerine 3 birimlik uzunlukla c'den a noktasına ulaşmış olur. Aynı yöntemle bütün dönüştürme işlemini tamamladığımızda, 22 birim uzunluğundaki ebcade Hamilton turunu elde ederiz. Bu yöntemle, G üzerindeki GSP'nin en iyi çözümünü bulmamıza rağmen, böyle bir sonuç maalesef her zaman garanti değildir. Ancak, bu sezgisel yöntem çok da kötü bir sonuç vermemektedir:

5. Soru: Üçgen eşitsizliğini sağlayan bir çizgede en kısa tur algoritmasıyla bulunan GSP turunun uzunluğunun, en kısa kapsayıcı ağacı oluşturan bağlantıları n toplam uzunluğunun iki katından daha büyük olmayacağını gösterin.

Yukarıda anlattığımız iki sezgisel algoritma dışında, GSP literatüründe birçok sezgisel algoritma önerilmiştir. Bunların bir kısmı, incelediğimiz sezgisel algoritmalar gibi bir gezgin satıcı turu bulduktan sonra durur. Diğerleriyse verilen bir tur üzerinde değişiklikler yaparak, daha kısa turlar bulmaya yönelik “iyileştirici” girişimleri dener. Şimdi, bu türün en bilinen ve en yaygın kullanılan yöntemlerinden birini, turu oluşturan bağlantıların ikisini iki yeni bağlantıyla değiştiren iyileştirme yöntemini inceleyelim.



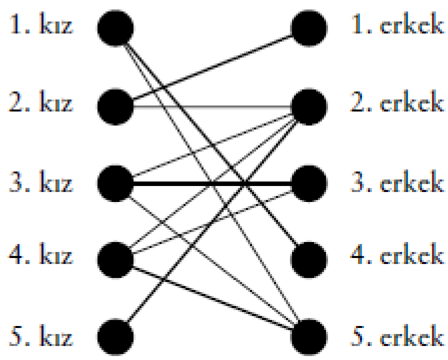
İki Bağlantı Değiştirme Algoritması: İlk sorudaki çizge için verilen 24 uzunluğundaki abdcea Hamilton turu üzerinden bu algoritmayı tartışalım. Algoritmanın temel amacı, verilen bir tur üzerindeki komşu olmayan iki bağlantıyı, iki yeni bağlantıyla değiştirerek daha kısa bir tur bulmaktır. İki bağlantıyı silinmiş bir turdan yeni bir tur elde etmenin bir tek yolu vardır. Şimdi, 24 birimlik abdcea turundaki 7 birimlik ce bağlantısını ele alalım. Diyelim ki bu uzun bağlantıdan kurtulmak istiyoruz. Verilen turdan ce’siz yeni bir tur bulmak için, ce’yle birlikte ce’ye komşu olmayan 5 birimlik bd bağlantısından da ya da 1 birimlik ab bağlantından da kurtulmamız gerekir. Bu durumda iki seçenekle karşı karşıyayız. Birinci seçenekte, (7+5) birimlik ce ve bd bağlantılarını turdan silip (3+8) birimlik bc ve ed bağlantılarını ekleyerek, 23 birimlik abcdea turunu elde ederiz. İkinci seçenekte, (7+1) birimlik ce ve ab bağlantılarını (3+4) birimlik ac ve be bağlantılarıyla değiştirerek, yine 23 birimlik ama başka bir tur olan acdbea turunu buluruz. Seçeneklerin ikisi de abdcea turunu sadece 1 birim kısalttığı için, iki yeni turdan herhangi biri rasgele seçilebilir. Algoritma, yeni tur üzerindeki başka bir bağlantı çiftinin değiştirilmesiyle turun kısalıp kısalmadığını kontrol ederek devam eder. Eğer kısalma bulunursa, gerçekleştirilir. Daha kısa bir tur bulunamazsa, algoritma durur.

Sonuç Yerine: 1954’te 49 şehirlik GSP’nin çözümünden bu yana geçen zaman içinde, çözülen problemlerin büyüklüğü giderek artmış, günümüzde 15 000’den fazla şehir içeren problemlerin çözülebildiği bir birikime erişilmiştir. //

Açıklama: 2001’de Almanya’nın tüm 15 112 şehrini gezen ve her şehirden sadece bir kez geçen en kısa yol bulunmuştur. Bunun için Rice ve Princeton üniversitelerinin bilgisayarları 22 yıldan fazla çalışmışlardır… Toplam yol aşağı yukarı 66 000 km’dir, yani ekvatorun bir buçuk misli… İşte Almanya’nın en kısa yol haritası. İyi yolculuklar.

ÇÖPÇATANLIK PROBLEMİ

Şöyle bir soru düşünelim. Sonlu sayıda bekâr kız ve erkekten oluşan bir toplulukta bazı kız ve erkek çiftleri birbirlerini beğeniyorlar ve her biri beğendiklerinden biriyle evlenmeye hazır. Herkesi beğendiği biriyle evlendirebilir miyiz?



Sözgelimi, 5 kız ve 5 erkekten oluşan bir topluluk olsun ve bu 10 kişi noktalarla, birbirini beğenen kız ve erkek çiftlerini de bağlantılar aracılığıyla aşağıdaki gibi bir çizge olarak gösterelim. (1, 4), (2, 1), (3, 3), (4, 5), (5, 2) evlilikleri bu çöpçatanlık probleminin birkaç çözümünden biridir. Parantez içindeki birinci sayılar kızları, ikinci sayılar erkekleri simgeliyor.

Problemi kızlar ve erkekler olmak üzere iki kümeli bir çizge olarak gösterip her dişi noktayı bir ve bir tek erkek noktayla eşleştirdik. Topluluğun tüm üyeleri böylece evlenir. Böyle bir eşlemeye mükemmel eşleme (perfect matching) denir. Mükemmel eşlemelerde her kız tek ve bir tek erkeğe, her erkek de tek ve bir tek kıza eş düşer (1-1 ve örten).

Eğer erkeklerin sayısı kızlardan daha fazlaysa (ya da tam tersiyse), bir mükemmel eşleme mümkün değildir elbet. Mükemmel eşleme mümkün olmasa da, bu durumda, her kızı bir erkekle evlendirecek bir eşleme bulabiliriz (bulamayabiliriz de). Her kızı evlendiren bir eşlemeye kızları kayıran eşleme diyelim. Elbette eğer kızları kayıran bir eşleme varsa ve kız sayısı erkek sayısına eşitse, kızları kayıran bu eşleme aslında erkekleri de kayırır, yani herkes halinden memnundur.

Amacımız, kızları kayıran bir eşlemenin (yani her kızı evlendiren bir eşlemenin) hangi koşullarda olduğunu bulmak. Matematikte buna çöpçatanlık problemi denir.

Bundan böyle her erkeğin her kızı beğendiğini varsayalım, yani her erkek herhangi bir kızla evlenmeye razı olsun. Bu varsayım sadece dilimizi sadeleştirmemizi sağlayacak, bu varsayımla herhangi bir genellik kaybetmeyeceğiz.

Eğer erkekten çok kız varsa, her kızı mutlu etmek çokeşliliğin yasaklandığı topluluklarda mümkün olmaz. Çokeşliliğin yasaklandığını varsayacağız. Dolayısıyla kızların sayısı erkeklerin sayısından fazla olmamalı, yani yeterince erkek olmalı. Ama bu da yetmez. Örneğin her kız aynı erkeği beğenirse ve kızların gözü başka erkek görmezse ve birden fazla kız varsa çöpçatanlık kesinlikle başarıya ulaşamaz. Dolayısıyla beğenilen yeterince erkek olmalı.

Philip Hall
11 Nisan 1904, Hampstead, İngiltere - 30 Aralık 1982, Cambridge, İngiltere

Çöpçatanlık Teoremine hazırlık olarak Philip Hall'in 1935 yılında ortaya attığı şu ifadelere dikkat edelim: m kızdan oluşan bir toplulukta çöpçatanlık probleminin kızları mutlu eden bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul, her k = 1, ..., n için k kız içeren herhangi kız topluluğunun en az k değişik erkeği beğenmesidir.

Bu problemin çöpçatanlık dışında da uygulama alanlarını bulmak kolaydır. Örneğin bir işyerinde bitirilmeyi bekleyen işler ve işleri yapabilecek özellikte kişiler olsun, ayrıca her işin tek bir kişi tarafından yapılması istensin. İşlerle bu işleri yapabilecek kişileri eşleme problemine çözüm için gerek ve yeter koşulları yukarıdaki teorem verir.

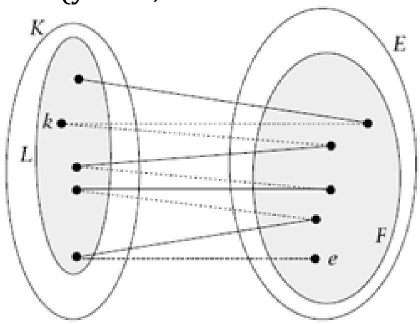
Kızlar kümesine K, erkekler kümesine E diyelim. Eğer L bir kız topluluğuysa, bu topluluktaki kızların en az birinin beğendiği erkekler kümesi B(L) olsun. O zaman Yukarıdaki teorem çizgeler kuramı dilinde şu şekli alır:

5.14. Teorem (Çöpçatanlık Teoremi): G(K, E) iki kümeli bir çizge olsun. K'yi kayıran bir eşlemenin var olması için gerek ve yeter şart, her $L \subseteq K$ altkümesi için $|L| \leq |B(L)|$ eşitsizliğidir.

İspat: İspatın gerekli olduğu aşikârdır. (Yoksa L'deki kızlarla eşleşecek yeterince erkek olmazdı.) Koşulun yeterli olduğunu ispatlayalım. Her $L \subseteq K$ için $|L| \leq |B(L)|$ eşitsizliğini varsayalım. K'yi kayıran bir eşleme bulacağız.

M, bulabileceğimiz en fazla evliliği içeren bir eşleme olsun. Çizge diline çevirirsek, M uç noktaları kesişmeyen bağlantılardan (eşlemelerden, evliliklerden) oluşuyor ve bu özelliğe sahip daha fazla sayıda bağlantı içeren bir küme yok. M'nin bağlantılarının K'nin her noktasına değdiğini göstereceğiz (yani

M evliliklerinin her kızı evlendirdiğini göstereceğiz.) k ∈ K, bu eşlemelerde görülmeyen bir nokta olsun (yani k, M evliliklerinde kocasız kalan bir kız.)



k'den başlayan ve ardışık bağlantıları M'de olan bir yol. Düz çizgiler M'de. Kesik çizgiler M'de değil.

M eşlemesine göre evde kalan k adlı kızımızdan başlayarak, ardışık iki bağlantısından birinin M'de olduğu en uzun yollara bakalım. Bu yollardan hiçbiri bir erkek noktada bitemez, çünkü öyle bir yol e erkek noktasında bitseydi, o zaman-yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi-yolumuzda bulunan M'deki eşlemeleri atıp (düz bağlantılar), onların yerine M'de bulunmayan eşlemeleri (kesik bağlantıları) alır ve böylece M'den bir fazla eşlemesi olan bir eşleme kümesi bulurduk. Demek ki bu yolların her biri gene bir kızda bitiyor.

Bu tür (k'den başlayan ve her iki ardışık bağlantısından birinin M'de olduğu) yolların geçtiği kız noktalar kümesine L, erkek noktalar kümesine F diyelim. F'nin her noktası M eşlemesiyle L'deki tek bir noktayla eşlenmiştir, ayrıca bu tür yollar bir erkekte sona eremeyeceğinden, $B(L) = F$ eşitliği geçerlidir. Demek ki $|L| \leq |B(L)|$ olur. Öte yandan, k, L kümesinde olan ve M'de görülmeyen bir nokta olduğundan, $|F| + 1 \leq |L|$ dir. Bu durumda,

$$|B(L)| = F < |F| + 1 \leq |L|$$

eşitsizliğini elde ederiz, yani $|L| \leq |B(L)|$, bir çelişkidir. Demek ki öyle bir k noktası yoktur.

5.7. Sonuç: G(K, E) iki kümeli bir çizge olsun. Mükemmel bir eşlemenin var olması için gerek ve yeter şart $|K| = |L|$ eşitliği ve her $L \subseteq K$ altkümesi için $|B(L)| \geq |L|$ eşitsizliğidir.

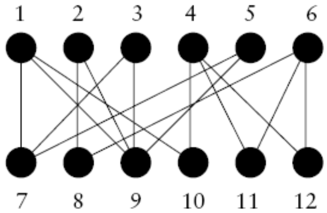
İspat: Yukarıdaki teoreme göre her kız bir erkekle eşleştirilebilir. Ama kız sayısı erkek sayısına eşit, demek ki her erkek de eşleştirilmiştir, yani bu eşleme mükemmel bir eşlemedir.

5.8. Sonuç: G iki kümeli bir çizge olsun. G'nin her noktasının derecesi aynı olsun ama bu derece 0 olmasın. O zaman G'nin mükemmel bir eşlemesi vardır.

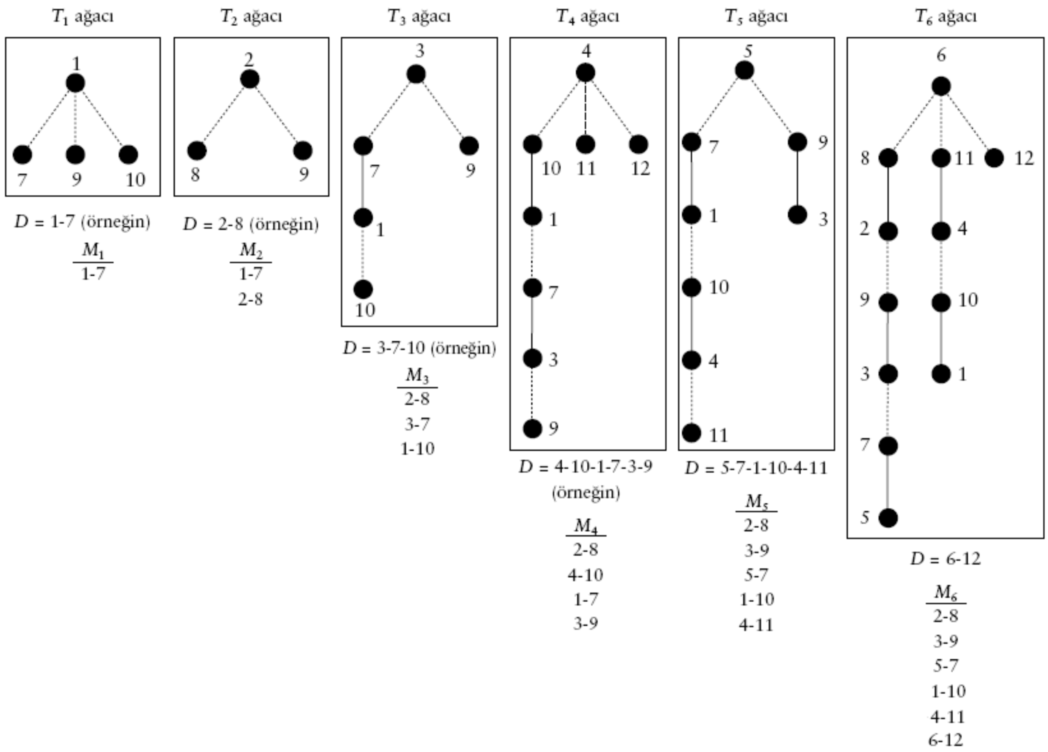
İspat: Yukarıdaki sonucu uygulayacağız. İki ayrık kümeye K ve E diyelim. Derece k olsun. G'nin her noktasının derecesi k olduğu için $k|K| = |E(G)| = k|E|$ yani $|K| = |E|$ dir (çünkü $k \neq 0$).

$L \subseteq K$ olsun. L_1, L'deki noktalara değen bağlantılar kümesi, $B(L)_1$ ise B(L)'deki noktalara değen bağlantılar kümesi olsun. Tanım gereği $L_1 \subseteq B(L_1)$ dir. Bu durumda $k|L| = |L_1| \leq |B(L_1)| = B(L)$, yani $|B(L)| \geq |L|$ dir. Buna göre sonuca göre G çizgesinde mükemmel bir eşleme vardır.

Örnek: 1, 2, 3, 4, 5, 6 kızları, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ise erkekleri simgelesin. Bu 12 kız ve erkeğin hangilerinin yuva kurmaya razı olduklarını aşağıdaki çizgedeki bağıntılarla gösterelim.

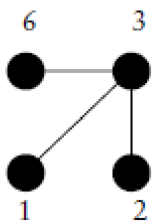


Algoritmamızı uyguladığımızda aşağıdaki T ağaçlarını, D dallarını ve M eşlemelerini elde ederiz. $M_0 = \emptyset$, bunu biliyoruz. Şimdi $i = 1$ olsun ve algoritmaya devam edelim.



RAMSEY SAYILARI ve TEOREMLERİ

Altı kişilik bir toplulukta ya herkesin birbirini tanıdığı ya da hiç birinin hiç kimseyi tanımadığı en az üç kişi mutlaka vardır. Zekâ oyunları köşelerinde sık sık okurlardan bu önermenin ispatlanması istenir. Önce Ramsey kuramının en basit örneği olan bu önermeyi ispatlayalım. Sonra çok daha zor, cevabı bile bilinmeyen sorular soracağız. Altı kişiyi bir çizgenin altı noktası olarak görelim. Noktalara 1, 2, 3, 4, 5, 6 diyelim. İki nokta arasına, o iki noktanın simgelediği kişilerin tanışıp tanışmamalarına göre, kırmızı ya da mavi bir bağlantı çizelim. Sözgelimi, tanışıyorlarsa bağlantı kırmızı olsun, tanışmıyorlarsa mavi olsun. Her bağlantıyı ya kırmızıya ya da maviye boyanmış K_6 tamçizgesini elde ederiz. Yukarıdaki önermeyi, "Bağlantıları kırmızı ve maviye boyanmış K_6 tamçizgesinde ya en az bir kırmızı üçgen ya da en az bir mavi üçgen vardır" olarak ifade edebiliriz.

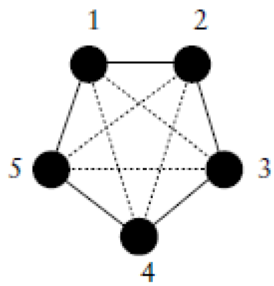


Her noktaya beş bağlantı değdiğinden, her noktaya ya en az üç kırmızı bağlantı ya da en az üç mavi bağlantı değer. Noktamızın 3 numaralı nokta olduğunu, bu noktaya bitişik en az üç kırmızı bağlantı olduğunu ve bu kırmızı bağlantıların {1,3}, {2,3} ve {6,3} bağlantıları olduğunu varsayalım. Artık sadece 1, 2, 3 ve 6 noktalarını dikkate alacağız.

1, 2 ve 6 noktaları arasındaki bağlantılardan biri kırmızıysa, bu kırmızı bağlantısın iki üç noktası ve 3 noktası kırmızı bir üçgen oluştururlar. Aksi halde, yani bağlantıların hepsi maviyse o zaman bu üç nokta mavi bir üçgen oluşturur.

Matematiksel olarak ifade edecek olursak, bağlantıları iki renge boyanmış K_6 çizgesinde tek renkli bir üçgen vardır, önermesini ispatladık. Elbette bu önerme, eğer $n \geq 6$ ise, tüm K_n çizgeleri için de doğrudur, çünkü $n \geq 6$ ise, K_6, K_n'nin içinde yaşar.

Aynı önermeyi şöyle de ifade edebiliriz: Eğer $n \geq 6$ ise, bağlantıları iki renge boyanmış K_n çizgesinde tek renkli K_3 yaşar.



Bu önerme, yandaki çizgeden de anlaşılacağı üzere $n = 5$ için doğru değildir, n illa en az 6 olmalıdır, daha az olamaz.

Yukarıdaki önermede K_3 yerine K_4 almak istersek durum ne olur?

Soru: İki renge boyanmış K_n tamçizgesinde tek renkli bir K_4 yaşaması için n en az kaç olmalıdır?

4 yerine herhangi bir a doğal sayısı alıp benzer soruyu sorabiliriz:

Soru: a doğal sayısı verilmiş olsun. n en az kaç olmalıdır ki bağlantıları iki renge boyanmış K_n tamçizgesinde tek renkli bir K_a yaşasın? Hatta böyle bir n var mıdır?

Bu soruyu da genelleştirebiliriz:

Soru: a ve b doğal sayıları verilmiş olsun. n en az kaç olmalıdır ki, bağlantıları A ve B renklerine boyanmış K_n tamçizgesi ya tamamen A renkli bir K_a içersin ya da tamamen B renkli bir K_b? Hatta böyle bir n var mıdır? (Eğer a = b ise, bir Önceki sorunun aynısını elde ederiz.)

Evet, öyle bir n vardır:

Frank Plumpton Ramsey
22 Şubat 1903, Cambridge, İngiltere - 19 Ocak 1930, Londra, İngiltere

5.26. Tanım (Ramsey, 1930): a ve b herhangi iki doğal sayı olsun. Öyle bir N vardır ki, eğer $n \geq N$ ise, bağlantıları A ve B renklerine boyanmış K_n tamçizgesinde ya tamamen A renkli bir K_a ya da tamamen B renkli bir K_b vardır. Böyle en küçük N sayısına Ramsey sayısı denir ve bu sayı r(a, b) olarak yazılır.

Yukarda, r(3, 3) = 6 olduğunu gördük.

Sorudaki simetriden dolayı r(a, b) = r(b, a). Dolayısıyla $a \leq b$ eşitsizliğini varsayabiliriz.

Bazı r(a, b) sayılarını bulmak kolay:

$$r(1, b) = 1$$
$$r(2, b) = b$$

dir. Ramsey sayıları için genel bir formül bilinmiyor. Ramsey sayılarının bulunması çizge kuramının zor ve yanıtlanmamış sorularından biridir. Bu sayfanın en altındaki çizelge bilinen bazı Ramsey sayılarını, bilinmeyenlerin ise alt ve üst sınırlarını verir.

Aşağıdaki sonuç r(a, b) sayılarına tümevarımsal bir üst sınır getiriyor.

1.25. Teorem (Erdös ve Szekeres): $a \geq 2$ ve $b \geq 2$ iki tamsayıysa,

$$r(a, b) \leq r(a, b-1) + r(a-1, b)$$

dir.

Eğer $r(a, b-1)$ ve $r(a-1, b)$ sayılarının ikisi de çiftse,

$$r(a, b) < r(a, b-1) + r(a-1, b)$$

dir.

İspat: $n = r(a, b-1) + r(a-1, b)$ olsun. K_n çizgesini herhangi bir biçimde iki renge boyayalım. Bu çizgede ya tamamen A rengine boyanmış bir K_a ya da tamamen B rengine boyanmış bir K_b bulacağız. Bu da teoremi ispatlayacak.

v, K_n'nin herhangi bir noktası olsun. K_n'nin geri kalan $n-1$ noktasına bakalım. v'nin A renkli bağlantıyla bağlandığı noktalara A(v), B renkli bağlantıyla bağlandığı noktalara B(v) diyelim.

$$|A(v)| + |B(v)| = n-1 = r(a, b-1) + r(a-1, b)-1$$

eşitlikleri bariz. Dolayısıyla hem $|A(v)| < r(a, b-1)$ hem de $|B(v)| < r(a-1, b)$ eşitsizlikleri sağlanamaz. Demek ki ya $|A(v)| \geq r(a-1, b)$ ya da $|B(v)| \geq r(a, b-1)$ dir.

Birinci durumda, A(v) ya A renkli bir K_{a-1} ya da B renkli bir K_b icerir. Dolayısıyla $A(v) \cup \{v\}$ ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b içerir. İkinci durumda, benzer bicimde, $B(v) \cup \{v\}$ ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b içerir. Sonuç olarak $r(a, b) \leq r(a, b-1) + r(a-1, b)$.

Şimdi $r(a, b-1)$ ve $r(a-1, b)$'nin çift olduklarını varsayalım. Bu kez $n = r(a, b-1) + r(a-1, b)-1$ olsun. Demek ki n tek. K_n'de ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b bulacağız. B renkli bağlantıları K_n'den silip n noktalı bir G çizgesi elde edelim. G'nin tek sayıda noktası olduğundan (ve noktaların derecelerin toplamının çift olduğunu bildiğimizden, bk. El sıkışma teoremi), G'de derecesi çift olan mutlaka bir nokta olacaktır. Bu noktaya v diyelim. Demek ki A(v) çift bir sayı, dolayısıyla $A(v) \neq r(a-1, b)-1$, bunu aklımızda tutalım. Öte yandan,

$$|A(v)| + |B(v)| = n-1 = [r(a-1, b)-2] + r(a, b-1)$$

olduğundan, hem $|A(v)| \leq r(a-1, b)-2$ hem de $|B(v)| < r(a, b-1)$ eşitsizlikleri sağlanamaz. Demek ki ya $|A(v)| > r(a-1, b)-2$ ya da $|B(v)| \geq r(a, b-1)$ eşitsizliklerinden biri sağlanacak. Ama $A(v) \neq r(a-1, b)-1$. Dolayısıyla ya $|A(v)| > r(a, b-1)$ ya da $|B(v)| \geq r(a, b-1)$. Aynen yukarda yaptığımız gibi K_n'de ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b buluruz.

Ne yazık ki eşitlik doğru değil. Örneğin, aşağıdaki çizelgeden, $r(3, 6)=18$, $r(4, 5) = 25$ ve $r(4, 6) \leq 41$ ilişkilerini biliyoruz, dolayısıyla

$$r(4, 6) \leq 41 < 43 = 18 + 25 = r(3, 6) + r(4, 5)$$

olur.

Yazımızı r(a, b)'nin bir üst sınır formülünü bularak tamamlayalım.

Sonuç: $r(a,b) \leq \binom{a+b-2}{b-1}$

İspat: İspatı a + b üzerine tümevarımla yapacağız. Küçük a + b = 2 için, yani a = b = 1 için eşitsizliğin doğruluğu belli. a + b ≥ 3 olsun. Yukarıdaki teoreme ve tümevarım varsayımına göre,

$$r(a,b) \leq r(a-1,b) + r(a,b-1) \leq \binom{a+b-3}{b-1} + \binom{a+b-3}{b-2} = \binom{a+b-2}{b-1}$$

Alıştırma: Aşağıdaki çizelgeyi dikkate almadan r(3,5) ve r(4,4) Ramsey sayılarını hesaplayın.

a / b	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35-41	49-61	55-84	69-115
5			43–49	58-87	80-143	95-216	116-316
6				102-165	109-298	122-495	153-780
7					205-540	216-1031	227-1713
8						282-1870	295-3583
9							565-6625

SONSUZ RAMSEY TEOREMİ

Sonsuz sayıda insanın bulunduğu bir toplulukta, öyle sonsuz sayıda insan seçebilir miyiz ki, bu seçtiğimiz insanların ya hepsi birbirini tanısın ya da hiçbiri kimseyi tanımasın?

Cevap, okurun da tahmin ettiğini sandığım gibi, "evet, seçebiliriz"dir. Bu, Ramsey adlı bir matematikçinin ispatladığı çok ünlü bir teoremin sonucudur.

Önce soruyu matematikselleştirelim. Her insanı bir nokta olarak gösterelim. Eğer iki insan birbirini tanıyorsa, bu iki insana eşdüşen noktaları kırmızı bir bağlantıyla birleştirelim. Eğer iki insan birbirini tanımıyorsa, bu iki insana eşdüşen noktaları mavi bir bağlantılarıyla birleştirelim. Her ikisi kırmızı ya da mavi bir bağlantıyla birleştirilmiş sonsuz noktalı bir çizge elde ettik. Bu noktalar arasından, hep aynı renkle (ya hep kırmızıyla ya hep maviyle) birleştirilmiş sonsuz sayıda nokta bulacağız.

İspatımızı iki aşamada gerçekleştireceğiz. Birinci aşamada öyle sonsuz tane

$a_0, a_1, a_2, a_3, ... ,a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, ...$

noktası bulacağız ki, her a_i kendisinden sonra gelen

$a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, ...$

noktalarıyla aynı renk bağlantıyla (ya hep kırmızı, ya hep mavi bağlantıyla) bağlanmış olacak.

Birinci noktayı seçmek kolaydır. Herhangi bir a_0 noktası işi görür. a_1, a_2, a_3, ... noktalarını biraz daha dikkatli seçeceğiz. Bu a_1, a_2, a_3, ... noktalarını öyle seçmeliyiz ki, a_0 noktası bu noktalarla hep aynı renk bağlantıyla bağlanmış olsun.

a_0 noktası, öbür noktalarla ya kırmızı ya da mavi bir bağlantıyla bağlanmıştır. Sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki renk bağlantı olduğundan, a_0'ın aynı renk bağlantıyla bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. a_0'ın hep aynı renk bağlantıyla bağlandığı sonsuz bir nokta kümesi alalım. Bu kümeye A_0 diyelim. Demek ki, a_0, A_0'ın noktalarıyla hep aynı renk bağlantıyla bağlanmıştır.

Bunu aklımızda tutalım. a_1, a_2, a_3, ... noktalarını bu A_0 kümesinde seçeceğiz. Böylece a_0 noktası istediğimiz koşulu sağlamış olacak. Şimdi A_0'dan herhangi bir a1 noktası alalım. a_1 noktası, A_0'ın öbür noktalarına ya kırmızı ya da mavi bir renkle bağlanmıştır. A_0'da sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan, A_0 kümesinde, a_1'in aynı renk bağlantıyla bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. Yani, ya

$\{a \in A_0 : aa_1 \text{ kırmızı}\}$

kümesi, ya da

$\{a \in A0 : aa_1 \text{ mavi}\}$

kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına A_1 adını verelim. Demek ki, $A_1 \subseteq A_0$ ve a_1, A_1'in noktalarıyla hep aynı renk bağlantıyla bağlanmıştır.

a_2, a_3, a_4, ... noktalarını A_1'de seçeceğiz ve böylece Yukarıdaki koşul a_1 için sağlanmış olacak.

Şimdi A_1'den herhangi bir a_2 noktası alalım. a_2 noktası A_1'in öbür noktalarıyla ya kırmızı ya da mavi bir bağlantıyla bağlanmıştır. A_1'de sonsuz nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan, A_1'de, a_1'in hep aynı renkle bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. Bir başka deyişle, ya

$\{a \in A_1 : aa_2 \text{ kırmızı}\}$

kümesi, ya da

$\{a \in A_1 : aa_2 \text{ mavi}\}$

kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına A_2 adını verelim. Demek ki, a_2, A_2'nin noktalarıyla hep aynı renk bağlantıyla bağlanmıştır.

a_3, a_4, a_5, ... noktalarını A_2'de (dolayısıyla A_1 ve A_0 kümelerinde de) seçeceğiz ve böylece Yukarıdaki koşul a_2 için (ve a_0 ve a_1 için de) sağlanmış olacak.

Şimdi A_2'den herhangi bir a_3 noktası alalım. Yukarda yaptıklarımızı a_3 ve A_2 için yapalım. A_2'nin içinde, öyle bir sonsuz A_3 kümesi bulalım ki, a_3, A_3'ün her noktasıyla hep aynı renk bağlantıyla bağlanmış olsun.

Bunu böylece sonsuza değin sürdürebiliriz. Demek ki, öyle

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$$

noktaları bulabiliriz ki, her nokta kendisinden sonra gelen noktalarla aynı renk bağlantıyla bağlanmış olsun.

İspatın birinci aşamasını tamamladık. Sıra ikinci aşamaya geldi.

Dikkatle seçtiğimiz bu a_0, a_1, a_2, a_3, ... noktalarının her birine bir renk vereceğiz. Eğer bir nokta kendisinden sonra gelen noktalarla hep kırmızı bağlantıyla bağlanmışsa, o noktaya kırmızı nokta diyeceğiz. Yoksa, o noktaya mavi nokta diyeceğiz. Örneğin, eğer a_0 noktası, kendisinden sonra gelen a_1, a_2, a_3,... noktalarıyla hep kırmızı bir bağlantıyla bağlanmışsa, a_0 noktasına kırmızı nokta diyeceğiz. Eğer a_5 noktası kendisinden sonra gelen a_6, a_7, a_8,... noktalarıyla hep mavi bağlantıyla bağlanmışsa, a_5 noktasına mavi nokta diyeceğiz.

Sonsuz sayıda nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan,

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

noktalarından sonsuz tanesi aynı renk noktadır. Bir başka deyişle, ya kırmızı noktalar kümesi ya da mavi noktalar kümesi sonsuzdur. Matematiksel olarak söyleyecek olursak, ya

$$\{a_i : a_i \text{ kırmızı bir nokta}\}$$

ya da

$$\{a_i : a_i \text{ mavi bir nokta}\}$$

kümesi sonsuzdur. İki küme birden de sonsuz olabilir, ama en azından birinin sonsuz olduğunu biliyoruz. İki kümeden sonsuz olanını alalım. Öbür noktaları atalım. Noktalarımızı yeniden adlandırarak, her noktanın aynı renk olduğunu varsayabiliriz, diyelim hepsi kırmızı. Demek ki, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ... noktalarının her birinin kırmızı olduğunu varsayıyoruz. Bu kümeden iki nokta alalım: a_i ve a_j. Diyelim i, j'den daha küçük. a_i, kırmızı bir nokta olduğundan, a_i noktası a_j noktasıyla kırmızı bir bağlantıyla bağlanmıştır. Demek ki Yukarıdaki sonsuz nokta birbirleriyle aynı renk bağlantıyla (kırmızıyla) bağlanmıştır. Ramsey'in teoremi İspatlanmış oldu.

Elbette iki renkle yaptığımızı üç renkle, dört renkle, genel olarak sonlu sayıda renkle de yapabilirdik. Ramsey'in asıl teoremi de zaten genel olarak n renk içindir:

5.26. Teorem (Sonsuz Ramsey Teoremi): n renk ve sonsuz sayıda noktamız olsun. Her iki nokta, bu n renkten birine boyanmış bir bağlantıyla birleştirilmiş olsun. O zaman, her iki noktası aynı renk bağlantıyla birleştirilmiş sonsuz sayıda nokta vardır.

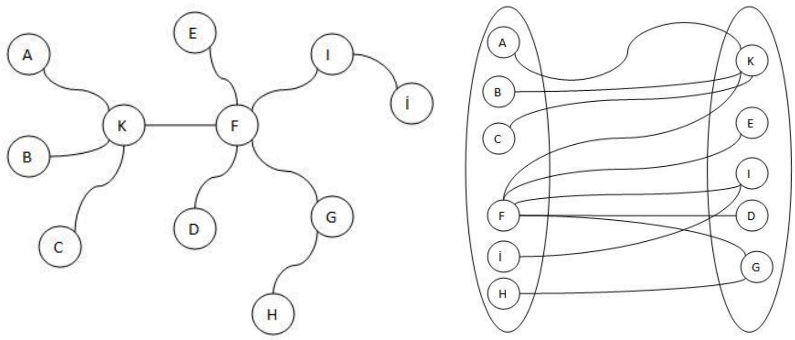
ÇİZGELERİN EŞYAPI DÖNÜŞÜMÜ (İZOMORFİZM)

Eşyapısal (İzomorfik) çizge aranmasında amaç, aynı şekilde iki çizge çizilmesinin mümkün olup olmadığını araştırmaktır.

Kimyada farklı çizge yapıları aynı moleküler formüle sahipken farklı yapısal olarak ayırt edilebilirler. Bu bileşiklerin çizgeleri aynı yöntemle çizilebilir. Aynı yapıya sahip çizgeler benzer örüntüleri paylaşır.

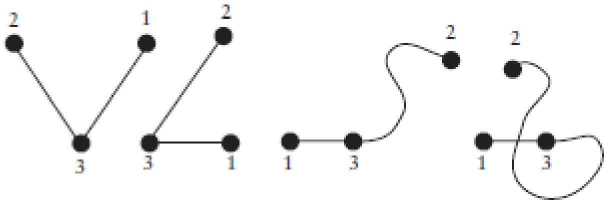
5.28. Tanım: Eğer $G_1(V_1, E_1)$ ve $G_2(V_2, E_2)$ basit çizgeler olmak üzere; V_1 deki her a, b noktası için G_1'e göre komşu olan her a, b noktası için f(a) ve f(b), G_2'de de komşu olmalarını sağlayan birebir ve örten bir fonksiyon V_1 ve V_2 'de bulunuyorsa, bu fonksiyona eşyapı (izomorfizm) ve G_1 ve G_2 ye eşyapı dönüşümleri (izomorfik) çizgeler adı verilir.

Örnek: Aşağıda verilen iki çizge birer eşyapısaldır (izomorfiktir)

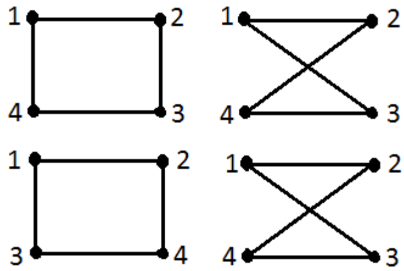


Çünkü her iki çizge {{A,K}, {B,K}, {C,K}, {K,F}, {E,F}, {D,F}, {D,F}, {F,I}, {I,İ}, {F,G}, {G,H}} şeklindedir.

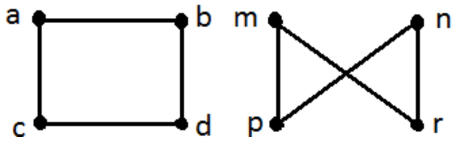
Örnek: Aşağıdaki çizgenin hepsinde birbirleriyle eşyapı dönüşümleri vardır.



Örnek: Aşağıdaki 1. çizge eşyapı dönüşümü olmazken, 2. çizge eşyapılı dönüşümü vardır.



Örnek: G(V, E) ve H(W, F) çizgelerinin eşyapı dönüşümü olduğunu gösterelim.



Burada V ile W arasında;

$f(a) = m, f(b) = r, f(c) = p, f(d) = n$

olarak birebir f fonksiyonu bulunmaktadır. Burada G deki komşu noktalar

a ile b, a ile c, b ile d, c ile d

dir. Bunun karşılığı

$f(a) = m$ ile $f(b) = r$,
$f(a) = m$ ile $f(c) = p$,
$f(b) = r$ ile $f(d) = n$,
$f(c) = p$ ile $f(d) = n$

olup bu eşleşmeler de H de komşudurlar.//

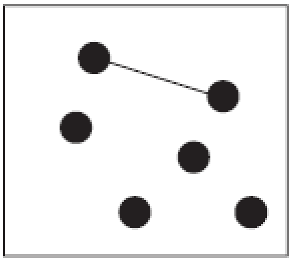
Çizgelerin eşyapılı dönüşümlerinde birebir ve örten bir fonksiyon olduğu aşikârdır. Burada çizgelerin eşyapı dönüşümlerinin şu özelliğine dikkat çekmek gerekir: Bir eşyapı dönüşümü birbiriyle bağlantılı olan her A ve B nokta çiftini gene birbiriyle bağlantısı olan iki noktaya götürmeli. Dahası, eğer A ve B birbirleriyle bağlantıları yoka, A ve B noktalarının gittikleri noktalar de birbiriyle bağlantıları olmamalı. Yani, bir çizgenin noktaları üstüne tanımlanmış bir f eşleşmesi, eğer, her A ve B nokta çifti için,

"A ve B bağıntılı $\Leftrightarrow$ f(A) ve f(B) birbiriyle bağlantılı"
özelliğini sağlıyorsa bir eşyapı dönüşümü vardır.

5.29. Tanım: Eğer eşyapı dönüşümlerinin tanımında sadece
"A ve B bağıntılı $\Rightarrow$ f(A) ve f(B) bağlantılı"
şartını varsa bu şartı sağlayan eşleşmelere yarı eşyapı dönüşümler denir.

Bir çizgenin bir eşyapı dönüşümde noktalar arasında bir eşleşme olmalı ve bağlantılı noktaları bağlantılı noktalara, bağlantılı olmayan noktaları bağlantılı olmayan noktalara göndermelidir, başka da şart yoktur.

Örnek: Her nokta bütün noktalarla bağlantıları varsa (ya da her noktanın hiçbir noktayla bağlantıları yoksa), noktalar arasındaki herhangi bir eşleşme bu çizgenin bir eşyapı dönüşümüdür. Eğer n nokta varsa, bu dönüşümlerden n! tane vardır, eşleşme sayısı kadar...



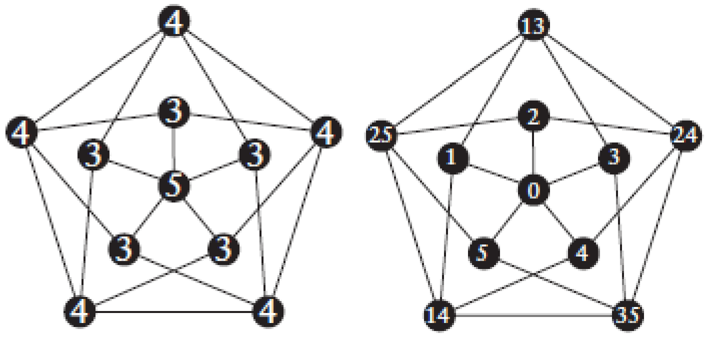
Örnek: Sadece iki nokta arasında bağlantı varsa ve başka bir bağlantılı yoksa çizgenin eşyapı dönüşümleri bağlantılar iki noktası gene bu iki noktaya göndermeli ve öbür noktaları kendi aralarında dönüştürmelidir. Eğer toplam n nokta varsa, bu çizgenin tam $2\times(n-2)!$ tane eşyapı dönüşümü vardır.

5.1. Aksiyom: Noktalar (noktalar) arasındaki birim fonksiyon (yani her noktayı gene kendisine götüren fonksiyon) her zaman bir eşyapı dönüşümüdür.

5.2. Aksiyom: İki eşyapı dönüşümünün bileşkesi gene bir eşyapı dönüşümüdür.

5.3. Aksiyom: Bir eşyapı dönüşümünün tersi de bir eşyapı dönüşümüdür.

Örnek: Aşağıdaki çizgenin tüm eşyapı dönüşümlerini bulalım.



Ortadaki nokta, bir eşyapı dönüşümü altında ancak kendisine gidebilir, çünkü ortadaki nokta çizgenin beş bağlantılı tek noktası. Üçer bağlantısı olan beş nokta (soldaki resimde 3 ibaresiyle gösterilmiş) kendi aralarında dönüşebilirler. Ancak bu noktaların nereye gittiklerini biliyorsak dört bağlantısı olan (soldaki resimde 4 ibaresiyle gösterilen) noktaların da nereye gittiğini buluruz. Çünkü 4 ibareli noktaların her biri sadece iki tane 3 ibareli noktayla bağlantılıdır. Yani 3 ibareli beş noktanın gidebilecekleri yerler eşyapı dönüşümlerini belirler. 3 ibareli beş nokta Yukarıdaki çizgenin bir eşyapı dönüşümünü verecek biçimde kendi aralarında nasıl dönüşebilirler?

Noktaları sağdaki şekildeki gibi sayılar verelim ve bundan böyle sağdaki şekilden takip edelim. 0 numaralı nokta gene kendine gitmeli, bunu biliyoruz. 1, 2, 3, 4, 5 numaralı noktalar kendi aralarında dönüşmeli, bunu da biliyoruz. Bu beş noktanın nasıl dönüştüğünü biliyorsak, geri kalan 14, 35, 24, 13 ve 25 numaralı noktaların da nasıl dönüştüklerini buluruz. Örneğin (13)(45)(2) dönüşümü altında, 14 noktası 35 noktasına, 35 noktası gene 14 noktasına gider; 24 noktası 25 noktasına, 25 noktası gene 24 noktasına gider; 13 noktası da yerinde sayar.

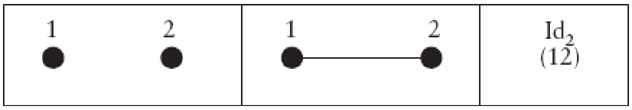
Acaba 1, 2, 3, 4, 5 noktalarının herhangi bir eşleşmesi, çizgemizin bir eşyapı dönüşümünü verir mi? Örneğin (12)(3)(4)(5) dönüşümü çizgenin bir eşyapı dönüşümünü verir mi? Vermez, çünkü böyle bir dönüşüm altında 13 numaralı top 23 numaralı topa gitmek zorunda ki böyle bir top yok! Demek ki 1, 2, 3, 4, 5 numaralı topların herhangi bir dönüşümü bir eşyapı dönüşümü vermiyor. Ya hangileri veriyor?

1, 2, 3, 4, 5 numaralı topların toplam 5! Yani 120 tane dönüşümü vardır. Bunların yarısı (60 tanesi) Yukarıdaki çizgenin bir eşyapı dönüşümünü verir.

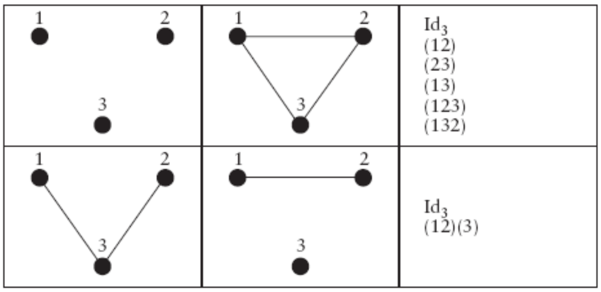
(1)(2)(3)(4)(5), yani Id_5 birim fonksiyon
(12)(34)(5) biçiminde yazılan 15 dönüşüm
(123)(4)(5) biçiminde yazılan 20 dönüşüm
(12345) biçiminde yazılan 24 dönüşüm.

Örnek: İki, üç ve dört noktalı çizgeleri ve bu çizgelerin eşyapı dönüşümleri aşağıdaki gibidir.

5.2. İki Noktalı Çizgeler: İki noktalı iki çizge var. İşte o iki çizge (solda ve ortada) ve o iki çizgenin eşyapı dönüşümleri (iki adet, en sağda).



5.3. Üç Noktalı Çizgeler: Gerçek anlamda değişik (yani eşyapısal olmayan) sadece dört tane üç noktalı çizge var. Üç noktalı herhangi bir çizge aşağıdaki çizgelerden biriyle eşyapısaldır.



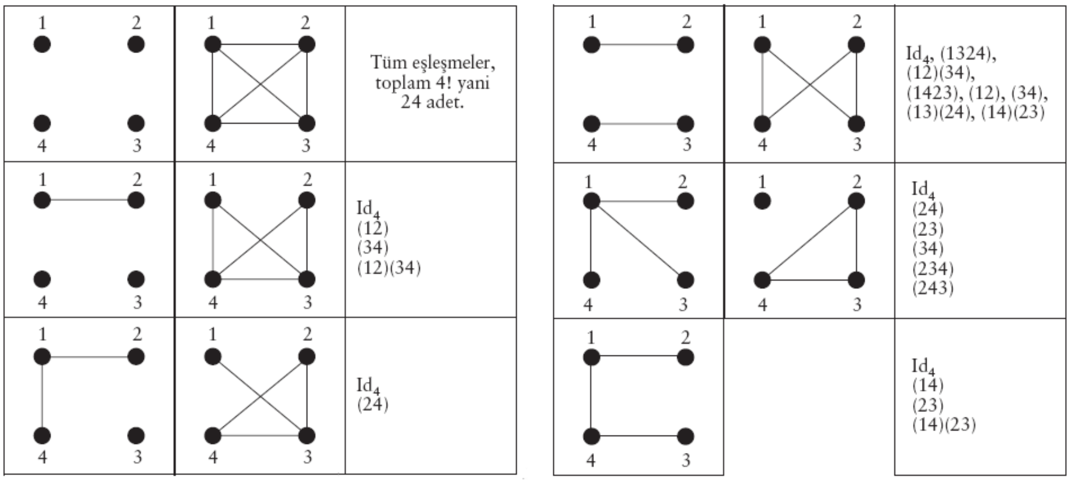
Bir başka deyişle üç kişi arasındaki tanışlık ilişkisi yukardaki dört tipten biri olmalı.

Sağdaki dönüşümler, soldaki çizgelerin eşyapı dönüşümleridir.

5.4. Dört Noktalı Çizgeler: Eşyapısal olmayan toplam 11 tane dört noktalı çizge vardır. O 11 çizgeyi yandaki sütunda bulacaksınız.

Görüldüğü gibi dört noktalı çizgeler arasında her noktası özel olan (yani etkisiz göndermeden başka eşyapı dönüşümünün olmadığı) bir çizge yok.

Dikkat ederseniz aynı satırda bulunan çizgeler birbirinin tam zıttı. Soldaki çizgede iki nokta arasında bağıntı varsa, sağdakinde yok. Soldakinde yoksa, sağdakinde var.



ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. 5 kişinin bulunduğu bir toplulukta herkes birbirleri ile tokalaşırsa, toplam kaç tokalaşma gerçekleşmiştir.

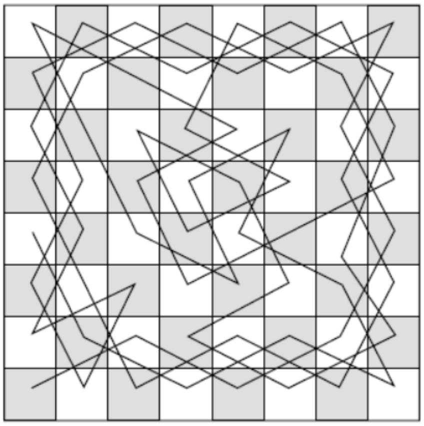
Çözüm: Bütün herkes birbirileriyle tokalaşıyorsa, 5.4. teorem gereği

$$\binom{n}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$$

olur.

2. Satrançtaki atın hareketlerini inceleyen çizgeyi bulunuz.

Çözüm: 8 × 8 boyutlu bir satranç tahtasında atı her kareden sadece bir kez geçecek biçimde gezdirmek demek, aslında 64 noktalı bir çizgede bir tam tur bulmak demektir. Çizgemizin noktaları satranç tahtasının kareleridir. Eğer at bir kareden diğer kareye gidebiliyorsa, o iki kareye tekabül eden noktalar arasına bir bağlantı koyalım. Soldaki gibi oldukça zengin ve görsel olarak güzel bir çizge elde ederiz. Bu çizgenin her tam turu, atın iki kez aynı kareden geçmeden her kareye uğrayan bir yolculuğudur. Aşağıdaki şekillerde bu problemin birkaç çözümünü görüyorsunuz.



KAYNAKÇA

1. Selda Küçükçüftçi, Koç Üniversitesi, Öğretim Üyesi, Matematik Dünyası, Çizgeler, 2003.
2. İbrahim C. Arkut Girne Amerikan Üniversitesi, iarkut@gau.edu.tr.
3. Haldun Sural, ODTÜ, Endüstri Mühendisliği Bölümü öğretim üyesi, sural @ ie.metu.edu.tr
4. Ali Nesin, İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü, Matematik Dünyası, 2003.
5. Yurdakul Ceyhun, Çizge Kuramının Temelleri 1, ODTÜ Ders Noktaları, 2022, Ankara.
6. Sadi Evren Seker, YBS Ansiklopedi, Cilt 2, Sayı 2, 2015, İstanbul.